

高密度2 color-QCDにおける
カイラルランダム行列理論
(Phys.Rev.D 81,081701のReview)

京都大学 M1

酒井俊太郎

高密度QCDは...

- クォーク対凝縮によるColor超伝導が期待される
- カイラル凝縮 Σ ではなく、BCSギャップ Δ で特徴付けられる
- 今回の2 color, even N_f では対称性の破れ方等違う点もあるが、この点では同じということがわかる

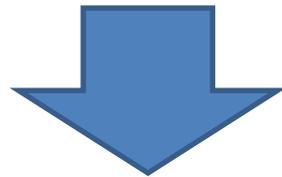
(2 color, even N_f (N_f : フレーバー数) はlattice QCDとの比較が可能)

カイラルランダム行列理論(RMT)とは

- QCD分配関数においてディラック演算子の対称性のみを残して行列要素をランダムに扱う
- 元の理論とはmicroscopic spectral functionの一致が期待される
 - ✧ microscopic spectral function:
ディラックスペクトルを平均準位間隔のスケールに変換したもの

具体的には...

$$Z_{QCD} = \int DA \prod_{f=1}^{N_f} \det(\gamma_\mu D_\mu + m_f) e^{-\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2}$$



$$Z_{RMT} = \int dW \prod_{f=1}^{N_f} \det(D(W) + m_f) e^{-N \text{tr}\{v(WW^\dagger)\}}$$

$$D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu$$

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{ig} [D_\mu, D_\nu]$$

W: $N \times (N+v)$ 列

v: WW^\dagger の関数

N_f : flavors数

特に、 $v(WW^\dagger) = WW^\dagger$ と
取ることができ、
ガウス積分になる

※ $D(W)$ の構成は Z_{QCD} のディラック演算子の対称性を
反映する形で行われる

カイラルランダム行列理論の有効性

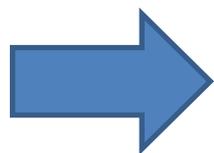
- RMT

L_{QCD} においてディラック演算子の対称性のみを考えた理論

↑
時空によらないため
微分項は含まない

- カイラルラグランジアン

L_{QCD} の対称性に着目して構成したもの



Z_{chiral} と、微分項が落とせる領域で等価性が言えればいい

※ Z_{chiral} : カイラルラグランジアン L_{chiral} での分配関数

Z_{RMT} と Z_{chiral} の等価性(流れ)

▪ Z_{RMT}

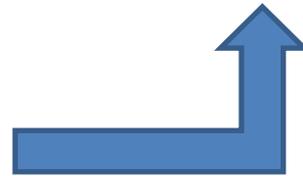
- ① ディラック演算子のもつ
対称性の確認
- ② 対称性からの
 Z_{RMT} の構成
- ③ Z_{RMT} 積分の評価

▪ Z_{chiral}

- ①' 期待される対称性の
破れ方の確認
- ②' カイラルラグランジアン
 L_{chiral} の構成
- ③' Z_{chiral} の評価



④ これらの比較



2 color,有限密度での対称性は...

$D(\mu) = \gamma_\mu D_\mu + \mu \gamma_0$ と置くと、

- ① $\{D(\mu), \gamma^5\} = 0$ → 対角項=0
- ② $D(\mu) \tau_2 C \gamma^5 = \tau_2 C \gamma^5 D(\mu)^*$ → 行列要素が実数

2 colorであることによる

※ $D(\mu)^\dagger = \pm D(\mu)$ (エルミート性) のような対称性はない

以上の対称性を考慮すると、

$$Z_{RMT}(\hat{\mu}, M, \nu) = \int dC dD e^{-2N \text{tr}(CC^T + DD^T)} \det \begin{pmatrix} M & C + \hat{\mu} D \\ -C^T + \hat{\mu} D^T & M \end{pmatrix}$$

