ランダム行列模型による
カイラル凝縮相及び
ダイクォーク凝縮相の記述

東京大学

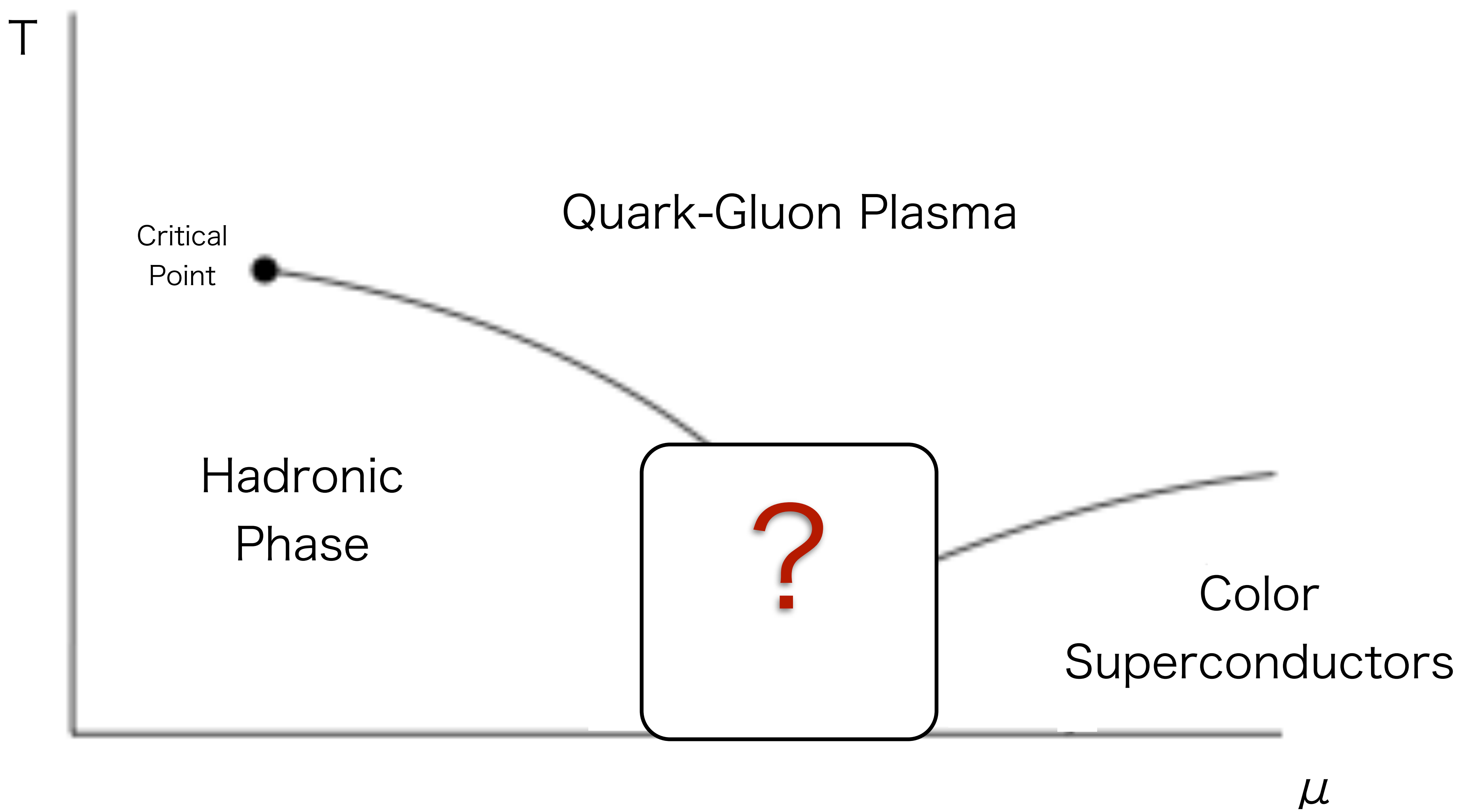
山崎加奈子, 佐野崇

arXiv:1108.1274 [hep-ph] (2011)

