高温高密度QCDの相図

慶應義塾大学理工学部物理学科 福嶋 健二

参考文献: arXiv:1108.2939 "QCD matter in extreme environments"

講義予定

- 導入 「強い相互作用」の基本的性質
- 第1部 高温QCD (クエンチ極限)
 - 摂動計算 Weiss Potential
 - 非摂動計算 強結合展開
- 第2部 高密度QCD (クォークの効果を導入)
 - 化学ポテンシャルの導入と符号問題
 - Large N_C 極限

導入「強い相互作用」の基本的性質

自然界に存在する4つの力

- 電磁相互作用 Electromagnetic Interaction
 量子電磁気学 Quantum Electrodynamics (QED)
- 弱い相互作用 Weak Interaction
 - QEDと統一 → Glashow-Salam-Weinberg理論
- ・強い相互作用 Strong Interaction
 - 量子色力学 Quantum Chromodynamics (QCD)
- 重力相互作用 Gravitational Interaction
 - 一般相対論 General Relativity → 量子論?

標準理論と素粒子

ボゾン Boson

ゲージ粒子とヒッグス粒子

- 電磁相互作用 → photon γ
- 弱い相互作用 \rightarrow weak boson Z, W^+, W^-

Higgs boson ϕ

- 強い相互作用 → gluon g
- 重力相互作用 → graviton G

標準理論と素粒子

フェルミオン Fermion

レプトンとクォーク

レプトン Lepton

1st generation e^- , e^+ , v_e , \bar{v}_e 2nd generation μ^- , μ^+ , v_μ , \bar{v}_μ 3rd generation τ^- , τ^+ , v_τ , \bar{v}_τ

クォーク Quark

1st generation u, \overline{u} (up), d, \overline{d} (down) 2nd generation c, \overline{c} (charm), s, \overline{s} (strange) 3rd generation t, \overline{t} (top), b, \overline{b} (bottom)

「強い相互作用」の構成要素

クオーク Quark

電子と同じ性質

スピン1/2の粒子・電荷を持つ → 2つのスピン偏極方向

電子と異なる性質

3種類のカラー荷(charge)を持つ

グルーオン Gluon

光子と同じ性質

質量ゼロ・スピン1の粒子 → 2つの偏光方向

光子と異なる性質

8種類のカラー荷を持つ (光子は電荷を持たない)

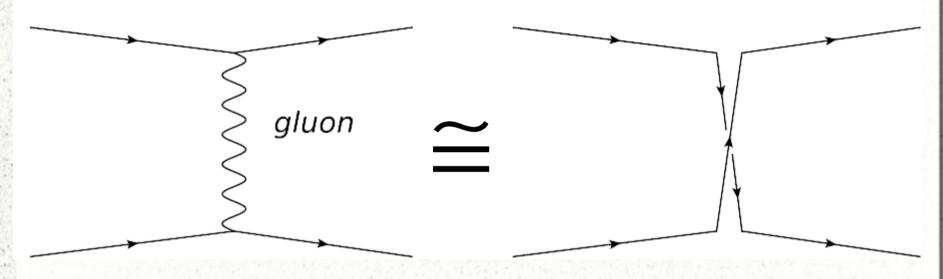


【カラー荷】 カラー内部空間で 3次元的な向きを 持ったcharge

グルーオンのカラー荷

クォークとグルーオンの相互作用の模式図

quark



グルーオン荷 = クォーク荷と反クォーク荷の組み合わせ → 後述

クォークフレーバー

6フレーバー (flavor) 実際の「香り」とは何の関係もない
$$u$$
 -quark $Q_u = (2/3)e$ $m_u \sim 3 \text{MeV}$

• *d* -quark
$$Q_d = -(1/3)e$$
 $m_d \sim 5 \text{MeV}$

• s -quark
$$Q_s = -(1/3)e$$
 $m_s \sim 100 \text{MeV}$

• c -quark
$$Q_c = (2/3)e$$
 $m_c \sim 1.3 \text{GeV}$

• **b** -quark
$$Q_b = -(1/3)e$$
 $m_b \sim 4.2 \text{GeV}$

• *t* -quark
$$Q_t = (2/3)e$$
 $m_t \sim 170 \text{GeV}$

それぞれのクォークが**カラー荷**(red, green, blue)を持つ

エネルギー(質量)の単位について

• 電子ボルト 素電荷eが1Vの電位差で得るエネルギー $1\,\mathrm{eV} \simeq 1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}$

$$1 \text{MeV} = 10^6 \text{eV}$$
 $1 \text{GeV} = 10^9 \text{eV}$ $1 \text{TeV} = 10^{12} \text{eV}$

• 自然単位系 $\hbar=c=1$

$$\hbar \sim [J \cdot s]$$
 エネルギー \rightarrow 時間 $c \sim [m/s]$ 時間 \rightarrow 長さ

覚えておくべき数値

$$\hbar c = 197 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$$
 $1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$

クォークとハドロン

メゾン Meson

クォーク=反クォークから作られる「無色」ボゾン

【例】 π 中間子 $m_{\pi} \sim 135 \text{MeV}$ ud + ud + ud

バリオン Baryon

クォーク3つから作られる「無色」フェルミオン

【例】 陽子 $m_p \sim 935 \text{MeV}$ uud-uud+uud

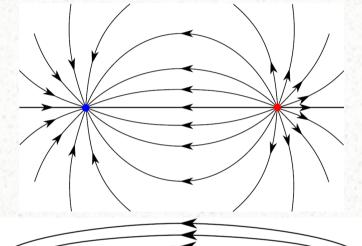
-uud+uud-uud

「カラー」はハドロンの構造を理解するために導入された量子数 実際の「色」とは何の関係もない

カラー閉じ込め

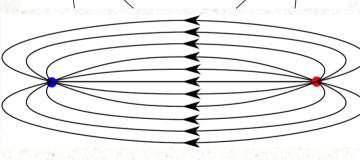
クォーク・グルーオンは単体で観測されたことがない

QEDの場合



電荷q>0と-qの間の電場(電気力線)の様子

QCDの場合



カラー荷と反カラー荷の間のカラー電場の模式図

弦張力 $\sigma \sim 1$ [GeV/fm]

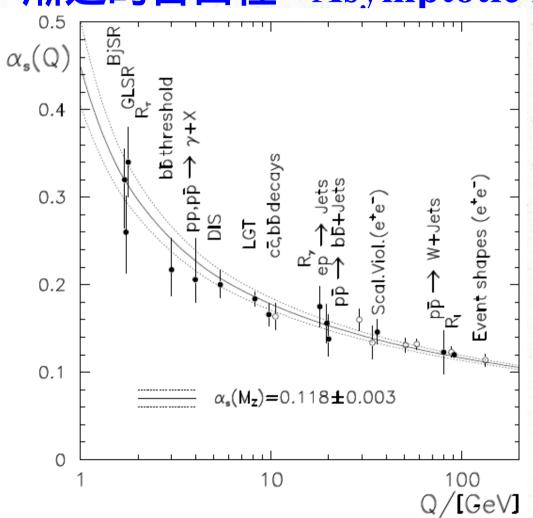
カラー荷と反カラー荷が r だけ離れているときのカラー電場エネルギー

$$U(r) = \sigma r \rightarrow U(\infty) = \infty$$

クォークを取り出すのに 無限大のエネルギーが必要

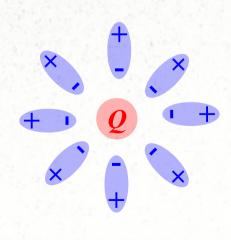
QCDの最も重要な性質

漸近的自由性 Asymptotic Freedom

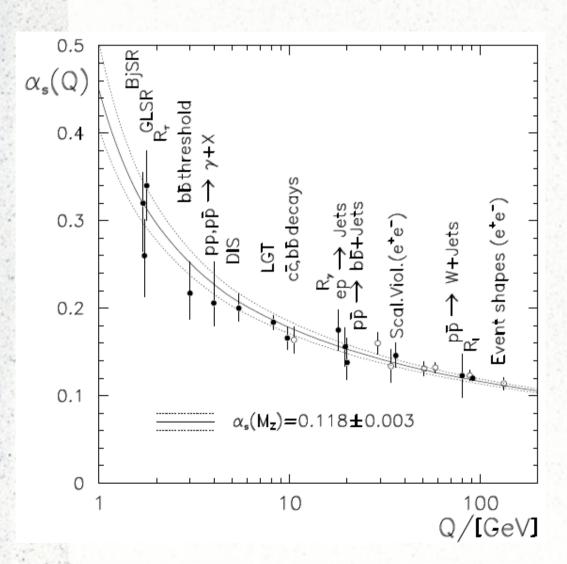


相互作用結合定数が短距離(高エネルギー)で小さくなる

通常の物質の分極とは 逆の現象



QCDの典型的エネルギースケール



$$\alpha_s(Q^2) \simeq \frac{1}{\beta_0 \ln(Q^2/\Lambda_{QCD}^2)}$$

 $\Lambda_{\rm QCD} \sim 200 \, {\rm MeV}$

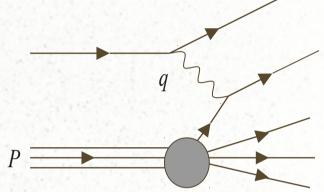
強い相互作用に関係する エネルギースケールは全て Λ_{QCD} であたえられる

【例】陽子の質量は $m_u+m_u+m_d\sim 10 {
m MeV}$ より重いむしろ $m_p\sim 3\Lambda_{
m QCD}$

質量の起源~相互作用

QCDで"摂動計算可能"な領域

- 高エネルギー
 - 運動量移行 $Q^2 > \Lambda_{\rm QCD}^2$ log再和が必要



- 高温度
- 温度 $T \sim \Lambda_{
 m QCD}$ 非摂動的情報が必要

ボルツマン定数 k_B = $8.6171 \times 10^{-11} \text{MeV/K}$ $\rightarrow \Lambda_{\text{OCD}} = 200 \text{MeV} = 2.32 \times 10^{12} \text{K}$

- ・高密度
- 密度 $n_B \sim \Lambda_{\rm QCD}^{-3} \sim 1/{\rm fm}^3$ 弱結合とは限らない/超伝導の発現

標準核密度 $n_0 = 0.17$ nucleon/fm³ $\rightarrow 2.85 \times 10^{14}$ g/cm³

「強い相互作用の物理」の自由度

グルーオン = 16

- 偏光 2
- カラー 8

 $0/2 - 0 = 24 \sim 36$

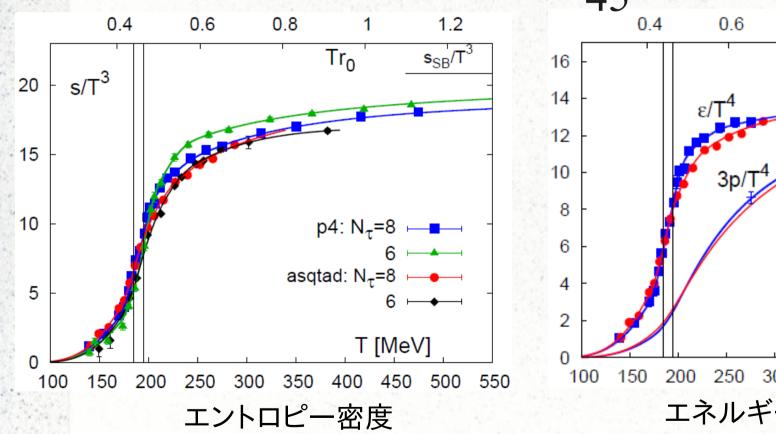
- ・スピン
- 粒子·反粒子 2
- カラー
- フレーバー 2~3

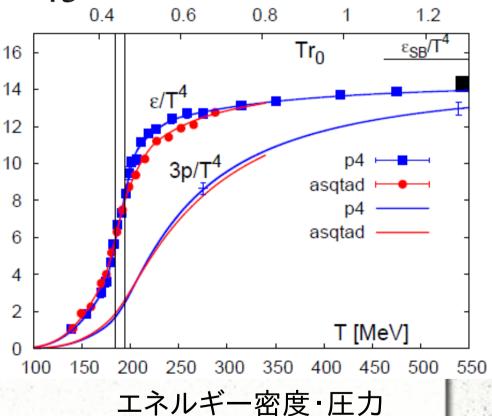
(Λ_{OCD} 程度のエネルギーで励起できるフレーバー数)

閉じ込められた パイオンガス(~3) より自由度が大きい

クォーク・グルーオン・プラズマ (QGP)

格子QCD計算 $s = v \times \frac{2\pi^2}{45} T^3 \sim 0.44 v T^3$





T~200MeVで物理的自由度が急激に増加 → カラー非閉じ込め相転移

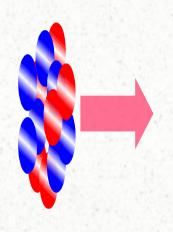
相対論的重イオン衝突実験

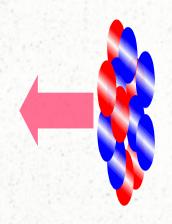
より大きな衝突エネルギー → 重イオン衝突

金(Au)原子核衝突 核子=核子衝突あたりの エネルギー = 200GeV

$$\sqrt{s_{NN}} = 200 \,\text{GeV} \, \text{@RHIC}$$

 $\rightarrow \gamma = 100$









2匹の蚊が衝突するときの 運動エネルギーと同程度 M=3mg, v=10cm/s

Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC)

重イオン衝突型加速器 (2000~)

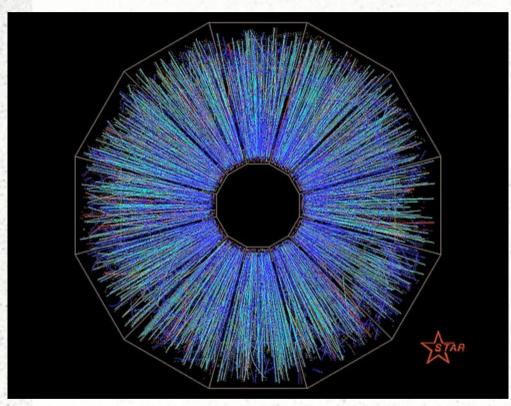


p -
$$p\sqrt{s} = 500 \text{ GeV}$$

Au-Au $\sqrt{s} = 200 \text{A GeV}$

クォーク・グルーオン・プラズマ生成が目標

観測量 = 粒子飛跡

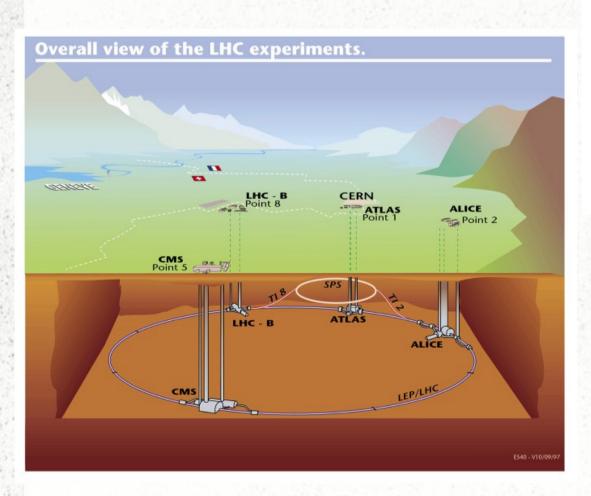


STAR Detector



PHENIX Detector

Large Hadron Collider (LHC)





QGPの実験的証拠

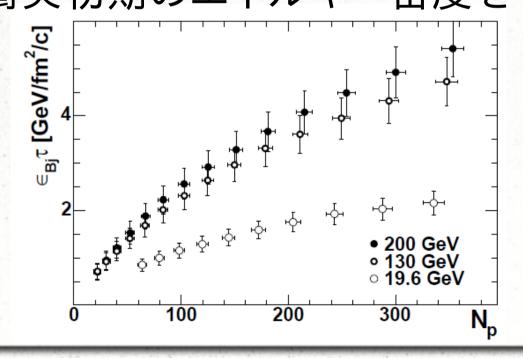
格子QCD計算から、QGPが実現するとき、 必要となるエネルギー密度はわかっている

実験的には、観測された粒子の数と、粒子の持つエネルギーから、衝突初期のエネルギー密度を

推定できる

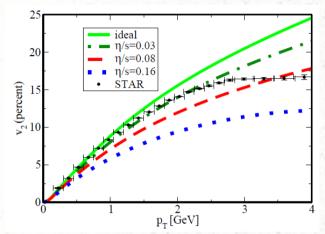
$$\tau \varepsilon = \frac{m_T}{\pi R^2} \frac{dN}{dy}$$

Bjorkenの評価式

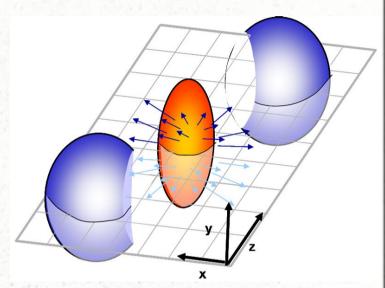


QGPの実験的証拠

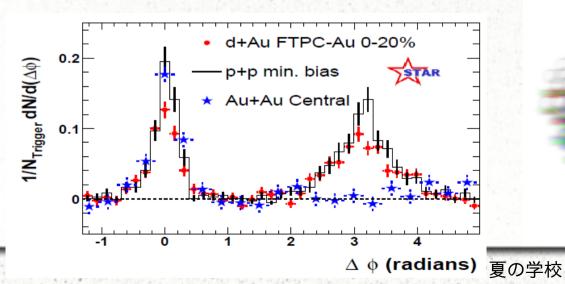
楕円型フロー (elliptic flow)

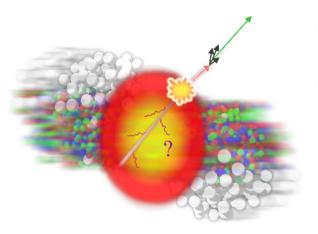


完全流体?



