

ランダム行列モデルによる 有限温度密度 $2+1$ フレーバQCDの研究

TS, H. Fujii & M. Ohtani, PRD 80, 034007 (2009)
H. Fujii & TS, PRD 81, 037502 (2010)

佐野 崇

QCD相図と臨界点

2

素朴には...

- ・ 高温低密度: クロスオーバ(IQCD)
- ・ 低温高密度: 一次相転移(NJL模型)

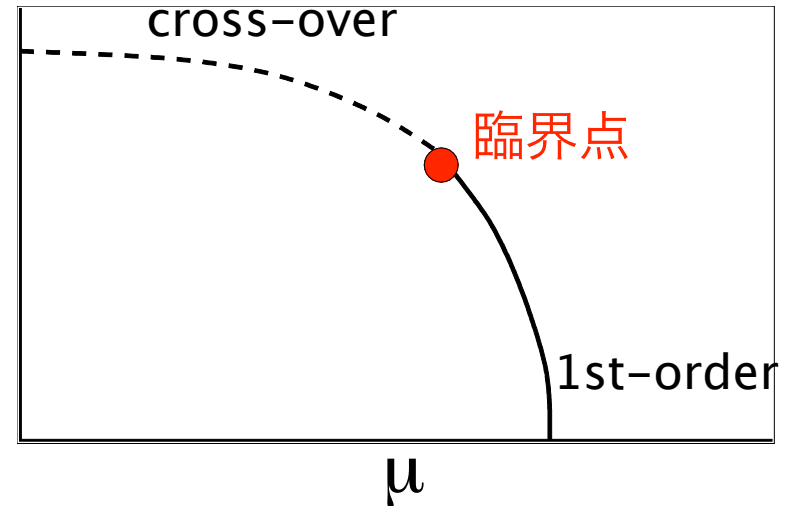


Asakawa & Yazaki (1989)

一次相転移線の端点としての**臨界点**

普遍的な結果？ QCDでは？

T



- ・ 高密度での一次相転移の危うさ

- ・ IQCD+虚数化学ポテンシャル de Forcrand & Philipsen (2007)
- ・ NJL模型+vector相互作用 Fukushima (2008)

QCDの一種の模型であるランダム行列(RM)ではどうか？

Columbiaプロットと臨界面

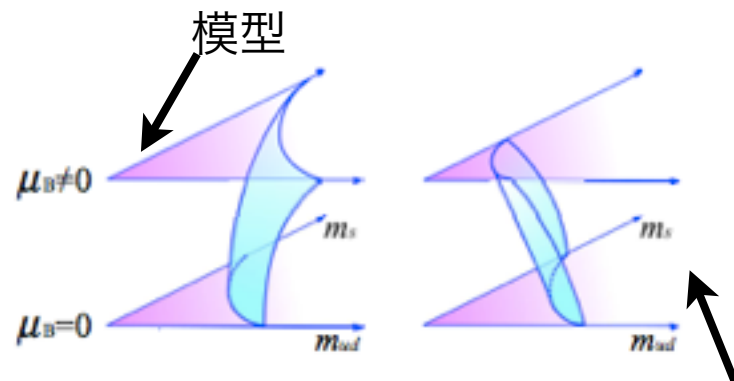
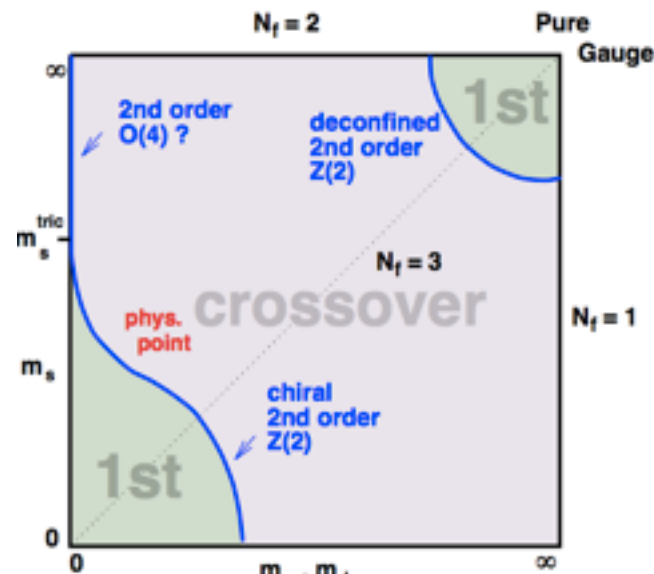
3

□ Columbiaプロット

- 与えられたクォーク質量 m_{ud} , m_s に対して温度 T を変えたときに起きる相転移の次数
- $N_f=3$ で一次、 $N_f=2$ で二次($m=0$)
- $\mu \neq 0$ へ拡張できる
- 臨界面=二次相転移線のつらなり
- 臨界面の傾き方で相図上の臨界点の存否が決まる

RM模型で臨界面はどうなる？

Pisarski & Wilczek (1984)



de Forcrand & Philipsen (2007)

目次

4

1. QCD相図と臨界点
2. カイラルランダム行列模型
3. 行列式相互作用をとりこんだChRM模型
4. 有限温度密度 $2+1$ フレーバへの拡張
5. 結論

2. カイラルランダム行列模型

QCD 分配関数と ChRM 模型

6

- QCD分配関数

$$Z_{\text{QCD}} = \int \mathcal{D}A_\mu \prod_{f=1}^{N_f} \det(D + m_f) e^{-S_{\text{YM}}[A_\mu]}$$

- Dirac演算子をtruncate cf. Banks-Casher関係式

$$D = \begin{pmatrix} 0 & iW \\ iW^\dagger & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{array}{l} 1. \text{反エルミート性} \\ 2. \text{カイラル対称性} \end{array} \quad W \in \mathbf{C}^{N \times N}$$

(Nは体積に比例)

$$Z^{\text{RM}} = \int dW \prod_{f=1}^{N_f} \det(D + m_f) e^{-N \Sigma^2 \text{tr} W^\dagger W}$$

 (Gaussian) ChRM模型

Shuryak & Verbaarschot (1993)

ChRM模型の真空状態

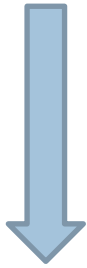
7

$$Z^{\text{RM}} = \int dW \prod_{f=1}^{N_f} \det(D + m_f) e^{-N \Sigma^2 \text{tr} W^\dagger W}$$

ChRM模型の真空状態

7

$$Z^{\text{RM}} = \int dW \prod_{f=1}^{N_f} \det(D + m_f) e^{-N \Sigma^2 \text{tr} W^\dagger W}$$

