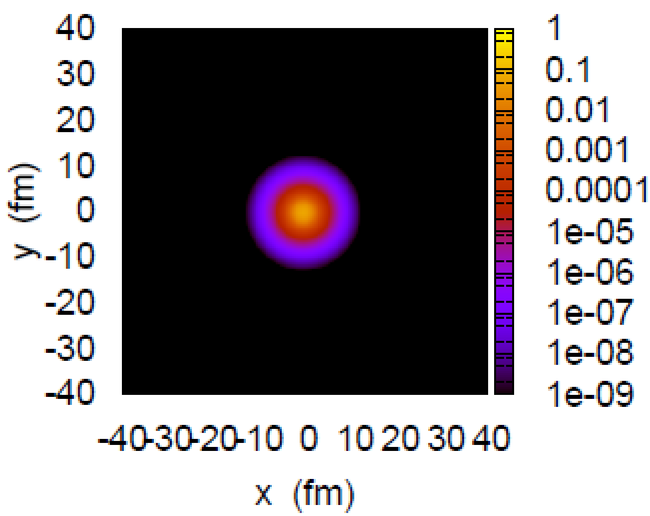
ハロー原子核の構造と反応

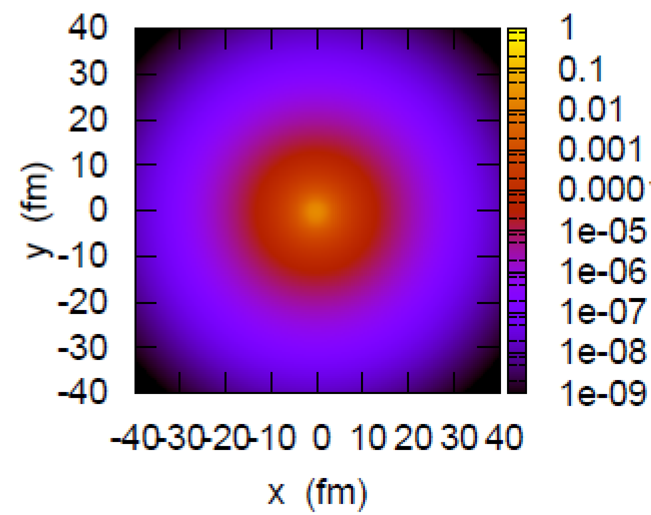
萩野浩一
東北大学　理学研究科
物理学専攻

hagino@nucl.phys.tohoku.ac.jp
www.nucl.phys.tohoku.ac.jp/~hagino

東北大学



→ 弱束縛



井戸型ポテンシャル
(l=0 束縛状態)