C, D: $N \times (N + \nu)$ 実行列 &

L, K: $N_f \times N_f$ 複素反対称行列

P: $N_f \times N_f$ 複素行列

$$M = \begin{pmatrix} 0 & m^T \\ m & 0 \end{pmatrix}$$

※ $D(\mu)$ は Chiral Base $\begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix}$ での Block 表示

これは、 $\hat{\mu} = 1, \nu = 0$ のとき、
変数変換によって

$$Z_{RMT}(1, m, 0) = \int dA dB \exp[-N(AA^T + BB^T)] \det \begin{pmatrix} m & A \\ B & m \end{pmatrix}$$

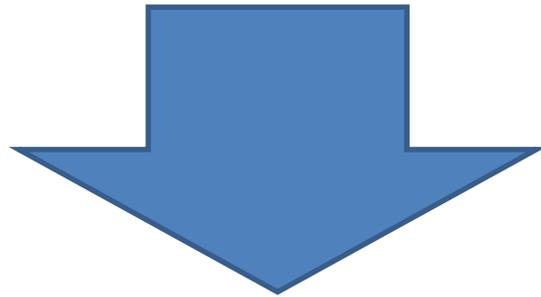
となり、明らかな非エルミート性を示す

$\mu=0$ の時との大きな違い

(ここで、 $A, B: N \times N$ 実行列)

$\hat{\mu} = 1, \nu = 0$ のとき、

分配関数を $N \rightarrow \infty$ で積分を評価



$$Z_{RMT}(1, M, 0) \approx \int_{U(1)} dA \int_{SU(N_f)} dU dV \exp[-2N \operatorname{Re}\{tr(A^2 m U I U^T m^T V^* I V^\dagger)\}]$$

ここで、 $I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

2 color 高密度で予想されている

$$SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R \times U(1)_B \times U(1)_A \rightarrow Sp(N_f)_L \times Sp(N_f)_R$$

の対称性の破れでの分配関数は

$$Z_{chiral} \approx \int_{Sp(N_f)} d\tilde{U} d\tilde{V} \exp\left[\frac{3}{4\pi^2} V \Delta^2 \text{tr}\{m\tilde{U} I \tilde{U}^T m\tilde{V} I \tilde{V}^*\}\right]$$

微分項が落とせるような領域で

$$U_i = \exp\left(\frac{i\pi^a X_a}{2\sqrt{N_f} f_\pi}\right) \quad (X_a : SU(N_f) / Sp(N_f) \text{の生成子})$$

Z_{RMT} と Z_{chiral} を比較して、

$$Nm^2 \leftrightarrow \frac{3}{4\pi^2} V \Delta^2 \tilde{m}^2$$

なるパラメータの対応付けで

Z_{RMT} は高密度で有効

今回構成した $Z_{RMT}(\hat{\mu}, M, \nu)$ は 低密度でも有効

低密度: $N\mu^2$:fixed, $N \gg 1$

$$Z_{RMT} \approx \int d\theta e^{i\nu\theta} \int_{SU(2N_f)} dU \exp\left[\frac{1}{2} N \hat{\mu}^2 \text{tr}\{UIU^T B^T (UIU^T)^\dagger B\} + 2N \text{Re} \text{tr}(e^{i\frac{\theta}{N_f}} UIU^T M^\dagger)\right]$$

$$Z_{chiral}(\nu) \approx \int d\theta e^{i\nu\theta} \int_{SU(2N_f)} d\tilde{U} \exp[Vf_\pi^2 \mu^2 \text{tr}\{\tilde{U} I \tilde{U}^T \times \\ \times B^T (\tilde{U} I \tilde{U}^T)^\dagger B + BB\} - f_\pi^2 m_\pi^2 \text{tr}(m \tilde{U} I \tilde{U}^T)]$$

(Z_{chiral} の対称性の破れは、 $SU(2N_f) \rightarrow Sp(2N_f)$)

