

# 線形シグマ模型を用いた‘WZW’項の構成 と有限温度における $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ の解析

## 目次

1. 導入
2. 模型
3. 結果
4. まとめ

名古屋大学H研

D1 福田恭平（共同研究者：原田正康）

1. 導入

QCD

摂動的QCD

カイラル対称

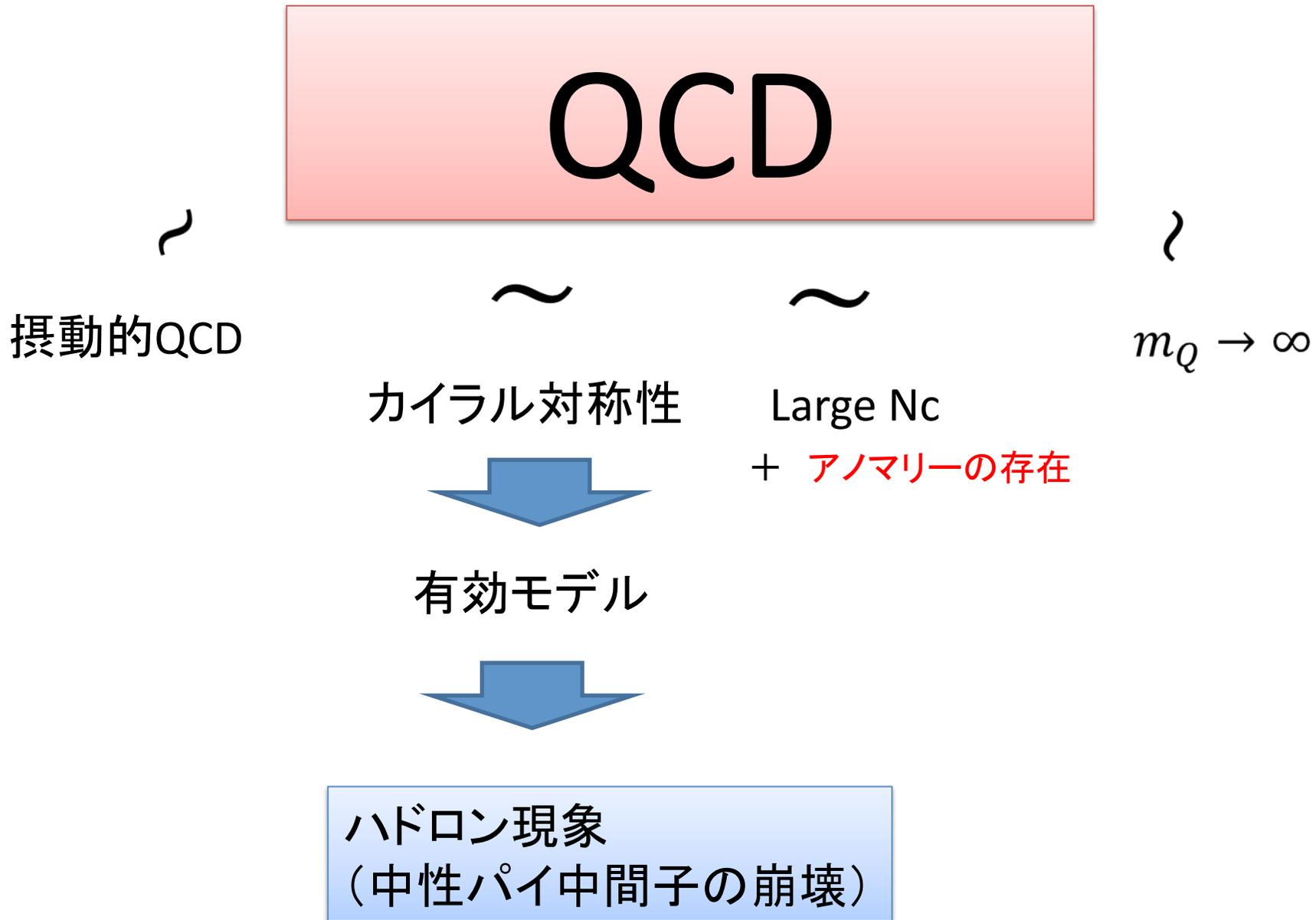
large Nc

$m_Q \rightarrow \infty$

格子QCDによる計算

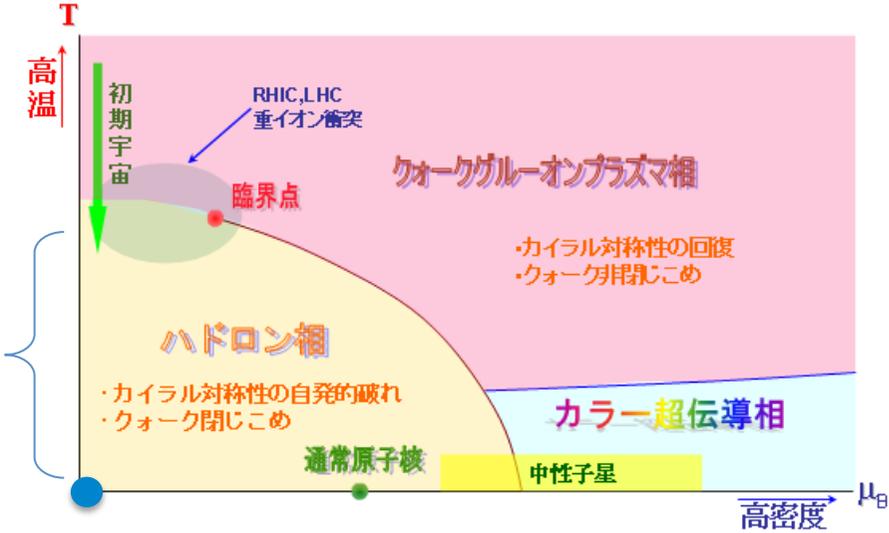
ハドロン現象

本研究では...

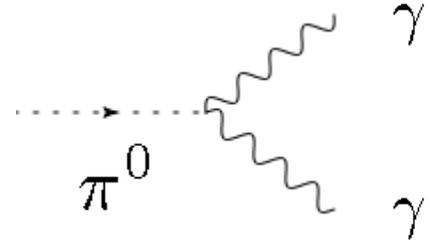


# アノマリーとパイ中間子の崩壊 $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ の関係

- 仮定
1. パイ中間子がNGボソン
  2. QCDにアノマリーが存在

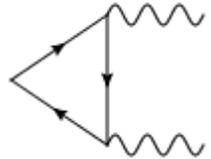


## ゼロ温度の場合



南部-Goldstoneボソン

=



アノマリー(量子補正による対称性の破れ)

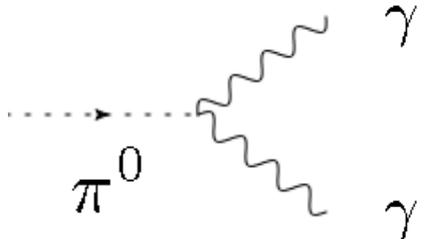
理論値

$$\Gamma(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma) \cong 7.6 \text{ eV}$$

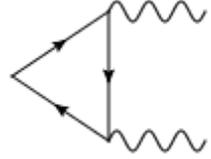
実験値

$$\Gamma(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma) \cong 7.48 \pm 0.32 \text{ eV}$$