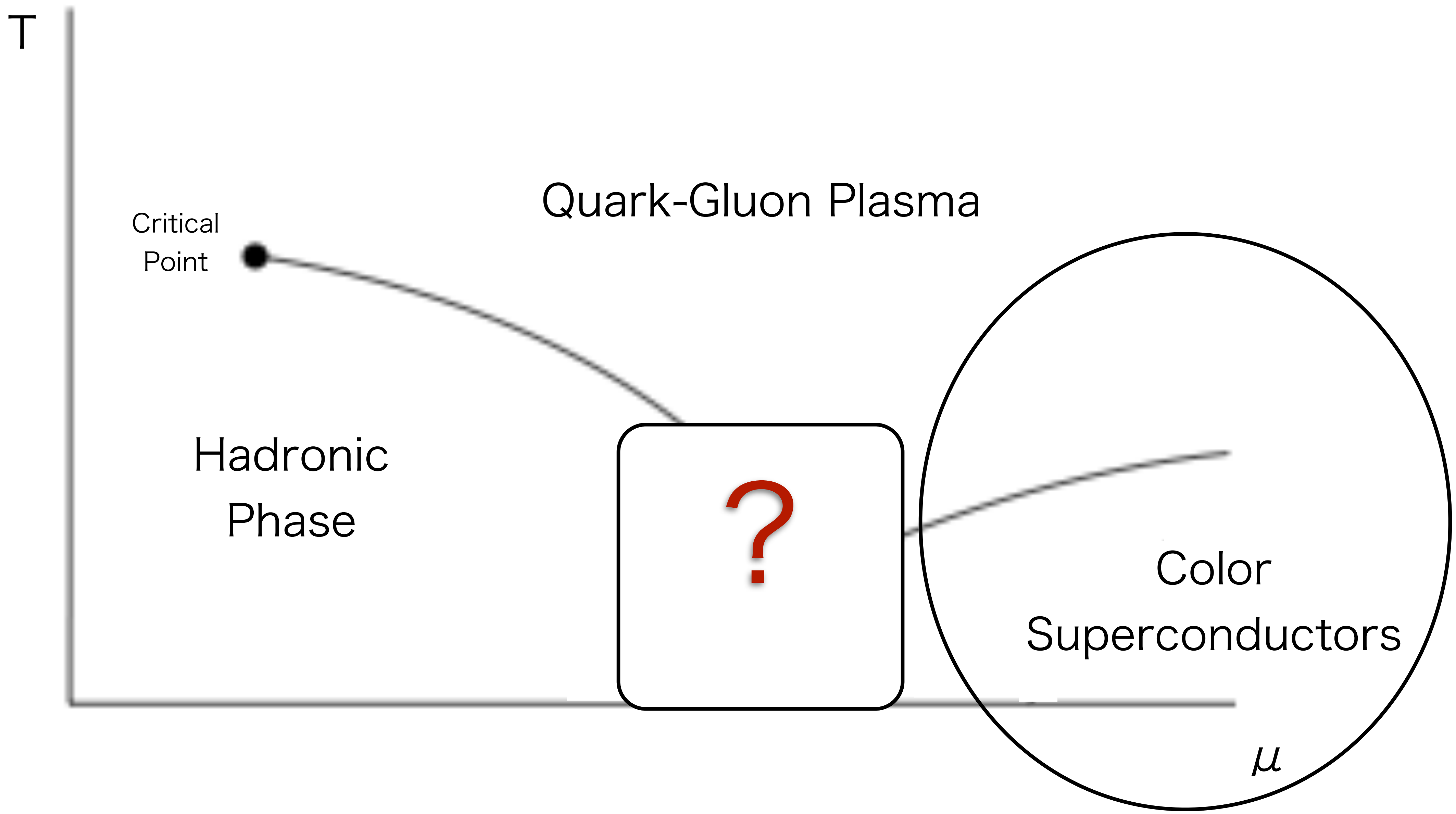
目次

1. QCD相図
2. カラー超伝導相
3. ランダム行列模型による解析
   - ランダム行列模型の分配関数
   - 有効ポテンシャルの導出
4. 結果
   - u,d,sクォークの質量が等しい場合
   - u,dクォークとsクォークの質量が異なる場合
5. まとめ