講義の内容（予定）

１．イントロダクション

中性子過剰核、独立粒子描像

２．１粒子ハロー核の性質

－束縛状態

－角運動量の効果

－クーロン励起

－変形ハロー核

３．２粒子ハロー核の性質

－ペアリング

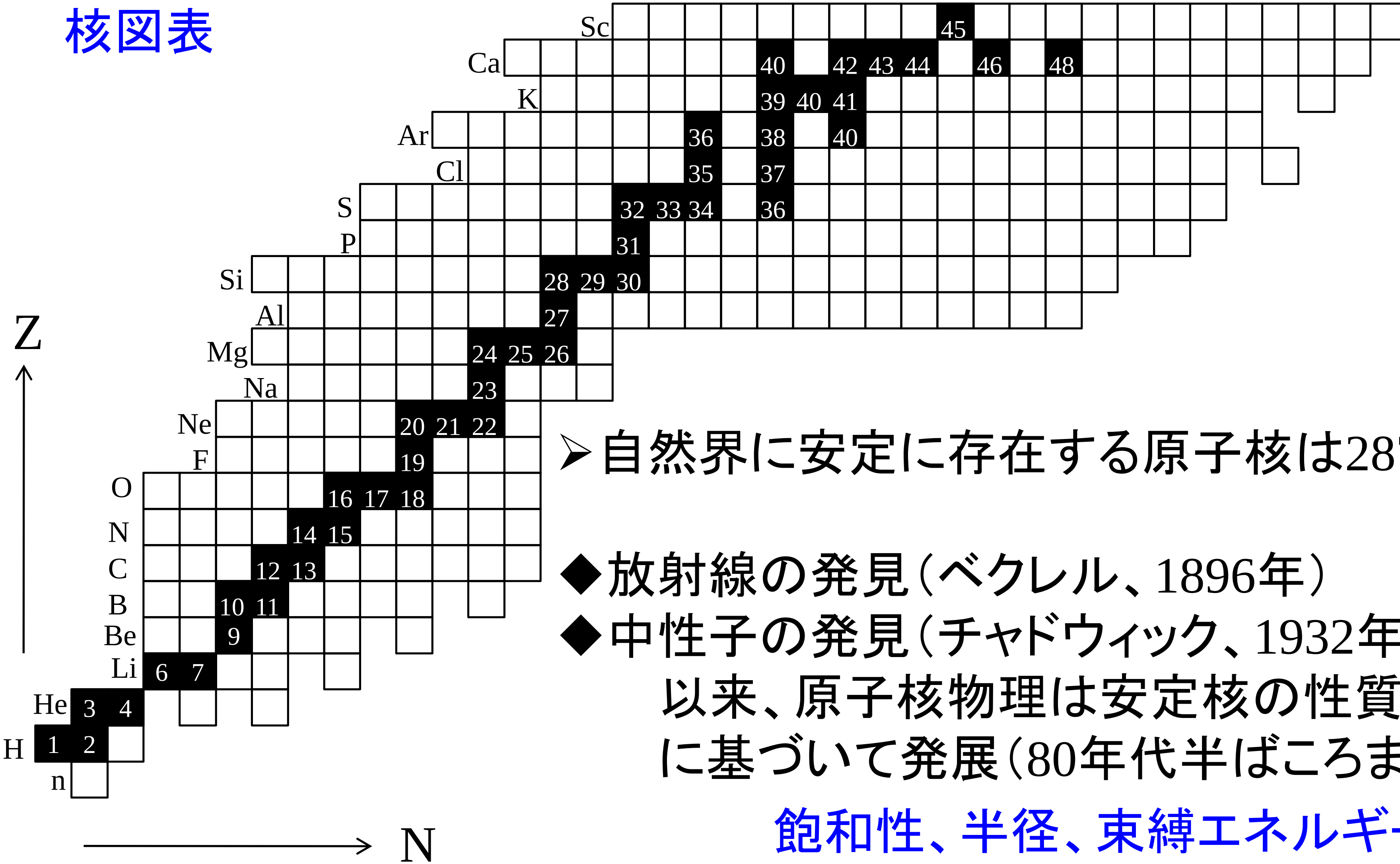
－ボロミアン原子核

－ダイ・ニュートロン相関

４．不安定核の反応（低エネルギー）

イントロダクション

核図表



➢自然界に安定に存在する原子核は287種

◆放射線の発見（ベクレル、1896年）

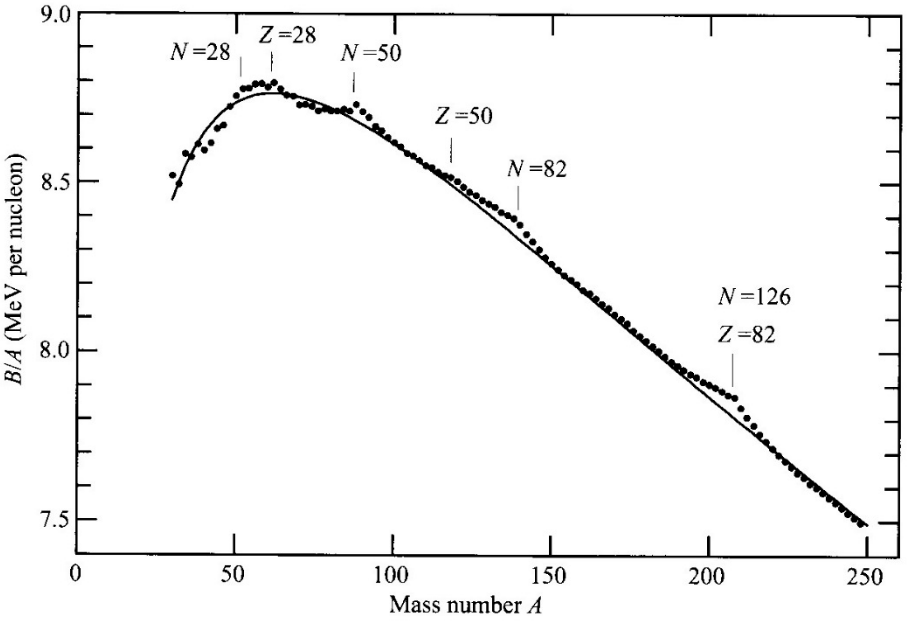
◆中性子の発見（チャドウィック、1932年）

以来、原子核物理は安定核の性質に基づいて発展（80年代半ばころまで）

飽和性、半径、束縛エネルギー

魔法数と独立粒子描像、、、、、

魔法数と独立粒子描像



N又はZが2, 8, 20, 28, 50, 82, 126の時、安定化（束縛が大きくなる）

⇩

魔法数

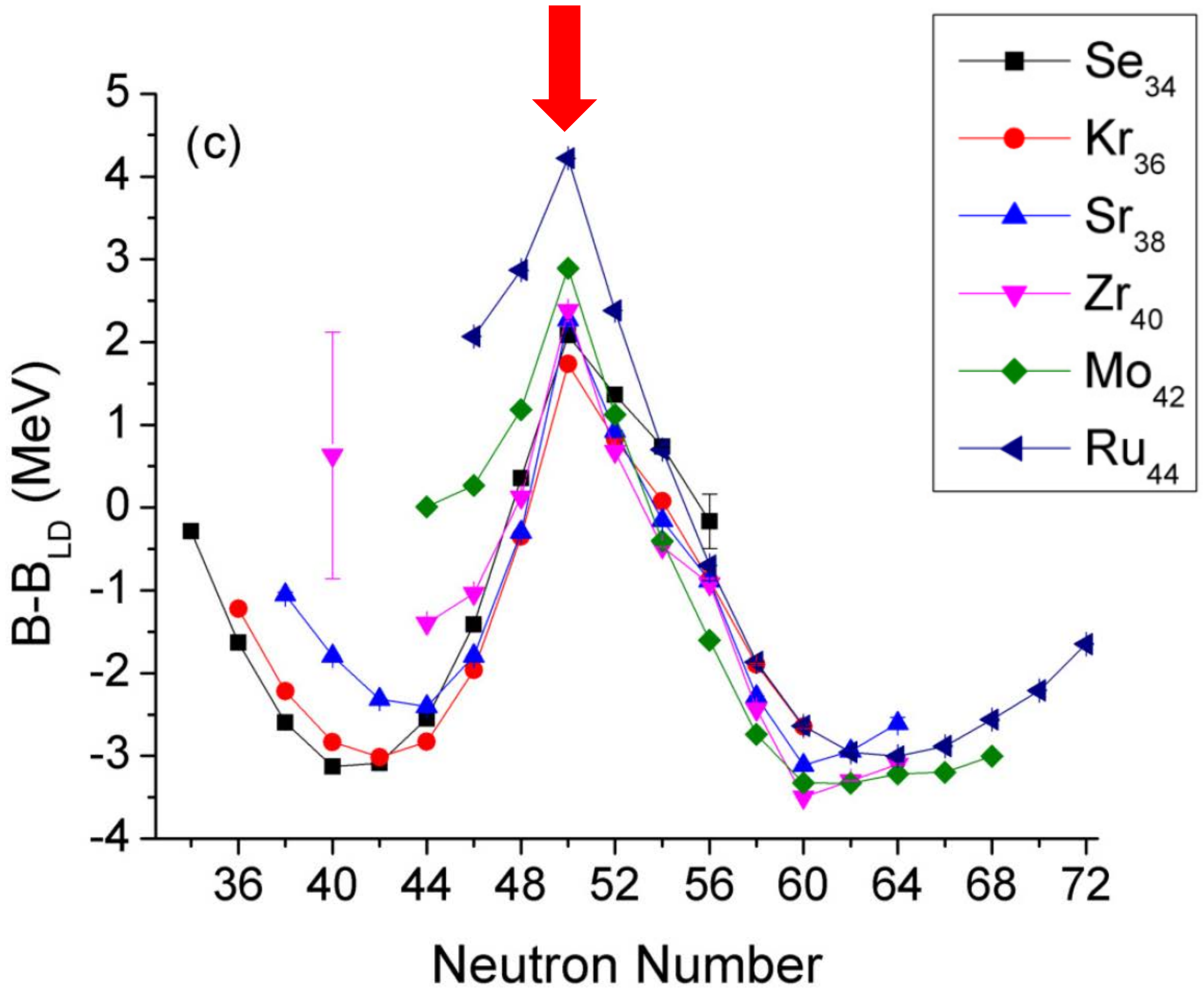
$Z*M_p + N*M_n$

束縛エネルギー

（束縛エネルギーが大きいほど安定）

$M(^AZ)$

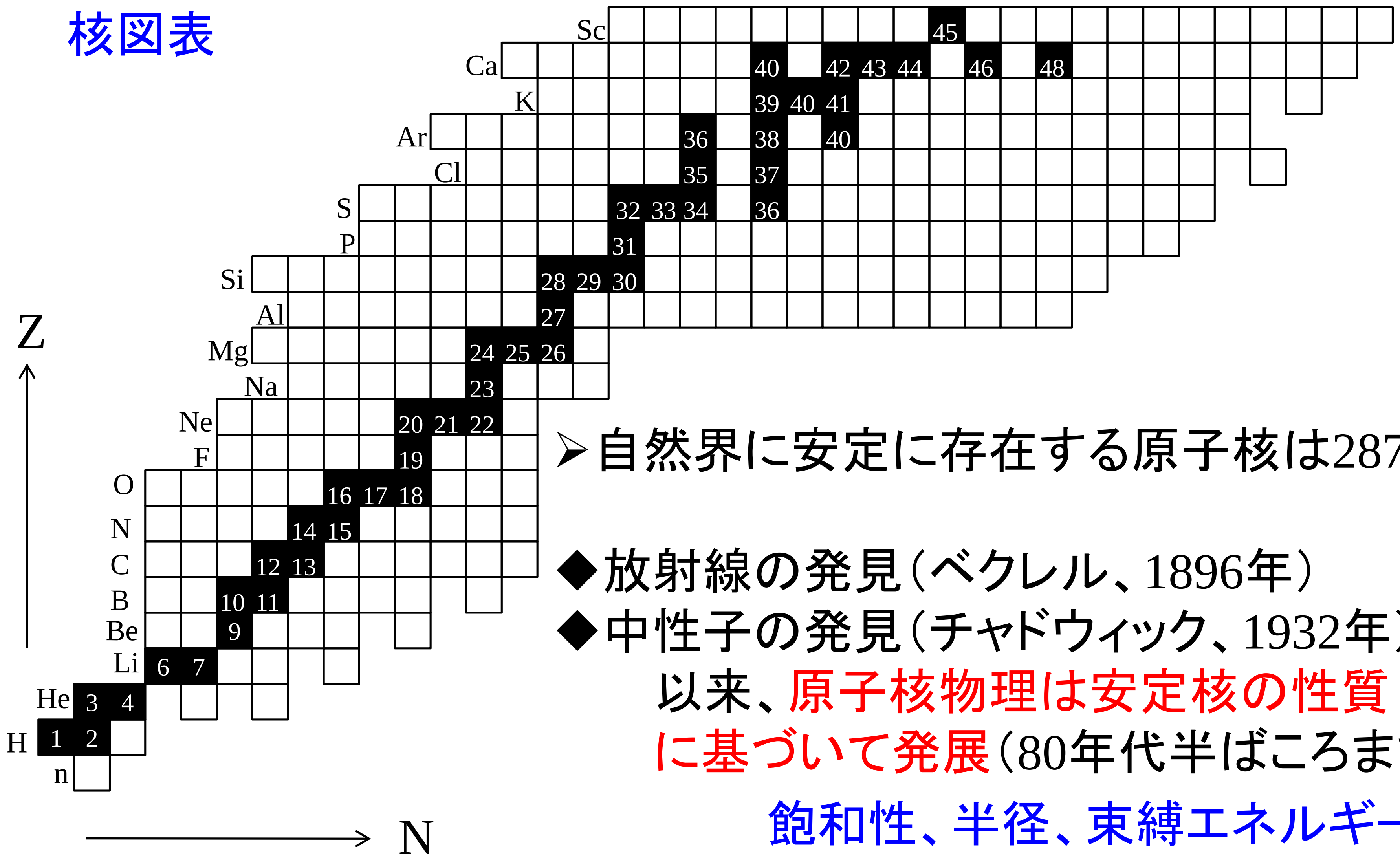
N = 50



I. Bentley et al., PRC93 (‘16) 044337

イントロダクション

核図表



➢自然界に安定に存在する原子核は287種

◆放射線の発見（ベクレル、1896年）
◆中性子の発見（チャドウィック、1932年）

以来、原子核物理は安定核の性質に基づいて発展（80年代半ばころまで）

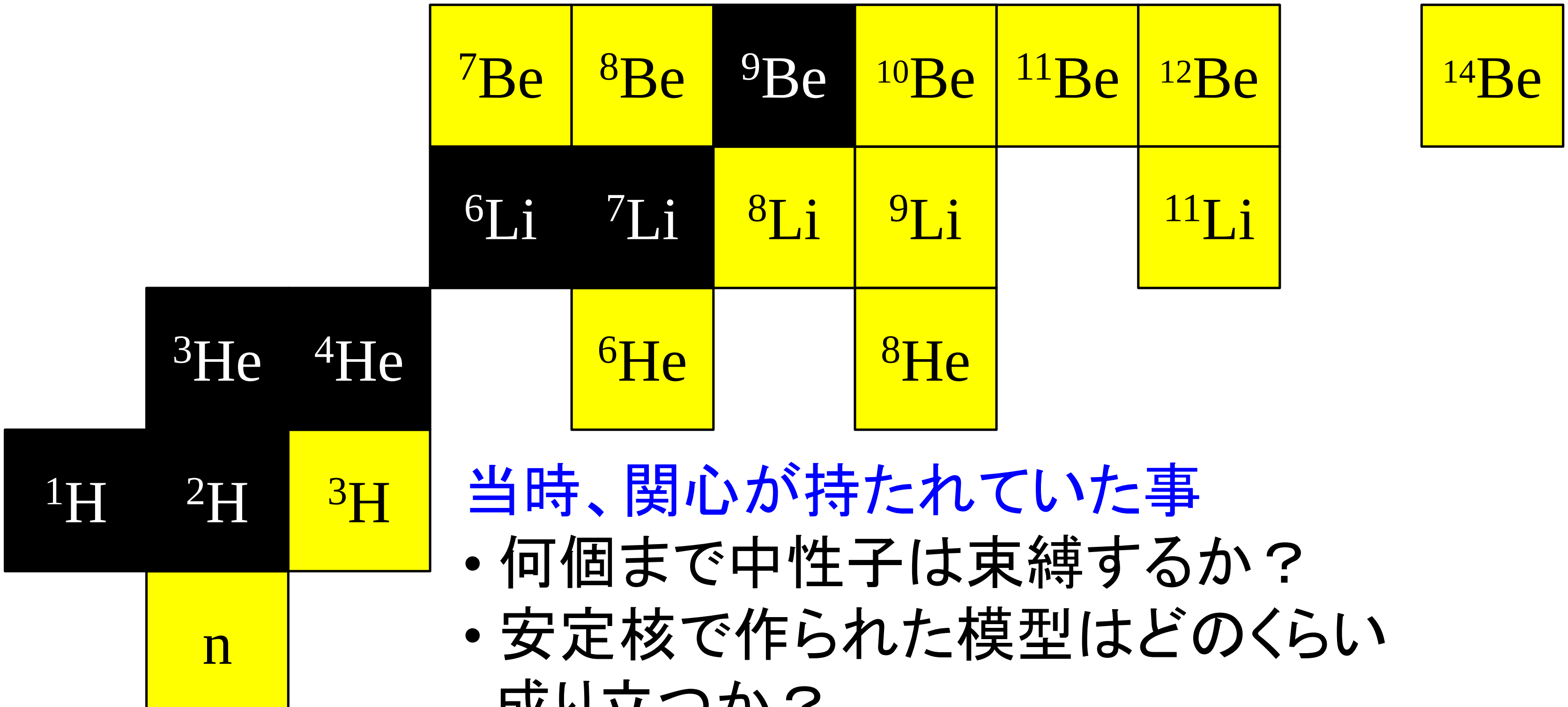
飽和性、半径、束縛エネルギー
魔法数と独立粒子描像、、、、、

原子核物理は安定核の性質に基づいて発展

⟶ そうは言っても、自然な疑問として
「陽子数が与えられたときに、中性子は何個まで安定にくっつくのか？」
古くから関心は持たれていた。

- "Light Nuclei with Large Neutron Excess"
  V.V. Volkov, in Proc. Int. Conf. on Nucl. Phys. ('74)
- "Very Neutron Rich Light Nuclei"
  G.T. Garvey, Comments on Nucl. and Part. Phys. 5('72)85.
- "Explorations far from stability"
  O.L. Keller Jr., Comments on Nucl. and Part. Phys. 5('72)98.
- "Int. Symp. on why and how should we investigate nucleides far off the stability line", Lysekil, Sweden (1966).
- "Int. Conf. on the Properties of Nuclei far from the Region of Beta-Stability", CERN (1970).

^{6}He の生成 1948 年：H.S. Sommers Jr. and R. Sherr, PR74(‘48)1192.
^{8}He の生成 1965 年：A.M. Poskanzer et al., PRL15(‘65)1030.
^{11}Li の生成 1969 年：R. Klapisch et al., PRL23(‘69)652.



当時、関心が持たれていた事

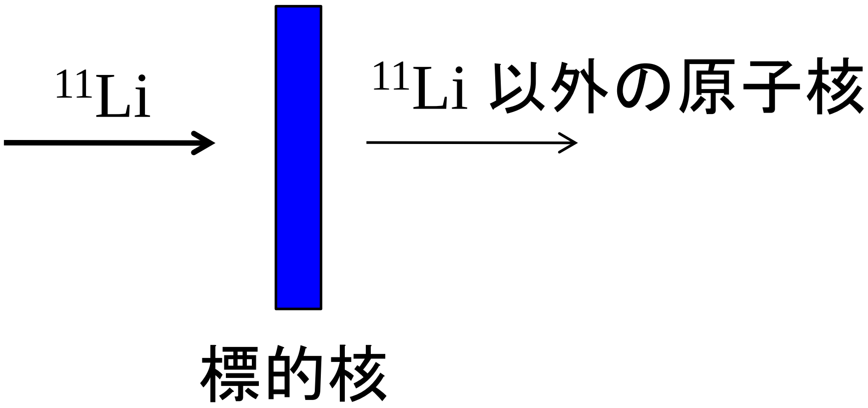
- 何個まで中性子は束縛するか？
- 安定核で作られた模型はどのくらい成り立つか？
- r-プロセス元素合成

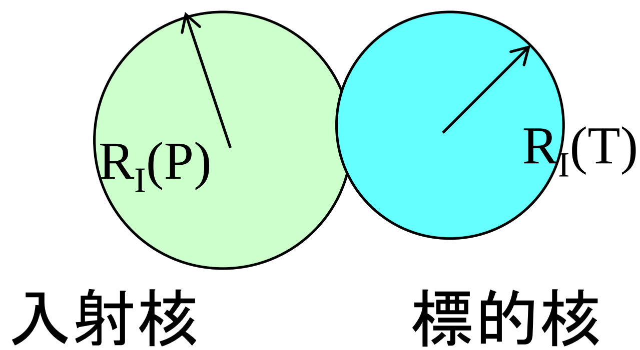
⇧

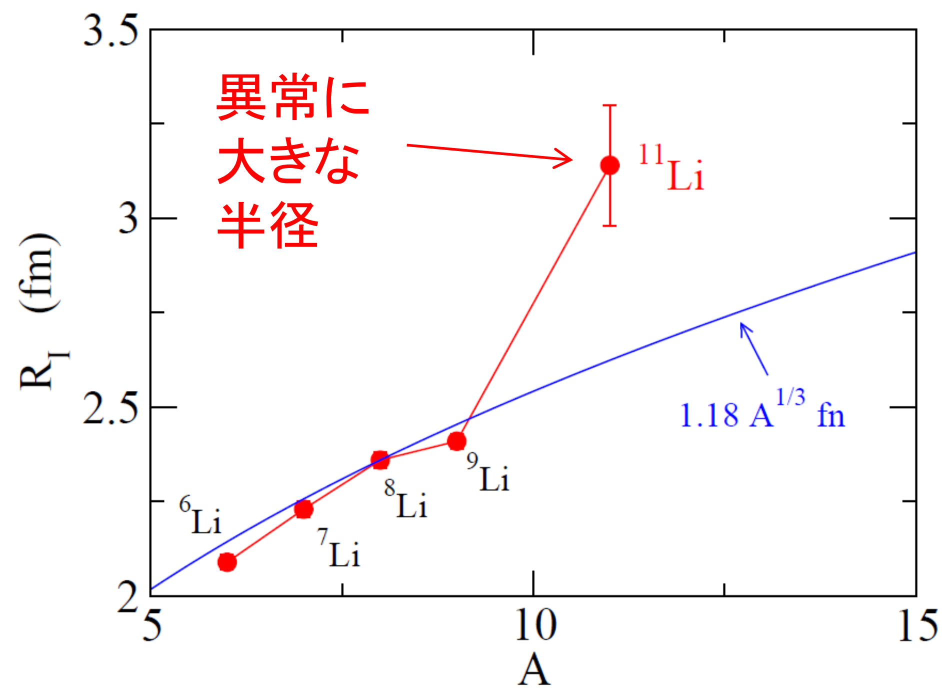
今もあまり変わらない（？）

＋弱束縛になることによって見え始める物理はあるか？

不安定核研究の本格的幕開け：相互作用断面積測定（1985）





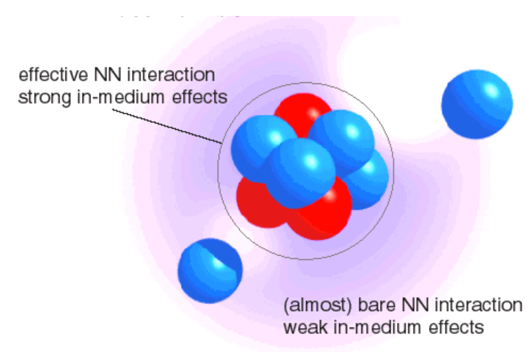


I. Tanihata et al., PRL55('85)2676

２つの原子核が重なった時に
反応が起こるとすると

$$\sigma_I \sim \pi[R_I(P) + R_I(T)]^2$$

$$\longrightarrow \quad R_I(\mathrm{P})$$

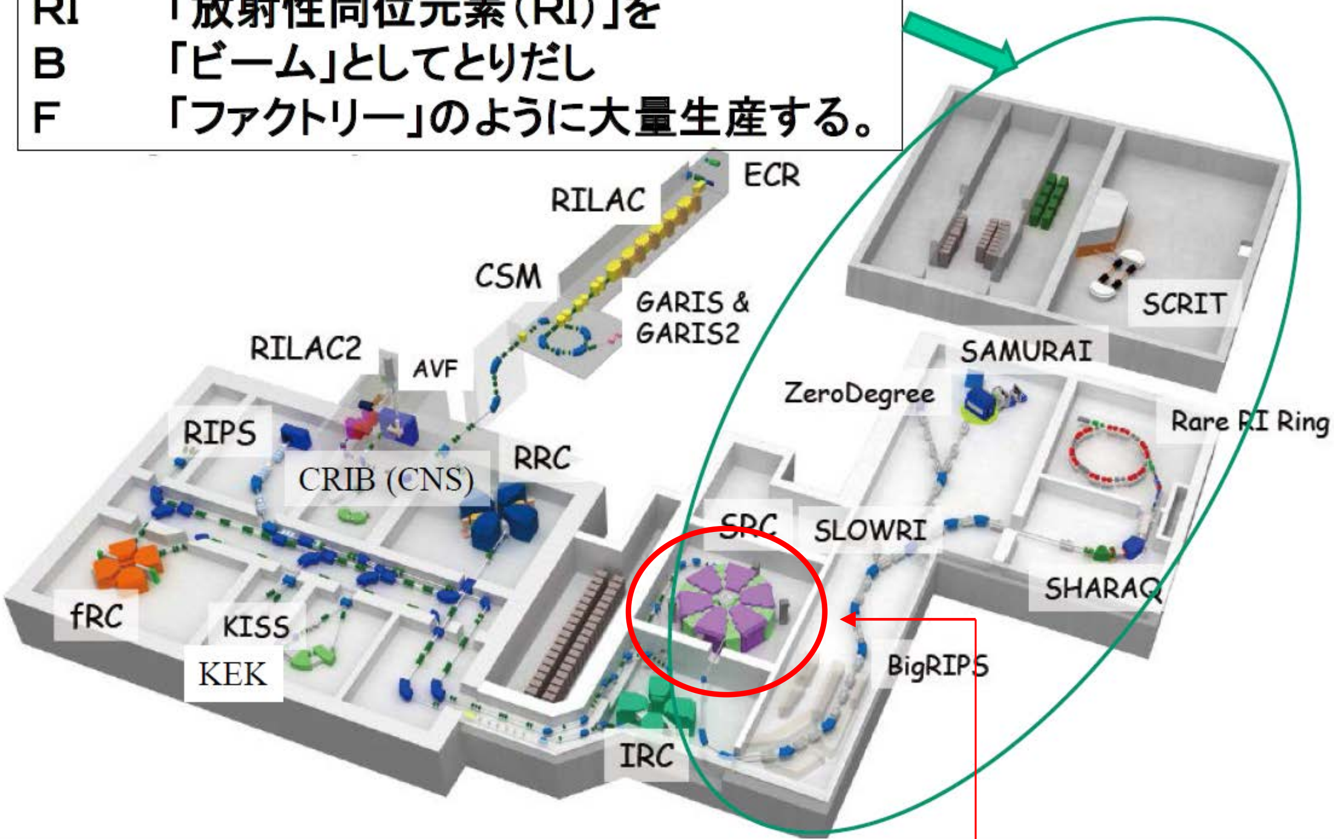


新世代不安定核ビーム施設:理研 RIBF　2007~

(Radioactive Isotope Beam Factory)

世界最大強度で不安定核を作り出す施設

RI	「放射性同位元素(RI)」を
B	「ビーム」としてとりだし
F	「ファクトリー」のように大量生産する。



- 不安定原子核の物理
- 元素の起源の研究
- 超重元素(新元素113番)の研究

理研RIBF 超伝導リングサイクロトロン (SRC)

直径 18.4 m

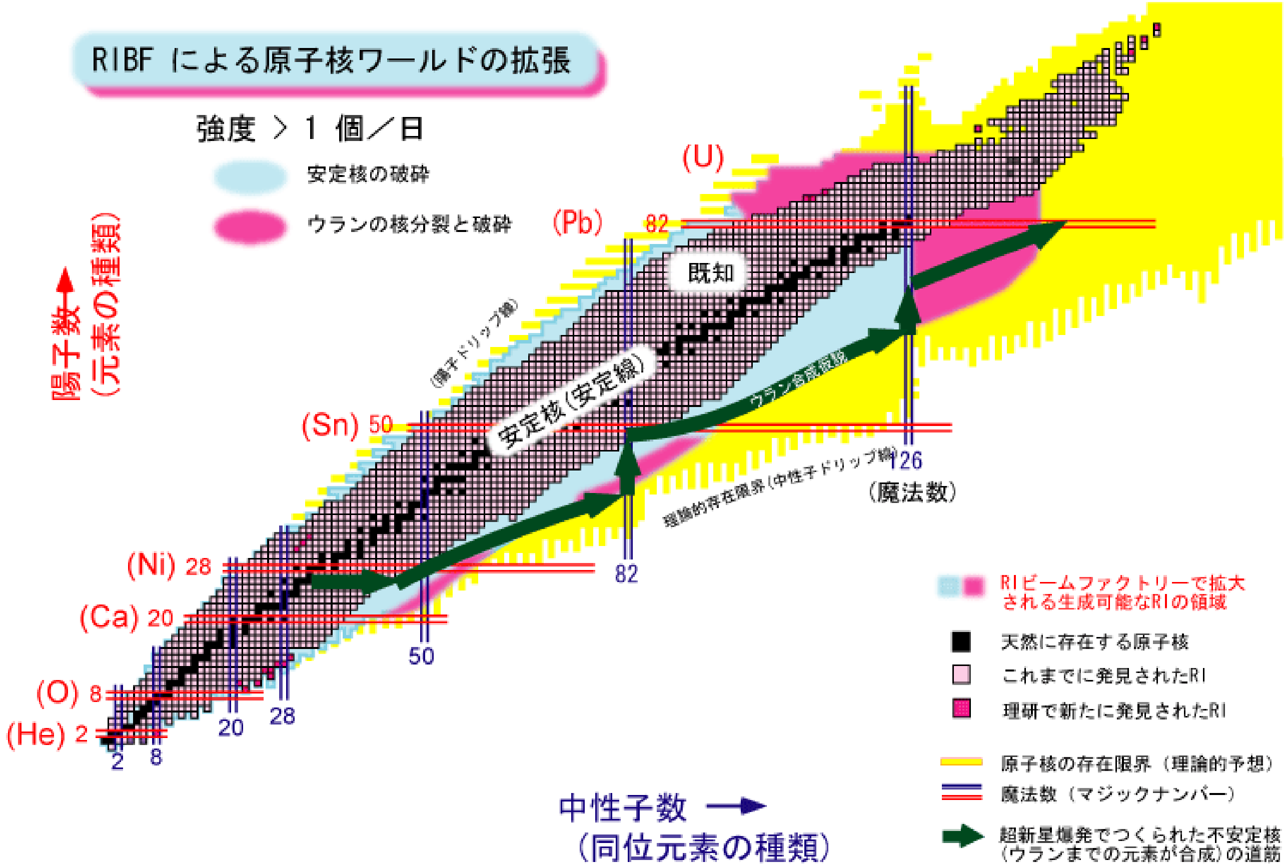
世界最強の加速器
（円形加速器：磁場で軌道を曲げる）
水素からウランまでの元素を高速に加速

⟶ 中性子過剰原子核の生成

理研重イオン線形加速器

RILAC　(~ 40 m)

113番元素の発見
（森田浩介氏）



中性子過剰な原子核の性質は?

安定な原子核に比べて何が変わるのか?