## 有限温度の場合



=

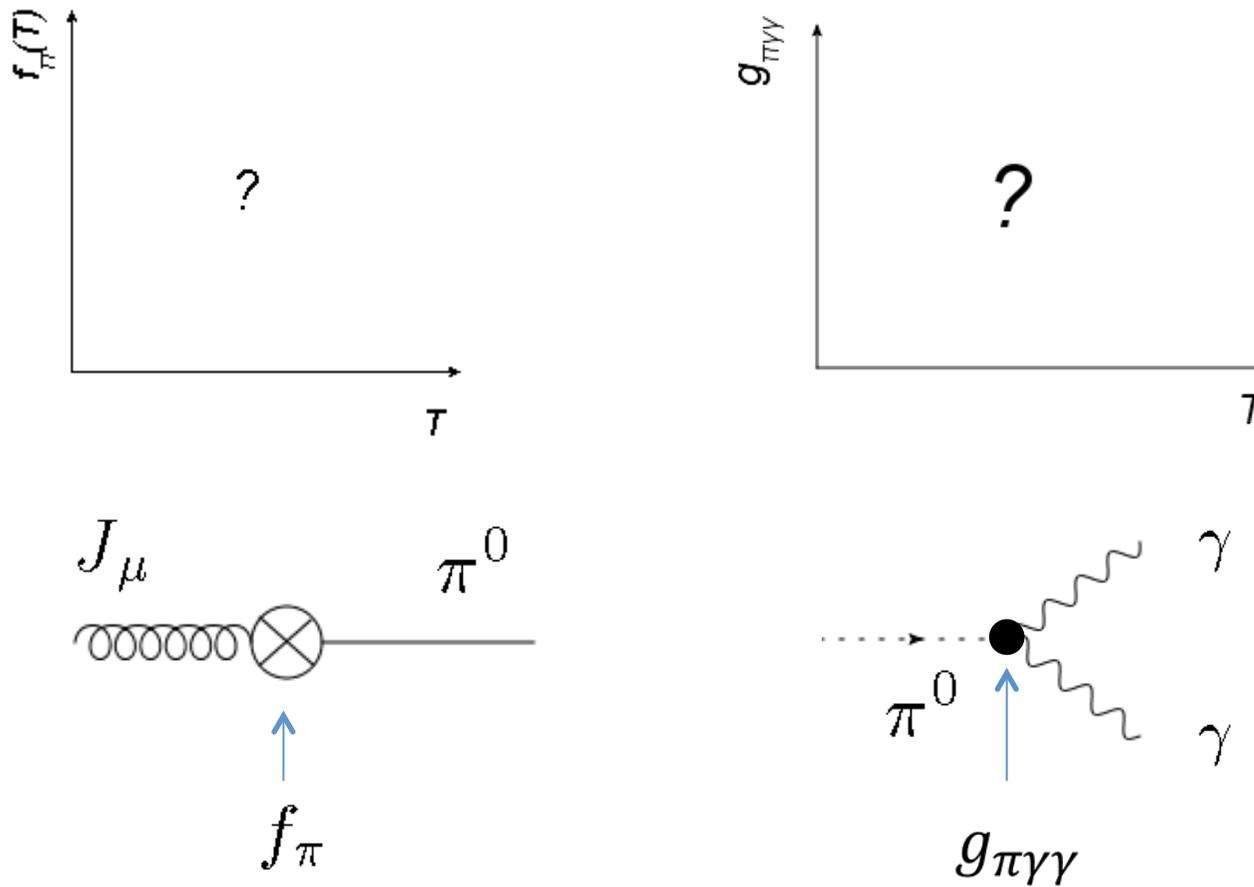


+

温度に依存する量

## ★本研究の目的

- 有効モデルを構成し、 $\pi^0$ 崩壊の温度依存性を調べる
- カイラル対称性が回復するシグナルが見えるか調べる

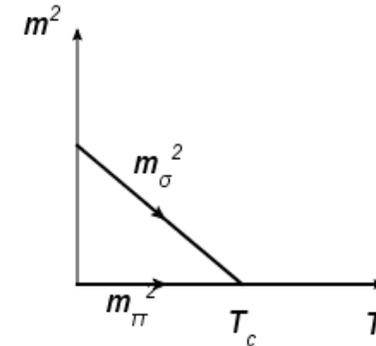


## 2. 模型

### 有効モデルの考え方

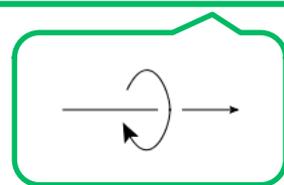
もとの理論(QCD)のもつ(近似的)性質を保つ作用を用いて摂動的に計算する。

- I. カイラル対称性の自発的破れ
  - II. アノマリーの存在
- + 有限温度で軽くなるシグマ中間子を含む

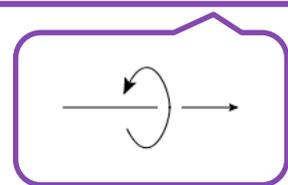


### I. カイラル対称性の自発的破れ

$$\mathcal{L} = \underbrace{(\bar{u}, \bar{d})_R i \not{\partial} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_R}_{\text{右巻き}} + \underbrace{(\bar{u}, \bar{d})_L i \not{\partial} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L}_{\text{左巻き}} + \dots$$