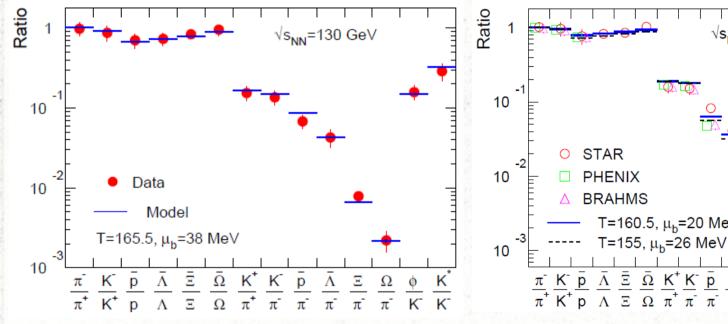
ジェットクエンチング (jet quenching)

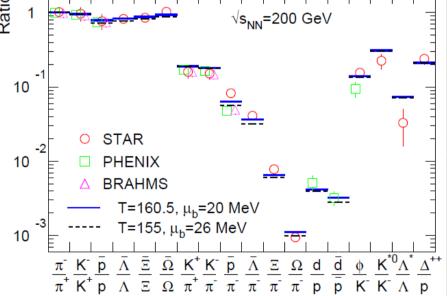




(化学) 熱平衡の実験的証拠

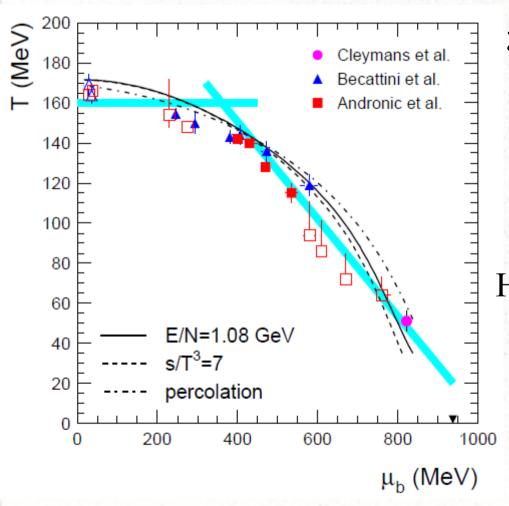
観測された粒子数比は、熱分布関数の重みだけで (温度と化学ポテンシャルをパラメターにして) すべてフィットできる





実験データから Tと $\mu_{\rm B}$ を決められる!

化学凍結線 = 相転移線?



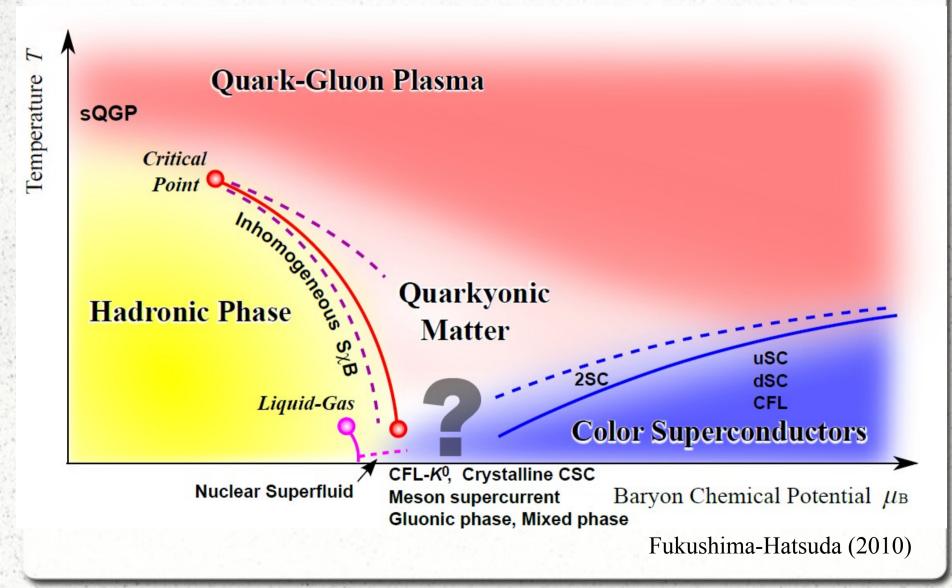
核物質 $(T=0,\mu_B=M_N)$ に向かって落ちていく

相転移線とは限らないが相転移を示唆している

Hagedorn温度とも解釈できる

$$ho(M) \sim e^{M/T_h}$$
 $Z \sim \int dM \,
ho(M) e^{-M/T}$
 $T > T_h$ で積分が発散

予想されるQCD相図



第1部 高温QCD (クエンチ極限)

ゲージ理論の簡単な例 - 量子電磁気学 (QED)

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} (i D_{\mu} \gamma^{\mu} - m) \psi$$

 $F^{\mu\nu} = \partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu}$ field strength $D_{\mu} = \partial_{\mu} + i e A_{\mu}$ covariant derivative

古典的運動方程式 → Maxwell方程式

Euler-Lagrange方程式

$$\partial^{\mu} \left(\frac{\delta L}{\delta \partial^{\mu} A^{\nu}} \right) - \frac{\delta L}{\delta A^{\nu}} = 0$$

古典運動方程式

$$\frac{\delta L}{\delta \, \partial^{\mu} A^{\nu}} = -F_{\mu\nu} \quad \frac{\delta L}{\delta A^{\nu}} = -e \bar{\psi} \, \gamma_{\nu} \, \psi$$
 Euler-Lagrange方程式
$$\partial^{\mu} F_{\mu\nu} = e \bar{\psi} \, \gamma_{\nu} \psi \, (=j_{\nu})$$

$$F^{i0} = \partial^{i} A^{0} - \partial^{0} A^{i} = E^{i}$$

$$F^{ij} = \partial^{i} A^{j} - \partial^{j} A^{i} = -\epsilon^{ijk} B^{k}$$

$$E = -\nabla A^{0} - \dot{A}$$

$$B = \text{rot } A$$

$$\partial_i F^{i0} = j^0 \rightarrow \nabla \cdot E = \rho$$
 ガウスの法則 $\partial_0 F^{0i} + \partial_j F^{ji} = j^i \rightarrow \operatorname{rot} B = j + \dot{E}$ アンペールの法則

恒等式 (運動方程式ではない)

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} F_{\rho\lambda}$$
 例) $\tilde{F}^{01} = F^{23}$

 $\partial_{\mu} \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$ は常に成り立つ(恒等式)

$$v = 0 \rightarrow -\frac{1}{2} \partial_i \epsilon^{ijk} F_{jk} = 0 \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$v = i \rightarrow \frac{1}{2} \partial_0 \epsilon^{ijk} F_{jk} - \partial_j \epsilon^{ijk} F_{0k} = 0 \rightarrow \text{rot } \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$$

これらは恒等式であるから、磁荷のガウスの法則と、ファラデーの法則は、電荷や電流に依存しない関係式

全ての Maxwell 方程式がQEDラグランジアンから導かれる

ゲージ対称性

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha(x)}\psi \qquad e^{i\alpha(x)} \in U(1)$$

$$\partial_{\mu} \Psi \rightarrow e^{i\alpha} \left[\partial_{\mu} + i \left(\partial_{\mu} \alpha \right) \right] \Psi$$
 運動項から余計な項

$$\partial_{\mu}$$
を D_{μ} = ∂_{μ} + $ie\,A_{\mu}$ で置き換えて

$$A_{\mu} \rightarrow A_{\mu} - e^{-1} \partial_{\mu} \alpha$$
 U(1)ゲージ変換

$$D_{\mu} \psi \longrightarrow e^{ilpha} D_{\mu} \psi$$
 余計な項が消える

$$\bar{\psi} D_{\mu} \psi \rightarrow \bar{\psi} U^{\dagger} U D_{\mu} \psi = \bar{\psi} D_{\mu} \psi$$

U(1)ゲージ対称性

ゲージ対称性

ゲージ場の4成分のうち ∂_μα の形に書かれる部分を「縦波」といい、ゲージ変換の自由度 (つまり物理的に意味のある自由度ではない)

$$F^{\mu\nu} \to \partial^{\mu} (A^{\nu} - e^{-1} \partial^{\nu} \alpha) - \partial^{\nu} (A^{\mu} - e^{-1} \partial^{\mu} \alpha)$$
$$= \partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu} = F^{\mu\nu}$$

ゲージ場の作用
$$L = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$
 はゲージ不変
$$L = -\frac{1}{4} (\partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu}) (\partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu})$$
$$= \frac{1}{2} A^{\mu} (\partial^{2} g_{\mu\nu} - \partial_{\mu} \partial_{\nu}) A^{\nu}$$

Field Strength

共役微分の交換関係

$$\begin{split} &[D_{\mu},D_{\nu}] = [\partial_{\mu} + ie A_{\mu},\partial_{\nu} + ie A_{\nu}] \\ &= ie (\partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}) = ie F_{\mu\nu} \end{split}$$

もうひとつのゲージ不変な作用

 $F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$ は何故ゆるされないのか?

全微分なので運動方程式を変更しない ゲージ不変・・・しかしパリティ・時間反転対称でない トポロジー的に安定な配位の励起 (インスタントン・Chern-Simons理論) QCDでは未解決の大問題 (Strong-CP Problem)

パリティ・時間反転対称性

パリティ変換 = 空間反転 (\mathcal{P})

時間反転 (T)

荷電共役変換 (C)

$$gA_{\mu} \rightarrow -gA_{\mu}$$

Chern-Simons項

$$\begin{split} F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} F_{\mu\nu} F_{\rho\lambda} \\ &= 2 \epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} (\partial_{\mu} A_{\nu}) (\partial_{\rho} A_{\lambda}) & \mathcal{P}\text{-odd} \\ &= \partial_{\mu} \Big(2 \, \epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} A_{\nu} \, \partial_{\rho} A_{\lambda} \Big) & \mathcal{C}\mathcal{P}\text{-odd} \end{split}$$

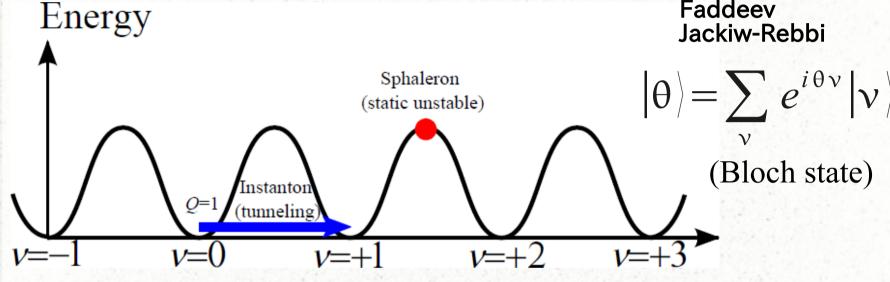
$$K^{\mu} = \frac{e^2}{16\pi^2} \cdot 2 \,\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} A_{\nu} \partial_{\rho} A_{\lambda} = \text{ Chern-Simons current}$$

$$Q_{W} = \frac{e^{2}}{16\pi^{2}} \int d^{4}x F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} = K^{0}(t = \infty) - K^{0}(t = -\infty)$$

無限の過去から未来へのトンネル数(巻き付き数)を表す

θ-Vacuum

QCD真空のトポロジー構造



Manton Faddeev Jackiw-Rebbi

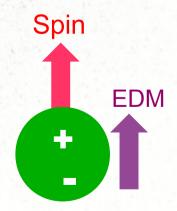
(Bloch state)

Strong CP Problem

$$\langle \theta | \theta \rangle$$
 $\rightarrow S_{\text{QCD}} = -\frac{1}{2} \operatorname{tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \theta \frac{e^2}{16\pi^2} \operatorname{tr} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}$

$$\frac{|d_n| \sim (e \, m_q / m_N^2) \theta}{|\theta| < 0.7 \times 10^{-11}}$$
No CP breaking (理曲?)

No CP breaking (理由?)