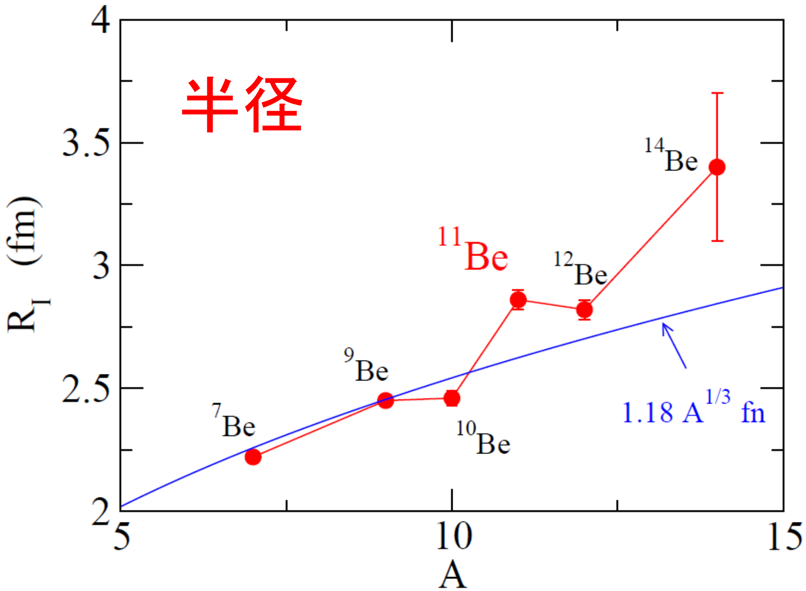
比較的軽い中性子過剰核の物理を中心に

1粒子ハロー核の性質

－束縛状態
－角運動量の効果
－クーロン励起
－変形ハロー核

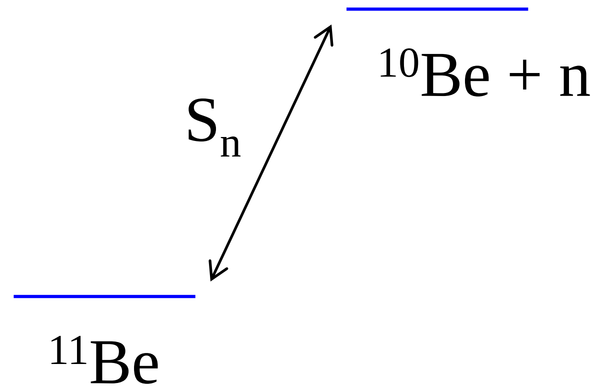
1中性子ハロー核とは何か

典型的な例：$^{11}_{4}\mathrm{Be}_7$



I. Tanihata et al.,
PRL55(‘85)2676; PLB206(‘88)592

1中性子分離エネルギー

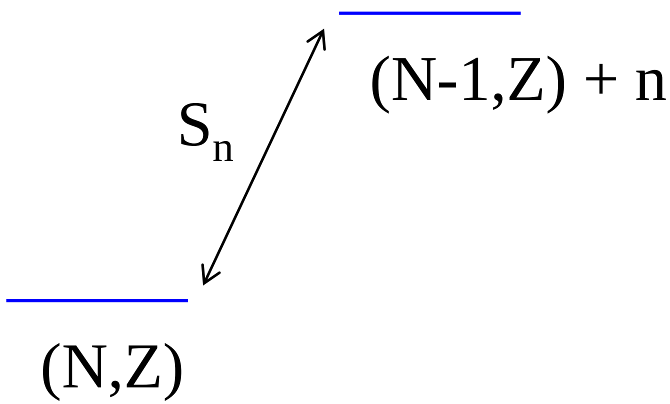


S_n = 504 +/- 6 keV

非常に小さい

ちなみに ^{13}C では、
S_n = 4.95 MeV

復習：原子核の束縛エネルギーの系統性（安定核）

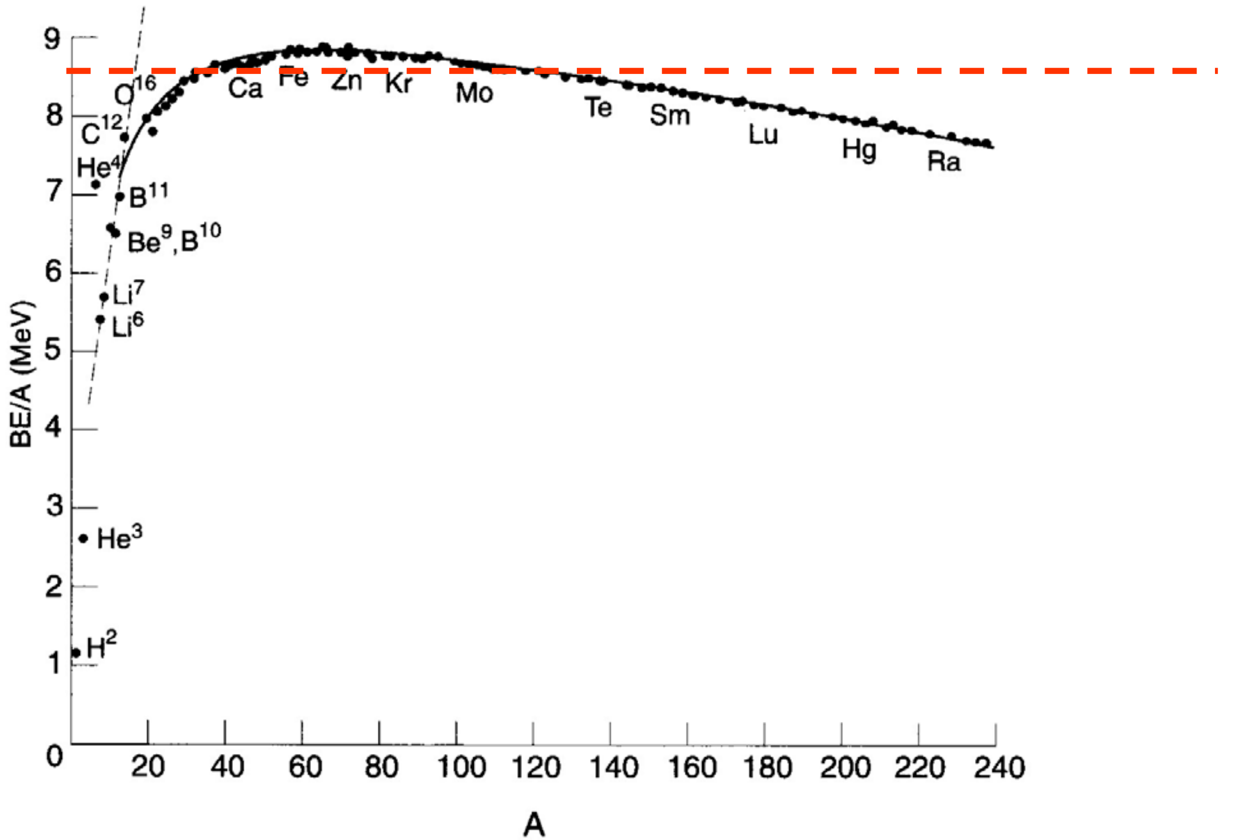


$$S_n(N,Z) = B(N,Z) - B(N-1,Z)$$

$B(N,Z) \sim B(N-1,Z) + B(N,Z)/A$ だとすると

$$S_n(N,Z) \sim B(N,Z) / A$$

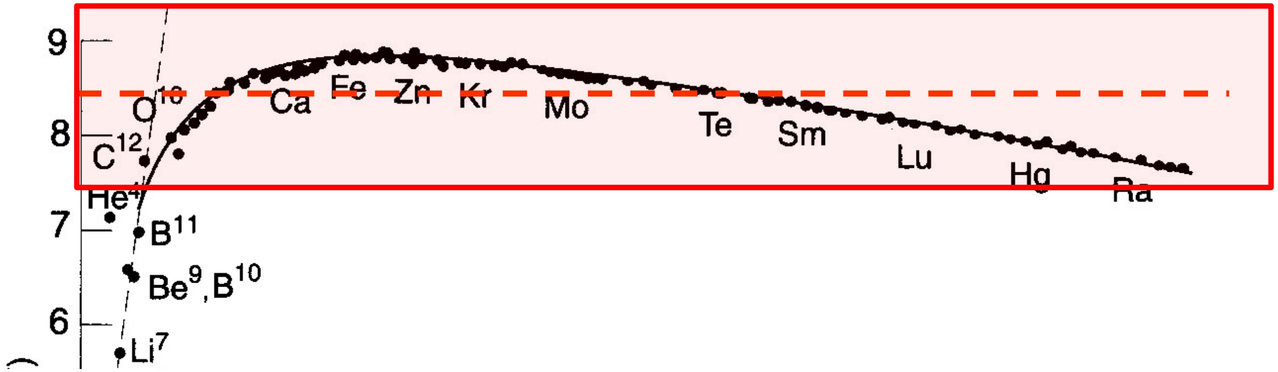
復習:原子核の束縛エネルギーの系統性(安定核)



B(N,Z)/A ~ 8.5 MeV (A > 12) ⟺ 短距離力(核子間相互作用)

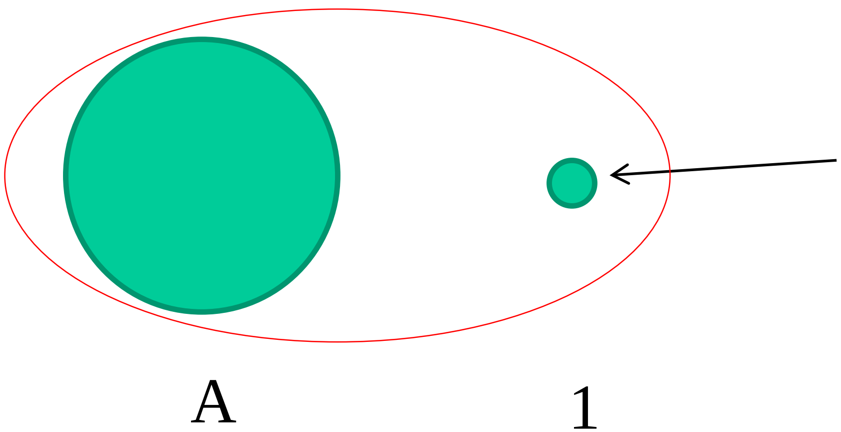
長距離力: $B \propto A(A-1)/2$ $\quad$ $B/A \propto A$

短距離力: saturation(B/A が一定になる)



B(N,Z)/A ~ 8.5 MeV (A > 12)

これは、粒子を1つ増やすと、束縛エネルギーは一定の量（~ 8.5 MeV）しか増えないことを意味している。



この核子は決まった個数の核子としか相互作用しない（短距離力）

もし全ての核子と相互作用するとすると（長距離力）

$$B \propto A(A-1)/2 \qquad B/A \propto A$$

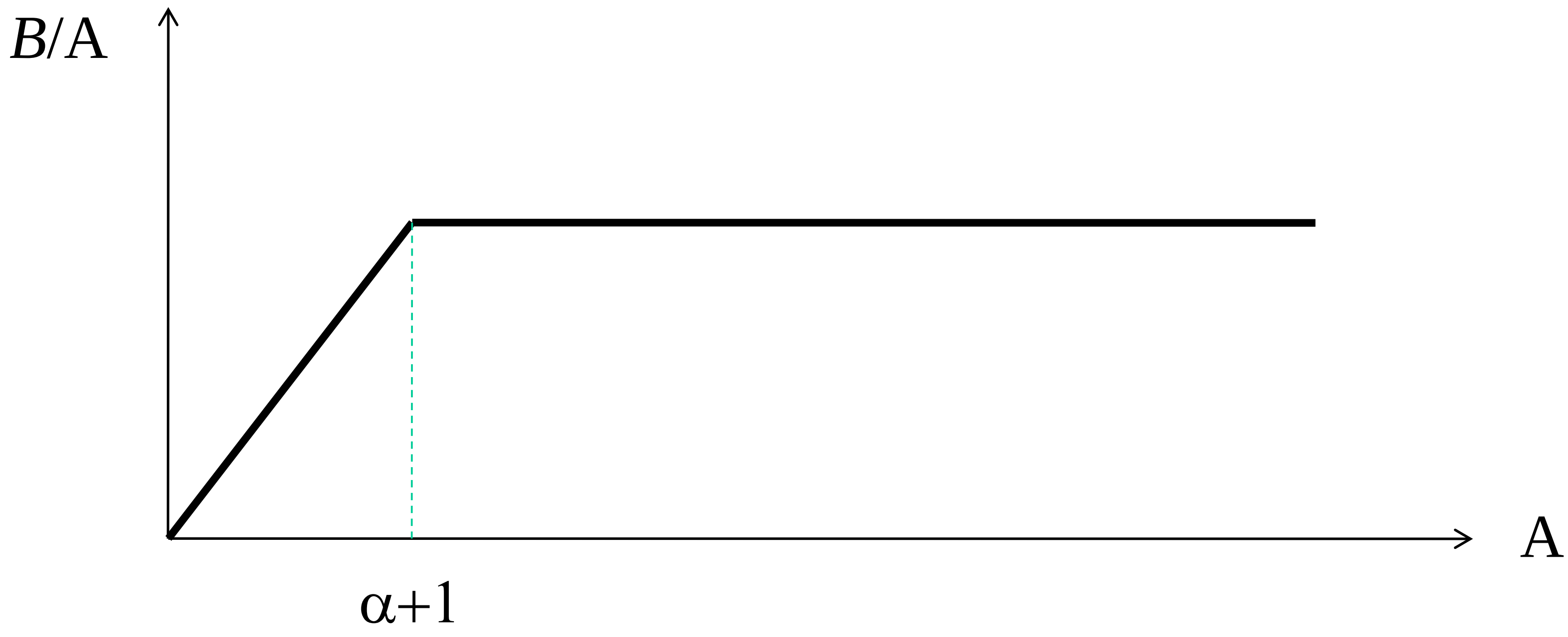
となるはず。。。。

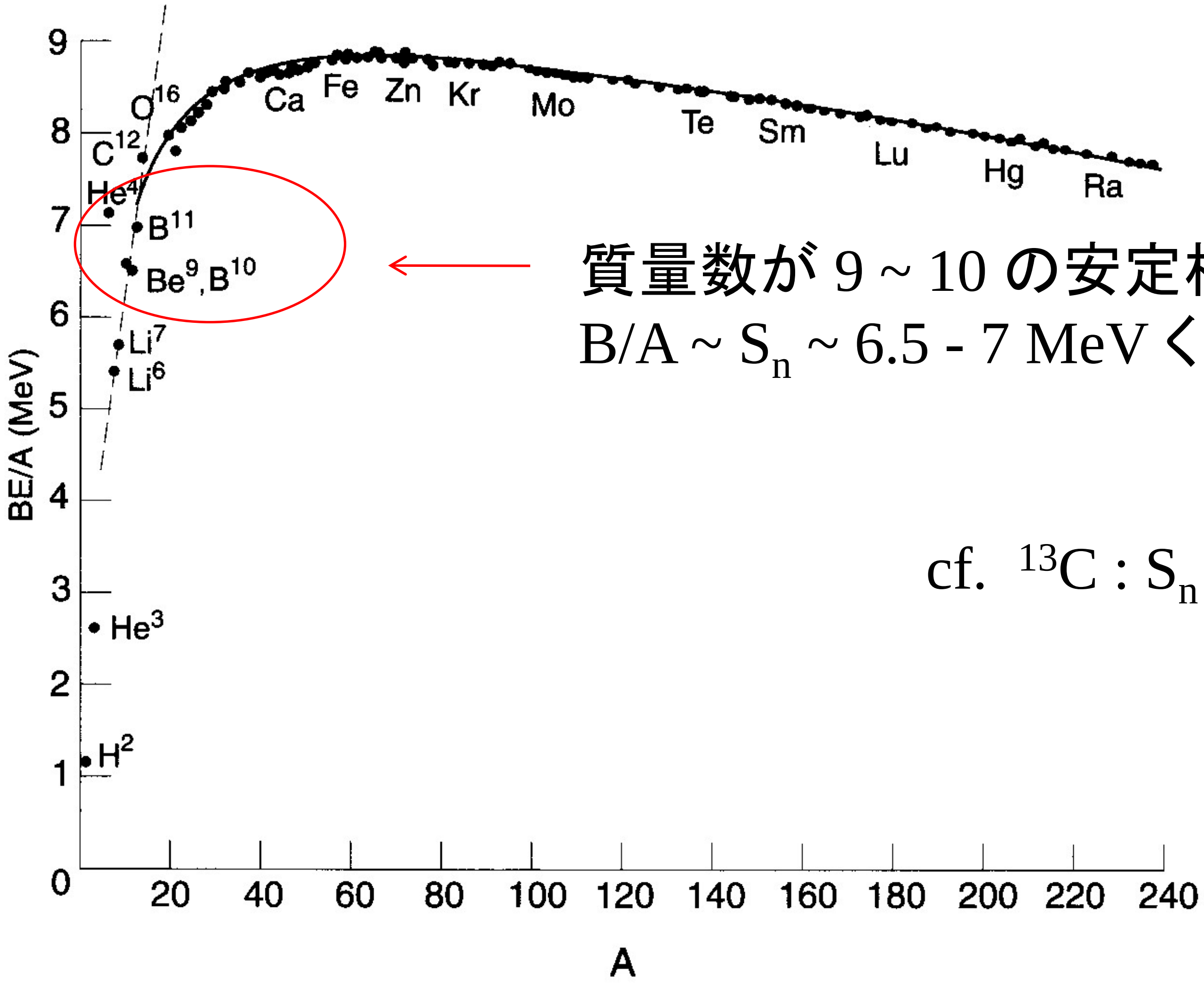
1つの核子が α 個の核子とのみ相互作用するとすると、

$B \sim \alpha\, A/2 \longrightarrow B/A \sim \alpha/2$ (const.)