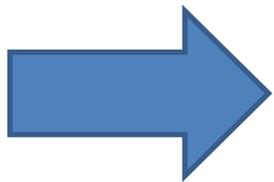
これら Z_{RMT} 、 Z_{chiral} の比較

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

これらと比較すると、

$$2NM \leftrightarrow Vf_{\pi}^2 m_{\pi}^2, \frac{1}{2} N \hat{\mu}^2 \leftrightarrow Vf_{\pi}^2 \mu^2$$

このようなパラメータの対応付けによって、
これらが同じ物理を表すということが分かる



低密度領域でも有効

まとめ

- 有限密度での L_{QCD} 対称性より高密度でのchiral Lagrangianを構成し、 $\hat{\mu}=1, \nu=0$ において予想される対称性とその破れから構成した高密度でのchiral Lagrangianとの一致をみることができた
- 特に、有限密度効果はRMTでは非エルミート性という形で現れることが分かった
- 極限の取り方によって低密度でのchiral Lagrangianも再現できることが確認できた

終

※今回の発表はPhys.Rev.D 81,081701

Chiral random matrix theory

for two-color QCD at high density

(Takuya Kanazawa, Tilo Wettig,

and Naoki Yamamoto)

のReview発表である

Microscopic spectral functionについて

- $\mu=0$

$$\rho_s(z) = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V\Sigma} \rho\left(\frac{z}{V\Sigma}\right)$$

- $\mu \gg 1$

$$\rho_s(z) = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{\pi^2}{3\Delta^2 V} \rho\left(\frac{\pi z}{\sqrt{3\Delta^2 V}}\right)$$

$\lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V}$ より、Dirac spectrumのIR領域を見ている

(無次元量で同じ形になるように変数をrescalingして得られる)

補助場の導入、Hubbard変換等によって

$$Z_{RMT} = \int dK dL dP e^{-8N(KK^\dagger + LL^\dagger + 2PP^\dagger)}$$

$$\times Pf^N \left(\begin{array}{cc} \sqrt{1 + \hat{\mu}^2} L^\dagger & -\sqrt{1 - \hat{\mu}^2} P^T - \frac{m^*}{2} \\ \sqrt{1 - \hat{\mu}^2} P^* - \frac{m^T}{2} & \sqrt{1 + \hat{\mu}^2} K \end{array} \right)$$

$$\times Pf^{N+\nu} \left(\begin{array}{cc} \sqrt{1 + \hat{\mu}^2} K^\dagger & -\sqrt{1 - \hat{\mu}^2} P^* - \frac{m^T}{2} \\ \sqrt{1 - \hat{\mu}^2} P^\dagger - \frac{m}{2} & \sqrt{1 + \hat{\mu}^2} L \end{array} \right)$$

ν について

- 固有値0の数に対応
- QCDでは、 $FF\sim/16\pi^2$ で与えられる整数
- QCDにおいては、topological chargeという位相不変量になっていて、gauge変換では異なる配位に移り変わらない

2 color high densityでの L_{chiral}

$$L_{chiral} = \frac{f_\pi}{2} \{ |\partial_0 V|^2 - v_H^2 |\partial_i V|^2 \} + \frac{N_f f_\eta^2}{2} \{ |\partial_0 A|^2 - v_\eta^2 |\partial_i A|^2 \} \\ + \frac{f_\pi^2}{2} tr \{ |\partial_0 \Sigma_L|^2 - v_\pi^2 |\partial_i \Sigma_L|^2 + (L \leftrightarrow R) \} - c\Delta^2 \{ A^2 tr(\tilde{m} \Sigma_R \tilde{m}^T \Sigma_L) + c.c. \}$$

$$\Sigma_i = U_i I U_i^T \quad (i = L, R)$$

Chiral Lagrangianにおいて 微分項が無視できる領域

- $\mu=0$ のとき $\tilde{m} \ll \frac{1}{L} \ll \Lambda$
- $\mu \gg 1$ のとき $\tilde{m} \ll \frac{1}{L} \ll \Delta$
- $\mu \ll 1$ のとき $\mu \ll \frac{1}{L} \ll \Lambda$