右巻き



左巻き

カイラル変換  $SU(2)_L \times SU(2)_R$  に対して不変

## II. アノマリーの存在

$\delta\Gamma$  (無限小カイラル変換の作用の変化分)

$$= \left( \text{triangle diagram} \right) + \left( \text{square diagram} \right)$$

$$= \sum_{H=R,L} \frac{-i\epsilon_H}{24\pi^2} \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr} \left[ \Theta_H \left\{ \partial_\mu A_{H\nu} \partial_\rho A_{H\sigma} + \frac{1}{2} \partial_\mu (A_{H\nu} A_{H\rho} A_{H\sigma}) \right\} \right]$$

$$\left( \begin{array}{l} \epsilon_R = +1, \quad \epsilon_L = -1 \\ A_H : \text{カレントと結合している外場} \\ \Theta_H : \text{無限小パラメータ} \end{array} \right)$$

$\neq 0$

## 有効モデルの作用

$M = \sigma + i\vec{\pi} \cdot \vec{\tau}$  ...場としてパイ中間子とシグマ中間子を含んでいる。

$$\Gamma[M, A] = \underbrace{\Gamma_0[M, A]} + \underbrace{\Gamma_{WZW}[M, A]}$$

### 線形シグマ模型の作用

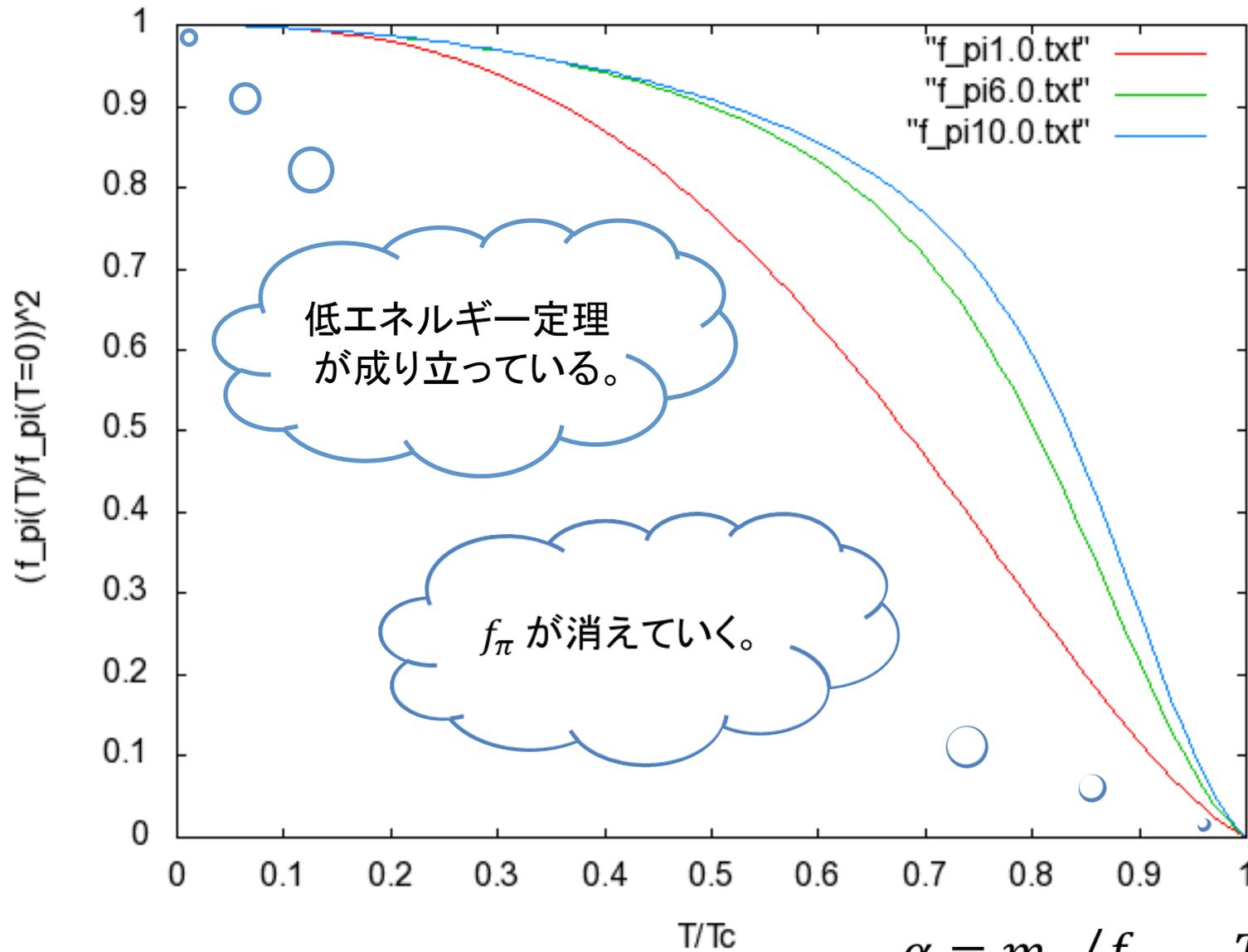
$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} \text{tr}[D_\mu M D^\mu M^\dagger] + \frac{\mu^2}{4} \text{tr}[M M^\dagger] - \frac{\lambda}{16} (\text{tr}[M M^\dagger])^2$$