1. QCD相図


T
Critical
Point
Quark-Gluon Plasma
Hadronic
Phase
?
Color
Superconductors
μ

1. QCD相図



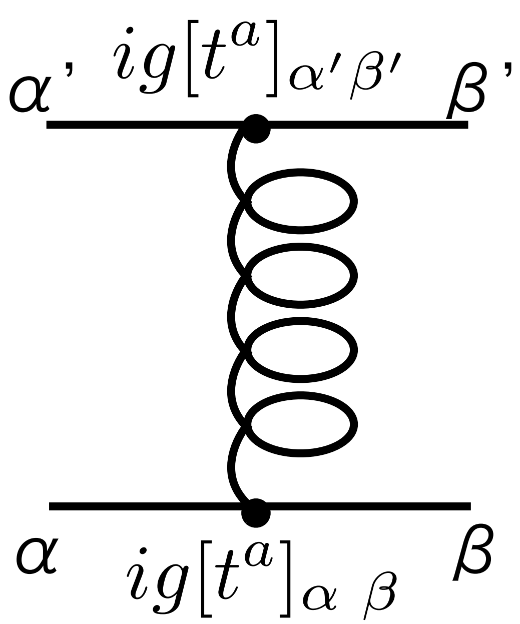
QCDは漸近自由な理論

高密度領域では弱結合

摂動論による解析が可能

2. カラー超伝導相

one gluon exchange



$$\sum_a [t^a]_{\alpha'\beta'}[t^a]_{\alpha\beta} = -\frac{N_c+1}{4N_c}(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\alpha'\beta'} - \delta_{\alpha\beta'}\delta_{\alpha'\beta}) \quad : 引力 \quad \bar{\mathbf{3}}$$

$$+\frac{N_c-1}{4N_c}(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\alpha'\beta'} + \delta_{\alpha\beta'}\delta_{\alpha'\beta}) \quad : 斥力 \quad \mathbf{6}$$

$\bar{\mathbf{3}}$ に引力

クーパーペアとして凝縮すると予想できる

対称性　$N_f = 3$、$N_c = 3$、massless の場合　　**Rajagopal and Wilczek** (2000)

$$SU(3)_c \times SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_B \to SU(3)_{c+L+R} \times Z_{2N_f}$$

カラーとフレーバーを同時に回転

color-flavor locking (CFL)

3. ランダム行列模型による解析

ランダム行列模型の分配関数

Dirac演算子 $D = \gamma_\mu(\partial_\mu + iA_\mu)$

性質

・反エルミート： $D^\dagger = -D$

・カイラル対称性： $\{D, \gamma_5\} = 0$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & iW \\ iW^\dagger & 0 \end{pmatrix}$$

分配関数

$$Z^{RM} = \int DW \prod_{f=1}^{N_f} \det(D + m_f) e^{-N\Sigma^2 \mathrm{tr} W^\dagger W}$$

ガウス型で近似

有限温度・有限密度

Dirac演算子 $D = \underbrace{R}_{\text{ランダム行列}} + \underbrace{C}_{\text{媒質効果行列}}$

非ランダム

ゼロ温度・ゼロ密度のとき、$C = 0$

3. ランダム行列模型による解析

ランダム行列模型の分配関数

★ ランダム行列

・反エルミート： $R^\dagger = -R$

・カイラル対称性： $\{\gamma_5, R\} = 0$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & iW \\ iW^\dagger & 0 \end{pmatrix}$$