ゲージ固定

このままでは A についての運動方程式が解けない

$$(\partial^2 g^{\mu\nu} - \partial^{\mu} \partial^{\nu}) A_{\nu}(x) = j^{\mu}(x)$$

$$\rightarrow (p^2 g^{\mu\nu} - p^{\mu} p^{\nu}) A_{\nu}(p) = -j^{\mu}(p)$$
ゼロ固有値を持つ

クーロンゲージ
$$\nabla \cdot A = 0$$
 (α をこのように選ぶ)

ローレンツ(共変)ゲージ $\partial^{\mu} A_{\mu} = 0$ (計算に便利)

Propagator (伝搬関数)

共変ゲージを選ぶと

$$\partial^2 A^{\mu}(x) = j^{\mu}(x)$$

$$\partial^2 D^{\mu\nu}(x) = i g^{\mu\nu} \delta(x)$$
 となる $D^{\mu\nu}(x)$ を使って $A^{\mu}(x) = -i \int dy D^{\mu\nu}(x-y) j_{\nu}(y)$



ゲージ場のラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2} A^{\mu}(x) g_{\mu\nu} \partial^{2} A^{\nu}(x) = \frac{i}{2} \int dy A^{\mu}(x) (D^{-1})_{\mu\nu} (x - y) A^{\nu}(y)$$

Green関数(伝搬関数)がすぐに求められる

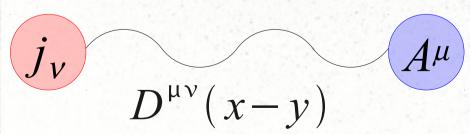
Functional Integral (汎関数積分)

理論を解く = 分配関数を求める

$$Z[j] = \int D A_{\mu} e^{iS+iS_{j}}$$
 (QCDではdet $M[A]$ が必要・後述)

$$= \int D A_{\mu} \exp \left[-\frac{1}{2} \int dx \, dy \, A_{\mu}(x) (D^{-1})^{\mu \nu} (x - y) A_{\nu}(y) - i \int dx \, j_{\mu} A^{\mu} \right]$$

$$\langle A^{\mu}(x)A^{\nu}(y)\rangle = -\frac{1}{Z} \frac{\delta Z[j]}{\delta j_{\mu}(x)\delta j_{\nu}(y)} = D^{\mu\nu}(x-y)$$



photonだけならGauss積分できる =自由場の粒子(自明に解ける)

非アーベル群への拡張

ゲージ対称性をU(1)群(アーベル群:元が互い に可換)から非アーベル群(非可換)に拡張

$$\psi \to V \psi \qquad V \in SU(N)$$

$$V = e^{i\alpha^a t^a}$$
 と書ける $V \in SU(N) \to VV^{\dagger} = 1$, $\det V = 1$

$$V \simeq 1 + i\alpha^a t^a \to (t^a - t^{\dagger a}) = 0$$
, $\operatorname{tr} t^a = 0$

 t^a は traceless な Hermite行列 SU(N)群の生成子 = su(N)代数

SU(2)とSU(3)の表現の例

SU(2)の生成子 = Pauli 行列

$$t^{1} = \frac{1}{2}\sigma^{1}, \quad t^{2} = \frac{1}{2}\sigma^{2}, \quad t^{3} = \frac{1}{2}\sigma$$

$$\sigma^{1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^{2} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^{3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

SU(3)の生成子 = Gell-Mann 行列

$$t^{1} = \frac{1}{2}\lambda^{1}, \quad t^{2} = \frac{1}{2}\lambda^{2}, \quad t^{3} = \frac{1}{2}\lambda^{3}, \quad t^{4} = \frac{1}{2}\lambda^{4}, \quad t^{5} = \frac{1}{2}\lambda^{5}, \quad t^{6} = \frac{1}{2}\lambda^{6}, \quad t^{7} = \frac{1}{2}\lambda^{7}, \quad t^{8} = \frac{1}{2}\lambda^{8}, \quad t^{1} = \frac{1}{2}\lambda^{1}, \quad t^{2} = \frac{1}{2}\lambda^{1}, \quad t^{2$$

SU(N)ゲージ対称性

U(1)の場合と同様にして

$$\begin{array}{l} \partial_{\mu} \mathcal{E} \, D^{ij}_{\mu} \! = \! \partial_{\mu} \delta^{ij} \! - \! i g \, A^{ij}_{\mu} \, \mathcal{C} \Xi \mathfrak{E} 換える \\ (\partial_{\mu} \! - \! i g \, A_{\mu}) \psi \, \rightarrow \, (\partial_{\mu} \! - \! i g \, A^{\prime}_{\mu}) V \, \psi \\ &= \, V \big[\partial_{\mu} \! + \! V^{\dagger} (\partial_{\mu} V) \! - \! i g \, V^{\dagger} \, A^{\prime}_{\mu} V \big] \psi \end{array}$$

$$A_{\mu} \rightarrow A'_{\mu} = V \left(A_{\mu} - \frac{1}{ig} \partial_{\mu} \right) V^{\dagger}$$

 $D^{ab}_{\mu}\psi_b o V^{ab}D^{bc}_{\mu}\psi_c$ あるいは $D_{\mu} o VD_{\mu}V^{\dagger}$

Non-Abelian Field Strength

U(1)の場合と同様にして

$$\begin{split} [D_{\mu}, D_{\nu}] = & [\partial_{\mu} - ig A_{\mu}, \partial_{\nu} - ig A_{\nu}] \\ = & -ig (\partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu} - ig [A_{\mu}, A_{\nu}]) \\ = & -ig F_{\mu\nu} \end{split}$$

U(1)の場合とは違って $F_{\mu\nu}$ はゲージ不変でない

$$D_{\mu} \rightarrow V D_{\mu} V^{\dagger} \ \text{\downarrow} \ V F_{\mu\nu} \rightarrow V F_{\mu\nu} V^{\dagger}$$

カラー電場、カラー磁場はゲージ不変な物理量ではない!

QCD Lagrangian

ゲージ場 (pure Yang-Mills theory)

$$L = -\frac{1}{2} \operatorname{tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

伝搬部分
$$-\frac{1}{2}\operatorname{tr}(\partial_{\mu}A_{\nu}-\partial_{\nu}A_{\mu})(\partial^{\mu}A^{\nu}-\partial^{\nu}A^{\mu})$$

相互作用部分

$$\begin{split} \frac{ig}{2} \operatorname{tr} \left[[A_{\mu}, A_{\nu}] (\partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu}) + (\partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}) [A^{\mu}, A^{\nu}] \right] \\ + \frac{g^{2}}{2} \operatorname{tr} \left[A_{\mu}, A_{\nu} \right] [A^{\mu}, A^{\nu}] \end{split}$$

QCD Lagrangian

クォーク場

$$L_{q} = \bar{\psi} (iD_{\mu} \gamma^{\mu} - m) \psi = \bar{\psi} (i\partial_{\mu} \gamma^{\mu} + g A_{\mu} \gamma^{\mu} - m) \psi$$

カラー行列 $A_{\mu} = A_{\mu}^{a} t^{a}$ と表すことができる

$$F_{\mu\nu}^{a} = 2 \operatorname{tr} [t^{a} F_{\mu\nu}] = \partial_{\mu} A_{\nu}^{a} - \partial_{\nu} A_{\mu}^{a} + g f^{abc} A_{\mu}^{b} A_{\nu}^{c}$$

$$[t^{a}, t^{b}] = i f^{abc} t^{c}$$

$$\bar{\Psi} A_{\mu} \gamma^{\mu} \Psi = \bar{\Psi}^{i} A_{\mu}^{a} (t^{a})^{ij} \gamma^{\mu} \Psi^{j}$$

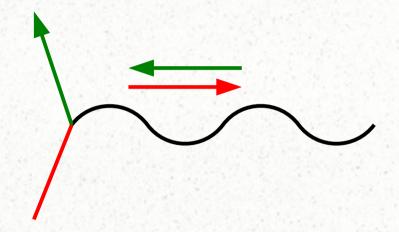
i, j が3つのカラーを表し、a が8つのカラー組み合わせを表す

Colorの足(index)の構造

$$\bar{\Psi}^i A^a (t^a)^{ij} \Psi^j$$

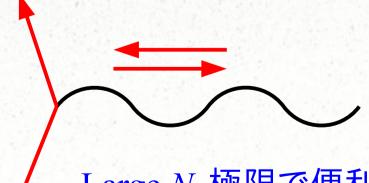
t¹の場合

$$t^{1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{g}$$



t³の場合

$$t^3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Large N_c 極限で便利な表現

Covariant Derivativeの意味

微分を差分で(ナイーブに)近似

$$\Delta x \partial_{\mu} \Psi_{i} = \Psi_{i}(x + \hat{\mu} \Delta x) - \Psi_{i}(x)$$

カラー空間のゆがみを戻す

$$\Delta x D_{\mu} \Psi_{i} = e^{-ig A_{\mu} \Delta x} \Psi_{i} (x + \hat{\mu} \Delta x) - \Psi_{i} (x)$$

$$\rightarrow D_{\mu} = \partial_{\mu} - ig A_{\mu}$$

$$U_{\mu} = e^{-ig A_{\mu} \Delta x}$$
 をリンク変数とよぶ

格子ゲージ理論 (lattice gauge theory) では A_{μ} ではなく U_{μ} を使う

Non-Abelianでのゲージ固定

ゲージ固定条件 (gauge-fixing condition)

$$G(A^{\alpha})=0$$
 ex) $\partial_{\mu}A^{\mu}=0$ (共変ゲージ)

ゲージを勝手に選んだだけでは正しい計算はできない。"ゲージを選ぶ"ということは、余計なゲージ自由度が張る空間の中で、ゲージ軌道(gauge orbit)を選ぶということ。

ゲージ軌道に対応した"重み"をつける必要

Faddeev-Popovの方法

ゲージ固定条件 (gauge-fixing condition)

$$G(A^{\alpha})=0$$
 α :ゲージ変換パラメター

ゲージ変換
$$A_{\mu} \to A'_{\mu} = V \left(A_{\mu} - \frac{1}{ig} \partial_{\mu} \right) V^{\dagger}, \quad V = e^{i \alpha^a t^a}$$

トリック
$$1 = \int D \alpha(x) \delta(G(A^{\alpha})) \det \left(\frac{\delta G(A^{\alpha})}{\delta \alpha} \right)$$

$$\int DA e^{iS[A]} = \int D \alpha \int DA \det \left(\frac{\delta G(A^{\alpha})}{\delta \alpha} \right) e^{iS[A]} \delta(G(A))$$

Faddeev-Popov行列式とGhost

共変ゲージ固定
$$G(A^{\alpha}) = \partial_{\mu} A^{\mu a}(x) - \omega^{a}(x)$$
 (ゲージ変換) $A_{\mu} \rightarrow A'_{\mu} = V \left(A_{\mu} - \frac{1}{ig} \partial_{\mu} \right) V^{\dagger}, \quad V = e^{i \alpha^{a} t^{a}}$ (無限小変換) $A_{\mu} \rightarrow A'_{\mu} = A_{\mu} + \frac{1}{g} D_{\mu} \alpha$

Faddeev-Popov 行列式とゴースト (ghost)

$$\det\left(\frac{\delta G(A^{\alpha})}{\delta \alpha}\right) = \det\left(\frac{1}{g}\partial_{\mu}D^{\mu}\right)$$
$$= \int Dc \, D\, \overline{c} \exp\left[i\int d^{4}x \, \overline{c} \left(-\partial_{\mu}D^{\mu}\right)c\right]$$

伝搬関数

リンク変数による表現

$$U_{\mu}(x) = e^{-igA_{\mu}(x)\Delta x}$$

Field Strength ← Plaquette

$$\begin{split} &U_{\mu\nu}(x) = U_{\mu}(x)U_{\nu}(x+\hat{\mu})U_{\mu}^{\dagger}(x+\hat{\nu})U_{\nu}^{\dagger}(x) \\ &\simeq &(1-ig\,A_{\mu}(x)\Delta\,x - \frac{g^2}{2}\,A_{\mu}^2(x)\Delta\,x^2)(1-ig\,A_{\nu}(x+\hat{\mu}) + \cdots) \\ &\simeq &1-ig\,(\partial_{\mu}A_{\nu}(x) - \partial_{\nu}A_{\mu}(x) - ig\,[\,A_{\mu}(x)\,,A_{\nu}(x)\,] + \cdots)\Delta\,x^2 \\ &\simeq &e^{-ig\,F_{\mu\nu}(x)\Delta\,x^2} \end{split}$$

Action
$$-\frac{1}{2}\operatorname{tr} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}d^4x \simeq \frac{1}{g^2}\sum_{\mu\neq\nu}\operatorname{tr}\left(1-U_{\mu\nu}(x)\right)$$

リンク変数による格子ゲージ理論ではゲージ固定が不要

高温での非閉込め相転移

非閉込めの理解には閉込めの理解が不可欠まず強結合極限における閉込めを考えよう

$$U_{\mu\nu}(x) = U_{\mu}(x)U_{\nu}(x+\hat{\mu})U_{\mu}^{\dagger}(x+\hat{\nu})U_{\nu}^{\dagger}(x)$$
 $x+\hat{\nu}$ Plaquette (プラケット) 格子ゲージ理論の基本量 x $x+\hat{\mu}$

リンク変数はゲージ不変ではないが、 プラケットのトレースはゲージ不変量 (ループ中のカラーフラックスの指数関数)

リンク変数のゲージ変換

ゲージ場のゲージ変換 $A_{\mu} \rightarrow A_{\mu}' = V \left(A_{\mu} - \frac{1}{ig} \partial_{\mu} \right) V^{\dagger}$

展開したリンク変数のゲージ変換

$$1 - ig A_{\mu} \Delta x \rightarrow 1 + V \Delta x \partial_{\mu} V^{\dagger} - ig \Delta x V A_{\mu} V^{\dagger}$$

リンク変数のゲージ変換

$$U_{\mu}(x) = e^{-ig A_{\mu}(x)\Delta x} \rightarrow V(x)U_{\mu}(x)V^{\dagger}(x+\hat{\mu})$$

リンク変数で閉じたループを作れば必ず相似変換になる

Wilsonループ

空間方向にL離れ、時間方向にT離れた閉経路 C

$$W(C) = \text{tr}$$

$$x + T \hat{t}$$

$$x + L \hat{1} + T \hat{t}$$

$$x + L \hat{1}$$

=
$$\operatorname{tr} U_1(x) U_1(x+\hat{1}) \cdots U_1(x+L\hat{1}) U_t(x+L\hat{1}+\hat{t}) \cdots$$

$$= \operatorname{tr} \prod_{\mathfrak{u} \in C} U_{\mathfrak{u}} \qquad \qquad \mathcal{T} - \mathbf{S}$$

ゲージ不変な物理量

理論を解く=積分する

Ising模型を解く = スピンの和
分配関数 $Z = \operatorname{tr} e^{-\beta H} = \sum_{\{s_i\}} e^{-\beta H(s)}$

(ヘルムホルツの)自由エネルギー $F = -T \ln Z$

あらゆる熱力学関数を計算できる = 解ける

QCDを解く = リンク変数の汎関数積分

分配関数
$$Z_{QCD} = \sum_{\{U\}} e^{S_G(U)} = \int \prod_{\{x,\mu\}} dU_{\mu}(x) e^{S_G(U)}$$

時空の関数の関数を汎関数 (functional) という

Wilsonループの期待値の意味

分配関数 = QCD真空のエネルギー

Ising模型の自由エネルギー $eta F = -\ln Z$ $Z = e^{-\beta F} \quad \left(\beta = 1/T\right)$

Wilsonループの期待値 = クォーク・反クォーク対の励起エネルギー

$$\langle W(C) \rangle = \frac{1}{Z_{\text{QCD}}} \int DU_{\mu} W(C) e^{S_G} = e^{-T V(L)}$$

V(L)はL だけ離れたクォーク・反クォークポテンシャル

閉じ込め $\rightarrow V(L) = \sigma L \rightarrow$ 面積則 (area law)

具体的計算

分配関数はゲージ不変 $Z=\int \prod_{\{x,\mu\}} dU_{\mu}(x) e^{S_G(U)}$ $S_G(U)$ はゲージ不変 $dU_{\mu}(x)$ もゲージ不変であるべき

不変測度 (invariant measure)

$$dU = d(VU) = d(UV)$$

不変測度を使えば必ずゲージ不変性が保たれる

不変測度を使うことが、ゲージ自由度を積分から落とすことに対応する (ゲージは固定していないが、積分に余計な自由度が入ってこない)

SU(N)群積分

規格化

$$\int dU \, 1 = 1$$

Uが1個

$$\int dU \, U_{ij} = 0$$

Uが2個 (meson-like)

$$\int dU U_{ij} U_{kl} = 0$$

$$\int dU U_{ij} U_{kl}^{\dagger} = \frac{1}{N} \delta_{il} \delta_{jk}$$

UがN個

$$\int dU \, U_{i_1 j_1} U_{i_2 j_2} \cdots = \frac{1}{N!} \epsilon_{i_1 i_2 \dots} \epsilon_{j_1 j_2 \dots}$$

簡単な例 (1)

Uは $U \rightarrow V U V^{\dagger}$ によって対角化できる

$$\frac{\text{SU}(2)群積分}{U = e^{i\theta \,\sigma^3} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0\\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}}$$

 $\sigma^3/2$ はsu(2)代数のカルタン部分代数

$$\int dU = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\pi} \sin^2 \theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{4\pi} |e^{-i\theta} - e^{-i(-\theta)}|^2$$

簡単な例 (2)

Uは $U \rightarrow V U V^{\dagger}$ によって対角化できる

$$SU(N)$$
群積分 $U = egin{pmatrix} e^{i heta_1} & 0 & 0 & \cdots \ 0 & e^{i heta_2} & 0 & \cdots \ 0 & 0 & e^{i heta_3} & \cdots \ dots & dots & dots & dots \end{pmatrix}$

$$\int dU = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{4\pi} \prod_{i < j} |e^{-i\theta_i} - e^{-i\theta_j}|^2$$

Vandermonde行列式 = 対角化するようなゲージでのFaddeev-Popov行列式

QCDの作用

強結合展開

$-\frac{1}{2}\operatorname{tr} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}d^4x \simeq \frac{1}{g^2}\sum_{\mu\neq\nu}\operatorname{tr}\left(1-U_{\mu\nu}(x)\right)$

QCDの分配関数

$$Z_{\text{QCD}} = \int DU_{\mu} \exp \left[\frac{1}{g^2} \sum_{x, \mu \neq \nu} \operatorname{tr} U_{\mu\nu}(x) \right]$$
$$= \int \prod_{x, \mu} dU_{\mu}(x) \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{g^2} \sum_{x, \mu \neq \nu} \operatorname{tr} U_{\mu\nu}(x) \right]^n$$

1/g²の展開(強結合展開) 群積分で計算できる!