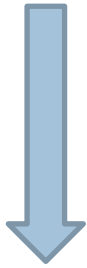


1. 行列式をフェルミオン積分で表示
2. W について積分
3. フェルミオン4点頂点をボゾン場を導入して除去
4. フェルミオン二次形式を積分

ChRM模型の真空状態

7

$$Z^{\text{RM}} = \int dW \prod_{f=1}^{N_f} \det(D + m_f) e^{-N \Sigma^2 \text{tr} W^\dagger W}$$



1. 行列式をフェルミオン積分で表示

2. W について積分

3. フェルミオン4点頂点をボゾン場を導入して除去

4. フェルミオン二次形式を積分

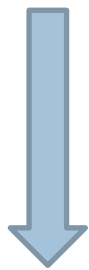
$$\bar{\psi}\psi \sim S = \text{diag}(\phi, \dots, \phi)$$

$$Z^{\text{RM}} = \int dS e^{-N \Sigma^2 \text{tr} S^\dagger S} \det^N [(S + m)(S^\dagger + m)] \equiv \int dS e^{-2N \Omega(S)}$$

ChRM模型の真空状態

7

$$Z^{\text{RM}} = \int dW \prod_{f=1}^{N_f} \det(D + m_f) e^{-N \Sigma^2 \text{tr} W^\dagger W}$$



1. 行列式をフェルミオン積分で表示
2. W について積分
3. フェルミオン4点頂点をボゾン場を導入して除去
4. フェルミオン二次形式を積分

$$\bar{\psi}\psi \sim S = \text{diag}(\phi, \dots, \phi)$$

$$Z^{\text{RM}} = \int dS e^{-N \Sigma^2 \text{tr} S^\dagger S} \det^N [(S + m)(S^\dagger + m)] \equiv \int dS e^{-2N \Omega(S)}$$

- $N \rightarrow \infty$ (熱力学極限)では、鞍点解が基底状態を与える

$$|\langle \bar{\psi}\psi \rangle| = \frac{\partial}{\partial m_f} \log Z^{\text{RM}} = \Sigma^2 \text{tr} \text{Re} \bar{S}_{ff} = \Sigma \neq 0$$

カイラル対称性を自発的に破る真空を記述

有限温度密度相図

8

- 媒質効果=非ランダム外場Halasz et. al. (1998)

有限温度密度相図

8

- 媒質効果=非ランダム外場 Halasz et. al. (1998)

$$D = \begin{pmatrix} 0 & iW + iC \\ iW^\dagger + iC^T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(\mu + iT) \times \mathbf{1}_{N/2}}{0} & 0 \\ 0 & \frac{(\mu - iT) \times \mathbf{1}_{N/2}}{0} \end{pmatrix}$$

有限温度密度相関

8

- 媒質効果=非ランダム外場 Halasz et. al. (1998)

$$D = \begin{pmatrix} 0 & iW + iC \\ iW^\dagger + iC^T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mu + iT) \times \mathbf{1}_{N/2} & 0 \\ 0 & (\mu - iT) \times \mathbf{1}_{N/2} \end{pmatrix}$$

- 二つの最低次松原周波数 $\pm T$
- 荷電共役変換 $\mu \rightarrow -\mu$ 不変

有限温度密度相関

8

- 媒質効果=非ランダム外場 Halasz et. al. (1998)

$$D = \begin{pmatrix} 0 & iW + iC \\ iW^\dagger + iC^T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mu + iT) \times \mathbf{1}_{N/2} & 0 \\ 0 & (\mu - iT) \times \mathbf{1}_{N/2} \end{pmatrix}$$

- 二つの最低次松原周波数 $\pm T$
- 荷電共役変換 $\mu \rightarrow -\mu$ 不変

$$\bar{\psi}\psi \sim S = \text{diag}(\phi, \dots, \phi)$$

$$\Omega = \frac{N_f}{2} \Sigma^2 \phi^2 - \frac{N_f}{4} \log [(\phi + m)^2 - (\mu + iT)^2] + \text{c.c.}$$

有限温度密度相図

8

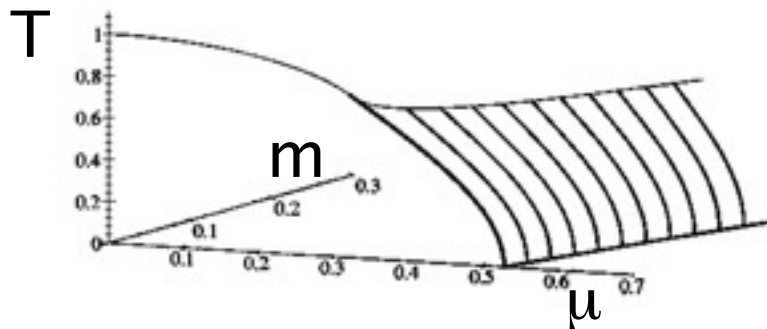
- 媒質効果=非ランダム外場 Halasz et. al. (1998)

$$D = \begin{pmatrix} 0 & iW + iC \\ iW^\dagger + iC^T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mu + iT) \times \mathbf{1}_{N/2} & 0 \\ 0 & (\mu - iT) \times \mathbf{1}_{N/2} \end{pmatrix}$$

- 二つの最低次松原周波数 $\pm T$
- 荷電共役変換 $\mu \rightarrow -\mu$ 不変

$$\bar{\psi}\psi \sim S = \text{diag}(\phi, \dots, \phi)$$

$$\Omega = \frac{N_f}{2} \Sigma^2 \phi^2 - \frac{N_f}{4} \log [(\phi + m)^2 - (\mu + iT)^2] + \text{c.c.}$$



有限温度密度相図

8

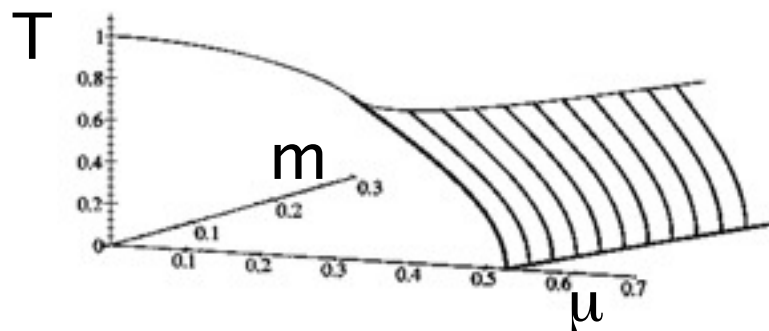
- 媒質効果=非ランダム外場 Halasz et. al. (1998)

$$D = \begin{pmatrix} 0 & iW + iC \\ iW^\dagger + iC^T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mu + iT) \times \mathbf{1}_{N/2} & 0 \\ 0 & (\mu - iT) \times \mathbf{1}_{N/2} \end{pmatrix}$$