ただし、A < α+1 の時は、すべての核子対が相互作用するので、

$B/A \propto A$





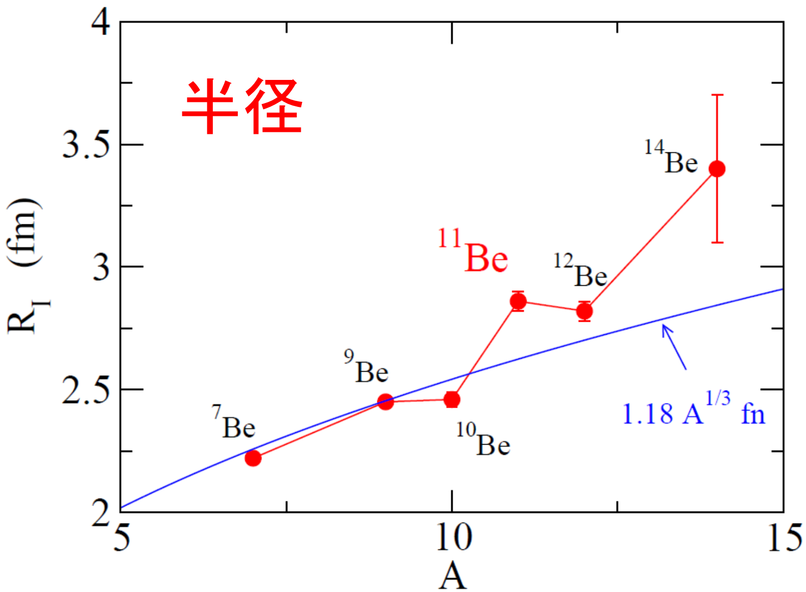
質量数が 9 ~ 10 の安定核では

B/A ~ S_n ~ 6.5 - 7 MeV くらい

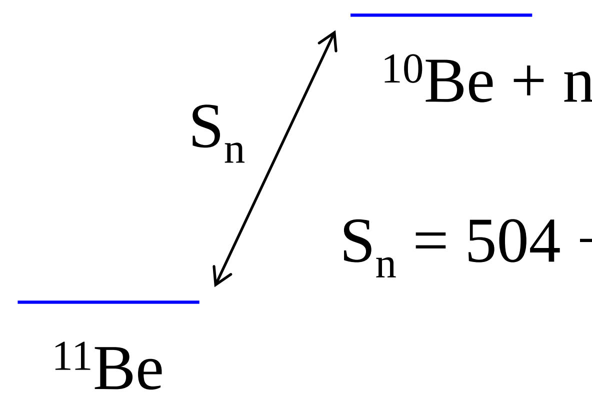
cf. ^{13}C : S_n = 4.95 MeV

1中性子ハロー核

典型的な例：$^{11}_{4}\mathrm{Be}_7$

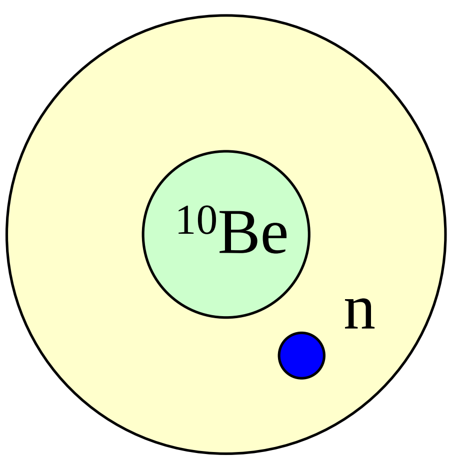


1中性子分離エネルギー



S_n = 504 +/- 6 keV

解釈：^{10}Be のまわりに1つの中性子が弱く束縛され薄く広がっている



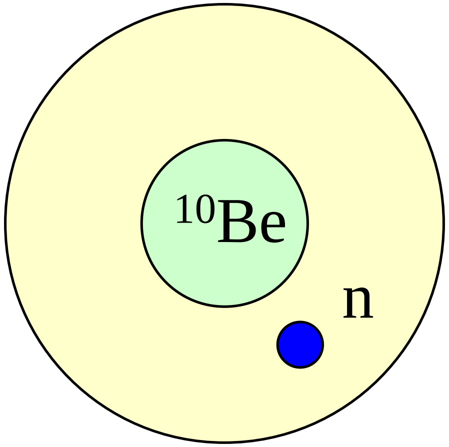
$$\psi(r) \sim \exp(-\kappa r) \qquad \kappa = \sqrt{2m|\epsilon|/\hbar^2}$$

弱く束縛された系

⇓

密度分布の空間的広がり（ハロー構造）

解釈：^{10}Be のまわりに1つの中性子が弱く束縛され薄く広がっている



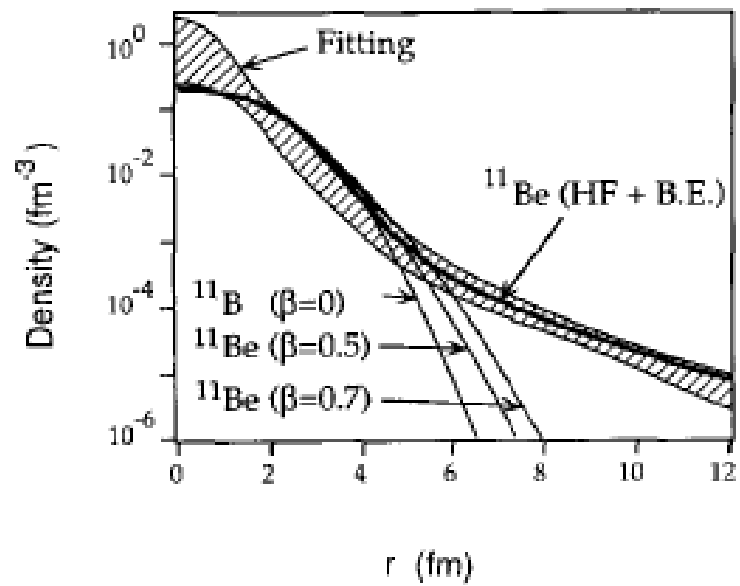
$$\psi(r) \sim \exp(-\kappa r) \qquad \kappa = \sqrt{2m|\epsilon|/\hbar^2}$$

弱く束縛された系

密度分布の空間的広がり（ハロー構造）

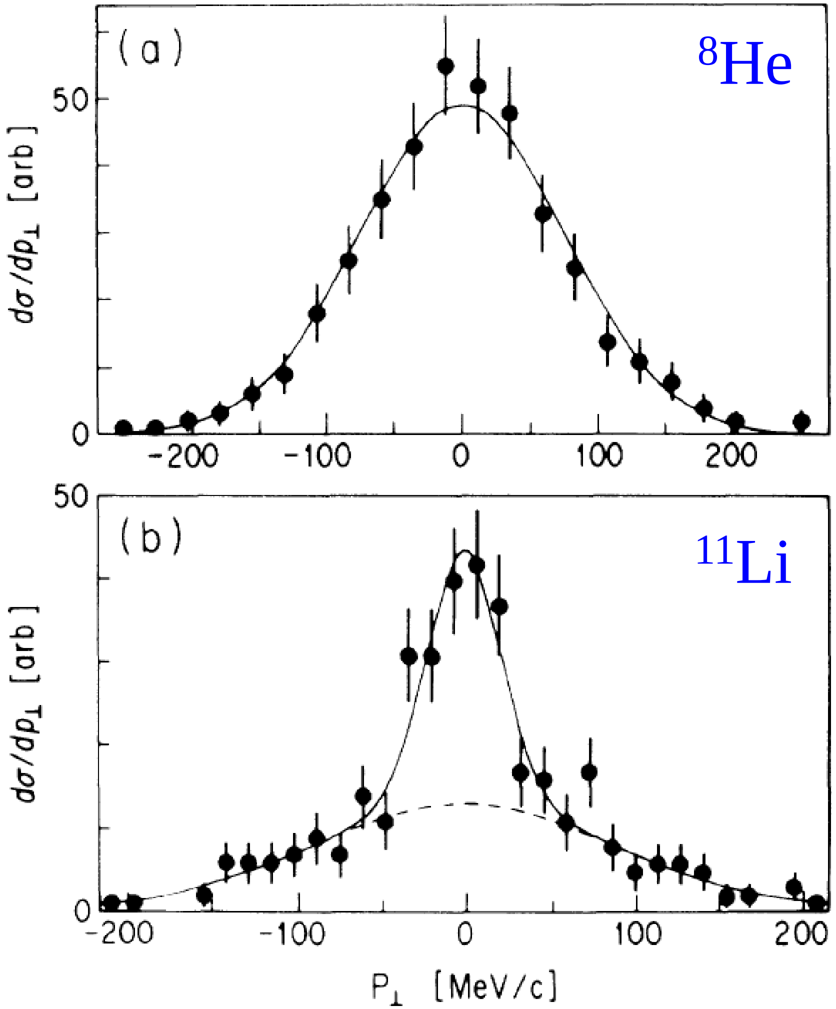
月暈（月のまわりに広がる薄い輪。ハロー。）

反応断面積の実験値を説明する密度分布



M. Fukuda et al., PLB268('91)339

運動量分布



S_{2n} ~ 2.1 MeV

S_{2n} ~ 300 keV

FIG. 1. Transverse-momentum distributions of (a) ^{6}He fragments from reaction ^{8}He+C and (b) ^{9}Li fragments from reaction ^{11}Li+C. The solid lines are fitted Gaussian distributions. The dotted line is a contribution of the wide component in the ^{9}Li distribution.

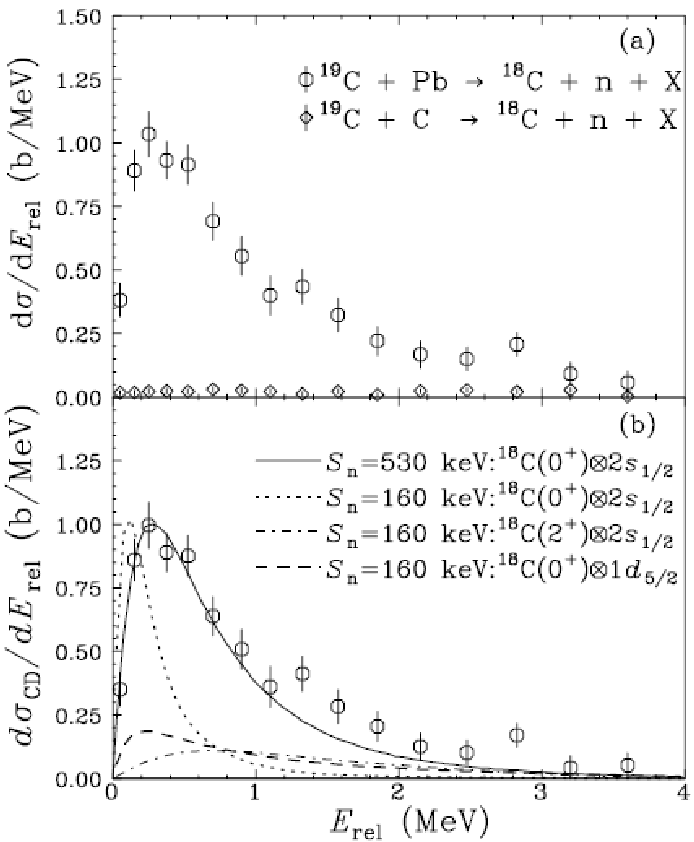
束縛が弱くなり空間的に広がると運動量分布が狭くなる

⟷ 中性子ハロー

T. Kobayashi et al., PRL60 ('88) 2599

1n ハロー核の他の候補

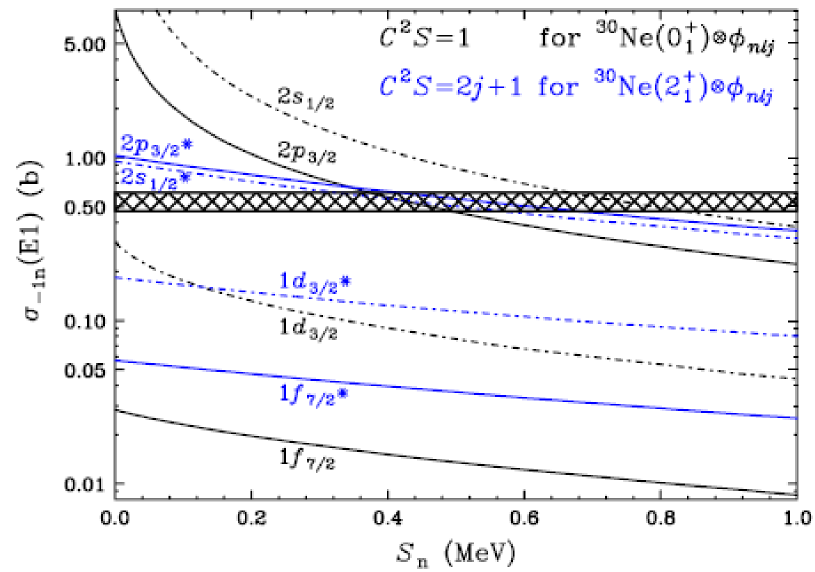
^{19}C: S_n = 0.58(9) MeV



T. Nakamura et al., PRL83(‘99)1112

^{19}C のクーロン分解反応

^{31}Ne: S_n = 0.29 +/- 1.64 MeV

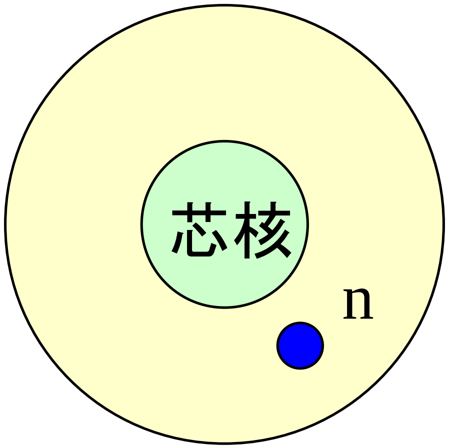


T. Nakamura et al.,
PRL103(‘09)262501

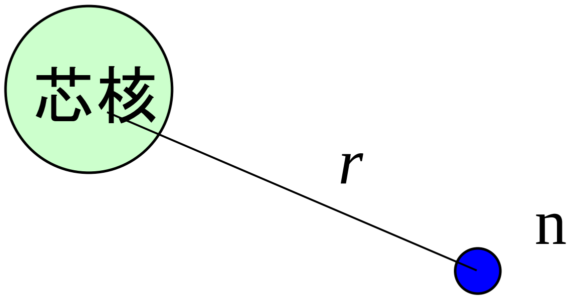
大きなクーロン分解反応の
断面積

なぜクーロン分解がハローの
証拠になるのか?→のちほど

一粒子運動の性質：束縛状態



芯核と中性子でできる2体問題と近似



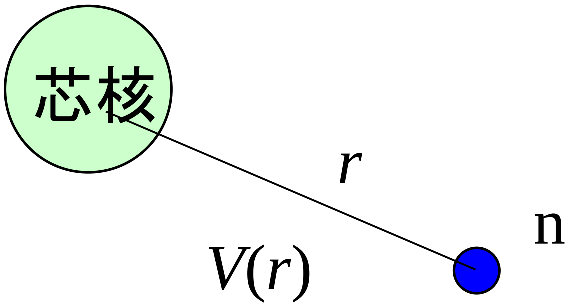
相対距離 r の関数として球対称ポテンシャル $V(r)$ を仮定。

cf. 平均場ポテンシャル：

$$V(r) \sim \int v(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}'$$

相対運動のハミルトニアン

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V(r)$$



相対運動のハミルトニアン

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V(r)$$

簡単のためスピン軌道相互作用はないとすると(ls 力がなくても本質は変わらない)

$$\boxed{\Psi_{lm}(\boldsymbol{r}) = \frac{u_l(r)}{r} Y_{lm}(\hat{\boldsymbol{r}})}$$

$$\boxed{\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} + V(r) - \epsilon_l\right] u_l(r) = 0}$$

境界条件(束縛状態):

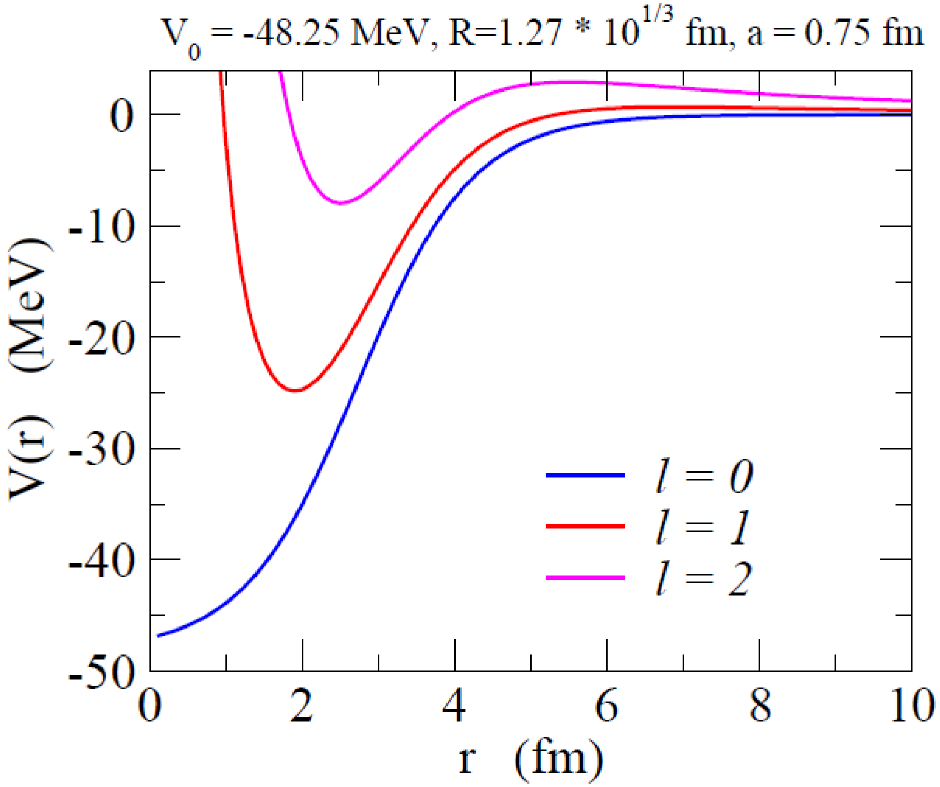
$$\begin{aligned} u_l(r) &\sim r^{l+1} && (r \sim 0) \\ &\to e^{-\kappa r} && (r \to \infty) \end{aligned}$$

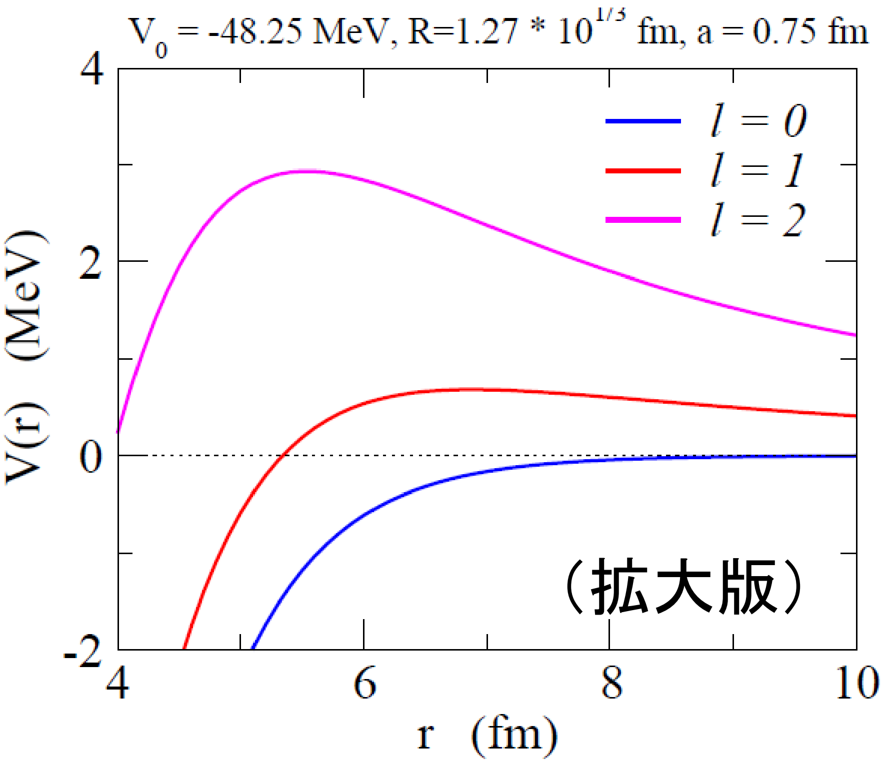
* 正確には modified 球ベッセル関数

角運動量とハロー現象

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2}+\underline{\frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2}}+V(r)-\epsilon_l\right]u_l(r)=0$$