ダイクォーク凝縮を記述するためにWを拡張

Vanderheyden & Jackson, (2000)

$$W = A^{\nu a}(\sigma_\nu \otimes \lambda_a)$$

$A^{\nu a}$: 実ランダム行列

$\sigma_\nu = (1, -i\sigma_i),\quad \sigma_i$: Pauli 行列

λ_a : $SU(N_c)$ の生成子

★ 媒質効果行列

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}, \qquad \omega = \begin{pmatrix} (\mu + iT)\mathbf{1}_{\mathrm{N}/2} \otimes \mathbf{1}_{\mathrm{spin}} \otimes \mathbf{1}_{\mathrm{N_c}} & 0 \\ 0 & (\mu - iT)\mathbf{1}_{\mathrm{N}/2} \otimes \mathbf{1}_{\mathrm{spin}} \otimes \mathbf{1}_{\mathrm{N_c}} \end{pmatrix}$$

分配関数

$$Z = \int [dA] \prod_{f=1}^{N_f} \det(D + m_f) e^{-2N\Sigma^2 \Sigma_{a,\nu,i,j}(A^{\nu\, a}_{i\ j})^2}$$

3. ランダム行列模型による解析

有効ポテンシャルの導出

フェルミオン表示

$$\prod_{f=1}^{N_f}\det(D+m_f) = \int [d\psi^\dagger][d\psi]\exp[-\sum_f \bar{\psi}^f (D+m_f)\psi^f]$$

$$= \int [d\psi^\dagger][d\psi]\exp[\underline{-iJ^{ij}_{a\nu}A^{a\nu}_{ij}} - \sum_f \bar{\psi}^f (C+m_f)\psi^f]$$

$$J^{ij}_{a\nu} = \sum_f (\psi^{f\dagger}_{Li}\sigma_\nu\lambda_a\psi^f_{Li} + \psi^{f\dagger}_{Rj}\sigma^\dagger_\nu\lambda_a\psi^f_{Ri})$$

ガウス積分

$$\int [dA]e^{-iJ^{ij}_{a\nu}\underline{A^{a\nu}_{ij}}}e^{-2N\Sigma^2\underline{(A^{a\nu}_{ij})^2}} = \exp[-\frac{1}{8N\Sigma^2}(J^{ij}_{a\nu})^2]$$

※ $$\int dx e^{-\alpha x^2+\beta x} = e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}}$$

J²の計算

$$(J^{ij}_{a\nu})^2 = \boxed{-2G_\chi \psi^{f\dagger}_R\psi^g_L\psi^{g\dagger}_L\psi^f_R}$$

← カイラル凝縮を生成する４点頂点

$$\boxed{-G_\Delta \psi^\dagger_L\tau_A\lambda_{A'}\psi^c_L\psi^{c\dagger}_L\tau_A\lambda_{A'}\psi_L + \{L \to R\}} + \cdots$$

$G_\chi = \frac{2(N_c^2-1)}{N_c^2}, \ G_\Delta = \frac{N_c+1}{2N_c}$

ダイクォーク凝縮を生成する４点頂点

3. ランダム行列模型による解析

有効ポテンシャルの導出

ボソン化 $\exp[-\frac{1}{8N\Sigma^2}(J^{ij}_{a\nu})^2]$

$$= \int [d\phi][d\Delta]\exp\Big(-\frac{N\Sigma^2}{2G_\chi}2|\phi_f|^2 - \frac{N\Sigma^2}{2G_\Delta}(|\Delta^L_A|^2 + |\Delta^R_A|^2)\Big)\exp[-\Psi^\dagger_L S\Psi_R - \Psi^\dagger_R S^\dagger \Psi_L]$$

$$S = \begin{pmatrix} \hat{\phi}\mathbf{1}_{N_c} & \Delta^L_A \tau_A \lambda_A \\ \Delta^{R*}_A \tau_A \lambda_A & \hat{\phi}\mathbf{1}_{N_c} \end{pmatrix} \qquad \hat{\phi} = \mathrm{diag}(\phi_u, \phi_d, \phi_s) \qquad \Psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\Psi_R \\ \Psi_L\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\psi_R \\ \psi^c_L \\ \psi_L \\ \psi^c_R\end{pmatrix}$$