Wilsonループの計算 (0)

強結合展開の0次

$$\int \prod_{x,\mu} dU_{\mu}(x) \prod_{i \in C} U_{i} \left[\frac{1}{g^{2}} \sum_{x,\mu \neq \nu} \operatorname{tr} U_{\mu\nu}(x) \right]^{0}$$

C上のリンク変数の積分が すべてゼロになってしまう

Wilsonループの計算 (1)

強結合展開の1次

$$\int \prod_{x,\mu} dU_{\mu}(x) \operatorname{tr} \prod_{i \in C} U_{i} \left[\frac{1}{g^{2}} \sum_{x,\mu \neq \nu} \operatorname{tr} U_{\mu\nu}(x) \right]^{1}$$

時空にひとつ置かれたプラケットの和

$$\frac{1}{g^{2}} \int dU_{1}(x) dU_{t}(x+\hat{t}) U_{1}(x)_{ij} W(C')_{jk} U_{t}^{\dagger}(x)_{ki}$$

$$\times U_{t}(x)_{ab} U_{1}(x+\hat{t})_{bc} U_{t}^{\dagger}(x+\hat{1})_{cd} U_{1}^{\dagger}(x)_{da}$$

$$= \frac{1}{g^{2} N} \operatorname{tr} U_{t}^{\dagger}(x+\hat{1}) W(C') U_{1}(x+\hat{t})$$

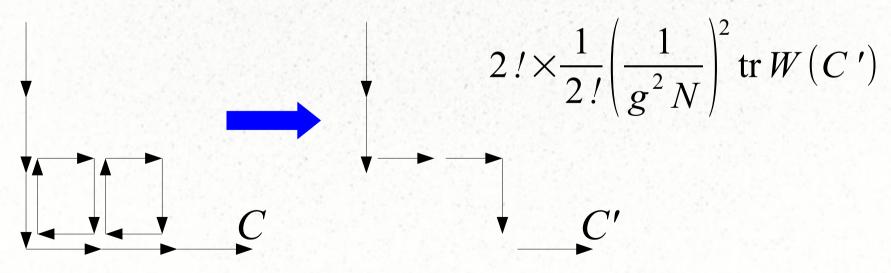
プラケットがこのような位置にある場合

Wilsonループの計算 (2)

強結合展開の2次

$$\int \prod_{x,\mu} dU_{\mu}(x) \operatorname{tr} \prod_{i \in C} U_{i} \frac{1}{2!} \left[\frac{1}{g^{2}} \sum_{x,\mu \neq \nu} \operatorname{tr} U_{\mu\nu}(x) \right]^{2}$$

時空にふたつ置かれたプラケットの和



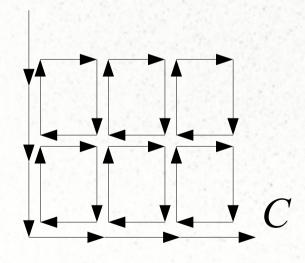
プラケットがこのような位置にある場合

Wilsonループの計算 $(N=N_TN_L)$

強結合展開のN次

$$\int \prod_{x,\mu} dU_{\mu}(x) \operatorname{tr} \prod_{i \in C} U_{i} \frac{1}{N!} \left[\frac{1}{g^{2}} \sum_{x,\mu \neq \nu} \operatorname{tr} U_{\mu\nu}(x) \right]^{N}$$

時空に $N=N_TN_L$ 個、置かれたプラケットの和



$$N! \times \frac{1}{N!} \left(\frac{1}{g^2 N} \right)^N \operatorname{tr} 1$$
$$= N \exp \left[-N_T N_L \ln (g^2 N) \right]$$

Wilsonループの上を埋め尽くす配位

強結合極限でのクォーク閉じ込め

Wilsonループの期待値

$$\langle W(T \times L) \rangle = N \exp\left[-N_T N_L \ln(g^2 N)\right]$$

面積則と弦張力 (string tension)

$$\langle W(T \times L) \rangle \propto \exp[-T \sigma L]$$

$$\sigma = \ln(g^2 N) / (\Delta x)^2$$

ゲージ場の乱雑さ = クォーク閉じ込め スピン系とのアナロジーから「高温」で乱雑な相 = 閉じ込め相 閉じ込めは「低温」で起きる → 通常の「温度」と逆の役割

準備有限温度の場の理論

理論を解く=分配関数を計算する

$$Z = \operatorname{tr} e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})}$$

スカラー場の理論に対して上式を書き換える

(例) 中性スカラー場
$$\hat{\mathcal{L}} = \frac{1}{2} \partial_{\mu} \hat{\phi} \partial^{\mu} \hat{\phi} - \frac{1}{2} m^2 \hat{\phi}^2 - U(\hat{\phi})$$

場の固有状態 (平衡物理に時間は入らない)

$$\hat{\phi}(x)|\phi\rangle = \phi(x)|\phi\rangle$$

固有状態と完全系

正準共役運動量 (canonical momentum)

$$\hat{\pi}(x) = \frac{\delta L}{\delta \partial_0 \phi(x)} = \partial^0 \phi(x)$$

固有状態 $\hat{\pi}(x)|\pi\rangle = \pi(x)|\pi\rangle$

完全系
$$\int d \phi(x) |\phi\rangle\langle\phi|=1$$

$$\int \frac{d \pi(x)}{2\pi} |\pi\rangle\langle\pi|=1 \quad (Ax \circ)$$

直交性

$$\langle \phi_a | \phi_b \rangle = \delta[\phi_a(x) - \phi_b(x)]$$

$$\langle \pi_a | \pi_b \rangle = \delta[\pi_a(x) - \pi_b(x)]$$

$$\langle \phi | \pi \rangle = \exp[i \int d^3 x \pi(x) \phi(x)]$$

ここまではすべて通常の量子力学でよく知られた 関係式を、汎関数 (functional) に拡張しただけ ここからは、これらの関係式を利用して分配関数 を演算子表示から古典場表示へ書きなおしてゆく

汎関数積分では演算子が出てこないので計算がラク

トレース計算

分配関数は同じ状態での期待値の和

$$Z = \int d \phi_a \langle \phi_a | e^{-\beta \hat{H}} | \phi_a \rangle$$

$$\begin{split} &\langle \phi_{a} | e^{-\beta \hat{H}} | \phi_{a} \rangle \\ &= \int \prod_{i=1}^{N} \frac{d \, \pi_{i}}{2 \, \pi} d \, \phi_{i} \langle \phi_{a} | \pi_{N} \rangle \langle \pi_{N} | e^{-\hat{H} \Delta \tau} | \phi_{N} \rangle \\ &\times \langle \phi_{N} | \pi_{N-1} \rangle \langle \pi_{N-1} | e^{-\hat{H} \Delta \tau} | \phi_{N-1} \rangle \times \cdots \\ &\times \langle \phi_{2} | \pi_{1} \rangle \langle \pi_{1} | e^{-\hat{H} \Delta \tau} | \phi_{1} \rangle \langle \phi_{1} | \phi_{a} \rangle \end{split}$$

ここで $\Delta \tau = \beta/N$ 普通の時間とは $it = \tau$ の対応関係

演算子場 → 古典場

i番目の要素

$$\langle \phi_{i} | \pi_{i-1} \rangle \langle \pi_{i-1} | e^{-\hat{H} \Delta \tau} | \phi_{i-1} \rangle$$

$$= \exp \left[-\Delta \tau \int d^{3}x \mathcal{H}(\pi_{i}, \phi_{i}) + i \int d^{3}x \pi_{i} (\phi_{i+1} - \phi_{i}) \right]$$

すべてかけあわせ(数演算子もいれて)

$$Z = \int D\pi \int_{\phi(\beta) = \phi(0)} D\phi \exp \left[\int_0^\beta d\tau \int d^3x \left[i\pi_i \partial_\tau \phi - \mathcal{U} + \mu \mathcal{N} \right] \right]$$

この表式にはどこにも演算子が入っていないことに注意

複素スカラー場の理論

ラグランジアン密度(面倒なので演算子記号省略)

$$\mathcal{L} = \partial_{\mu} \Phi^* \partial^{\mu} \Phi - m^2 |\Phi|^2 - U(|\Phi|^2)$$

この理論はU(1)不変だから対応する保存荷がある

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi e^{-i\alpha} \rightarrow \phi e^{-i\alpha(x)}$$

$$\mathcal{L} = \partial_{\mu} \phi^{*} \partial^{\mu} \phi - m^{2} |\phi|^{2} - U(|\phi|^{2})$$

$$\rightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L} + i(\partial_{\mu} \alpha)(\phi^{*} \partial^{\mu} \phi - \phi \partial^{\mu} \phi^{*})$$

$$= \mathcal{L} - \alpha \partial_{\mu} j^{\mu} \longrightarrow j^{\mu} = i(\phi^{*} \partial^{\mu} \phi - \phi \partial^{\mu} \phi^{*})$$

Noether current

自由複素スカラー場の分配関数

運動量積分

$$Z = \int D(\pi, \pi^*) \int_{\phi(\beta) = \phi(0)} D(\phi, \phi^*) \exp \left[\int_0^\beta d\tau \int d^3x \right] \times \left[i\pi \partial_\tau \phi + i\pi^* \partial_\tau \phi^* - \pi^* \pi - (\nabla \phi^*)(\nabla) \phi - m^2 \phi^* \phi \right] + i\mu (\pi^* \phi^* - \pi \phi)$$

平方完成

$$\begin{split} i \pi \partial_{\tau} \phi + i \pi^* \partial_{\tau} \phi^* - \pi^* \pi + i \mu (\pi^* \phi^* - \pi \phi) \\ = - \left[\pi^* - i (\partial_{\tau} - \mu) \phi \right] \left[\pi - i (\partial_{\tau} + \mu) \phi^* \right] \\ - (\partial_{\tau} + \mu) \phi^* (\partial_{\tau} - \mu) \phi \end{split}$$

これだけが残る

有限温度計算でよく使われる表式

πを積分したあとに残るのは

$$Z = \int_{\phi(\beta) = \phi(0)} D(\phi, \phi^*) \exp\left[-\int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L}_E\right]$$

ラグランジアン密度

$$\mathcal{L}_{E} = \left| \left(\partial_{\tau} - \mu \right) \phi \right|^{2} + \left| \nabla \phi \right|^{2} + m^{2} \left| \phi \right|^{2} - U(\left| \phi \right|^{2})$$

Euclidean時空では添字の上下を区別する必要はない場が周期的境界条件をみたすことに注意 ← トレースから

具体例

自由ボーズ粒子系の分配関数

$$Z = \int_{\phi(\beta) = \phi(0)} D(\phi, \phi^*) \exp\left[-\int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L}_E\right]$$

$$\mathcal{L}_{E} = |(\partial_{\tau} - \mu) \phi|^{2} + |\nabla \phi|^{2} + m^{2} |\phi|^{2}$$

フーリエ変換

$$\phi(\tau, x) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \phi_n(p) e^{i\omega_n \tau + ip x}$$

$$\phi(\tau=\beta)=\phi(\tau=0)$$
 であるためには $\omega_n=2n\pi T$

松原振動数

分配関数の計算 I

代入して整理すると

$$Z = \int \prod_{n,p} d \phi_n(p) \exp \left[-T \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left\{ (\omega_n + i\mu)^2 + p^2 + m^2 \right\} \phi_{-n}(-p) \phi_n(p) \right]$$

ガウス積分すると

$$Z = \det^{-1/2} [(\omega_n + i\mu)^2 + p^2 + m^2]$$

慣れてくればいきなりこれを書き下せるようになる

残された問題は松原周波数についての行列式をどうするか? (有限温度の場の理論での標準的テクニック)

松原周波数の和I

計算したい量

$$\ln Z = -\frac{1}{2} \operatorname{tr} \ln \left[(\omega_n + i \mu)^2 + p^2 + m^2 \right]$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_n V \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \ln \left[(\omega_n + i \mu)^2 + \varepsilon_p^2 \right]$$

このままでは計算できないので ε_p で微分

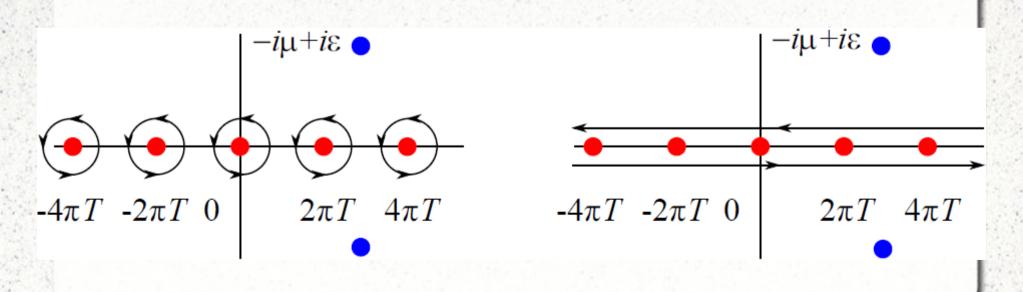
$$\sum_{n} \frac{1}{(\omega_{n}+i\mu)^{2}+\varepsilon_{p}^{2}}$$
が計算できればよい

複素積分経路の変更

松原周波数の和を留数積分であらわす

$$\sum_{n} f(\omega_{n}) = \oint_{C} \frac{dz}{2\pi i} f(z) \frac{i\beta}{e^{i\beta z} - 1}$$

無限遠で閉じるように半円弧をたす



松原周波数の和 II

別の留数をひろう

$$\begin{split} &\sum_{n} \frac{1}{(\omega_{n} + i\mu)^{2} + \varepsilon_{p}^{2}} = \int_{C} \frac{dz}{2\pi i} \frac{1}{(z + i\mu)^{2} + \varepsilon^{2}} \frac{i\beta}{e^{i\beta z} - 1} \\ &= -i\beta \frac{1}{2i\varepsilon_{p}} \frac{1}{e^{i\beta(-i\mu + i\varepsilon_{p})} - 1} - i\beta \frac{1}{-2i\varepsilon_{p}} \frac{1}{e^{i\beta(-i\mu - i\varepsilon_{p})} - 1} \\ &= \frac{\beta}{2\varepsilon_{p}} \left(1 + \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_{p} - \mu)} - 1} + \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_{p} + \mu)} - 1} \right) \end{split}$$