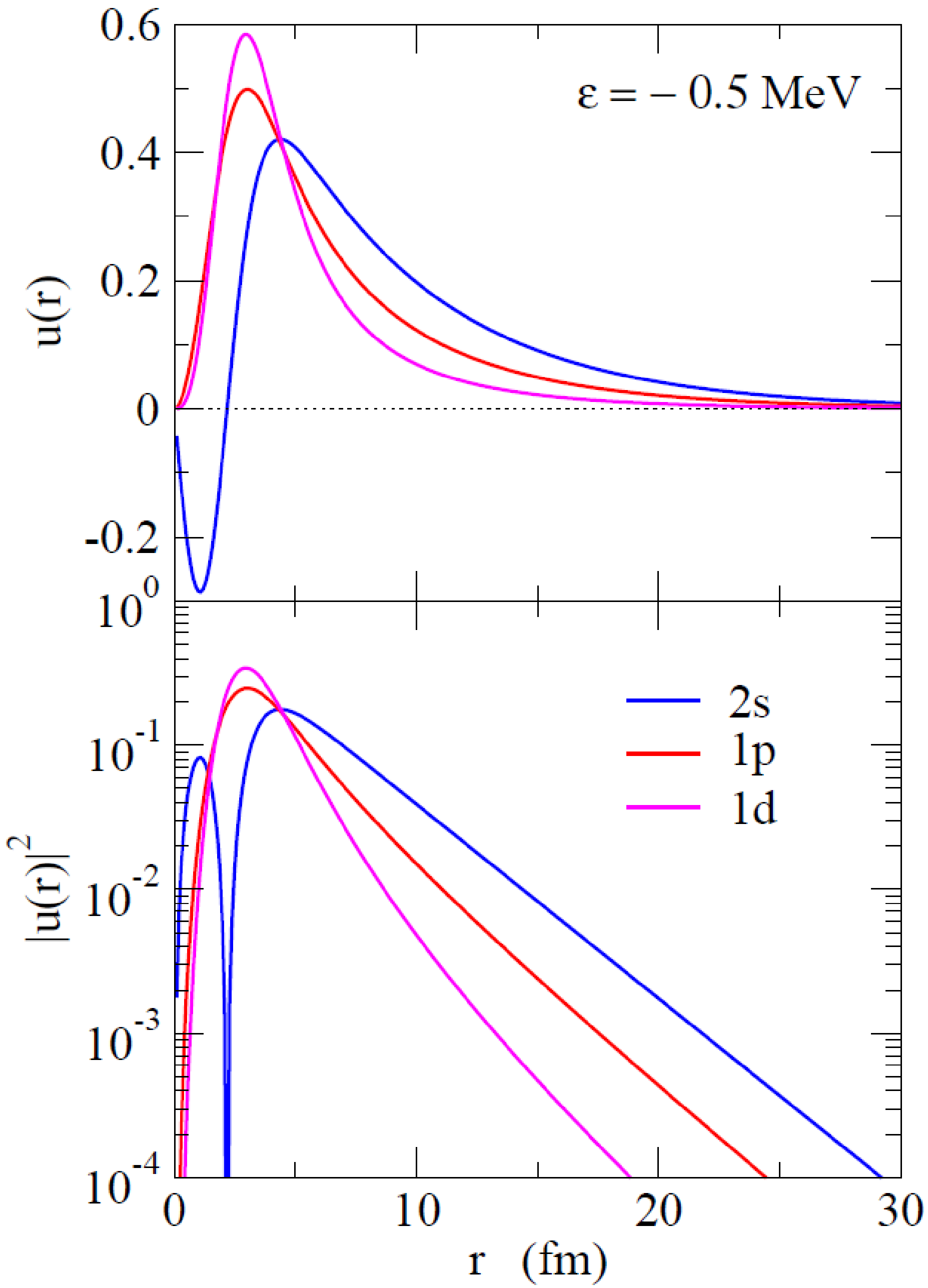
遠心力ポテンシャル





遠心力障壁の高さ: 0 MeV (l = 0), 0.69 MeV (l = 1), 2.94 MeV (l = 2)

波動関数　　ε = -0.5 MeV となるように各 l ごとに V_0 を調整



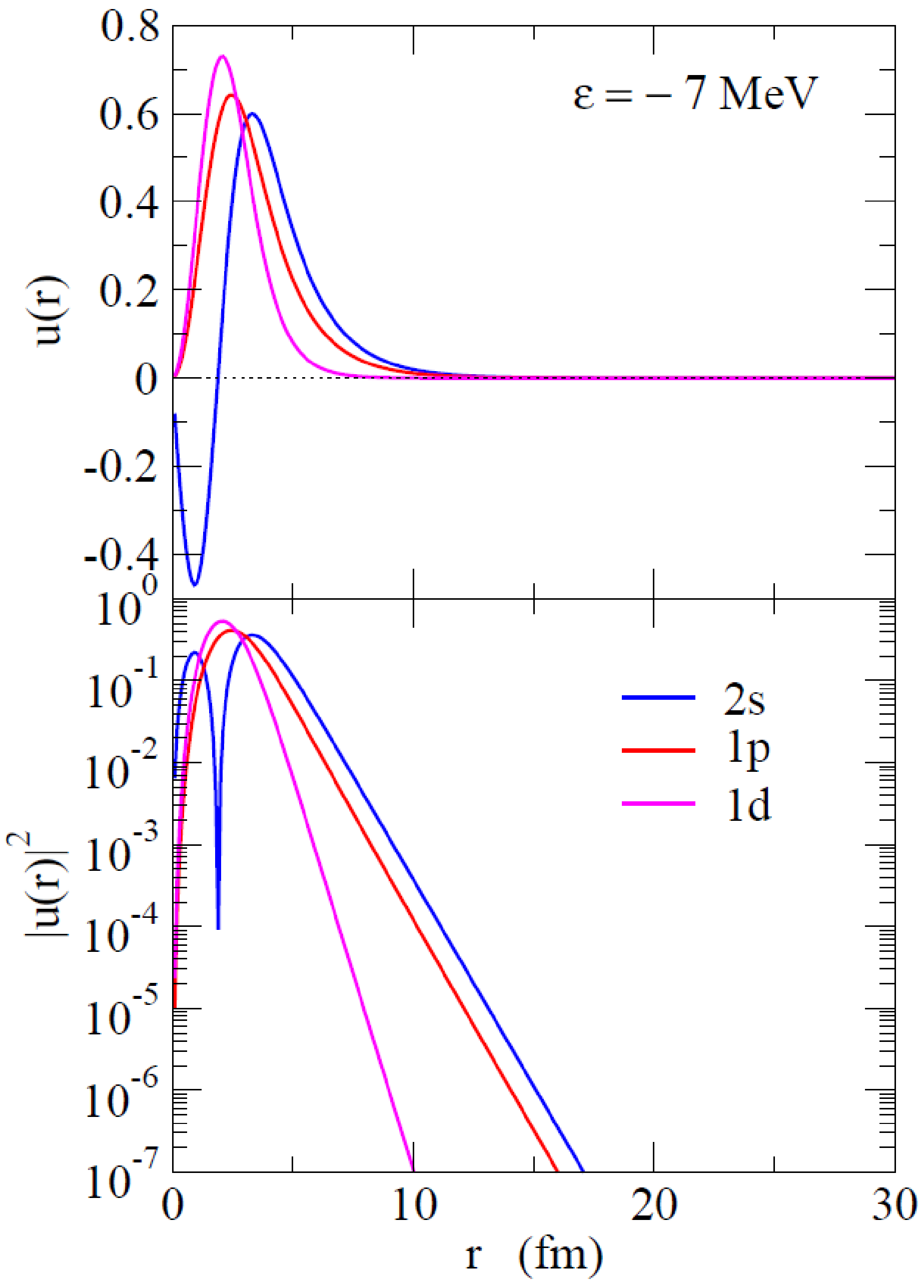
l = 0 :長いテール
l = 2 : 局在
l = 1 : その中間

平均2乗半径:

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} = \sqrt{\int_0^\infty dr\, r^2 u_l(r)^2}$$

7.17 fm (l = 0)
5.17 fm (l = 1)
4.15 fm (l = 2)

波動関数　　ε = -7 MeV の場合



どの l も波動関数は局在

平均2乗半径:

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} = \sqrt{\int_0^\infty dr\, r^2 u_l(r)^2}$$

3.58 fm (l = 0)
3.05 fm (l = 1)
3.14 fm (l = 2)

平均2乗半径のゼロ・エネルギーにおける振る舞い

$$\begin{aligned} I_2 &\equiv \int_0^\infty dr\, r^2 u_l(r)^2 \\ &= \int_0^R dr\, r^2 u_l(r)^2 + \int_R^\infty dr\, r^2 u_l(r)^2 \end{aligned}$$

積分領域をポテンシャルの内と外に分離

↓

エネルギーが小さくなると外の領域が主に寄与

$$I_2 \sim \int_R^\infty dr\, r^2 u_l(r)^2$$

平均2乗半径のゼロ・エネルギーにおける振る舞い

エネルギーが小さくなると外の領域が主に寄与

$$I_2 \sim \int_R^\infty dr\, r^2 u_l(r)^2$$

外の領域では、波動関数は modified 球ベッセル関数に比例

$$u_l(r) = c_l \cdot r\, k_l(\alpha r), \qquad \alpha = \sqrt{2m|\epsilon_l|/\hbar^2}$$

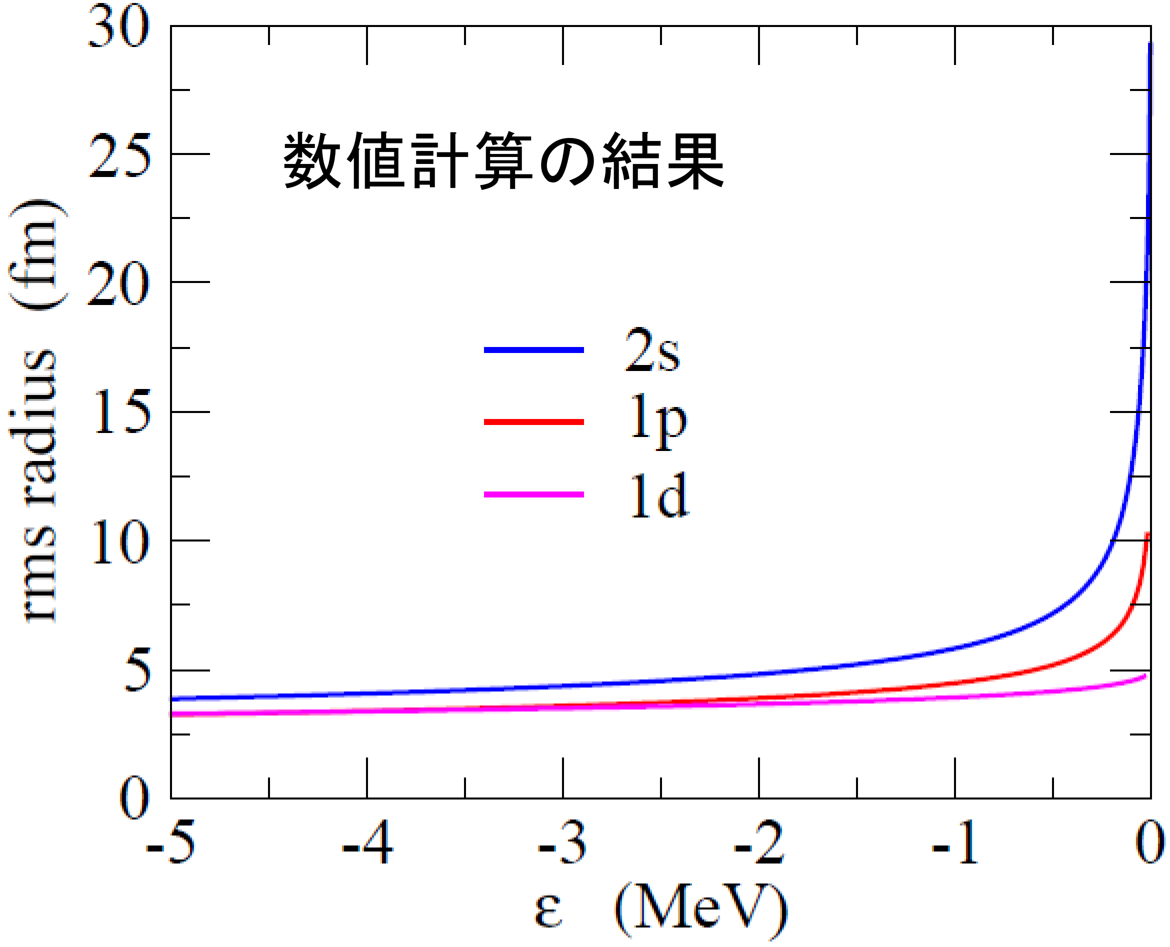
$$\begin{aligned}\langle r^2\rangle &= I_2/I_0 \\ &\sim c_l^2 \int_R^\infty dr\, r^2 [r k_l(\alpha r)]^2 \Big/ c_l^2 \int_R^\infty dr\, [r k_l(\alpha r)]^2\end{aligned}$$

積分は解析的に実行可能

$$\langle r^2\rangle \propto \begin{cases} 1/|\epsilon_0| & (l=0) \\ 1/\sqrt{|\epsilon_1|} & (l=1) \\ const. & (l=2)\end{cases}$$

K. Riisager,
A.S. Jensen, and
P. Moller, NPA548('92)393

$$\langle r^2 \rangle \propto \begin{cases} 1/|\epsilon_0| & (l=0) \\ 1/\sqrt{|\epsilon_1|} & (l=1) \\ const. & (l=2) \end{cases}$$



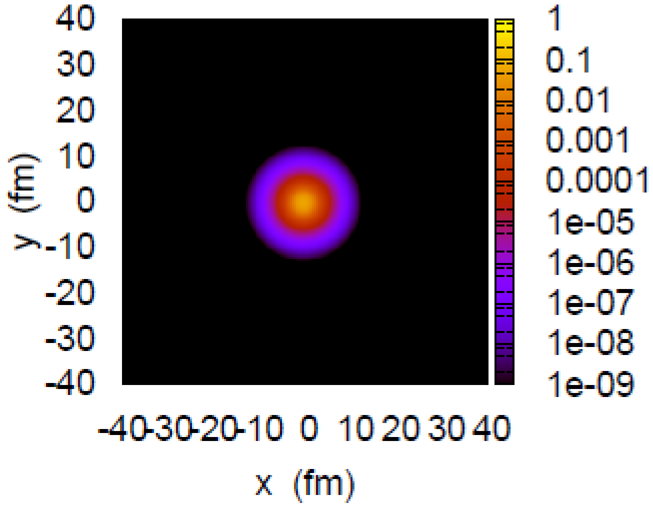
⇓

半径は l=0,1 では発散
（ゼロ・エネルギー極限）

⇓

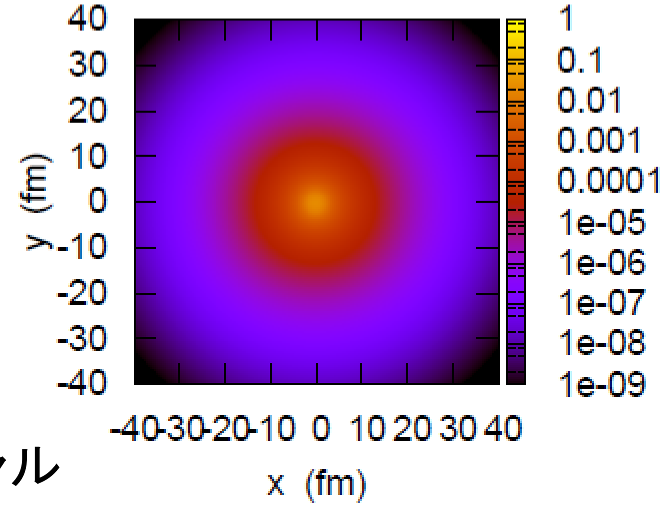
ハロー（異常に大きい半径）は l= 0 or 1 でのみおこる

表紙に載せておいた図



弱束縛

井戸型ポテンシャル
(l=0 束縛状態)