アノマリー方程式を満たす作用  
(非線形シグマ模型におけるWZW項を応用して構成できる)

$$\delta\Gamma_{WZW} = \left( \begin{array}{c} \text{wavy} \\ \nearrow \\ \text{wavy} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \text{wavy} \quad \text{wavy} \\ \leftarrow \quad \rightarrow \\ \text{wavy} \quad \text{wavy} \end{array} \right)$$

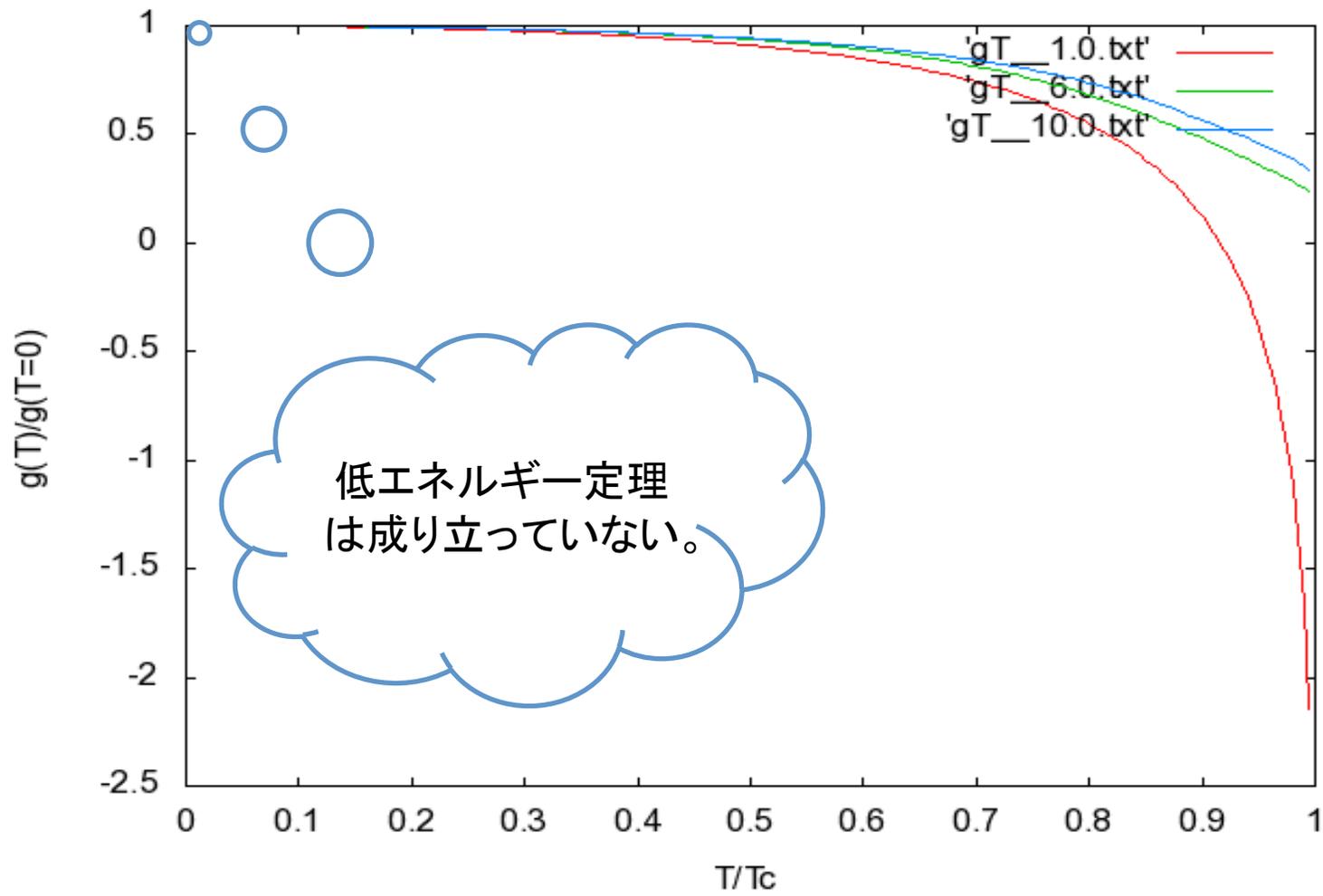
## 4. 結果

$f_\pi(T)$ の温度依存性



$$\alpha = m_\sigma / f_\pi, \quad T_c = \sqrt{2} f_\pi$$

# $g_{\pi\gamma\gamma}(T)$ の温度依存性



## 4. まとめ

- パイ中間子のカイラルパートナーであるシグマ中間子を含めた線形モデルでカイラルアノマリーを再現する項を構成した。
- 線形モデルを用いて  $f_\pi, g_{\pi\gamma\gamma}$  の温度依存性をシグマ中間子の質量依存を含めた形で計算した。
- $f_\pi$  に対して低エネルギー定理は成り立っている。
- $g_{\pi\gamma\gamma}$  に対して低エネルギー定理は成り立たない。

おわり

Back up

局所カイラル変換に対するゲージ場を含む有効モデルの作用

$$\Gamma[M, V, A] = \Gamma_0[M, V, A] + \Gamma_{WZW}[M, V, A]$$

次のスライド

$$\Gamma_0[M, V, A] = \int d^4x \left( \frac{1}{4} \text{tr}[D_\mu M D^\mu M^\dagger] + \frac{\mu^2}{4} \text{tr}[M M^\dagger] - \frac{\lambda}{16} (\text{tr}[M M^\dagger])^2 \right)$$

$$D_\mu M = \partial_\mu M - i[V_\mu, M] + i\{A_\mu, M\}$$



電磁場だけ残した式

$$D_\mu M = \partial_\mu M - ieA_\mu^{\text{em}}[Q, M] \quad Q = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$