分配関数の計算 II

これまでに得られた式をまとめて

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{p}} \ln Z = -\frac{1}{2} \beta V \int \frac{d^{3} p}{(2\pi)^{3}} \left(1 + \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_{p} - \mu)} - 1} + \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_{p} + \mu)} - 1} \right)$$

これより

熱力学的ポテンシャル (Grand Potential)

$$\ln Z = -\beta \Omega$$

$$= -\frac{1}{2}\beta V \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[\underline{\varepsilon_p} + T \ln(1 - e^{-\beta(\varepsilon_p - \mu)}) + T \ln(1 - e^{-\beta(\varepsilon_p + \mu)}) \right]$$

ゼロ点振動×2

粒子の熱励起

反粒子の熱励起

フェルミ粒子系

$$\mathcal{L} = \overline{\psi} (i \partial_{\mu} \gamma^{\mu} - m) \psi$$

$$\pi = \bar{\Psi} i \gamma^0 = i \psi^{\dagger}$$

Noether Current

$$j^{\mu} = \overline{\psi} \gamma^{\mu} \psi$$

スカラー場と全く同じようにして汎関数量子化できるしかし境界条件に重要な違いがでてくる

$$\psi(\tau=\beta)=-\psi(\tau=0)$$

反周期的 (anti-periodic)

反周期境界条件の考え方

ボーズ粒子の伝搬関数

$$G_{B}(x,y,\tau,0) = Z^{-1} \operatorname{tr} \left[e^{-\beta \hat{H}} T \hat{\varphi}(x,\tau) \hat{\varphi}(y,0) \right]$$

$$= Z^{-1} \operatorname{tr} \left[e^{-\beta \hat{H}} e^{\beta \hat{H}} \hat{\varphi}(y,0) e^{-\beta \hat{H}} \hat{\varphi}(x,\tau) \right]$$

$$= Z^{-1} \operatorname{tr} \left[e^{-\beta \hat{H}} T \hat{\varphi}(x,\tau) \hat{\varphi}(y,\beta) \right] = G_{B}(x,y,\tau,\beta)$$

フェルミ粒子の伝搬関数

$$G_{F}(x,y,\tau,0) = Z^{-1} \operatorname{tr} \left[e^{-\beta \hat{H}} T \hat{\psi}(x,\tau) \hat{\psi}(y,0) \right]$$

$$= Z^{-1} \operatorname{tr} \left[e^{-\beta \hat{H}} e^{\beta \hat{H}} \hat{\psi}(y,0) e^{-\beta \hat{H}} \hat{\psi}(x,\tau) \right]$$

$$= -Z^{-1} \operatorname{tr} \left[e^{-\beta \hat{H}} T \hat{\psi}(x,\tau) \hat{\psi}(y,\beta) \right] = -G_{F}(x,y,\tau,\beta)$$

汎関数積分の表式

分配関数

$$Z = \int_{\psi(\beta) = -\psi(0)} D(\psi, \psi^{\dagger}) \exp\left[-\int_{0}^{\beta} d\tau \int d^{3}x \mathcal{L}_{E}\right]$$

ラグランジアン
$$\mathcal{L}_{E} = \bar{\psi} \left[i \left(\partial_{\mu} - \mu \right) \gamma^{0} + i \nabla_{i} \gamma^{i} - m \right] \psi$$

EuclideanのDirac行列

$$\gamma^{0} \rightarrow -i \gamma_{E}^{4}, \quad \gamma^{i} \rightarrow \gamma_{E}^{i}$$

$$\{\gamma_{E}^{\mu}, \gamma_{E}^{\nu}\} = -2 \delta^{\mu \nu}$$

自由フェルミ粒子の分配関数

フーリエ成分をグラスマン積分して

$$Z = \det\left[-\gamma^4(\omega_n + i\mu) - \gamma^3 p - m\right]$$
$$= \det\left[(\omega_n + i\mu)^2 + p^2 + m^2\right]^2$$

反周期性から $\omega_n = (2n+1)\pi T$ が松原振動数

$$\ln Z = 2 V \int \frac{d^{3} p}{(2\pi)^{3}} \sum_{n} \ln \left[(\omega_{n} + i\mu)^{2} + \varepsilon_{p}^{2} \right]$$

$$= 2\beta V \int \frac{d^{3} p}{(2\pi)^{3}} \left[\varepsilon_{p} + T \ln (1 + e^{-\beta(\varepsilon - \mu)}) + T \ln (1 + e^{-\beta(\varepsilon + \mu)}) \right]$$

ゲージ理論 (QED)

ゲージ固定 (axial gauge) $A_3 = 0$ Faddeev-Popov行列式 $\det(\partial_3)$

$$A_{\mu}(\partial^{2}\delta_{\mu\nu} - \partial_{\mu}\partial_{\nu})A_{\nu}$$

$$\rightarrow (A_{4,}A_{1,}A_{2})\begin{vmatrix} p^{2} & -\omega_{n}p_{1} & -\omega_{n}p_{2} \\ -\omega_{n}p_{1} & \omega_{n}^{2} + p_{2}^{2} + p_{3}^{2} & -p_{1}p_{2} \\ -\omega_{n}p_{2} & -p_{1}p_{2} & \omega_{n}^{2} + p_{1}^{2} + p_{3}^{2} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} A_{4} \\ A_{1} \\ A_{2} \end{pmatrix}$$

分配関数 $\ln Z = \operatorname{tr} \ln (p_3^2) - \frac{1}{2} \operatorname{tr} \ln \left[p_3^2 (\omega_n^2 + \boldsymbol{p}^2) \right]$ = $-2\beta V \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[\frac{1}{2} |\boldsymbol{p}| + T \ln (1 - e^{-\beta |\boldsymbol{p}|}) \right]$

問題

時間的軸性ゲージ (temporal axial gauge)を取ることは有限温度で許されるだろうか?

$$A_4 = 0$$

(時間成分がゼロでない)適当なゲージをもってきたときに、時間成分をゼロにするようなゲージ変換を構成してみよ。

そのようなゲージ変換は周期的境界条件を満たすか?満たさないとどんな不都合があるか?

有限温度QCD

有限温度QCD

さまざまな物理量が計算されている

- 圧力・内部エネルギー・エントロピー密度
- クォーク・グルーオン thermal (screening) mass
- ・ さまざまな輸送係数 (実時間への接続)

今回計算する物理量

非閉じ込めの秩序変数に対する有効ポテンシャル

Wilsonループ

空間方向にL離れ、時間方向にT離れた閉経路 C

$$W(C) = \text{tr}$$

$$x + T\hat{t}$$

$$x + L\hat{1} + T\hat{t}$$

$$x + L\hat{1}$$

=
$$\operatorname{tr} U_1(x) U_1(x+\hat{1}) \cdots U_1(x+L\hat{1}) U_t(x+L\hat{1}+\hat{t}) \cdots$$

$$= \operatorname{tr} \prod_{\mu \in C} U_{\mu}$$

閉じ込めの判定条件を連続変数で書き直そう

Link変数の積 → path-orderd product

$$U_{\mu}(n) = e^{-iga A_{\mu}(n)}$$

$$\prod_{C} U_{\mu}(n) = P \exp\left[ig \oint_{C} dx^{\mu} A_{\mu}(x)\right]$$

例:時間順序積 (time-ordered product)

$$\prod_{n=1}^{N} U_{4}((n-1)\Delta\tau) = U_{4}(0)U_{4}(\Delta\tau)U_{4}(2\Delta\tau)\cdots$$

$$= T \exp \left[ig \int_0^{\tau} d\tau A_4(x) \right]$$

$$=1+ig\int_0^{\tau} d\tau A_4(x)+\frac{1}{2}(ig)^2\int_0^{\tau} d\tau_1\int_0^{\tau} d\tau_2 T[A_4(\tau_1)A_4(\tau_2)]+\cdots$$

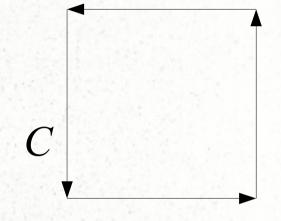
$$T[O(\tau_1)O(\tau_2)]=O(\tau_1)O(\tau_2)$$
 for $\tau_1>\tau_2$, $O(\tau_2)O(\tau_1)$ for $\tau_2>\tau_1$

異なる時刻における A_4 は一般に交換しない

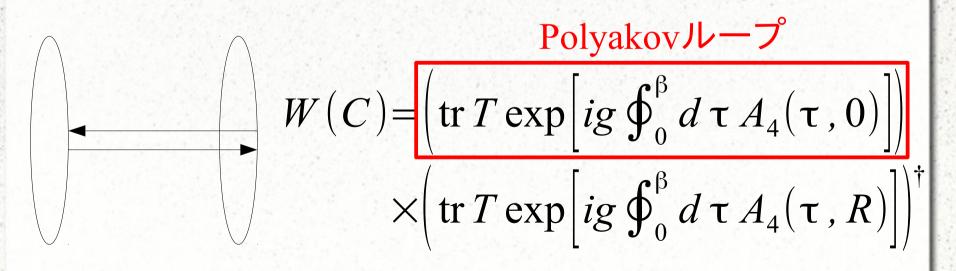
有限温度のWilsonループ

連続変数によるWilsonループ

$$W(C) = \operatorname{tr} P \exp \left[ig \oint_{C} dx^{\mu} A_{\mu}(x) \right]$$



有限温度変数の境界条件



有限温度の非閉じ込め判定条件

Wilsonループの面積則

$$\langle W(C) \rangle \sim e^{-T \sigma R}$$

String tension = σ の閉じ込め

Wilsonループ = 2本のPolyakovループ

$$\langle W(C) \rangle \sim \langle \operatorname{tr} L(0) \operatorname{tr} L^{\dagger}(R) \rangle \sim \langle \Omega(0) \Omega^{\dagger}(R) \rangle \sim e^{-\beta \sigma R}$$

$$L(r) = T \exp \left[ig \int_{0}^{\beta} d \tau A_{4}(\tau, r) \right]$$

$$\Omega(r) = \frac{1}{N_{c}} \operatorname{tr} L(r)$$

Polyakovループの振る舞い

閉じ込め相での相関関数

$$\langle \Omega(0)\Omega^{\dagger}(R)\rangle \sim e^{-\beta\,\sigma R}$$

閉じ込め相での期待値

$$\langle \Omega(0)\Omega^{\dagger}(R)\rangle \rightarrow |\langle \Omega(0)\rangle| = 0 \quad (R \rightarrow \infty)$$

非閉じ込め相での相関関数

$$\langle \Omega(0)\Omega^{\dagger}(R)\rangle \sim e^{-\beta e^{-mR}/R}$$

非閉じ込め相での期待値

$$\langle \Omega(0)\Omega^{\dagger}(R)\rangle \rightarrow |\langle \Omega(0)\rangle| \neq 0 \quad (R \rightarrow \infty)$$

非閉じ込めの秩序変数

Wilsonループの面積則を直接確かめなくても Polyakovループの期待値だけで判定できる

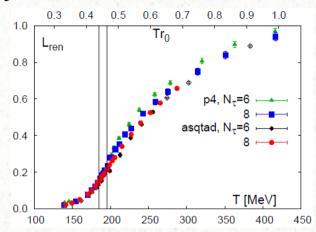
$$\Phi = \langle \Omega \rangle = 0$$
 閉じ込め相 $\Phi = \langle \Omega \rangle \neq 0$ 非閉じ込め相

Polyakovループは``秩序変数"になっている 一体どんな対称性に関する``秩序"なのか?

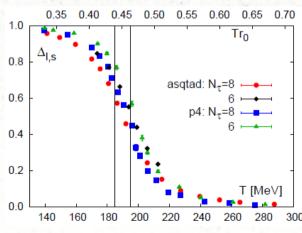
中心対称性 (Center Symmetry) もとのゲージ理論の部分群が、時間方向が コンパクトになることで特別な意味をもつ

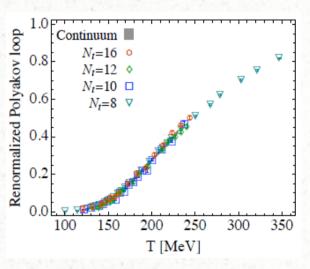
格子QCD数値計算の例

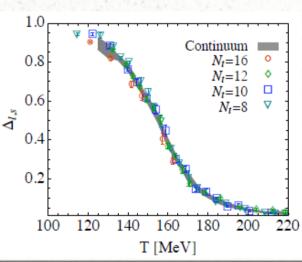
Polyakovループの温度変化



カイラル凝縮の温度変化







ゲージ場の境界条件

ゲージ変換
$$A_{\mu}(x) \rightarrow A_{\mu}'(x) = V \left(A_{\mu} - \frac{1}{ig} \partial_{\mu} \right) V^{\dagger}$$

ゲージ変換の満たすべき性質 $A_{\mu}'(\beta) = A_{\mu}'(0)$

$$V(\beta) = z \cdot V(0)$$

$$z = egin{bmatrix} z_k & 0 & 0 & \cdots \ 0 & z_k & 0 & \cdots \ 0 & 0 & z_k & \cdots \ dots & dots & dots & dots \ dots & dots & dots & dots \ dots & dots & dots \ dots & dots & dots \ dots & dots \ dots & dots \ \ dots \ \ dots \ dots \ dots \ dots \ dots \ \ dots \ dots \ \ dots \ \$$

中心对称性

ゲージ場は $SU(N_c)$ 群の随伴表現随伴表現は群の忠実な表現ではない真のゲージ対称性 $s' \land \gamma$

$$SU(N_c)/Z(N_c)$$

z だけ周期的でないゲージ変換のもとで

$$L \rightarrow L' = V(\beta)LV^{\dagger}(0) = zV(0)LV^{\dagger}(0)$$

$$\Omega \rightarrow \Omega' = z_k \Omega$$

もし中心対称的なら
$$\langle \Omega \rangle = z_k \langle \Omega \rangle = 0$$

Polyakovゲージ

時間的軸性ゲージを取ることはできない もしもとれたらL=1になってしまう!