$$Z = \int [d\phi][d\Delta]\exp\Big(-\frac{N\Sigma^2}{2G_\chi}2|\phi^2_f| - \frac{N\Sigma^2}{2G_\Delta}(|\Delta^L_A|^2 + |\Delta^R_A|^2)\Big)$$

$$\times \left[\det{}^{N/2}\begin{pmatrix} S+m & \tilde{z} \\ \tilde{z} & S^\dagger + m\end{pmatrix}\det{}^{N/2}\begin{pmatrix} S+m & \tilde{z}^* \\ \tilde{z}^* & S^\dagger + m\end{pmatrix}\right]^{1/2}$$

$$= e^{-2NN_fN_c\Omega(\phi,\Delta;m,T,\mu)}$$

$$\tilde{z} = \mathrm{diag}(z, -z)$$

$$z \equiv (\mu + iT)\mathbf{1}_{N_f}\mathbf{1}_{N_c}$$

有効ポテンシャル

$$\frac{B}{A} = \frac{N_c}{4(N_c-1)}$$

$$\Omega = \frac{B}{3}\phi^2_f + \frac{A}{3}\Delta^2_A$$
$$- \frac{1}{8N_cN_f}[\ln\det(S+m+z) + \ln\det(S^\dagger+m-z) + \ln\det(S+m+z^*) + \ln\det(S^\dagger+m-z^*)]$$

4. 結果

u,d,sクォークの質量が等しい場合

・有効ポテンシャル

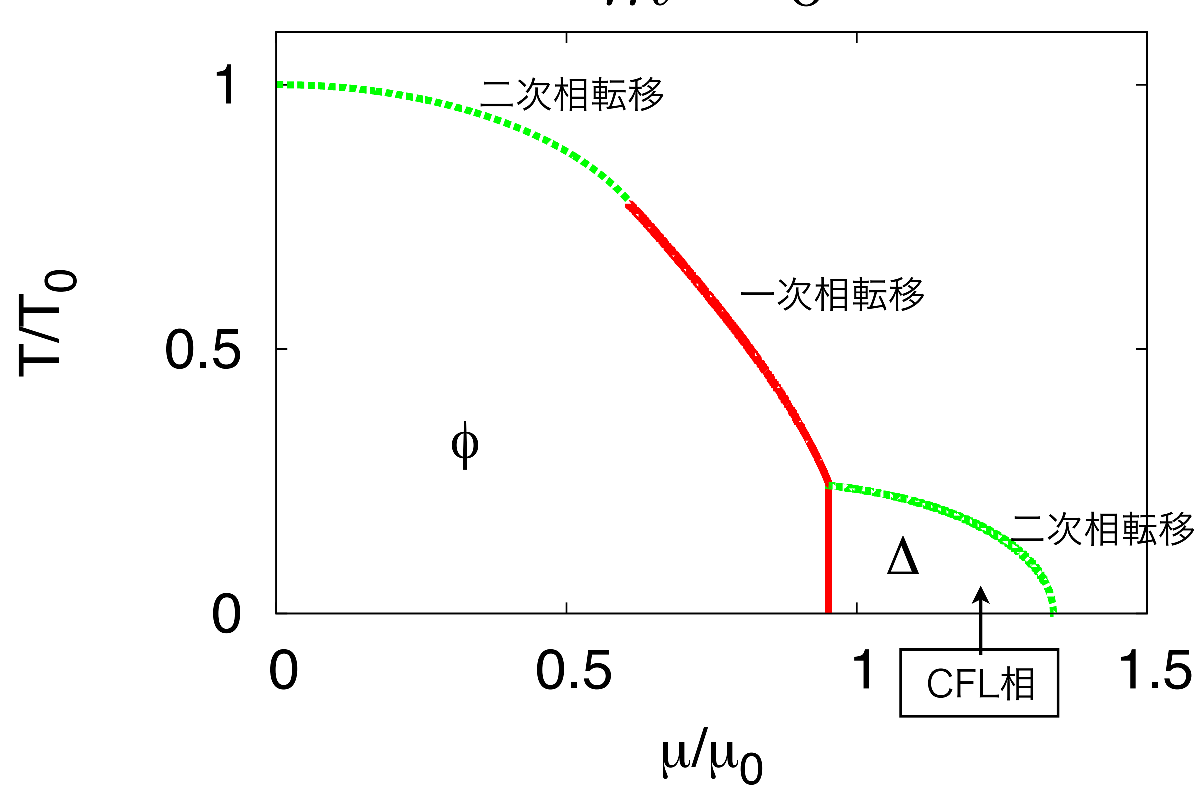
$$\Omega = A\Delta^2 + B\phi^2 - \frac{1}{72}\sum_{\pm} \ln[(\sigma \pm z)^2 + \Delta^2]^8[(\sigma \pm z)^2 + (2\Delta)^2] + c.c.$$