$m\sim$: NG boson mass

L : 系の長さ

Δ : gap (diquark condensateのorder parameter(に關係))

Λ : hadron mass scale ($\sim 1\text{GeV}$)

μ : chemical potential

Δ (BCS gap)について

- Δ は μ に依存する:

$$\Delta \sim \mu e^{-1/g}$$

- Δ はdiquark condensate に関する:

$$\langle qq \rangle \sim \mu^2 \Delta / g$$

- 高密度1 gluon exchangeの計算によって導出される

HS(Hubbard-Stratonovitch) 変換

$$\exp\left[\frac{1}{4\alpha} CC^T\right] = \int D\sigma \exp\left[-\alpha \text{tr} \sigma \sigma^T - \text{tr} C \sigma^T\right]$$

なる恒等式を用いて、今回はflavorの添字を行列として
Fermionの4点関数を2点関数に置き換えた

例： $\mu, T=0$ での Z_{RMT}

▪ Z_{RMT}

- ① ディラック演算子のもつ
対称性の確認
- ② 対称性からの
 Z_{RMT} の構成
- ③ Z_{RMT} 積分の評価

▪ Z_{chiral}

- ①' L_{QCD} の持つ
対称性の確認
- ②' カイラルラグランジアン
 L_{chiral} の構成
- ③' $Z_{\text{chiral}} = \int dU e^{-\int d^4x L_{\text{chiral}}}$ の評価



④ これらの比較



(有限密度でも、同じ流れで等価性が示される)

もとの Z_{QCD} での $\gamma_\mu D_\mu$ の対称性

① $\{\gamma_\mu D_\mu, \gamma^5\} = 0 \quad \rightarrow$ 対角成分が0

② $(\gamma_\mu D_\mu)^\dagger = -\gamma_\mu D_\mu \quad \rightarrow$ 反エルミート性



$$D(W) = \begin{pmatrix} 0 & iW \\ iW^\dagger & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore Z_{\text{RMT}} = \int dW \det \begin{pmatrix} m1 & iW \\ iW^\dagger & m1 \end{pmatrix} e^{-NWW^\dagger}$$

※ $D(W)$ はChiralBase $\begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix}$ でのBlock表示

これは $N \rightarrow \infty$ (～体積無限大)の時に
積分が部分的に評価できて

$$Z_{RMT}(v) \approx \int_{U(N_f)} dU \det^v U e^{N \Sigma \operatorname{Re}\{tr(mU)\}}$$

- ・補助場の導入
- ・ハバード変換(Bosonization)
- ・鞍点法
- ・変数変換 etc.

一方、 $SU(N_f) \times SU(N_f) \rightarrow SU(N_f)$
の対称性を考えたchiral Lagrangianは...

$$L_{chiral} = \frac{f_\pi^2}{4} \text{tr}(\partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger) - \frac{\Sigma}{2} \text{Re}\{\text{tr}(\tilde{m}U)\}$$



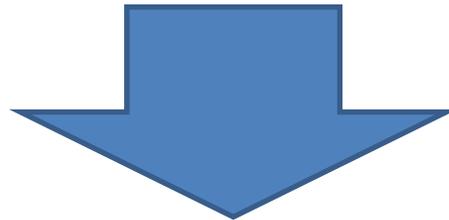
微分項が落とせる領域で

$$Z_{chiral}(v) \approx \int_{U(N_f)} d\tilde{U} \det^v \tilde{U} \exp[V\Sigma \text{Re}\{\text{tr}(\tilde{m}\tilde{U})\}]$$

以上より Z_{RMT} と Z_{chiral} は、

$$Nm \leftrightarrow V \Sigma \tilde{m}$$

なる、パラメータの対応づけを行えば同じもの



Z_{RMT} と Z_{chiral} は同じ物理を表している

→同様にして高密度に応用