Polyakovループを静的で対角的にする

$$\partial_4 A_4 = 0$$
 $A_4 = a(\sigma^3/2)$ for SU(2)

$$L = P \exp \left[ig \int_0^\beta d\tau A_4 \right] = e^{ig\beta a(\sigma^3/2)}$$

$$\Omega = \frac{1}{2} \operatorname{tr} L = \cos \frac{g \beta a}{2}$$

a に対する有効ポテンシャルを計算したい

背景場まわりのOne-Loop計算

ラグランジアン (背景場 a をシフト)

$$\begin{split} L_{E} &= \frac{1}{4} F^{a}_{\mu\nu} F^{a}_{\mu\nu} = \frac{1}{4} F^{a}_{ij} F^{a}_{ij} + \frac{1}{2} F^{a}_{i4} F^{a}_{i4} \\ &= -\frac{1}{2} A^{a}_{i} \Big[\big(D^{2ab}_{4} + \Delta \, \delta^{ab} \big) \delta_{ij} - \partial_{i} \, \partial_{j} \delta^{ab} \Big] A^{b}_{j} + \text{(interaction)} \end{split}$$

$$\begin{split} D_{4}^{ab} &= \partial_{4} \delta^{ab} + g \, \varepsilon^{acb} \, A_{4}^{c} \\ D_{4}^{2ab} &= \partial_{4}^{2} \delta^{ab} + 2 \, g \, \varepsilon^{acb} \, A_{4}^{c} \partial_{4} + g^{2} \left(A_{4}^{a} A_{4}^{b} - \delta^{ab} \, A_{4}^{c} A_{4}^{c} \right) \end{split}$$

 A_i^a についてガウス積分 (one-loop計算) $A_A^a = \delta^{a3} a$ 背景場

縦波・横波への分解

縦波

$$P_{ij}^{L} = \frac{\partial_{i} \partial_{j}}{\Lambda}$$

$$P_{ij}^{L} = \frac{\partial_{i} \partial_{j}}{\Delta} \qquad$$
構波
$$P_{ij}^{T} = \delta_{ij} - \frac{\partial_{i} \partial_{j}}{\Delta}$$

$$A_i^L = P_{ij}^L A_j$$

$$A_i^T = P_{ij}^T A_j$$

固有值
$$(D_4^{2\,ab} + \Delta\delta^{ab})\delta_{ij} - \partial_i\partial_j\delta^{ab}$$

縦波: D_4^2 (×1) 横波: $D_4^2+\Delta$ (×2)

縦波固有値はFaddeev-Popov行列式と同じ形

ゲージ固定条件
$$\partial_4 A_4 = 0 \rightarrow \det[\partial_4 D_4]$$

One-Loop計算

ガウス積分した後の分配関数

$$Z = \det D_4 \cdot \left[\det D_4^2 \right]^{-1/2} \cdot \left[\left[\det \left(D_4^2 + \Delta \right) \right]^{-1/2} \right]^2$$

Faddeev-Popov

縦波

横波

$$= \left[\det \left(D_4^2 + \Delta \right) \right]^{-1}$$

すでにみたQEDの分配関数計算との違いは

$$\partial_4 \rightarrow D_4^{ab} = \partial_4 \delta^{ab} + g \varepsilon^{a3b} a$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} \partial_4 & -ga & 0 \\ ga & \partial_4 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_4 \end{vmatrix} \quad \text{固有値を計算} \quad \rightarrow \left(\partial_4 \pm iga \right) \partial_4$$

背景ゲージ場 = 複素化学ポテンシャル

化学ポテンシャル
$$\partial_4 - \mu \leftarrow \rightarrow \partial_4 \pm iga$$

$$\ln Z = -V \int \frac{d^{3} p}{(2\pi)^{3}} \left[\beta p + 2 \ln \left[1 - e^{-\beta(p - iga)} \right] + 2 \ln \left[1 - e^{-\beta(p + iga)} \right] \right]$$

$$= -\frac{V}{\pi^{2}} \int_{0}^{\infty} dp \ p^{2} \left[\ln \left[1 - e^{-\beta(p - iga)} \right] + \ln \left[1 - e^{-\beta(p + iga)} \right] \right]$$

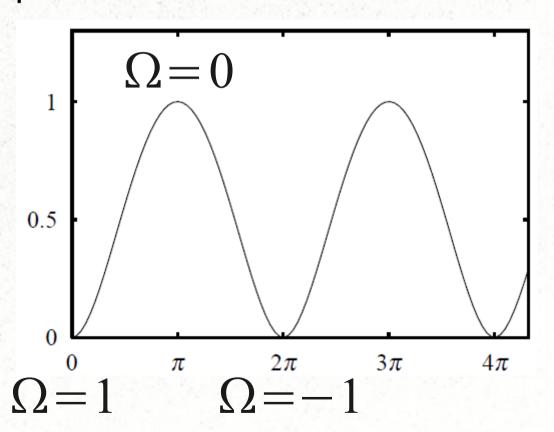
$$= -\frac{\pi^{2} V}{12\beta^{3}} \left(\frac{g\beta a}{\pi} \right)_{\text{mod } 2}^{2} \left\{ \left(\frac{g\beta a}{\pi} \right)_{\text{mod } 2} - 2 \right\}^{2}$$

この計算は結構難しい特に3次の項が出てくるのは特殊

SU(2) Weissポテンシャル

$$\Omega = -T \ln Z = \frac{\pi^2 V}{12\beta^4} \left(\frac{g \beta a}{\pi} \right)_{\text{mod } 2}^2 \left\{ \left(\frac{g \beta a}{\pi} \right)_{\text{mod } 2}^2 - 2 \right\}^2$$

"摂動的"真空は 中心対称性を 自発的に破っている! (ordered phase)



クォークの寄与

分配関数に背景ゲージ場を虚数化学ポテンシャル で導入すればよい

$$\ln Z = 2V \int \frac{d^{3} p}{(2\pi)^{3}} \left[\ln \left[1 + e^{-\beta(p - iga/2)} \right] + \ln \left[1 + e^{-\beta(p + iga/2)} \right] \right]$$

$$+ \ln \left[1 + e^{-\beta(p - iga/2)} \right] + \ln \left[1 + e^{-\beta(p + iga/2)} \right]$$

$$= \frac{\pi^{2} V}{12 \beta^{3}} \left[\left(\frac{g \beta a}{2 \pi} \right)_{\text{mod } 2} - 1 \right]^{2} - 1 \right]^{2}$$

Weissポテンシャルで

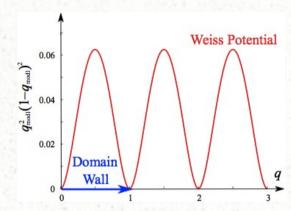
$$\frac{g \beta a}{\pi} \rightarrow \frac{g \beta a}{2 \pi} + 1$$

 $g\beta a = 0$ 状態がさらに安定になる $g\beta a = 2\pi$ との縮退がとける 中心対称性があからさまに破れる

SU(2) Domain Wall

Weissポテンシャル

$$\frac{g\beta a}{2\pi} = q$$
 と置き換えると



$$S_{\text{one-loop}}[q] = L_x L_y \int_0^{L_z} dz \left\{ \frac{2\pi^2}{g^2 \beta} [q'(z)]^2 + \frac{4\pi^2}{3\beta^3} q^2 (1-q)^2 \right\}$$

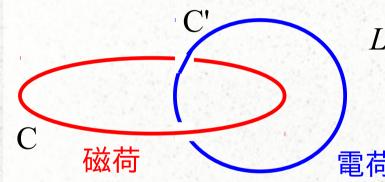
$$q_c(z) = \frac{1}{1 + \exp\left[-\sqrt{2/3} gTz\right]} \qquad \begin{array}{l} q_c(z \to -\infty) \to 0 \\ q_c(z \to +\infty) \to 1 \end{array}$$

相転移点近傍で重要・磁気的な自由度

't Hooftループ

Wilsonループと双対に定義される

$$V^{\dagger}(C)W(C')V(C)=e^{2i\pi Lk(C,C')/N_c}W(C')$$

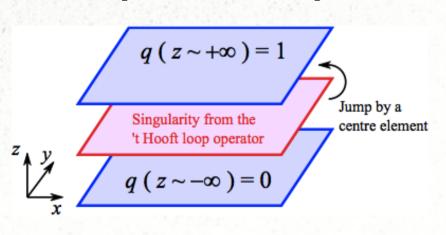


$$Lk(C,C') = \frac{1}{4\pi} \int_{C} dx_{i} \int_{C'} dy_{j} \epsilon_{ijk} \frac{x_{k} - y_{k}}{|x - y|^{3}}$$

$$V(C) = \exp\left[\frac{2\pi i}{g} \int_{\Sigma} d^2 S^i E_i^3\right]$$

't HooftループはDomain Wall の生成演算子になっている

$$\langle V(C) \rangle = \frac{Z_{\text{tbc}}}{Z_{\text{pbc}}}$$



Disorder Parameter

One-Loop計算より

$$\langle V(C)\rangle = \exp[-S_{\text{one-loop}}[q_c]] = \exp\left[-\frac{4\pi^2}{3\sqrt{6}g\beta^2}L_xL_y\right]$$

Domain-Wallの表面張力~面積則

Confined Phase
$$\langle W(C) \rangle \sim e^{-\sigma_w \Sigma(C)} \langle V(C) \rangle \sim e^{-\sigma'_{\iota} L(C)}$$

Higgs Phase
$$\langle W(C) \rangle \sim e^{-\sigma'_{w}L(C)} \langle V(C) \rangle \sim e^{-\sigma_{t}\Sigma(C)}$$

Partial Higgs Phase
$$\langle W(C) \rangle \sim e^{-\sigma_w \Sigma(C)} \langle V(C) \rangle \sim e^{-\sigma_t \Sigma(C)}$$

$$\langle W(C) \rangle \sim e^{-\sigma'_{w}L(C)} \langle V(C) \rangle \sim e^{-\sigma'_{t}L(C)}$$

有限温度の強結合展開

摂動的アプローチでは相転移を記述できない (Weissポテンシャルをいくら高次計算しても 閉じ込め相は記述できない)

歴史的には、QCD相転移の現代的な枠組みは、 強結合展開によってつくられた (Polyakov)

Polyakovの計算方法は Hamiltonian形式で、 Wilsonのやり方とは違う・・・この講義では少し 計算を変形して Wilson形式で説明する

格子上のPolyakovループ

Polyakovループ (連続理論)

$$L(\mathbf{r}) = T \exp \left[ig \int_0^\beta d \, \tau \, A_4(\tau, \mathbf{r}) \right]$$

$$\Omega(\mathbf{r}) = \frac{1}{N_c} \operatorname{tr} L(\mathbf{r})$$

Polyakovループ (格子理論)

$$L(\boldsymbol{r}) = \prod_{\tau=1}^{N_t} U_4(\tau, \boldsymbol{r})$$

Polyakovゲージ $\rightarrow U_4$ は τ に依存しない

Polyakovループの有効理論

 U_4 を残してほかの変数をすべて積分

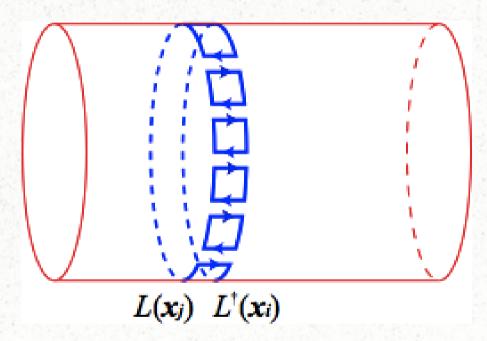
$$Z_{\text{QCD}} = \int DU_{\mu} \exp\left[\frac{1}{g^{2}} \sum_{x,\mu \neq \nu} \operatorname{tr} U_{\mu\nu}(x)\right]$$

$$= \int \prod_{x,\mu} dU_{\mu}(x) \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{g^{2}} \sum_{x,\mu \neq \nu} \operatorname{tr} U_{\mu\nu}(x)\right]^{n}$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{g^{2}N_{c}}\right)^{N_{t}} \sum_{\text{n.n.}} \operatorname{tr} L(x_{j}) \operatorname{tr} L^{\dagger}(x_{i})$$

S¹xR³上のPlaquette展開

Polyakovループの隣接相互作用



$$e^{-S_{\text{eff}}^{(G)}[L]} \sim 1 + \left(\frac{1}{g^2 N_c}\right)^{N_t} \sum_{\text{n.n.}} \operatorname{tr} L(x_j) \operatorname{tr} L^{\dagger}(x_i)$$

Polyakovループの有効作用

スピン系に似た形の有効作用

$$S_{\text{eff}}^{(G)}[L] \sim -J \sum_{\text{n.n.}} \operatorname{tr} L(x_j) \operatorname{tr} L^{\dagger}(x_i)$$

 Z_N スピン模型 (3-states Potts model)と同じ形をしている!

スピン間相互作用の強さ
$$J = \left(\frac{1}{g^2 N_c}\right)^{N_t}$$

非閉じ込め相転移の様子は、この有効作用を解析すれば分かる(平均場近似等を用いて)

スピン間相互作用の意味

Polyakovループの相関関数

$$\langle \Omega(\mathbf{x}) \Omega^{\dagger}(\mathbf{y}) \rangle \sim e^{-\beta \sigma a |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \sim J^{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}$$
$$T = \frac{1}{\beta} = \frac{\sigma a}{-\ln J}$$

同じ結論は

$$J = \left(\frac{1}{g^2 N_c}\right)^{N_t}$$
 と $\sigma = \ln(g^2 N_c)/a^2$ からも簡単に得られる

$$J = e^{-\beta \sigma a}$$

 $J = e^{-\beta \sigma a}$ a:格子間隔 (パラメター)

Tree-Level近似

最も単純な近似法

$$Z = \int DL \, e^{-S_{\text{eff}}^{(G)}[L]}$$

Haar Measure (群積分)

単純に積分変数を古典変数に置き換えてしまう (Tree-Level近似)

$$V[L] = -6J|\operatorname{tr} L|^2 - \ln M_{\operatorname{Haar}}[L]$$

 $M_{\text{Haar}}[L] =$ 群積分(Haar)測度 = Vandermonde行列式

Haar測度ポテンシャルは、摂動的真空で発散する 閉じ込め真空で最小になる

SU(2)の場合

SU(2)群積分

$$L = e^{i\theta\sigma^3} = \begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{bmatrix}$$

 $\sigma^3/2$ はsu(2)代数のカルタン部分代数

$$\int dL = \int_{0}^{2\pi} \frac{d\theta}{\pi} (\sin^{2}\theta) = 1 - \frac{1}{4} (\operatorname{tr} L)^{2}$$
$$= \int_{0}^{2\pi} \frac{d\theta}{4\pi} |e^{-i\theta} - e^{-i(-\theta)}|^{2}$$

SU(2)の相転移 (N_c=2)

有効作用

$$V[L] = -6J|\text{tr}L|^{2} - \ln[1 - |\text{tr}L|^{2}/4]$$

$$\sim (-6J + 1/4)|\text{tr}L|^{2}$$

 $-6J_c+1/4=0$ で2次相転移が起きる

Universality

3次元Ising模型と全く同じ2次相転移 臨界指数は計算しなくても全てわかる!