e = -8.07 MeV

e = -0.21 MeV

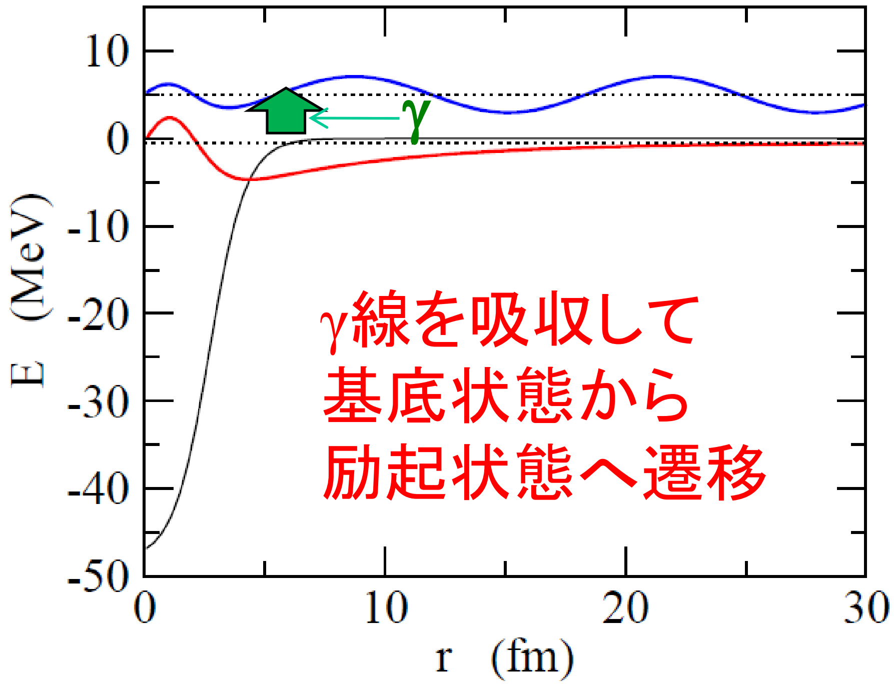
V_0 = 24 MeV
R = 2.496 fm

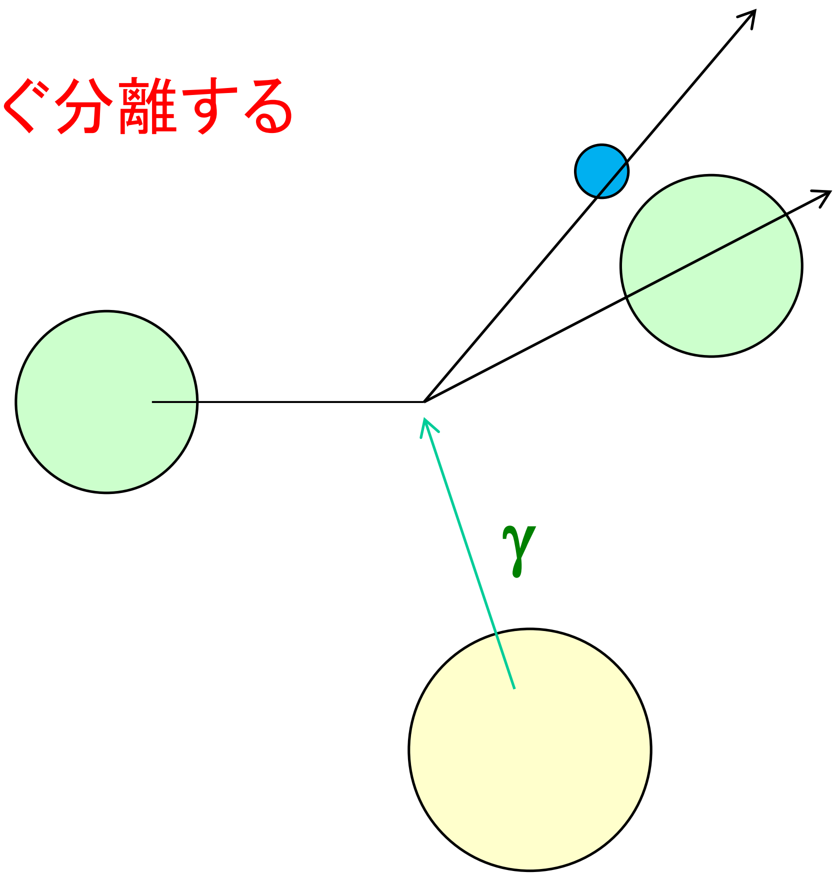
V_0 = 10 MeV
R = 2.496 fm

1中性子ハロー核のクーロン励起

ハロー核：弱束縛がキーワード

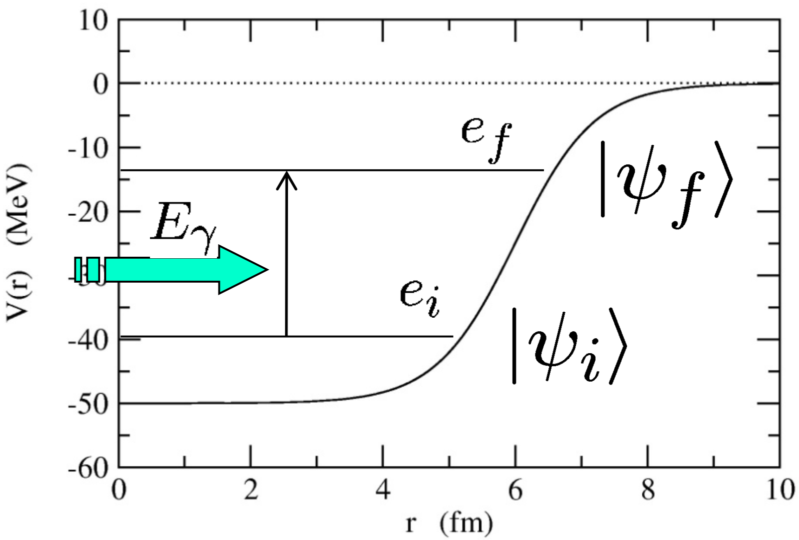
→ 刺激を与えると中性子がすぐ分離する

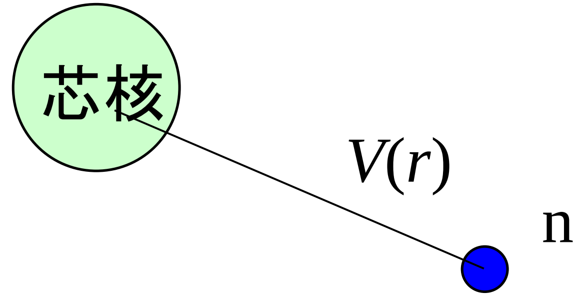




連続状態へ励起されれば分解が起きる ← 標的核の作るクーロン場による励起

電磁遷移の計算



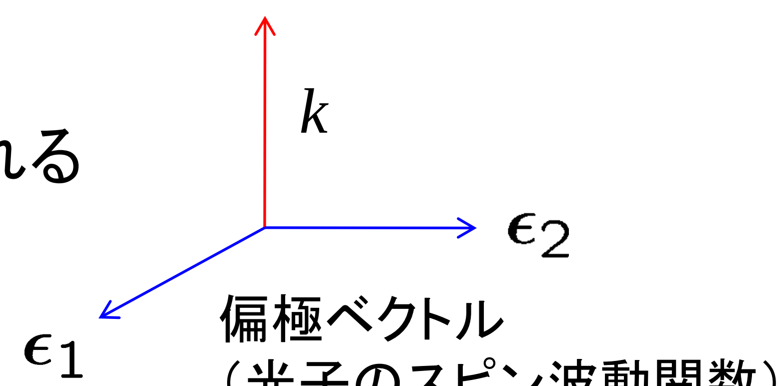


簡単のため、まず、離散的な状態から離散的な状態への遷移を考える。(連続状態への遷移は後ほど)

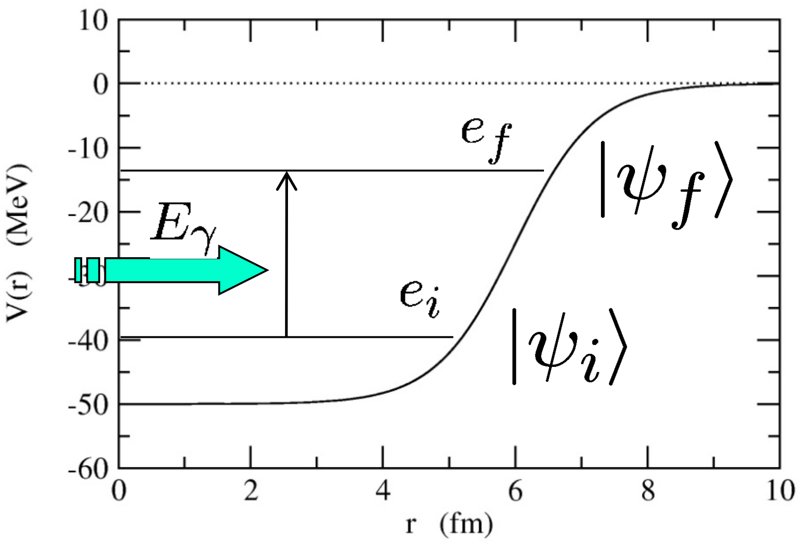
- ψ_i, ψ_f はハミルトニアンの固有状態:

$$
\begin{aligned}
H\Psi_i &= e_i\Psi_i \\
H\Psi_f &= e_i\Psi_f
\end{aligned}
$$

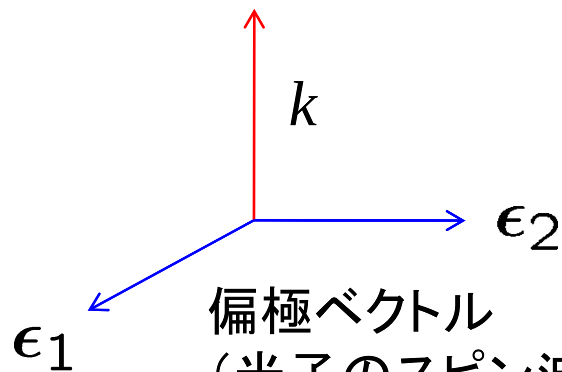
- 光子の状態は運動量と偏極で指定される



電磁遷移の計算



光子



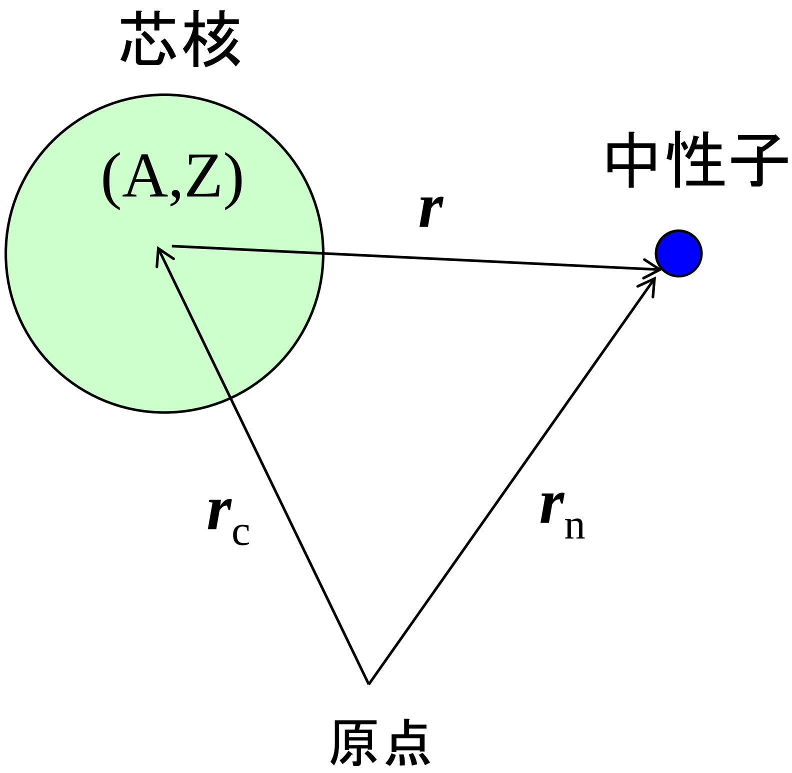
偏極ベクトル
（光子のスピン波動関数）

初期状態: $|\psi_i\rangle|n_{k\alpha}=1\rangle$ ⟵ 原子核の状態が Ψ_i, 運動量 k, 偏極 α を持つ 1個のフォトン (α = 1 or 2)

遷移 ↓ H_{int}
（原子核と電磁場の相互作用）

終状態: $|\psi_f\rangle|n_{k\alpha}=0\rangle$

原子核と電磁場の相互作用



$$H = \frac{\boldsymbol{p}_c^2}{2Am} + \frac{\boldsymbol{p}_n^2}{2m} + V(r)$$

電磁場との相互作用:

$$\boldsymbol{p}_c \to \boldsymbol{p}_c - \frac{Ze}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_c, t)$$

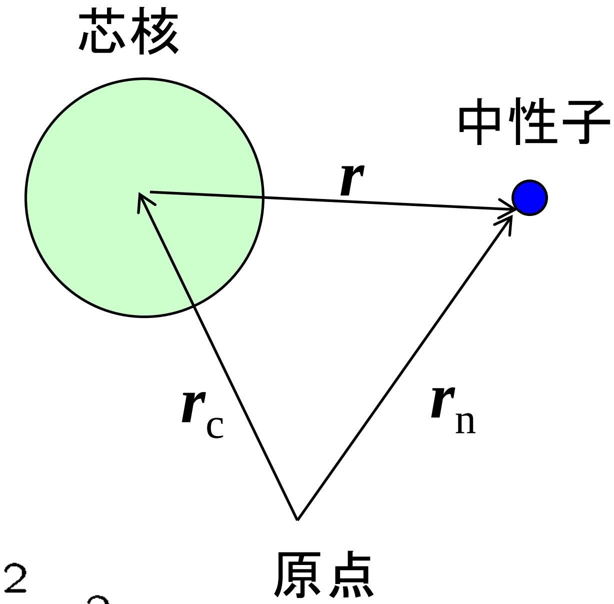
と置き換え。

＊このような変更を行うと古典的な運動方程式

$$mA\ddot{\boldsymbol{r}}_c = Ze\left[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_c, t) + \frac{1}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_c, t)\right]$$

が出てくる（標準的な量子力学の教科書を見よ）。

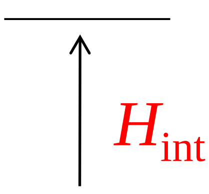
原子核と電磁場の相互作用



$$
\begin{aligned}
H &= \frac{(\boldsymbol{p}_c - \frac{Ze}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_c, t))^2}{2Am} + \frac{\boldsymbol{p}_n^2}{2m} + V(r) \\
&\sim \boxed{\frac{\boldsymbol{p}_c^2}{2Am} + \frac{\boldsymbol{p}_n^2}{2m} + V(r)} \quad = H_0 \\
&\quad \underbrace{-\frac{1}{2Am}\cdot\frac{Ze}{c}(\boldsymbol{p}_c\cdot\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{p}_c) + \frac{1}{2Am}\left(\frac{Ze}{c}\right)^2 \boldsymbol{A}^2}_{}
\end{aligned}
$$

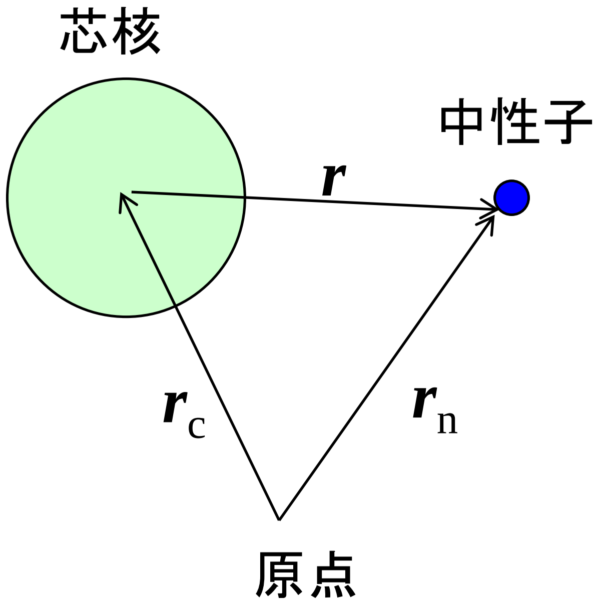
$$= H_\mathrm{int} \sim \boxed{-\frac{1}{Am}\cdot\frac{Ze}{c}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{p}_c}$$

$\longleftarrow$ クーロン・ゲージ $\nabla\cdot\boldsymbol{A} = 0$



H_int により状態間の遷移が起きる

原子核と電磁場の相互作用



座標系の変換：相対座標と重心座標

相対座標

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} &= \boldsymbol{r}_n - \boldsymbol{r}_c \\ \boldsymbol{p} &= \frac{1}{A+1}(A\boldsymbol{p}_n - \boldsymbol{p}_c) \end{aligned}$$

重心座標

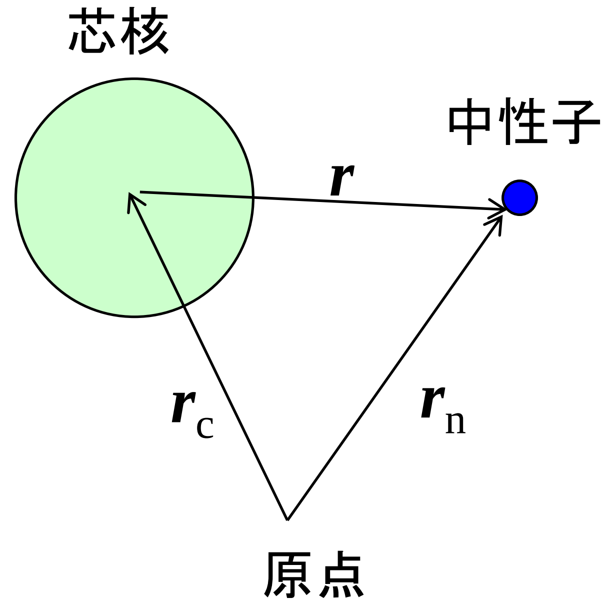
$$\begin{aligned} \boldsymbol{R} &= \frac{1}{A+1}(A\boldsymbol{r}_c + \boldsymbol{r}_n) \\ \boldsymbol{P} &= \boldsymbol{p}_n + \boldsymbol{p}_c \end{aligned}$$

$$H_{\text{int}} = -\frac{1}{Am}\cdot\frac{Ze}{c}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{p}_c = -\frac{1}{Am}\cdot\frac{Ze}{c}\boldsymbol{A}\cdot\left(\frac{A}{A+1}\boldsymbol{P} - \boldsymbol{p}\right)$$

重心固定系 ($\boldsymbol{P} = 0$) で考えると

$$\boxed{H_{\text{int}} = \frac{1}{Am}\cdot\frac{Ze}{c}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{p}}$$

(復習)座標系の変換:相対座標と重心座標



相対座標

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{r}_n - \boldsymbol{r}_c \\
\boldsymbol{p} &= \mu\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{Am}{A+1}(\dot{\boldsymbol{r}}_c - \dot{\boldsymbol{r}}_c) \\
&= \frac{1}{A+1}(A\boldsymbol{p}_n - \boldsymbol{p}_c)
\end{aligned}
$$