- 二つの最低次松原周波数 $\pm T$
- 荷電共役変換 $\mu \rightarrow -\mu$ 不変

$$\bar{\psi}\psi \sim S = \text{diag}(\phi, \dots, \phi)$$

$$\Omega = \frac{N_f}{2} \Sigma^2 \phi^2 - \frac{N_f}{4} \log [(\phi + m)^2 - (\mu + iT)^2] + \text{c.c.}$$



- $m=0$ で三重臨界点
- $m>0$ で臨界点

有限温度密度相図

8

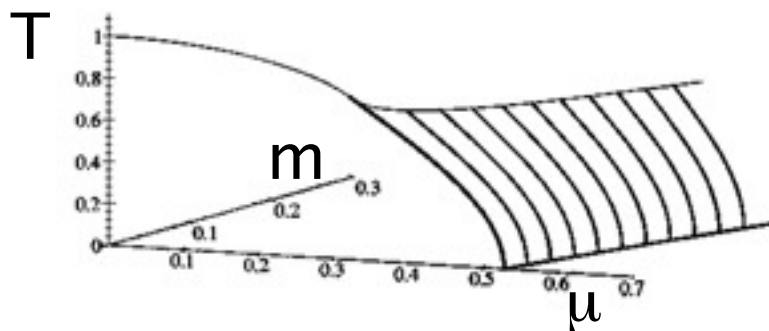
- 媒質効果=非ランダム外場 Halasz et. al. (1998)

$$D = \begin{pmatrix} 0 & iW + iC \\ iW^\dagger + iC^T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mu + iT) \times \mathbf{1}_{N/2} & 0 \\ 0 & (\mu - iT) \times \mathbf{1}_{N/2} \end{pmatrix}$$

- 二つの最低次松原周波数 $\pm T$
- 荷電共役変換 $\mu \rightarrow -\mu$ 不変

$$\bar{\psi}\psi \sim S = \text{diag}(\phi, \dots, \phi)$$

$$\Omega = \frac{N_f}{2} \Sigma^2 \phi^2 - \frac{N_f}{4} \log [(\phi + m)^2 - (\mu + iT)^2] + \text{c.c.}$$



- $m=0$ で三重臨界点
- $m>0$ で臨界点

Nf によらない

→ QCDの模型としては不適當
Columbiaプロットも書けない...

3. 行列式相互作用をとりこんだChRM模型

行列式相互作用をとりこんだChRM模型

10

□ U(1)アノマリー効果を取り込む

TS, H. Fujii & M. Ohtani
(2009)

- インスタントンを考慮する
- インスタントン分布関数を工夫: 安定なポテンシャル

$m=0, \mu=0$ のとき、 $N_f=2$ で二次、

$N_f=3$ で一次相転移を再現した！

RM模型としては初めて

H.Fujii & TS (2010)

4.有限温度密度2+1フレーバへの拡張

$$m = \text{diag}(m_{ud}, m_{ud}, m_s)$$

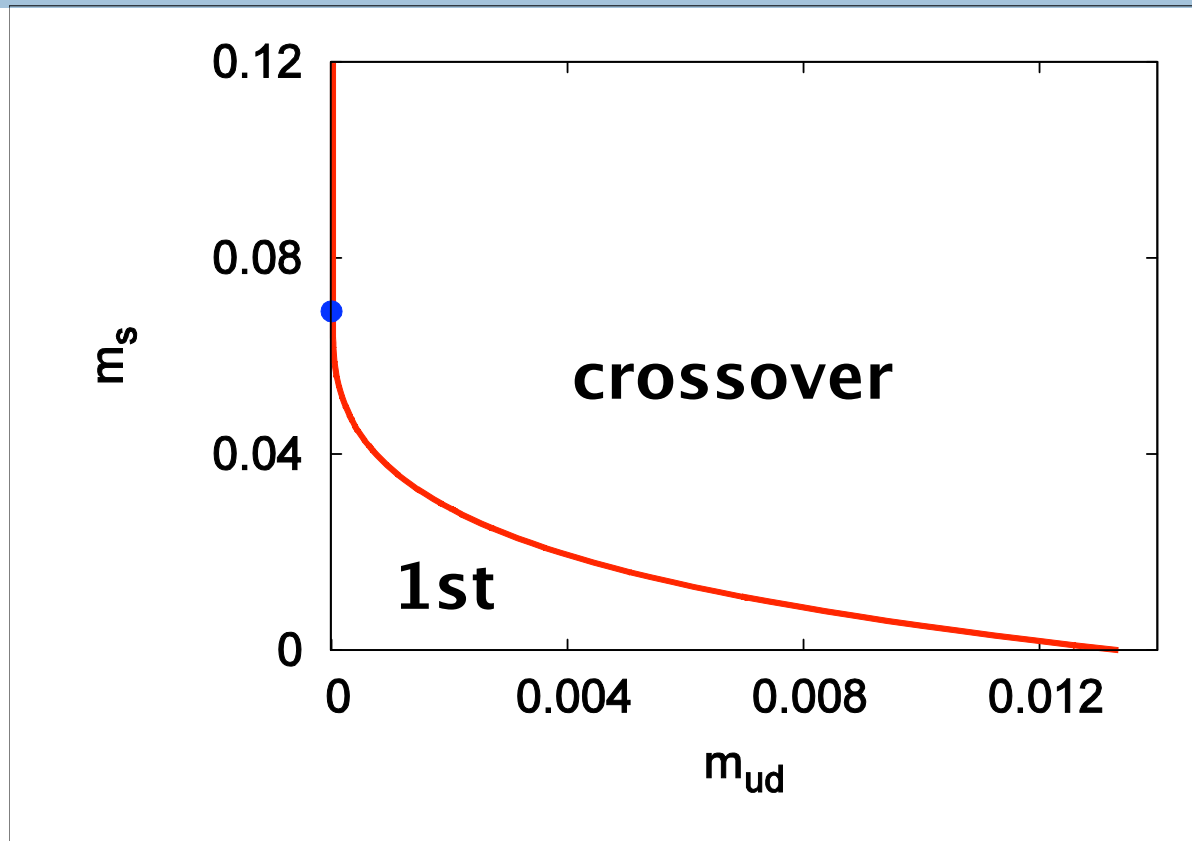
$$S = \text{diag}(\phi_{ud}, \phi_{ud}, \phi_s)$$

- $\Sigma=1$

- α & γ : “アノマリー効果”

クォーク質量平面($\mu=0$)