非線形シグマ模型におけるWZW termの構成を応用した

$$\Gamma_{WZW}[M, V, A] = \frac{i}{80\pi^2} \int_{M^4 \times [0,1]} d^4x dt \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta\sigma} \text{tr}[\tilde{R}_\alpha \tilde{R}_\beta \tilde{R}_\gamma \tilde{R}_\delta \tilde{R}_\sigma] + \frac{i}{16\pi^2} \int_{M^4} Z$$

$$\begin{aligned} -Z = & \text{tr}[A_R(dUU^{-1})^3 - A_L(dU^{-1}U)^3] \\ & + \text{tr}[(A_R dA_R + dA_R A_R + A_R^3)(U A_L U^{-1} - dUU^{-1}) \\ & \quad - (A_L dA_L + dA_L A_L + A_L^3)(U^{-1} A_R U - dU^{-1}U)] \\ & + \text{tr}[dA_R dU A_L U^{-1} - dA_L dU^{-1} A_R U] \\ & + \frac{1}{2} \text{tr}[A_R dUU^{-1} A_R dUU^{-1} - A_L dU^{-1} U A_L dU^{-1} U] \\ & + \text{tr}[U^{-1} A_R U A_L dU^{-1} dU - U A_L U^{-1} A_R dU dU^{-1}] \\ & - \text{tr}[A_R dUU^{-1} A_R U A_L U^{-1} - A_L dU^{-1} U A_L U^{-1} A_R U] \\ & + \frac{1}{2} \text{tr}[A_R U A_L U^{-1} A_R U A_L U^{-1}], \end{aligned}$$

$$U = \frac{M}{\sqrt{\text{tr}[M^\dagger M]/2}}$$

$$\tilde{R}_\alpha = U^{-1}(x, t) \partial_\alpha U(x, t)$$

$$U(x, t) : 1 \text{ と } U \text{ をつなぐ } U(2) \text{ の元 } \left[ U(x, 0) = 1, U(x, 1) = U \right]$$