重心座標

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{R} &= \frac{1}{A+1}(A\boldsymbol{r}_c + \boldsymbol{r}_n) \\
\boldsymbol{P} &= (A+1)m\dot{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{p}_n + \boldsymbol{p}_c
\end{aligned}
$$

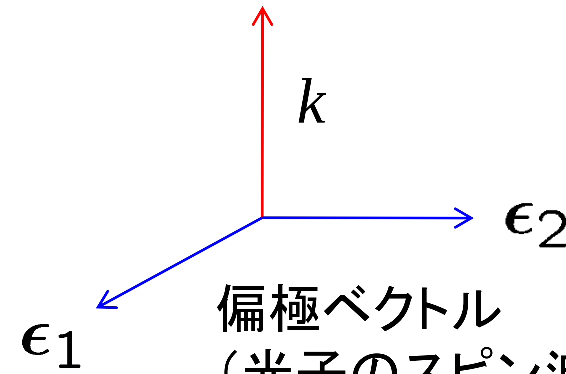
$$
\begin{aligned}
H &= \frac{\boldsymbol{p}_c^2}{2Am} + \frac{\boldsymbol{p}_n^2}{2m} + V(r) \\
&= \frac{\boldsymbol{P}^2}{2M} + \frac{\boldsymbol{p}^2}{2\mu} + V(r)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M &= (A+1)m \\
\mu &= \left(\frac{1}{Am} + \frac{1}{m}\right)^{-1}
\end{aligned}
$$

原子核と電磁場の相互作用

$$\boxed{H_{\text{int}} = \frac{1}{Am} \cdot \frac{Ze}{c} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{p}}$$

光子



偏極ベクトル
（光子のスピン波動関数）

ベクトルポテンシャルをフーリエ
展開して第二量子化:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) \;=\; \sum_{\alpha} \int \frac{d\boldsymbol{k}}{2\pi} \frac{\hbar c}{\sqrt{\hbar\omega}} \Big[a_{\boldsymbol{k}\alpha} \epsilon_\alpha e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - i\omega t} + a^\dagger_{\boldsymbol{k}\alpha} \epsilon_\alpha e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} + i\omega t} \Big]$$

$a_{\boldsymbol{k}\alpha},\ a^\dagger_{\boldsymbol{k}\alpha}$:フォトンの生成・消滅演算子

$$\omega = kc$$

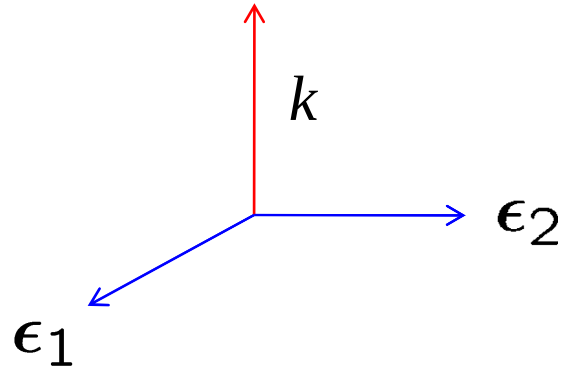
$$[a_{\boldsymbol{k}\alpha}, a^\dagger_{\boldsymbol{k}'\alpha'}] = \delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}')\,\delta_{\alpha,\alpha'}$$

cf. この規格化だと $(2\pi)^3$ の体積に一つの
フォトン→フォトンのフラックスは $c/(2\pi)^3$

$$\int d\boldsymbol{r} \left(\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}} \right)^* \left(\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \right) = \delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}')$$

原子核と電磁場の相互作用

$$\boxed{H_{\rm int} = \frac{1}{Am}\cdot\frac{Ze}{c}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{p}}$$



$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \sum_\alpha \int \frac{d\boldsymbol{k}}{2\pi}\frac{\hbar c}{\sqrt{\hbar\omega}}\left[a_{\boldsymbol{k}\alpha}\epsilon_\alpha e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-i\omega t} + a^\dagger_{\boldsymbol{k}\alpha}\epsilon_\alpha e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+i\omega t}\right]$$

$$\omega = kc$$

E1近似 （E1フォトンの吸収）

$$\boxed{e^{\pm i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \sim 1}$$

＊一般の多重極は Ring-Schuckの Appendix B を見よ

$$E_\gamma = 1\ \mathrm{MeV} \rightarrow k = \hbar\omega/\hbar c \sim 1/200\ \mathrm{fm}^{-1}$$

$$\boxed{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \sum_\alpha \int \frac{d\boldsymbol{k}}{2\pi}\frac{\hbar c}{\sqrt{\hbar\omega}}\left[a_{\boldsymbol{k}\alpha}\epsilon_\alpha e^{-i\omega t} + a^\dagger_{\boldsymbol{k}\alpha}\epsilon_\alpha e^{i\omega t}\right] = \boldsymbol{A}(t)}$$

(r に依存しないオペレーター)

（復習）時間に依存する摂動論

$$\boxed{H_{\text{int}} = \frac{1}{Am} \cdot \frac{Ze}{c} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{p}}$$

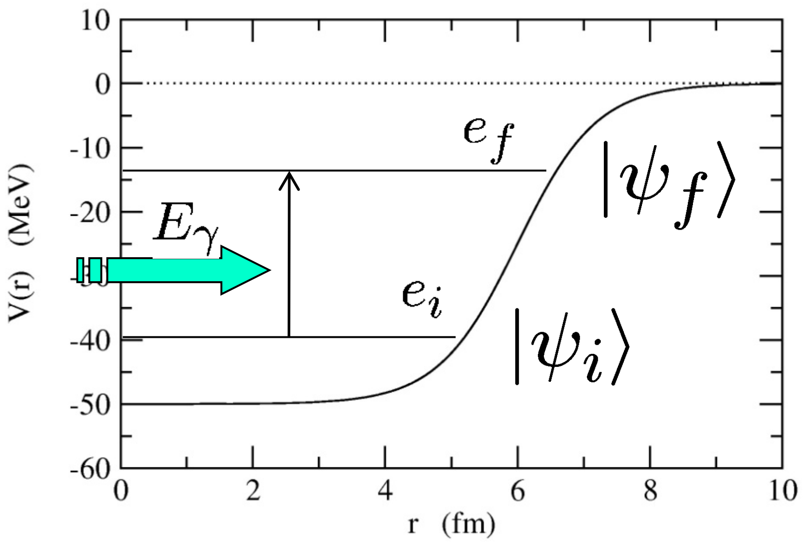
$$\boxed{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) \;=\; \sum_{\alpha} \int \frac{d\boldsymbol{k}}{2\pi} \frac{\hbar c}{\sqrt{\hbar\omega}} \left[a_{\boldsymbol{k}\alpha} \epsilon_{\alpha} e^{-i\omega t} + a^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\alpha} \epsilon_{\alpha} e^{i\omega t} \right] = \boldsymbol{A}(t)}$$

$V(\boldsymbol{r}, t) = F(\boldsymbol{r}) e^{\pm i\omega t}$ による単位時間あたりの遷移確率:
（単一の状態への遷移の場合）

$$\boxed{\Gamma_{i \to f} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f|F|i\rangle|^2 \, \delta(e_f - e_i \pm \hbar\omega)}$$

Fermi の Golden Rule

電磁遷移の計算



$$H_{\rm int} = \frac{1}{Am}\cdot\frac{Ze}{c}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \sum_\alpha \int \frac{d\boldsymbol{k}}{2\pi}\frac{\hbar c}{\sqrt{\hbar\omega}} a_{\boldsymbol{k}\alpha}\boldsymbol{\epsilon}_\alpha e^{-i\omega t}$$

+h.c.

初期状態: $|\psi_i\rangle|n_{k\alpha}=1\rangle = |\psi_i\rangle a^\dagger_{k\alpha}|0\rangle$

遷移 $\downarrow$ $\mathrm{H_{int}}$

終状態: $|\psi_f\rangle|n_{k\alpha}=0\rangle = |\psi_f\rangle|0\rangle$

電磁遷移の計算

$$H_{\text{int}} = \frac{1}{Am} \cdot \frac{Ze}{c} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{p} \qquad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = \sum_{\alpha} \int \frac{d\boldsymbol{k}}{2\pi} \frac{\hbar c}{\sqrt{\hbar\omega}} a_{\boldsymbol{k}\alpha} \boldsymbol{\epsilon}_{\alpha} e^{-i\omega t} + \text{h.c.}$$

初期状態: $|\psi_i\rangle |n_{k\alpha} = 1\rangle = |\psi_i\rangle a^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\alpha} |0\rangle$

終状態: $|\psi_f\rangle |n_{k\alpha} = 0\rangle = |\psi_f\rangle |0\rangle$

フォトンの偏極の向きを z 軸に取ると、

$$\langle f | H_{\text{int}} | i \rangle = \frac{Ze}{Am} \cdot \frac{1}{2\pi} \frac{\hbar}{\sqrt{\hbar\omega}} \cdot \langle \psi_f | p_z | \psi_i \rangle \, e^{-i\omega t}$$

(note) $\langle 0 | a_{\boldsymbol{k}\alpha} (a^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\alpha} |0\rangle) = 1$

$$\boxed{\Gamma_{i \to f} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{Ze}{A} \right)^2 \frac{1}{m^2 \omega} \left| \langle \psi_f | p_z | \psi_i \rangle \right|^2 \delta(e_f - e_i - \hbar\omega)}$$

(note) $[\boldsymbol{p}^2, \boldsymbol{r}] = -2i\hbar\boldsymbol{p}$

$$\langle\psi_f|p_z|\psi_i\rangle = \left\langle \psi_f \left| \frac{1}{-2i\hbar}\cdot 2\mu \left[\underbrace{\frac{\boldsymbol{p}^2}{2\mu} + V(r)}_{H_0}, z \right] \right| \psi_i \right\rangle$$

$$= \frac{i\mu}{\hbar}\langle\psi_f|H_0 z - zH_0|\psi_i\rangle$$

$$= \frac{i\mu}{\hbar}(e_f - e_i)\langle\psi_f|z|\psi_i\rangle$$

$$= i\mu\omega\langle\psi_f|z|\psi_i\rangle = i\omega\cdot\frac{Am}{A+1}\langle\psi_f|z|\psi_i\rangle$$

$$\boxed{\Gamma_{i\to f} = \frac{1}{2\pi\hbar}\left(\frac{Ze}{A+1}\right)^2 (e_f - e_i)\left|\langle\psi_f|z|\psi_i\rangle\right|^2 \delta(e_f - e_i - \hbar\omega)}$$

（参考）これをフォトンのフラックス $c/(2\pi)^3$ で割れば、光吸収断面積：

$$\sigma_\gamma = \frac{4\pi^2}{\hbar c}\left(\frac{Ze}{A+1}\right)^2 (e_f - e_i)\left|\langle\psi_f|z|\psi_i\rangle\right|^2 \delta(e_f - e_i - \hbar\omega)$$

（参考）$[\boldsymbol{p}^2, \boldsymbol{r}] = -2i\hbar\boldsymbol{p} \longrightarrow \langle\psi_f|p_z|\psi_i\rangle = i\mu\omega\langle\psi_f|z|\psi_i\rangle$

別の変換も可能

$$[H_0, \boldsymbol{p}] = [V(r), \boldsymbol{p}] = i\hbar\boldsymbol{\nabla}V$$

$$\begin{aligned}
\langle\psi_f|\boldsymbol{p}|\psi_i\rangle &= \frac{1}{e_f - e_i}\langle\psi_f|e_f\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}e_i|\psi_i\rangle \\
&= \frac{1}{e_f - e_i}\langle\psi_f|[H_0, \boldsymbol{p}]|\psi_i\rangle \\
&= \frac{i\hbar}{e_f - e_i}\langle\psi_f|\boldsymbol{\nabla}V|\psi_i\rangle
\end{aligned}$$

$$\wr$$

$$-\mu\ddot{\boldsymbol{r}}$$

加速度運動する荷電粒子はフォトンを放出する
（制動輻射：Bremsstrahlung）

E1 有効電荷（effective charge）

$$\sigma_\gamma = \frac{4\pi^2}{\hbar c}\left(\frac{Ze}{A+1}\right)^2 (e_f - e_i)\left|\langle\psi_f|z|\psi_i\rangle\right|^2 \delta(e_f - e_i - \hbar\omega)$$

$z = r\cos\theta = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\,rY_{10}(\theta)$ を用いて書き直すと

$$\boxed{\sigma_\gamma = \frac{16\pi^3}{3\hbar c}\left(\frac{Ze}{A+1}\right)^2 (e_f - e_i)\left|\langle\psi_f|rY_{10}|\psi_i\rangle\right|^2 \delta(e_f - e_i - \hbar\omega)}$$

dipole operator: $\boxed{\hat{D}_\mu = e_{\mathrm{E1}}\cdot rY_{1\mu}(\theta,\phi)}$

E1 有効電荷: $\boxed{e_{\mathrm{E1}} = \frac{Z}{A+1}e}$

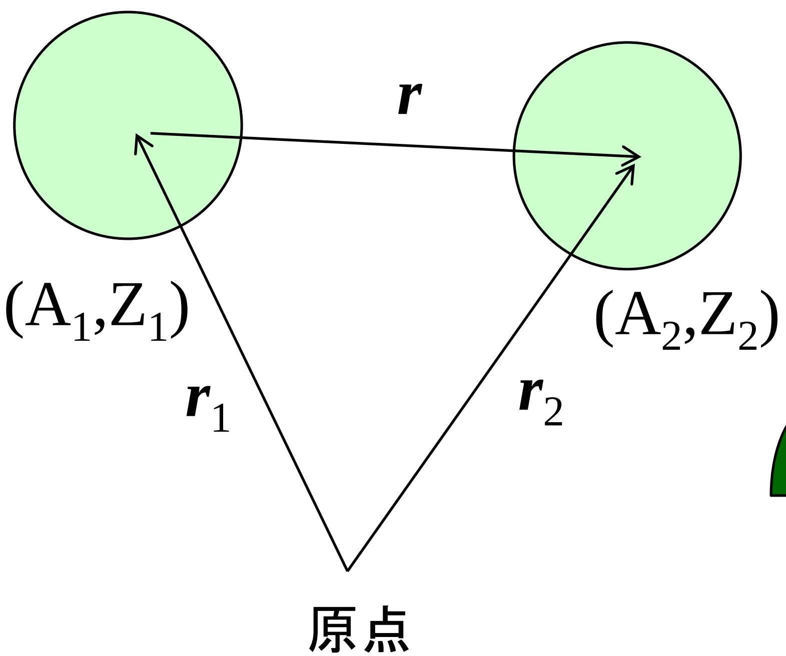
E1 有効電荷（effective charge）

$$\sigma_\gamma = \frac{16\pi^3}{3\hbar c}\left(\frac{Ze}{A+1}\right)^2 (e_f - e_i)\left|\langle\psi_f|rY_{10}|\psi_i\rangle\right|^2 \delta(e_f - e_i - \hbar\omega)$$

dipole operator: $$\hat{D}_\mu = e_{\mathrm{E1}}\cdot rY_{1\mu}(\theta,\phi)$$ $$e_{\mathrm{E1}} = \frac{Z}{A+1}e$$

重心から測った電荷の分布 $$Z_1(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{R}) + Z_2(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{R})$$

$$\boldsymbol{R} = \frac{A_1\boldsymbol{r}_1 + A_2\boldsymbol{r}_2}{A_1 + A_2}$$



$$= \cdots$$

$$= \frac{Z_1A_2 - Z_2A_1}{A_1 + A_2}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)$$

$$= \frac{Z_1A_2 - Z_2A_1}{A_1 + A_2}\boldsymbol{r}$$

$$e_{\mathrm{E1}} = \frac{Z_1A_2 - Z_2A_1}{A_1 + A_2}e$$

（2体の場合の一般的な式）

Wigner-Eckart の定理と換算遷移確率

$$\boxed{\sigma_\gamma = \frac{16\pi^3}{3\hbar c}\left(\frac{Ze}{A+1}\right)^2 E_\gamma \left|\langle\psi_f|rY_{10}|\psi_i\rangle\right|^2 \delta(e_f - e_i - E_\gamma)}$$

$$E_\gamma = e_f - e_i = \hbar\omega$$

実際には

$$\left\{\begin{array}{rcl} \psi_i(\boldsymbol{r}) & = & \psi_{lm}(\boldsymbol{r}) = \dfrac{u_l(r)}{r} Y_{lm}(\hat{\boldsymbol{r}}) \\ \psi_f(\boldsymbol{r}) & = & \psi_{l'm'}(\boldsymbol{r}) = \dfrac{u_{l'}(r)}{r} Y_{l'm'}(\hat{\boldsymbol{r}}) \end{array}\right.$$

角運動量の固有状態

$$\left|\langle\psi_f|rY_{10}|\psi_i\rangle\right|^2 \to \frac{1}{2l+1}\sum_{m,m'}|\langle\psi_{l'm'}|rY_{10}|\psi_{lm}\rangle|^2$$

Wigner-Eckart の定理

$$\begin{aligned} \langle\psi_{l'm'}|rY_{10}|\psi_{lm}\rangle &= (-1)^{l'-m'}\begin{pmatrix} l' & 1 & l \\ -m' & 0 & m \end{pmatrix}\langle\psi_{l'}||rY_1||\psi_l\rangle \\ &= \underbrace{\frac{(-1)^{l-m}}{\sqrt{3}}\langle l'm'l-m|10\rangle}_{m,\,m'\text{ の依存性は単純な Clebsch}}\underbrace{\langle\psi_{l'}||rY_1||\psi_l\rangle}_{m,\,m'\text{ に依存しない量}} \end{aligned}$$

Wigner-Eckart の定理と換算遷移確率

$$\boxed{\sigma_\gamma = \frac{16\pi^3}{3\hbar c}\left(\frac{Ze}{A+1}\right)^2 E_\gamma \left|\langle\psi_f|rY_{10}|\psi_i\rangle\right|^2 \delta(e_f - e_i - E_\gamma)}$$

$$E_\gamma = e_f - e_i = \hbar\omega$$

Wigner-Eckart の定理

$$\langle\psi_{l'm'}|rY_{10}|\psi_{lm}\rangle = \frac{(-1)^{l-m}}{\sqrt{3}}\langle l'm'l-m|10\rangle\langle\psi_{l'}||rY_1||\psi_l\rangle$$

$$\left|\langle\psi_f|rY_{10}|\psi_i\rangle\right|^2 \rightarrow \frac{1}{2l+1}\sum_{m,m'}|\langle\psi_{l'm'}|rY_{10}|\psi_{lm}\rangle|^2$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2l+1}|\langle\psi_{l'}||rY_1||\psi_l\rangle|^2$$

$$\times \sum_{m,m'}\langle l'm'l-m|10\rangle^2 \quad = 1$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2l+1}|\langle\psi_{l'}||rY_1||\psi_l\rangle|^2$$