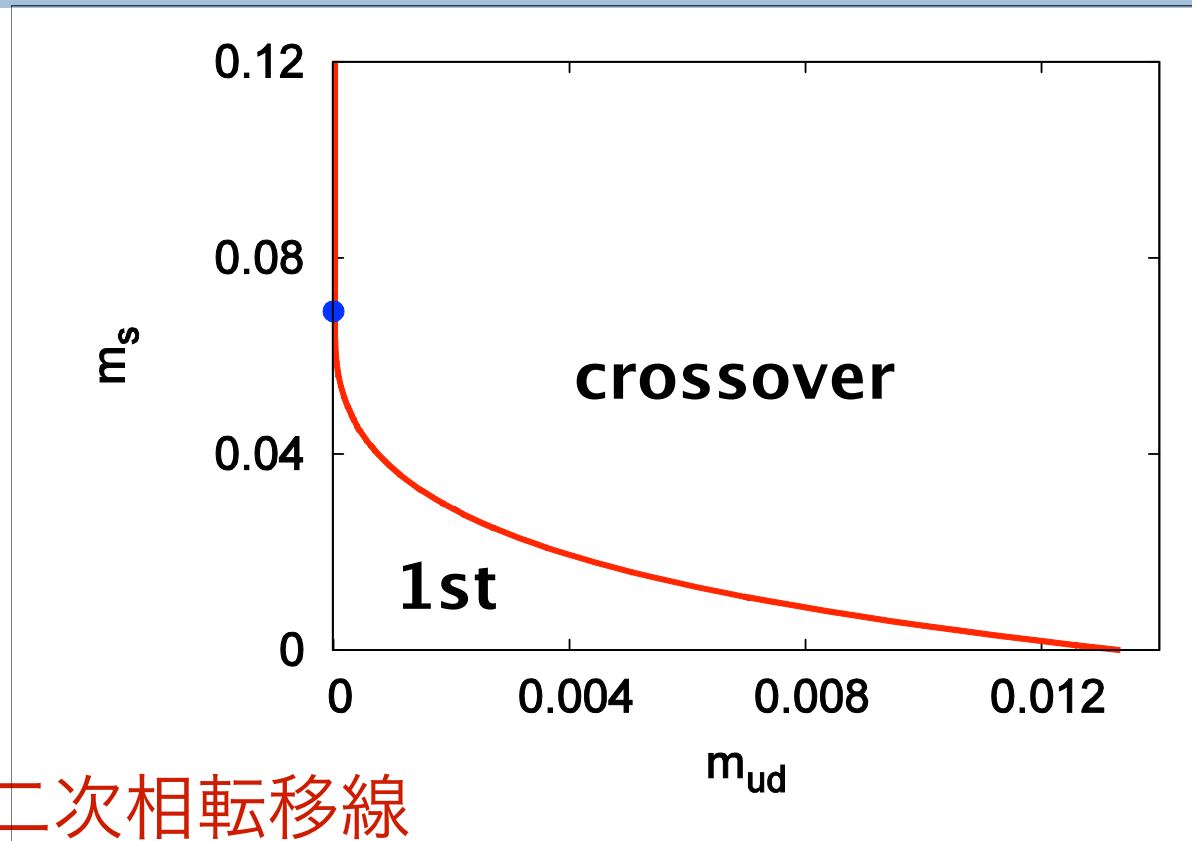
12



$\alpha=0.5, \gamma=1$

クォーク質量平面($\mu=0$)

12

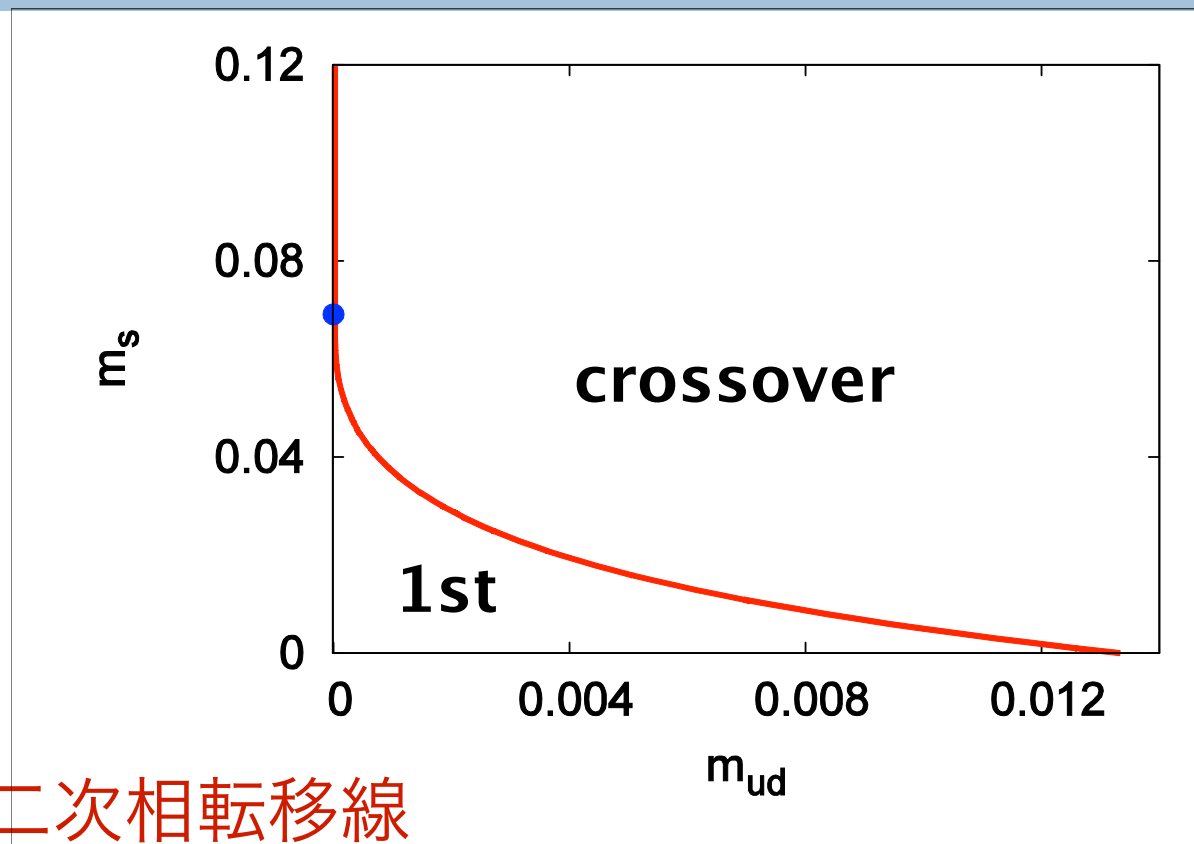


$\alpha=0.5, \gamma=1$

□ 二次相転移線

クォーク質量平面($\mu=0$)