$$\sigma = \phi + m$$

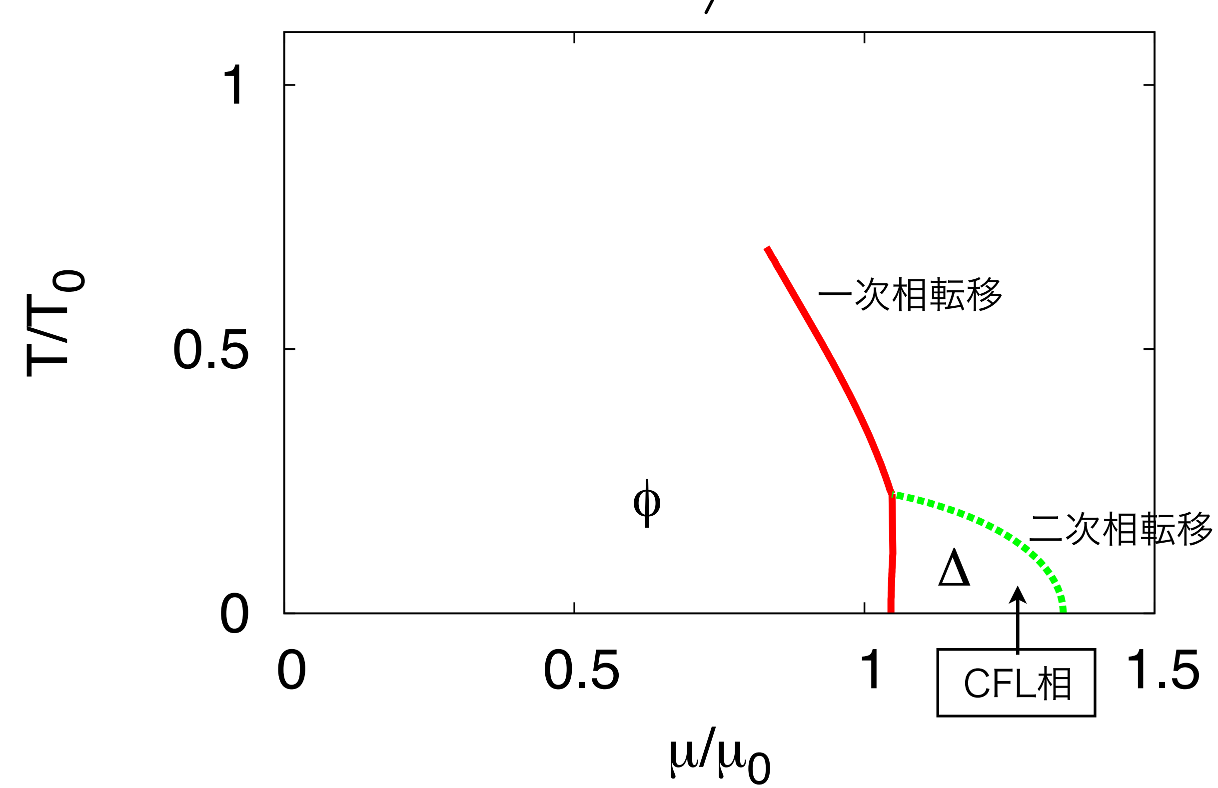
・ギャップ方程式

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\Delta} = 0, \quad \frac{\partial\Omega}{\partial\phi} = 0$$