電磁場だけ残した式

$$\Gamma_{WZW}[M, A^{\text{em}}] = \frac{i}{80\pi^2} \int_{M^4 \times [0,1]} d^4x dt \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta\sigma} \text{tr}[\tilde{R}_\alpha \tilde{R}_\beta \tilde{R}_\gamma \tilde{R}_\delta \tilde{R}_\sigma] + \int_{M^4} d^4x (\mathcal{L}_{1\gamma} + \mathcal{L}_{2\gamma})$$

$$\mathcal{L}_{1\gamma} = -\frac{i}{16\pi^2} (-ie) \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_\mu^{\text{em}} \text{tr}[Q(L_\nu L_\rho L_\sigma + R_\nu R_\rho R_\sigma)]$$

$$\mathcal{L}_{2\gamma} = \frac{i}{8\pi^2} (-ie)^2 \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu A_\nu^{\text{em}} A_\rho^{\text{em}} \text{tr}[Q^2(L_\sigma + R_\sigma) + \frac{1}{2}(UQU^{-1}QL_\sigma + U^{-1}QUQR_\sigma)].$$

$$Q = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

■ シグマ中間子の期待値  $v(T)$

$$\langle \sigma \rangle = -(\lambda v(T)^2 - \mu^2)v(T) - 3\lambda v(T)(\hat{L}_{10}^2 + L_{01}^2) \quad \longrightarrow \quad v(T)^2 = \frac{\mu^2}{\lambda} \left(1 - 3\frac{\lambda}{\mu^2}(\hat{L}_{10}^2 + L_{01}^2)\right)$$

$$\langle \sigma \rangle = 0$$

■  $T_c$ の決め方

$$v(T) = 0 \quad \longrightarrow \quad T_c = \sqrt{2}f_\pi$$

□  $f_\pi(T)$  の定義

軸性カレントの2点Green関数から  $f_\pi(T)$  を読み取る。

$$G_{\mu\nu}^{ab} = \langle J_{5\mu}^a J_{5\nu}^b \rangle = \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta A^{a\mu} \delta A^{b\nu}} \Big|_{V=A=0}$$

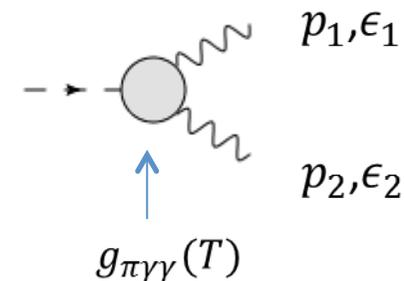
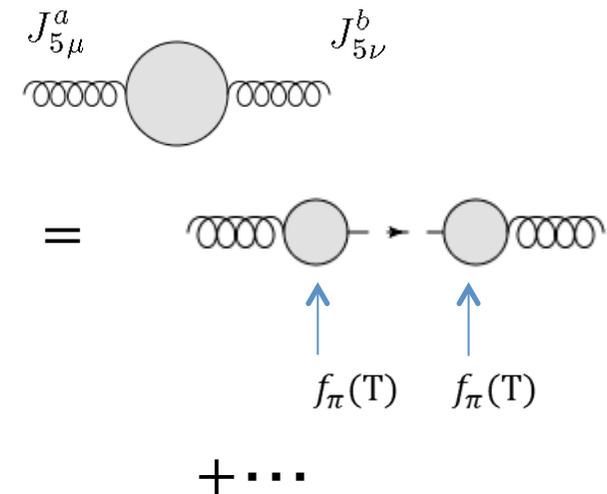
$$= \delta^{ab} (G_L P_{L\mu\nu} + G_T P_{T\mu\nu})$$

$$G_L = f_\pi(T)^2 \frac{(p_0)^2 - \vec{p}^2}{-(p_0)^2 + v_\pi^2 \vec{p}^2}$$

ただし、 $p_0 = -2\pi i n T$  として解析接続をしている。

□  $g_{\pi\gamma\gamma}(T)$  の定義

$$\mathcal{M}_{\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma} = g_{\pi\gamma\gamma}(T) \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_{1\mu} \vec{\epsilon}_\nu(p_1) p_{2\rho} \vec{\epsilon}_\sigma(p_2)$$