12



$\alpha=0.5, \gamma=1$

- 二次相転移線
- 三重臨界点 (m_s 軸上)

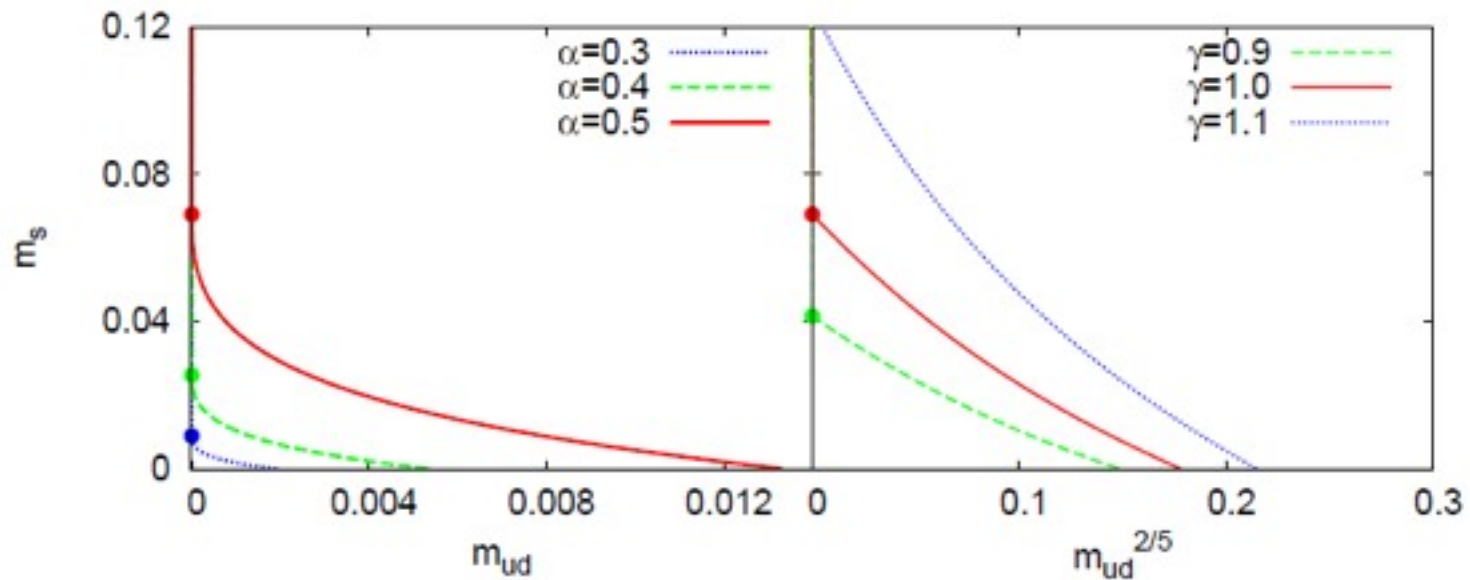
クォーク質量平面($\mu=0$)

12

- 二次相転移線
- 三重臨界点 (m_s 軸上)

クォーク質量平面($\mu=0$)

12



- 二次相転移線
- 三重臨界点 (m_s 軸上)

臨界面

13

臨界面

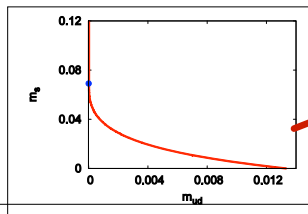
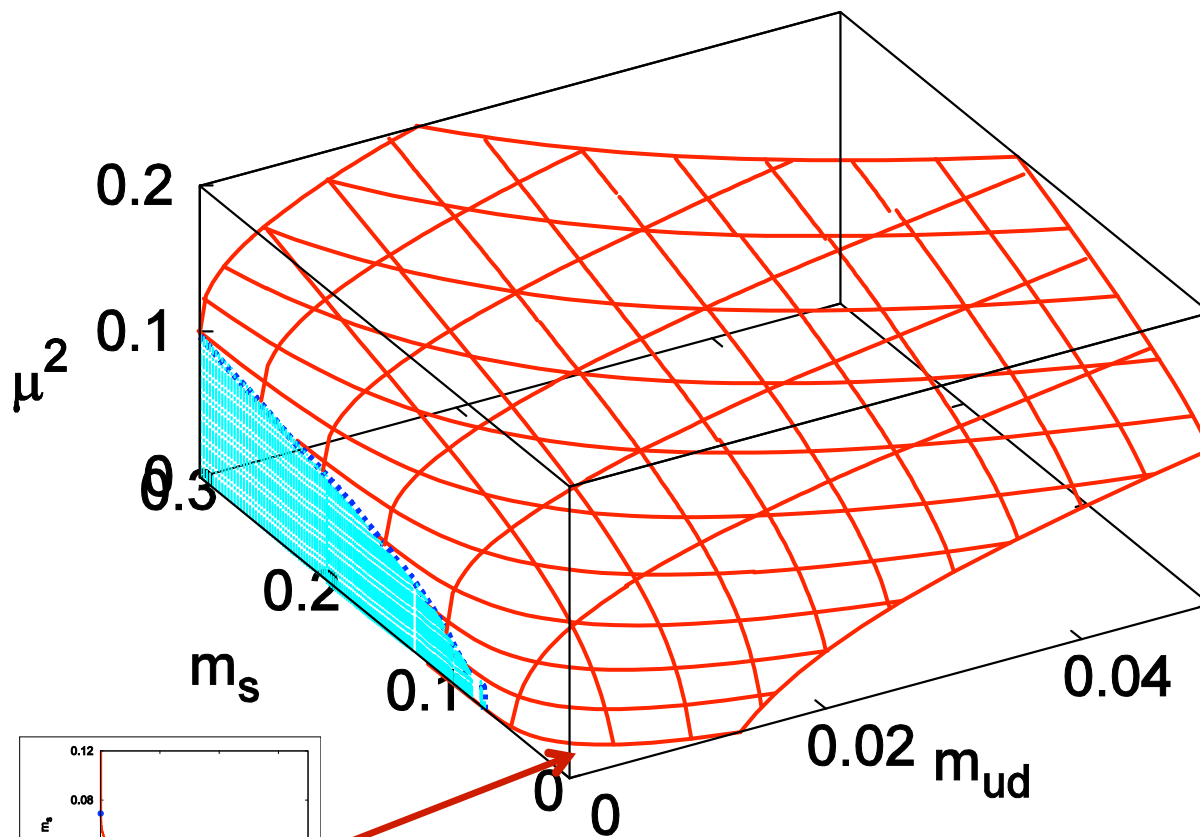
13