$m = 0$



$m \neq 0$



4. 結果

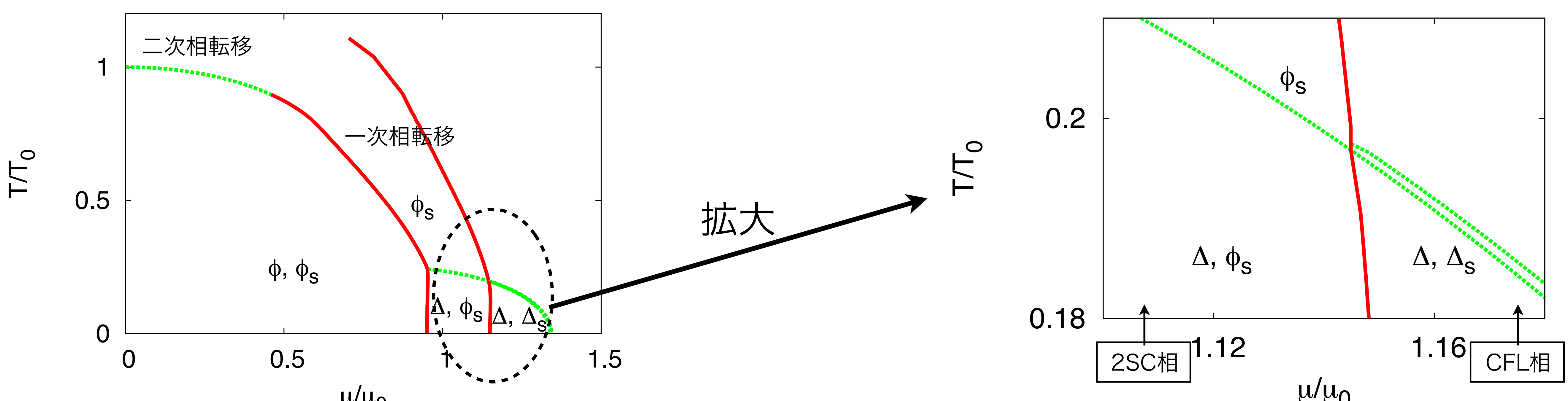
u,dクォークとsクォークの質量が異なる場合

- 有効ポテンシャル

$$\Omega = \frac{A}{3}(\Delta^2 + 2\Delta_s) + \frac{B}{3}(2\phi^2 + \phi_s) - \frac{1}{72}\sum_{\pm} \ln[\{(\sigma \pm z)^2 + \Delta^2\}^3$$
$$\times \{(\sigma \pm z)(\sigma_s \pm z) + \Delta_s^2\}^4 \times \{(\sigma_s \pm z)^2((\sigma \pm z)^2 + \Delta^2) + 4\Delta_s^2((\sigma \pm z)(\sigma_s \pm z) + \Delta_s^2)\}] + c.c.$$

- ギャップ方程式

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \Delta} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \Delta_s} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \phi} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \phi_s} = 0$$



5. まとめ・今後の課題

- ランダム行列模型を３フレーバーに拡張

- ３つのクォークの質量が等しい時
  - ・低密度ではカイラル凝縮相
  - ・高密度ではCFL相

- u,dクォークとsクォークの質量が異なる時
  - ・低密度ではカイラル凝縮相
  - ・密度を上げると2SC相
  - ・さらに高密度にするとCFL相

- アノマリー効果を入れたらどうなるか？