□  $f_\pi(T)$  の定義

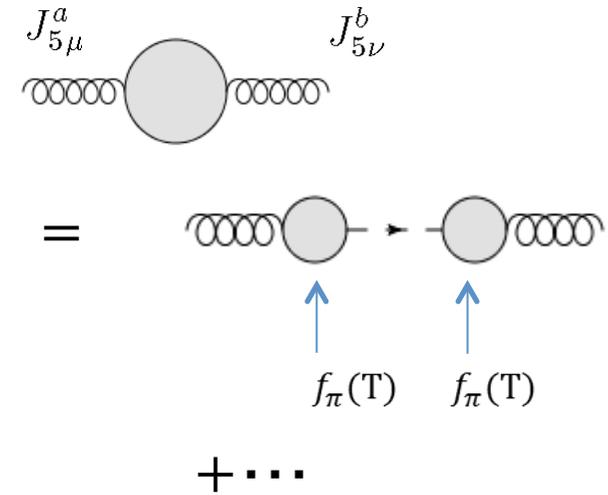
軸性カレントの2点Green関数から  $f_\pi(T)$  を読み取る。

$$G_{\mu\nu}^{ab} = \langle J_{5\mu}^a J_{5\nu}^b \rangle = \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta A^{a\mu} \delta A^{b\nu}} \Big|_{V=A=0}$$

$$= \delta^{ab} (G_L P_{L\mu\nu} + G_T P_{T\mu\nu})$$

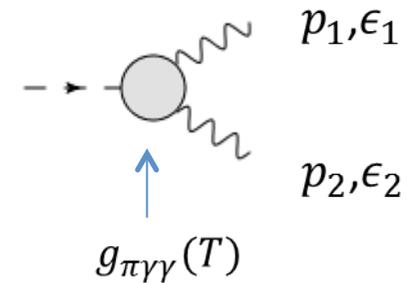
$$G_L = f_\pi(T)^2 \frac{(p_0)^2 - \vec{p}^2}{-(p_0)^2 + v_\pi^2 \vec{p}^2}$$

ただし、 $p_0 = -2\pi i n T$  として解析接続をしている。



□  $g_{\pi\gamma\gamma}(T)$  の定義

$$\mathcal{M}_{\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma} = g_{\pi\gamma\gamma}(T) \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_{1\mu} \vec{\epsilon}_\nu(p_1) p_{2\rho} \vec{\epsilon}_\sigma(p_2)$$



■ 波動関数のくりこみ

$$Z_\pi^{-1} = 1 + \lambda \cdot \frac{1}{2\mu^4} (\hat{L}_{1-2}^2 + 3\hat{L}_{-10}^2 - L_{-21}^2 - 3L_{0-1}^2)$$

■ 崩壊定数のくりこみ

$$f_\pi(T)^2 = Z_\pi v(T)^2 (1 + 4\lambda(A - X - Y))$$

■ 結合定数のくりこみ

$$g_{\pi\gamma\gamma}(T) = \frac{e^2 \sqrt{Z_\pi}}{4\pi^2 v(T)} \left( 1 + 2\lambda A - \frac{3}{v(T)^2} \hat{L}_{10}^2 + \frac{1}{v(T)^2} L_{01}^2 \right)$$

➤ 各項の定義

$$m_1^2 = m_\pi = 0, \quad m_2^2 = m_\sigma^2(T) = m_\sigma^2 \left( 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^2 \right) \quad \omega = \sqrt{m^2 + k^2}$$

$$L_{l_1 l_2}^n(M_1, M_2; T) = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{\omega_2/T} - 1} \frac{|\vec{k}|^{n-2}}{\omega_1^{l_1} \omega_2^{l_2}}$$

$$\hat{L}_{l_1 l_2}^n(M_1, M_2; T) = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{\omega_1/T} - 1} \frac{|\vec{k}|^{n-2}}{\omega_1^{l_1} \omega_2^{l_2}}$$

を用いて書かれている。

$$\left( \begin{array}{l} A = \frac{1}{\Delta m^2} (\hat{L}_{10}^2 - L_{01}^2) \\ B = \frac{1}{(\Delta m^2)^3} (\hat{L}_{1-2}^2 + 3\hat{L}_{-10}^2 - L_{-21}^2 - 3L_{0-1}^2) \\ X = -\frac{1}{(\Delta m^2)^2} (\hat{L}_{-10}^2 - L_{0-1}^2) - \frac{1}{\Delta m^2} L_{01}^2 \\ Y = \frac{1}{3} \frac{1}{\Delta m^2} (\hat{L}_{12}^4 + L_{21}^4) + \frac{1}{3} \frac{1}{(\Delta m^2)^2} (\hat{L}_{10}^4 + \hat{L}_{-12}^4 - L_{01}^4 - L_{2-1}^4) \end{array} \right)$$