- Columbiaプロットは $\mu > 0$ でどう変化するのか？

臨界面

13

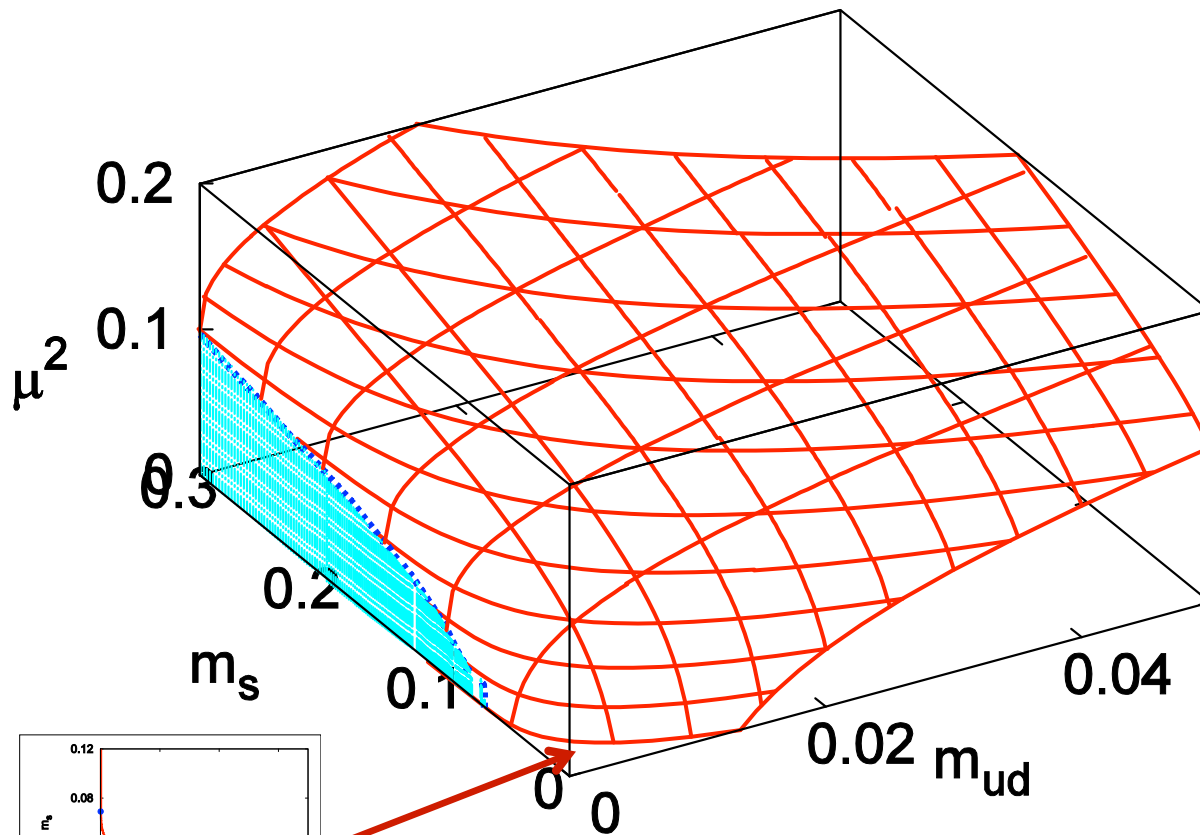
□ Columbiaプロットは $\mu > 0$ でどう変化するか？



臨界面

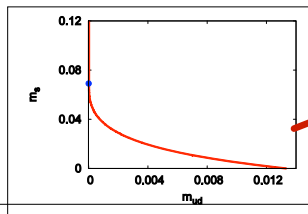
13

□ Columbiaプロットは $\mu > 0$ でどう変化するか？



$\alpha=0.5$ & $\gamma=1$

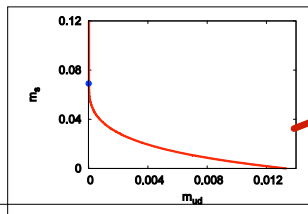
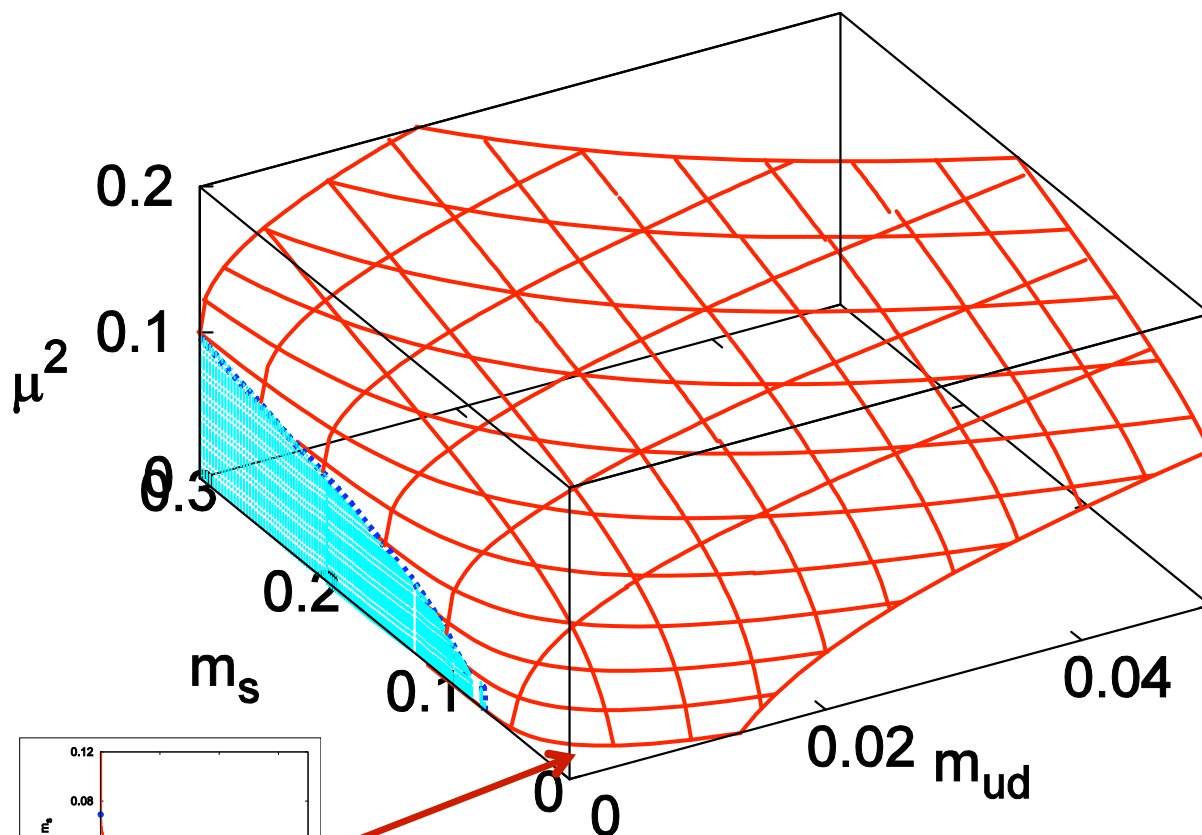
定性的にパラメータによらない