SU(3)の場合

SU(N)群積分

$$L = egin{bmatrix} e^{i heta_1} & 0 & 0 & \cdots \ 0 & e^{i heta_2} & 0 & \cdots \ 0 & 0 & e^{i heta_3} & \cdots \ dots & dots & dots & dots \end{pmatrix}$$

$$\int dL = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{4\pi} \prod_{i < j} |e^{-i\theta_i} - e^{-i\theta_j}|^2$$

$$M_{\text{Haar}} = \prod_{r} \left\{ -|\operatorname{tr} L|^4 + 8\Re (\operatorname{tr} L)^3 - 18|\operatorname{tr} L|^2 + 27 \right\}$$

SU(3)の相転移 (N_c=3)

SU(3)の場合、1次相転移になる
Potts模型も1次相転移
Universalityの対応はないが一致している・・・

臨界点

$$6J_c \simeq 0.5 \qquad T_c = \frac{\sigma a}{-\ln J_c}$$

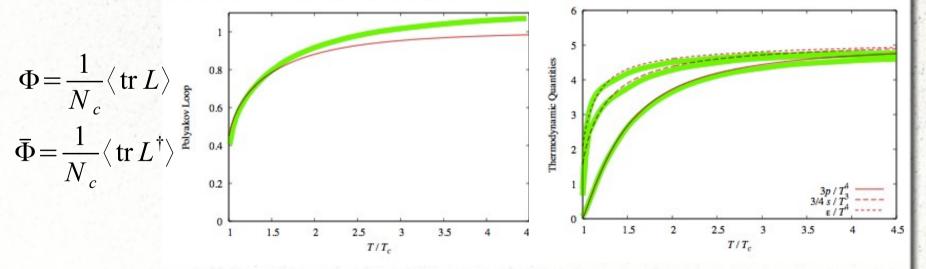
ここで例えば $\sigma = (425 \text{MeV})^2$, $a^{-1} = 433 \text{MeV}$ を代入すると $T_c = 170 \text{MeV}$ を得る

(格子間隔の値 = 強結合極限でメソン質量をフィット)

Parametrization

Pure-gluonic sectorの熱力学的な性質は強結合展開の関数形でよくフィットされる

$$V(\Phi) = -\frac{a(T)}{2}\bar{\Phi}\Phi + b(T)\ln\left[1 - 6\bar{\Phi}\Phi + 4(\bar{\Phi}+\Phi) - 3(\bar{\Phi}\Phi)^2\right]$$
$$a(T)/T^4 = 3.51 - 2.47t^{-1} + 15.2t^{-2} \quad b(T)/T^4 = -1.75t^{-3}$$



クォークの効果を取り入れるベースとなる → PNJL-type模型

第2部 高密度QCD (クォークの効果を導入)

「強い相互作用」では、クォークのフレーバーによる区別は質量の違いだけ

- 「電磁相互作用」では電荷の違い
- 「弱い相互作用」では弱アイソスピンの違い

例えばu, d の質量は $\Lambda_{\rm OCD}$ に比べて無視できる

 $\rightarrow u, d$ を入れ替えても違いを生じない(対称性)

まずquark sectorのもつ対称性を考えよう

アイソスピン対称性(荷電対称性)

u, d を入れ替える対称性 = アイソスピン対称性

(普通の)スピンと同様に
$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
 $d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

波動関数は $\Psi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ただし $|a|^2 + |b|^2 = 1$ $(a, b \in C)$

アイソスピン対称性: $\Psi \to U \Psi$ のもとでの不変性 $\Psi^{\dagger}U^{\dagger}U\Psi = \Psi^{\dagger}\Psi \to U^{\dagger}U = 1$

Uは2成分ユニタリー行列: U(2)群の元 $U=e^{i\theta}V$ $(\det V=1)$ と分解 V はSU(2)群の元 $e^{i\theta}\in U(1)$ はu, d を入れ替えないからアイソスピン対称性はSU(2)

一般のフレーバー回転

質量を無視できるフレーバーが N_f あるならば フレーバー対称性は $U(N_f) = U(1) \times SU(N_f)$

$$U(1)$$
対称性はクォーク数保存則と関係している $|n;t\rangle \rightarrow e^{in\theta}|n;t\rangle$ (nクォーク状態)
$$\int d\theta e^{-i(n'-n)\theta}\langle n';t'|n;t\rangle \propto \delta(n'-n)$$

$$SU(2)$$
対称性はアイソスピン保存則と関係している
部分群 $\begin{pmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi} \end{pmatrix}$ と $U(1)$ をあわせて u クォーク数・ d クォーク数保存則

ゼロ質量クォークの持つ対称性

クォーク場のLagrangian

$$L = \bar{\Psi} \{ i \gamma^{\mu} (\partial_{\mu} - ig A_{\mu}) - m \} \Psi$$

 ψ と $\bar{\psi}$ は独立な自由度 共役運動量は $\partial_0\psi$ ではない! \rightarrow 拘束系の量子化

 $\overline{\psi}$ で変分 $\rightarrow \{i \gamma^{\mu} (\partial_{\mu} - ig A_{\mu}) - m\} \psi = 0$ (Dirac 方程式)

γ^μは4×4行列 (スピン・粒子/反粒子)

カイラル表現

質量ゼロ極限で便利な表現

$$oldsymbol{\gamma}^{\mu} = egin{pmatrix} 0 & \sigma^{\mu} \ ar{oldsymbol{\sigma}}^{\mu} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^{\mu} \\ \bar{\sigma}^{\mu} & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^{\mu} = (1, \sigma), \quad \bar{\sigma}^{\mu} = (1, -\sigma)$$
ハミルトンの4元数

$$\Rightarrow \gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \gamma^5$$
が対角的

$$\psi = \begin{pmatrix} \phi_L \\ \phi_R \end{pmatrix}$$
と分解すれば $\gamma^5 \begin{pmatrix} \phi_L \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \phi_L \\ 0 \end{pmatrix}$, $\gamma^5 \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_R \end{pmatrix} = +\begin{pmatrix} 0 \\ \phi_R \end{pmatrix}$

カイラル対称性

Dirac Lagrangian
$$\bar{\psi} = \psi^{\dagger} \gamma^{0}$$

$$\overline{\psi}(i\,\gamma^{\mu}D_{\mu}-m)\psi = \Phi_{L}^{\dagger}i\,\overline{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\Phi_{L} + \Phi_{R}^{\dagger}i\,\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\Phi_{R} -m(\Phi_{L}^{\dagger}\Phi_{R} + \Phi_{R}^{\dagger}\Phi_{L})$$

$$m = 0$$
 で縮退した N_f フレーバー
$$U(N_f)_L \times U(N_f)_R$$
 対称性

部分群 $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$ (カイラル対称性)

カイラル対称性の破れ

軽いクォークのセクター

Lagrangianでは m_u , m_d $\ll \Lambda_{\rm QCD}$

 $SU(2)_L \times SU(2)_R$ のカイラル対称性

現実には質量ゼロのDirac粒子は観測されない 質量ゼロでない陽子・中性子の対称性

 $SU(2)_V$ のアイソスピン対称性

ストレンジクォーク

$$SU(3)_L \times SU(3)_R \rightarrow SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_S$$

質量ゼロの極限

質量無限大の極限

カイラル対称性の自発的破れ

ラグランジアンレベルでは・・・

 $SU(2)_L \times SU(2)_R$ のカイラル対称性

現実のスペクトルでは・・・

 $SU(2)_V$ のアイソスピン対称性

消えた SU(2)対称性 \leftarrow 自発的破れ 消えた SU(2)の3つの生成子 $\rightarrow \pi^0, \pi^+, \pi^-$

南部·Goldstone Boson

ゼロ質量のDirac方程式の解

左巻き粒子

$$i \, \bar{\sigma}^{\mu} \, \partial_{\mu} \, \phi_{L} = 0 \rightarrow (p_{0} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p}) \, \phi_{L}(p) = 0$$

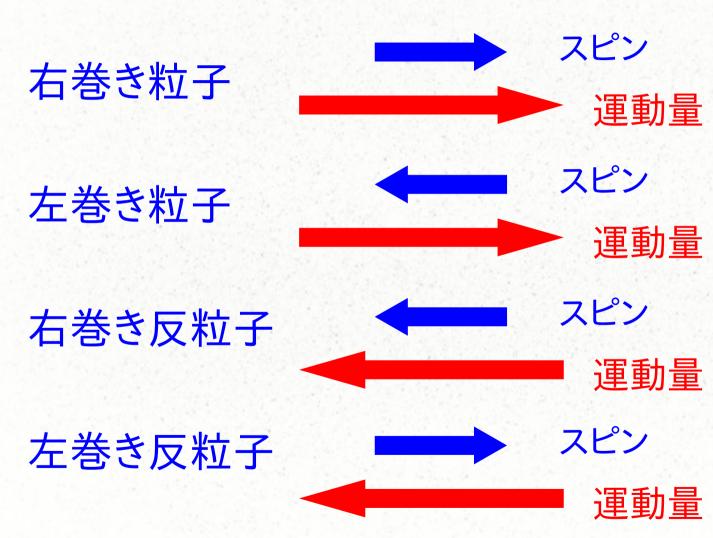
$$\lambda \phi_L(p) = -\frac{1}{2} \phi_L(p)$$
 helicity $\lambda = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|}$

右巻き粒子

$$i \sigma^{\mu} \partial_{\mu} \phi_{R} = 0 \rightarrow (p_{0} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p}) \phi_{R}(p) = 0$$

$$\lambda \, \phi_R(p) = +\frac{1}{2} \, \phi_R(p)$$

右巻き・左巻き



量子異常

互いに平行な電場・磁場 (Nielsen-Ninomiya 1983)

電場 $E \rightarrow$ 静電ポテンシャル = Fermi面のずれ

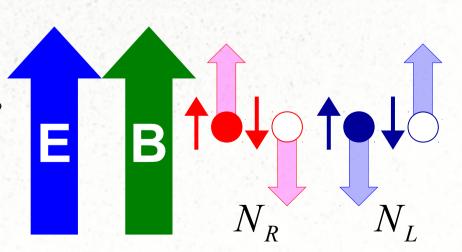
$$p_F^{(R)} = eEt$$
 $p_F^{(L)} = -eEt$

右巻き粒子の状態数 $\frac{d^3N_R}{dz_1d^2x} = \frac{p_F^{\kappa}}{2\pi} \cdot \frac{eB}{2\pi}$

粒子数関係式

$$\frac{d^{4}N_{5}}{dt \cdot d^{3}x} = \frac{d^{4}(N_{R} - N_{L})}{d^{4}x} = \frac{e^{2}}{2\pi^{2}} E \cdot B$$

$$\rightarrow \partial_{\mu} j_{5}^{\mu} = -\frac{e^{2}}{8\pi^{2}} F \tilde{F}$$



QCDの大域的対称性の破れ方

軸性 (axial) U(1) current は保存しない

$$\partial_{\mu} j_{5}^{\mu} = -\frac{e^{2}}{8\pi^{2}} F \tilde{F}$$
 対称性が量子補正で破れる (自発的な破れではない!)

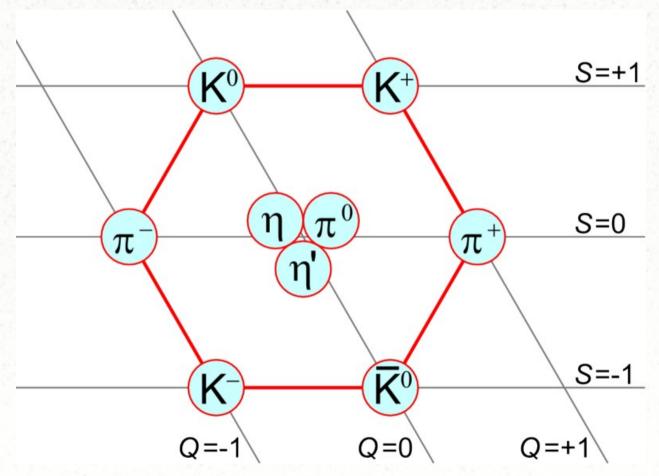
QCDの持つ大域的対称性

$$U(N_f)_L \times U(N_f)_R \longrightarrow SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R \times U(1)_V \times U(1)_A$$

自発的に
$$\rightarrow$$
 SU $(N_f)_V$ 量子補正によって \rightarrow Z $(2N_f)$ $\langle \bar{q} \, q \rangle \neq 0$

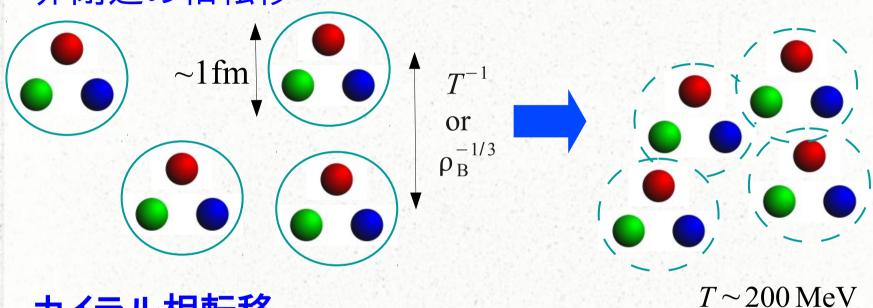
南部・Goldstoneボゾン~クォーク模型

メゾン $3 \times \overline{3} = 1 + 8$ 破れていない $SU(3)_v$ で分類



まとめ ~ QCD相転移

非閉込め相転移



カイラル相転移





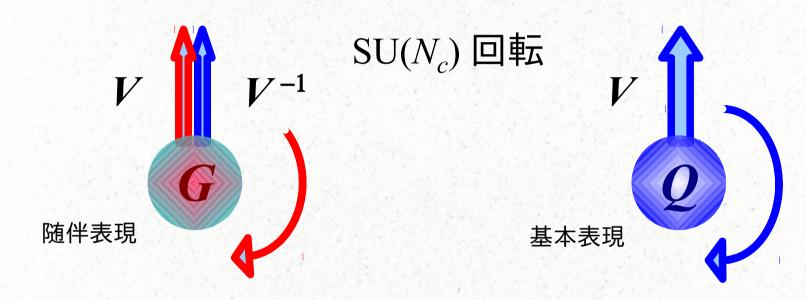


裸の質量 $m_q \sim 3-6 \text{ MeV}$

相互作用による有効質量 $M_a \sim 350~{
m MeV}$

Center Symmetry

ゲージ変換



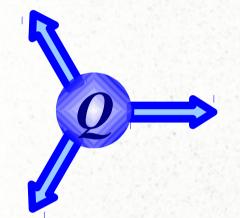
ゲージ群の中心群

が群の中心群
$$z\cdot V=V\cdot z$$
 グルーオンは z を感じない $z\in \mathbb{Z}_{N_c}$ $(e^{2i\,pi\,n/N_c}\,n=1\cdots N_c-1)$

クォークは z を感じる

非閉じ込め相転移

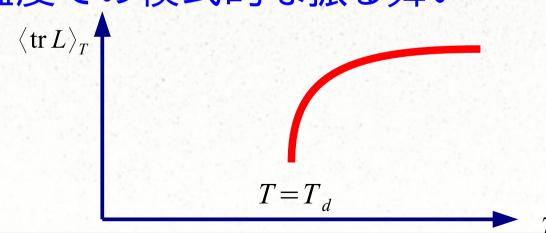
秩序変数 – Polyakovループ $\langle \operatorname{tr} L \rangle = \left| \operatorname{tr} P e^{ig \oint d \, \tau \, A_4} \right|$