臨界面

13

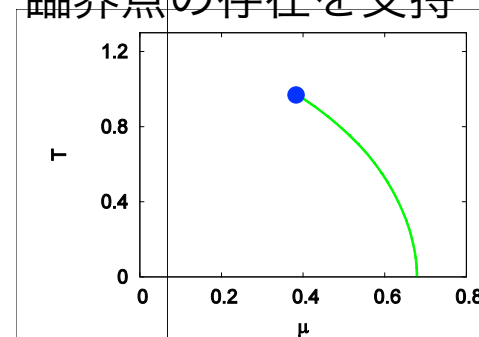
□ Columbiaプロットは $\mu > 0$ でどう変化するか？



$\alpha=0.5$ & $\gamma=1$

定性的にパラメータによらない

ゼロ密度でクロスオーバーを与える質量に対して、臨界面の存在を支持



cf. de Forcrand & Philipsen (2007)

結論

14

結論

14

- ランダム行列模型: QCD対称性を持つシンプルな模型
 - 相関を半定量的に予言: 臨界点, N_f 非依存

結論

14

- ランダム行列模型: QCD対称性を持つシンプルな模型
 - 相関を半定量的に予言: 臨界点, N_f 非依存
- $U(1)$ 対称性を破るChRM模型を構築した
 - 行列式相互作用項
 - インスタントン分布は二項分布: 安定な基底状態
 - $N_f=3$ のとき、有限温度で一次相転移を示す

結論

14

- ランダム行列模型: QCD対称性を持つシンプルな模型
 - 相図を半定量的に予言: 臨界点, N_f 非依存
- $U(1)$ 対称性を破るChRM模型を構築した
 - 行列式相互作用項
 - インスタントン分布は二項分布: 安定な基底状態
 - $N_f=3$ のとき、有限温度で一次相転移を示す
- $2+1$ フレーバ有限温度密度
 - クォーク質量平面に二次相転移線、三重臨界点 (Columbiaプロット)
 - 臨界面は正の方向へ傾く → 現実的な質量パラメータに対して臨界点の存在を示唆

結論

14

- ランダム行列模型: QCD対称性を持つシンプルな模型
 - 相図を半定量的に予言: 臨界点, N_f 非依存
- $U(1)$ 対称性を破るChRM模型を構築した
 - 行列式相互作用項
 - インスタントン分布は二項分布: 安定な基底状態
 - $N_f=3$ のとき、有限温度で一次相転移を示す
- $2+1$ フレーバ有限温度密度
 - クォーク質量平面に二次相転移線、三重臨界点 (Columbiaプロット)
 - 臨界面は正の方向へ傾く → 現実的な質量パラメータに対して臨界点の存在を示唆
- Outlook
 - 一般の化学ポテンシャル: $\mu_l \neq 0, \mu_Y \neq 0$, H. Fujii & TS(2011)
 - Diquark、CFL凝縮相, TS&K. Yamazaki(2011), ...stay tuned!

おわり

15

□ おわり

安定な有効ポテンシャル

16

- 二項分布でモデルを定義したときに安定な有効ポテンシャルを得る
 - インスタント数は ϕ に伴い増加する
 - ポアソン分布だと、インスタントが無限にいる状態 $\phi=\infty$ が”真空”
 - 二項分布ではインスタント数に上限があるので $\phi<\infty$ に基底状態が現れる

インスタント効果の導入

17

インスタント効果の導入

17

- 1インスタント配位 → Dirac演算子に1個の厳密なゼロ固有値
 - ChRMモデルでは、 W を長方形にすることで再現できる

インスタント効果の導入

17

- 1インスタント配位 → Dirac演算子に1個の厳密なゼロ固有値
 - ChRMモデルでは、 W を長方形にすることで再現できる

$$W \in \mathbf{C}^{(N+1) \times N}$$

インスタント効果の導入

17

- 1インスタント配位 → Dirac演算子に1個の厳密なゼロ固有値
 - ChRMモデルでは、 W を長方形にすることで再現できる

$$W \in \mathbf{C}^{(N+1) \times N}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & iW \\ iW^\dagger & 0 \end{pmatrix} \quad W = V^\dagger \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_N \\ 0 & & \end{pmatrix} U$$

cf. 長方形行列の特異値分解

インスタント効果の導入

17

- 1インスタント配位 → Dirac演算子に1個の厳密なゼロ固有値
 - ChRM模型では、 W を長方形にすることで再現できる

$$W \in \mathbf{C}^{(N+1) \times N}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & iW \\ iW^\dagger & 0 \end{pmatrix} \quad W = V^\dagger \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_N \\ & & & 0 \end{pmatrix} U$$

cf. 長方形行列の特異値分解

- 一般に N_+ (N_-)個の(反)インスタントがある場合

$$W \in \mathbf{C}^{(N+N_+) \times (N+N_-)}$$

Dirac演算子は厳密な $|v|$ 個($v = N_+ - N_-$)のゼロ固有値を持つ (cf. index theorem)

インスタントン効果の導入

17

- 1インスタントン配位 → Dirac演算子に1個の厳密なゼロ固有値
 - ChRMモデルでは、 W を長方形にすることで再現できる

$$W \in \mathbf{C}^{(N+1) \times N}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & iW \\ iW^\dagger & 0 \end{pmatrix} \quad W = V^\dagger \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_N \\ & & & 0 \end{pmatrix} U$$

cf. 長方形行列の特異値分解

- 一般に $N_+(N_-)$ 個の(反)インスタントンがある場合

$$W \in \mathbf{C}^{(N+N_+) \times (N+N_-)}$$

Dirac演算子は厳密な $|v|$ 個($v=N_+ - N_-$)のゼロ固有値を持つ (cf. index theorem) **Janik, Nowak & Zahed (1997)**

- 媒質効果行列

$$D = \begin{pmatrix} 0 & iW + iC \\ iW^\dagger + iC^T & 0 \end{pmatrix} \quad iC = \begin{pmatrix} (\mu + iT) \times \mathbf{1}_{N/2} & 0 & 0 \\ 0 & (\mu - iT) \times \mathbf{1}_{N/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

インスタントン分布関数

18

$$Z_{N_+, N_-} = \int dS e^{-2N\Omega_0} \det^{N_+}(S + \mathcal{M}) \det^{N_-}(S^\dagger + \mathcal{M}^\dagger)$$

Ω_0 : 通常のChRM模型の
有効ポテンシャル

インスタントン分布関数

18

$$Z_{N_+, N_-} = \int dS e^{-2N\Omega_0} \det^{N_+}(S + \mathcal{M}) \det^{N_-}(S^\dagger + \mathcal{M}^\dagger)$$

Ω_0 : 通常のChRM模型の
有効ポテンシャル

QCD 真空: 多インスタントン配位の重ね合わせ

インスタントン分布関数

18

$$Z_{N_+, N_-} = \int dS e^{-2N\Omega_0} \det^{N_+}(S + \mathcal{M}) \det^{N_-}(S^\dagger + \mathcal{M}^\dagger)$$

Ω_0 : 通常のChRM模型の
有効ポテンシャル

QCD 真空: 多インスタントン配位の重ね合わせ

$$Z = \sum_{N_+, N_-} P(N_+)P(N_-)Z_{N_+, N_-} \equiv \int dS e^{-2N\Omega}$$

$P(N_\pm)$
インスタントン分布関数

インスタントン分布関数

18

$$Z_{N_+, N_-} = \int dS e^{-2N\Omega_0} \det^{N_+}(S + \mathcal{M}) \det^{N_-}(S^\dagger + \mathcal{M}^\dagger)$$

Ω_0 : 通常のChRM模型の有効ポテンシャル

QCD 真空: 多インスタントン配位の重ね合わせ

$$Z = \sum_{N_+, N_-} P(N_+)P(N_-)Z_{N_+, N_-} \equiv \int dS e^{-2N\Omega}$$

$P(N_\pm)$
インスタントン分布関数

$$P(N_\pm) = \begin{cases} \frac{(gN)^{N_\pm}}{N_\pm!} \\ \binom{\gamma N}{N_\pm} p^{N_\pm} (1-p)^{\gamma N - N_\pm} \end{cases}$$

ポアソン分布: 自由インスタントン
't Hooft (1986)

二項分布

TS, H. Fujii & M. Ohtani
(2009)

有効ポテンシャルの安定性

19

$$\Omega_{Po} = \Omega_0 - \underline{g(\phi + m)^{N_f}}$$

$$\Omega_{bi} = \Omega_0 - \frac{\gamma}{2} \log(\alpha(\phi + m)^{N_f} + 1)^2 \quad \alpha = p/(1-p)$$

$$\Omega_0 = \frac{N_f}{2} \Sigma^2 \phi^2 - \frac{N_f}{4} \log((\phi + m)^2 - (\mu + iT)^2) + \text{c.c.}$$

有効ポテンシャルの安定性

19

$$\Omega_{Po} = \Omega_0 - \underline{g(\phi + m)^{N_f}}$$

$$\Omega_{bi} = \Omega_0 - \frac{\gamma}{2} \log(\alpha(\phi + m)^{N_f} + 1)^2 \quad \alpha = p/(1-p)$$

$$\Omega_0 = \frac{N_f}{2} \Sigma^2 \phi^2 - \frac{N_f}{4} \log((\phi + m)^2 - (\mu + iT)^2) + \text{c.c.}$$

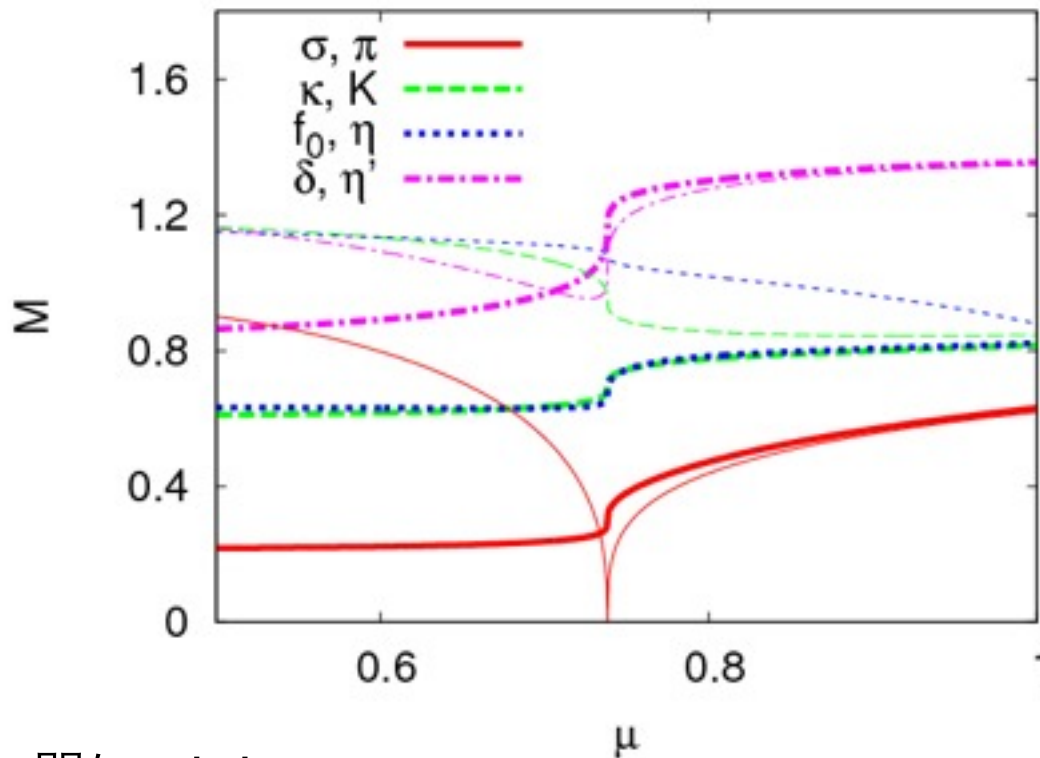
二項分布によって、 $N_f=3$ での安定なポテンシャルが得られた

メソン質量

$$S = \bar{\phi} + \lambda^a (\sigma_a + i\pi_a)$$

$$\Omega = \Omega(S = \bar{\phi}) + M_{sa}^2 \sigma_a^2 + M_{psa}^2 \pi_a^2 + \dots$$

20



$\alpha=0.5$ & $\gamma=1$

- η - η' 、 δ - f_0 間にmixing
- 二次相転移点で σ ゼロ質量になる \rightarrow 二次相転移の条件と対応
- カイラル感受率、クォーク数感受率も臨界点で発散

$$\det_{f,g} \partial_{\phi_f} \partial_{\phi_g} \Omega = 0$$