閉じ込め相では

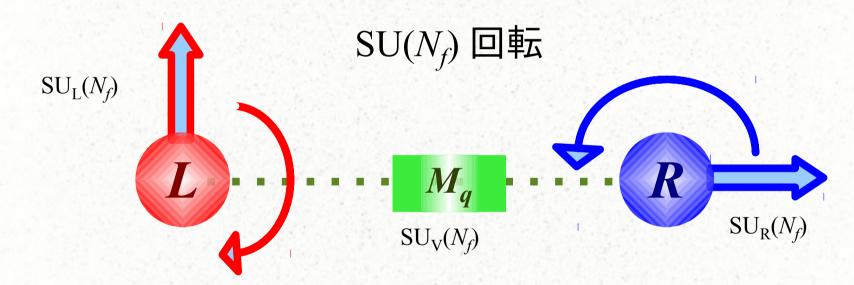
$$1 + e^{i2\pi/3} + e^{i4\pi/3} = 0$$

有限温度での模式的な振る舞い



Chiral Symmetry

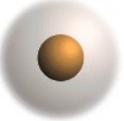
左巻き・右巻きクォークの変換



裸のクォークと構成子クォーク







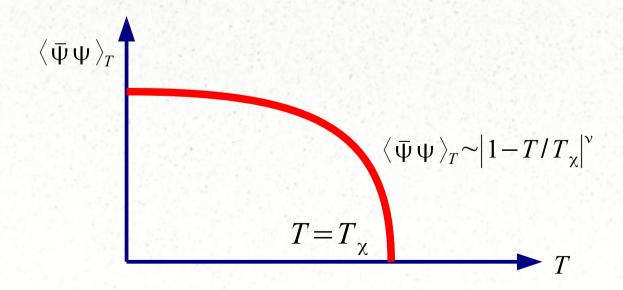
カイラル相転移

秩序変数 – カイラル凝縮

$$\langle \bar{\psi} \psi \rangle = \langle \bar{u}_L u_R \rangle + \langle \bar{u}_R u_L \rangle + \langle \bar{d}_L d_R \rangle + \langle \bar{d}_R d_L \rangle + \dots$$

$$\sigma \times V \times \sigma$$
 凝縮 ~ Higgsのようなもの

有限温度での模式的な振る舞い



QCD相転移の相互関係

低温

高温

 $m = \infty$

非閉込め

Center Symmetric 非秩序相

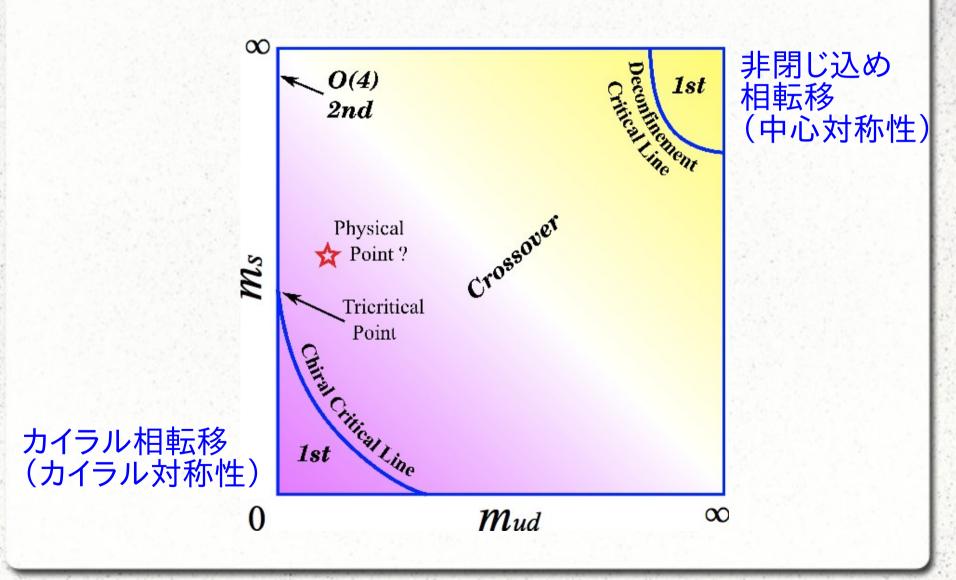
Center Broken 秩序相

m = 0

カイラル

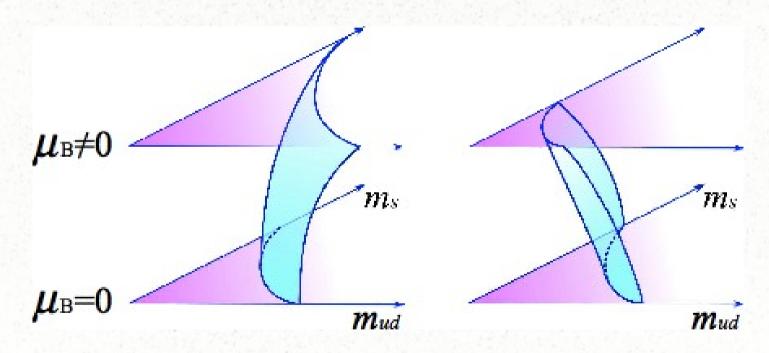
Chiral Broken 秩序相 Chiral Symmetric 非秩序相

クォーク質量とQCD相転移



有限密度での変化の方向

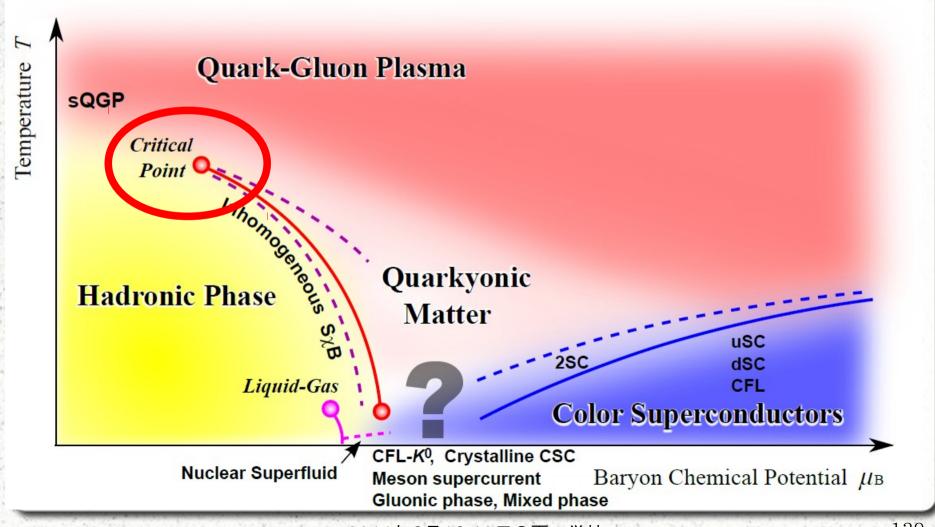
2次相転移線はどちらに動くのか?



QCD相図上にCritical Pointが出るかどうか決まる

QCD Critical Point

もしも左のように変化すれば・・・

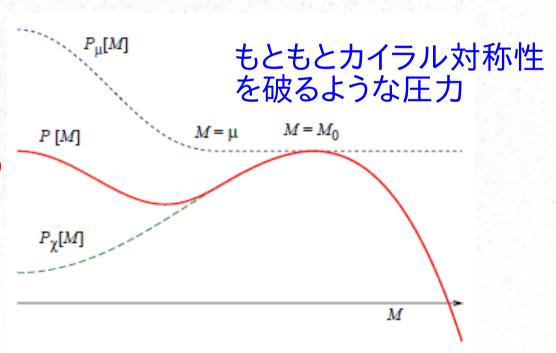


なぜ1次相転移?

有限密度で構成子クォーク質量の関数として 系の圧力を描いてみると・・・

密度からの寄与は 質量が小さいほど 大きな圧力になる

1次相転移型のポテンシャル



カイラル模型によるアプローチ

カイラル凝縮とPolyakovループの自然な結合

$$\ln Z = 2V \int \frac{d^{3} p}{(2\pi)^{3}} \left\{ \ln \left[1 + e^{-\beta(p - iga/2 - \mu)} \right] + \ln \left[1 + e^{-\beta(p + iga/2 - \mu)} \right] \right. \\
\left. + \ln \left[1 + e^{-\beta(p - iga/2 + \mu)} \right] + \ln \left[1 + e^{-\beta(p + iga/2 + \mu)} \right] \right\} \\
\rightarrow 2V \int \frac{d^{3} p}{(2\pi)^{3}} \operatorname{tr} \left\{ \ln \left[1 + L e^{-\beta(\epsilon_{p} - \mu)} \right] + \ln \left[1 + L^{\dagger} e^{-\beta(\epsilon_{p} + \mu)} \right] \right\}$$

NJL模型 → PNJL模型 非閉じ込め部分には Quark-Meson模型 → PQM模型 Vandermondeポテンシャル

(ゼロ密度では)非閉じ込め相転移とカイラル相転移の様子をかなりよく再現することができる

符号問題

符号問題の簡単な模型にもなっている

$$2V \int \frac{d^{3}p}{(2\pi)^{3}} \operatorname{tr} \left\{ \ln \left[1 + L e^{-\beta(\epsilon_{p} - \mu)} \right] + \ln \left[1 + L^{\dagger} e^{-\beta(\epsilon_{p} + \mu)} \right] \right\}$$

$$\sim \operatorname{tr} L e^{-\beta(\epsilon_{p} - \mu)} + \operatorname{tr} L^{\dagger} e^{-\beta(\epsilon + \mu)}$$

次の場合には符号問題が出ないことがわかる

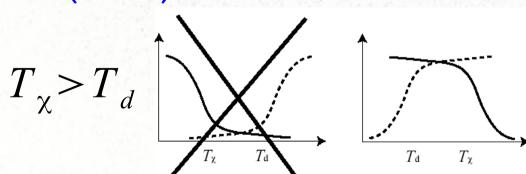
- SU(2)群 two-color QCD
- 純虚数化学ポテンシャル
- アイソスピン化学ポテンシャル

閉じ込め相ではカイラル対称性は破れる

Polyakovループが小さいときクォークの励起が強く抑制される (→ パイオンの励起は?)

$$\operatorname{tr} \ln \left[1 + L e^{-(\epsilon_{p} - \mu)/T} \right] + \operatorname{tr} \ln \left[1 + L^{\dagger} e^{-(\epsilon_{p} + \mu)/T} \right] \\
= \ln \left[1 + \operatorname{tr} L e^{-(\epsilon_{p} - \mu)/T} + \operatorname{tr} L^{\dagger} e^{-2(\epsilon_{p} - \mu)/T} + e^{-3(\epsilon_{p} - \mu)/T} \right] \\
+ \ln \left[1 + \operatorname{tr} L^{\dagger} e^{-(\epsilon_{p} + \mu)/T} + \operatorname{tr} L e^{-2(\epsilon_{p} + \mu)/T} + e^{-3(\epsilon_{p} + \mu)/T} \right]$$

(ほぼ)同時にふたつの相転移が起きる

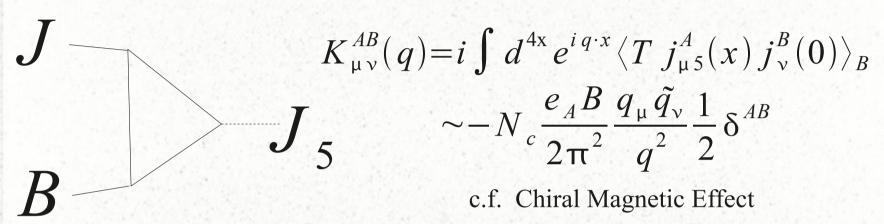


クエンチ極限で $T_d \sim 270\,\mathrm{MeV}$ カイラル模型で $T_\chi \sim 150\,\mathrm{MeV}$

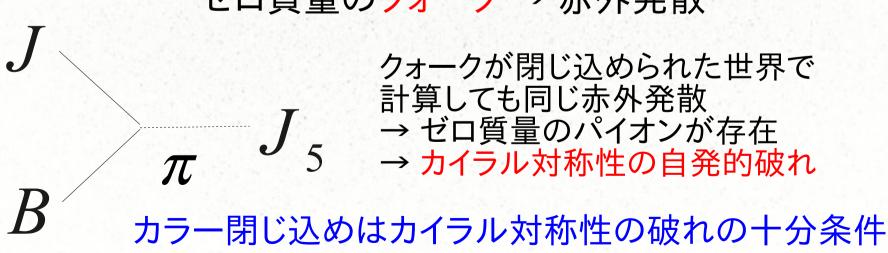
$$T_d \simeq T_{\chi}$$

閉じ込めとカイラルの関係

Anomaly Matching Condition ('t Hooft)

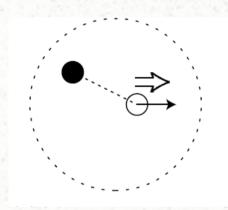


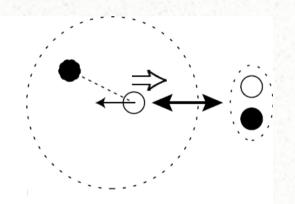
ゼロ質量のクォーク → 赤外発散



直感的な関係

単純なポテンシャル・クォーク模型

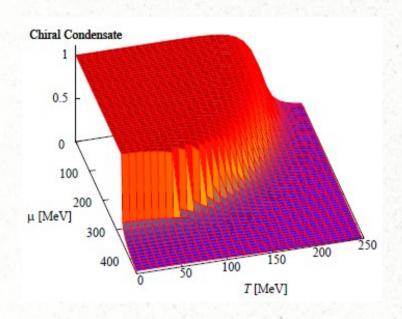


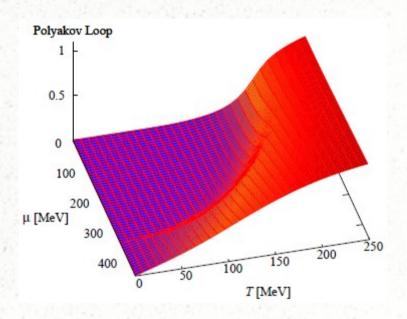


クォーク・反クォークがS波ポテンシャルで束縛 閉じ込め → クォークは運動方向を変える 右巻き・左巻きが入れ替わる → カイラリティが破れる 表面にカイラリティの凝縮がなくてはならない → カイラル対称性は自発的に破れている!

有限密度での秩序変数

カイラル凝縮とPolyakovループ

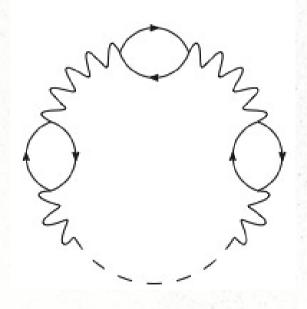




実は今日ではこれらの結果はあまり信頼できるとは 考えられていない → 入っていないダイヤグラムの効果

クォーク分極効果

グルーオンは直接、化学ポテンシャルを感じないが、クォーク分極を通して、間接的に 感じることができる



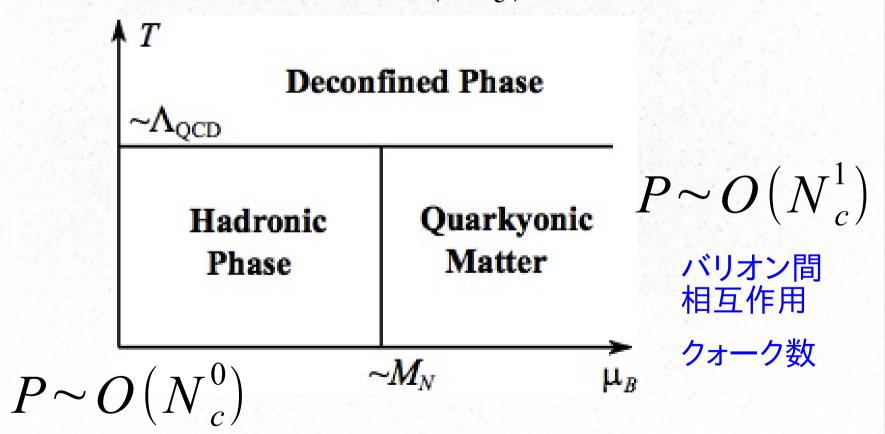
Vandermondeポテンシャルが 密度効果を受ける

このような分極効果はカラー数 が大きい極限で落ちる

Large N_c極限による相図研究

Large-N_c QCDの相図

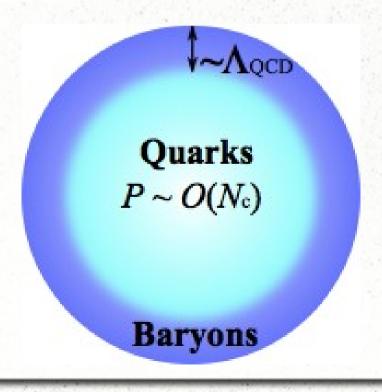
$$P \sim O(N_c^2)$$

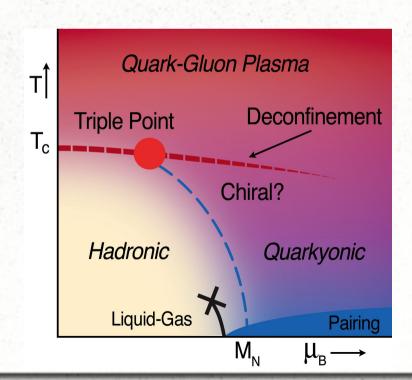


直感的な理解

Fermi面の内部はクォーク、表面付近の励起は閉じ込められたバリオンになっている

カイラル対称性は非一様に破れている





まとめ

- QCD相転移
 - 非閉じ込め相転移 Polyakovループ
 - カイラル相転移 カイラル凝縮
- ・有限密度の問題はまだ未解決
 - QCD臨界点はあるのか?
 - 非一様カイラル凝縮はあるのか?
 - Quarkyonic Matterはあるのか?
- 汎関数的な方法が急速に整備されつつある
 - 汎関数繰り込み群
 - Dyson-Schwinger方程式