Wigner-Eckart の定理と換算遷移確率

$$\boxed{\sigma_\gamma = \frac{16\pi^3}{3\hbar c}\left(\frac{Ze}{A+1}\right)^2 E_\gamma \left|\langle\psi_f|rY_{10}|\psi_i\rangle\right|^2 \delta(e_f - e_i - E_\gamma)}$$

$$E_\gamma = e_f - e_i = \hbar\omega$$

$$\begin{aligned}\left|\langle\psi_f|rY_{10}|\psi_i\rangle\right|^2 &\to \frac{1}{2l+1}\sum_{m,m'}|\langle\psi_{l'm'}|rY_{10}|\psi_{lm}\rangle|^2 \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2l+1}|\langle\psi_{l'}||rY_1||\psi_l\rangle|^2\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\sigma_\gamma &= \frac{16\pi^3}{9\hbar c}E_\gamma\cdot\frac{1}{2l+1}\left|\langle\psi_f||e_{\mathrm{E1}}rY_1||\psi_i\rangle\right|^2\delta(e_f - e_i - E_\gamma) \\ &= \frac{16\pi^3}{9\hbar c}E_\gamma\cdot\frac{dB(E1)}{dE_\gamma}\end{aligned}}$$

換算遷移確率

$$\boxed{\frac{dB(E1)}{dE_\gamma} = \frac{1}{2l+1}\left|\langle\psi_f||e_{\mathrm{E1}}rY_1||\psi_i\rangle\right|^2\delta(e_f - e_i - E_\gamma)}$$

（参考）

$$\sum_{m_i,m_f,\mu} \frac{1}{2l_i+1} |\langle \psi_{l_f m_f} | \hat{T}_{\lambda\mu} | \psi_{l_i m_i} \rangle|^2$$

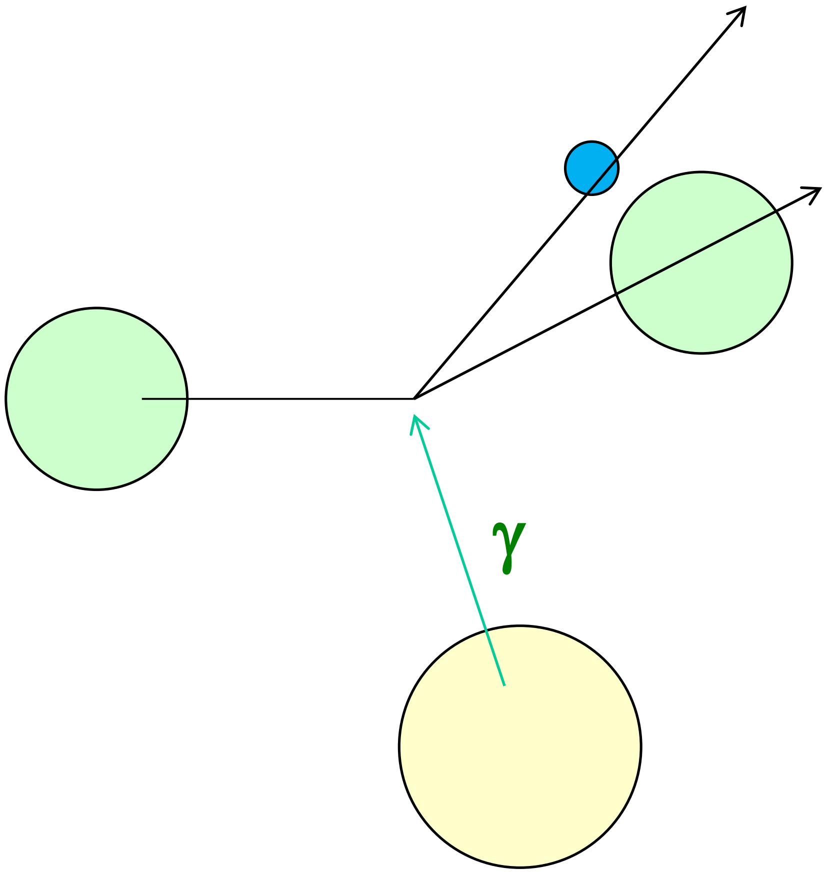
$$= \sum_{m_i,m_f,\mu} \frac{1}{2l_i+1} \underbrace{\begin{pmatrix} l_f & \lambda & l_i \\ -m_f & \mu & m_i \end{pmatrix}^2}_{= \frac{1}{2l_i+1}} |\langle \psi_{l_f} || \hat{T}_{\lambda} || \psi_{l_i} \rangle|^2$$

$$= \sum_{m_i} \frac{1}{(2l_i+1)^2} |\langle \psi_{l_f} || \hat{T}_{\lambda} || \psi_{l_i} \rangle|^2$$

$$= \frac{1}{2l_i+1} |\langle \psi_{l_f} || \hat{T}_{\lambda} || \psi_{l_i} \rangle|^2$$

クーロン励起の断面積

$$\sigma_\gamma = \frac{16\pi^3}{9\hbar c} E_\gamma \cdot \frac{dB(E1)}{dE_\gamma} \qquad \frac{d\sigma_\gamma}{dE_\gamma} \sim \frac{16\pi^3}{9\hbar c} \cdot \frac{dB(E1)}{dE_\gamma}$$



実際の原子核反応では、
実フォトンではなく
ヴァーチャル・フォトンを吸収
する。

$$\frac{d\sigma}{dE_{\mathrm{ex}}} \sim \frac{16\pi^3}{9\hbar c} \cdot N_{\mathrm{E1}}(E_{\mathrm{ex}}) \cdot \frac{dB(E1)}{dE_{\mathrm{ex}}}$$

virtual photon の数

＊詳しくは、
C.A. Bertulani and P. Danielwicz,
“Introduction to Nuclear Reactions”

換算行列要素の計算

$$\psi_i(\boldsymbol{r}) = \psi_{lm}(\boldsymbol{r}) = \frac{u_l(r)}{r} Y_{lm}(\hat{\boldsymbol{r}})$$

$$\psi_f(\boldsymbol{r}) = \psi_{l'm'}(\boldsymbol{r}) = \frac{u_{l'}(r)}{r} Y_{l'm'}(\hat{\boldsymbol{r}})$$

(note)

$$\langle Y_{l'}||Y_\lambda||Y_l\rangle = (-1)^{l'} \frac{\hat{l}\hat{\lambda}\hat{l'}}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} l' & \lambda & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hat{l}\hat{\lambda}}{\sqrt{4\pi}} \langle l0\lambda0|l'0\rangle$$

$$\hat{\lambda} \equiv \sqrt{2\lambda+1}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dB(E1)}{dE} &= \frac{1}{2l+1} \left|\langle \psi_f||e_{\mathrm{E1}} r Y_1||\psi_i\rangle\right|^2 \delta(e_f - e_i - E) \\ &= \frac{3}{4\pi} e_{\mathrm{E1}}^2 \langle l010|l'0\rangle^2 \left|\int_0^\infty r^2 dr\, r \cdot \frac{u_l(r)}{r} \cdot \frac{u_{l'}(r)}{r}\right|^2 \\ &\quad \times \delta(e_f - e_i - E) \end{aligned}}$$

(note) $s \longrightarrow p$ 遷移であれば $\langle l010|l'0\rangle = \langle 0010|10\rangle = 1$

換算行列要素の計算

（参考）スピンを考慮した場合

$$\psi_i(\boldsymbol{r}) = \psi_{jlm}(\boldsymbol{r}) = \frac{u_{jl}(r)}{r}\mathcal{Y}_{jlm}(\hat{\boldsymbol{r}})$$

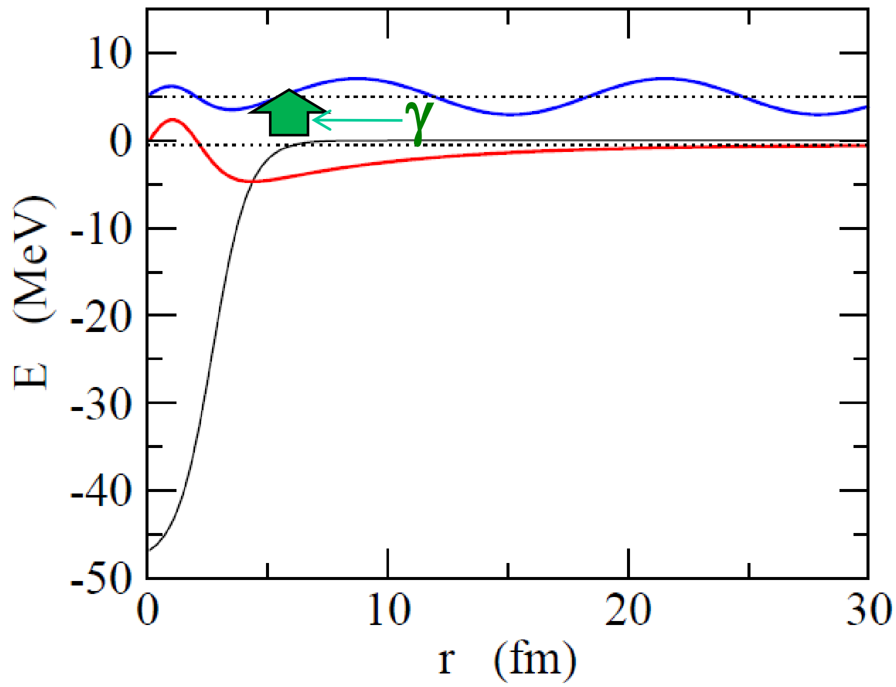
$$\psi_f(\boldsymbol{r}) = \psi_{j'l'm'}(\boldsymbol{r}) = \frac{u_{j'l'}(r)}{r}\mathcal{Y}_{j'l'm'}(\hat{\boldsymbol{r}})$$

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{dB(E1)}{dE} &= \frac{1}{2j+1}\left|\langle\psi_f||e_{\mathrm{E1}}rY_1||\psi_i\rangle\right|^2\delta(e_f-e_i-E)\\ &= \frac{3}{4\pi}e_{\mathrm{E1}}^2\,\langle j\,1/2\,10|j'1/2\rangle^2\left|\int_0^\infty r^2dr\,r\cdot\frac{u_{jl}(r)}{r}\cdot\frac{u_{j'l'}(r)}{r}\right|^2\\ &\quad\times\delta(e_f-e_i-E)\end{aligned}}$$

$$\langle\mathcal{Y}_{j'l'}||Y_\lambda||\mathcal{Y}_{jl}\rangle = (-1)^{1/2+j'}\cdot\frac{\hat{j}\,\hat{\lambda}\,\hat{j}'}{\sqrt{4\pi}}\begin{pmatrix} j' & \lambda & j\\ 1/2 & 0 & -1/2\end{pmatrix}\delta_{l+l'+\lambda,even}$$

連続状態への励起

$$\Psi_{lm}(\boldsymbol{r}) = \frac{u_l(r)}{r} Y_{lm}(\hat{\boldsymbol{r}})$$



境界条件(束縛状態):

$$\begin{aligned} u_l(r) &\sim r^{l+1} \qquad (r \sim 0) \\ &\to e^{-\kappa r} \qquad (r \to \infty) \end{aligned}$$

境界条件(連続状態):

$$\begin{aligned} u_{E,l}(r) &\sim r^{l+1} \qquad (r \sim 0) \\ &\to \sqrt{\frac{2\mu}{\pi k \hbar^2}} \sin(kr - l\pi/2 + \delta_l) \end{aligned}$$

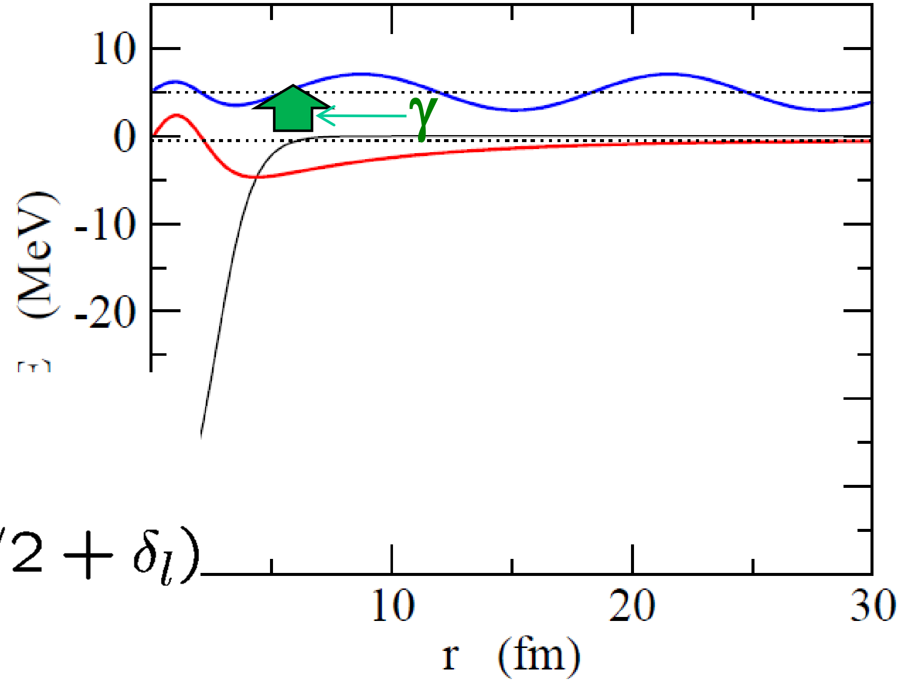
$k = \sqrt{\frac{2\mu E}{\hbar^2}}$, δ_l は位相のずれ (phase shift)
(詳しくは後程)

とすると、

$$\boxed{\int_0^\infty dr\, u_{E,l}(r)\, u^*_{E',l}(r) = \delta(E - E')}$$

連続状態への励起

$$\Psi_{lm}(\boldsymbol{r}) = \frac{u_l(r)}{r} Y_{lm}(\hat{\boldsymbol{r}})$$



境界条件(連続状態):

$$u_{E,l}(r) \sim r^{l+1} \quad (r \sim 0)$$

$$\to \sqrt{\frac{2\mu}{\pi k \hbar^2}} \sin(kr - l\pi/2 + \delta_l)$$

とすると、

$$\boxed{\int_0^\infty dr\, u_{E,l}(r)\, u^*_{E',l}(r) = \delta(E - E')}$$

このような波動関数を ψ_f に使えば

$$\boxed{\frac{dB(E1)}{dE} = \frac{1}{2l+1} \left|\langle \psi_f || e_{E1} r Y_1 || \psi_i \rangle\right|^2}$$

(参考)規格化因子のチェック

$$u_{E,l}(r) \;\rightarrow\; \sqrt{\frac{2\mu}{\pi k\hbar^2}}\,\sin(kr - l\pi/2 + \delta_l)$$

$u_{E,l}$ の従う方程式:

$$\begin{cases} \left[-\dfrac{\hbar^2}{2\mu}\dfrac{d^2}{dr^2} + \dfrac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} + V(r) - E\right] u_{E,l}(r) = 0 & (1) \\ \left[-\dfrac{\hbar^2}{2\mu}\dfrac{d^2}{dr^2} + \dfrac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} + V(r) - E'\right] u^*_{E',l}(r) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \times u^*_{E',l} - (2) \times u_{E,l}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\underbrace{\left[u^*_{E',l}\frac{d^2 u_{E,l}}{dr^2} - u_{E,l}\frac{d^2 u^*_{E',l}}{dr^2}\right]}_{\frac{d}{dr}\left[u^*_{E',l}\frac{du_{E,l}}{dr} - u_{E,l}\frac{du^*_{E',l}}{dr}\right]} + (-E + E')u_{E,l}\,u^*_{E',l} = 0$$

$$\int_0^\infty dr\, u_{E,l}(r)\, u^*_{E',l}(r) = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\cdot\frac{1}{E-E'}\cdot\int_0^\infty dr\,\frac{d}{dr}\left[u^*_{E',l}\frac{du_{E,l}}{dr} - u_{E,l}\frac{du^*_{E',l}}{dr}\right]$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2\mu}\cdot\frac{1}{E-E'}\cdot\left[u^*_{E',l}\frac{du_{E,l}}{dr} - u_{E,l}\frac{du^*_{E',l}}{dr}\right]_{r\to\infty}$$

(波動関数は原点で正則)

(参考)規格化因子のチェック

$$u_{E,l}(r) \;\rightarrow\; \sqrt{\frac{2\mu}{\pi k \hbar^2}} \sin(kr - l\pi/2 + \delta_l)$$

$$\int_0^\infty dr\, u_{E,l}(r)\, u^*_{E',l}(r) = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \cdot \frac{1}{E-E'} \cdot \left[u^*_{E',l} \frac{du_{E,l}}{dr} - u_{E,l} \frac{du^*_{E',l}}{dr} \right]_{r\to\infty}$$

簡単のため、$l=0$, $\delta_l = 0$ の場合に、この式が $\delta(E\text{-}E')$ になっているか確かめる:

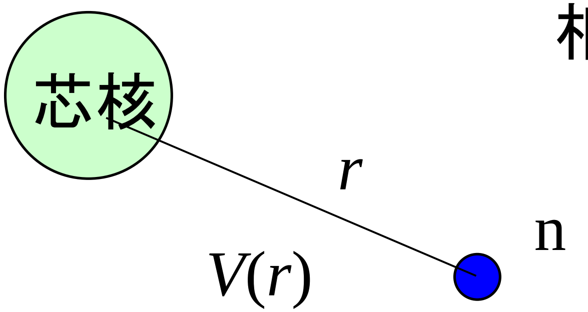
$$\begin{aligned}
\text{rhs} &= -\frac{1}{\pi\sqrt{kk'}} \cdot \frac{1}{E-E'} \cdot \left[k \sin k'r \cos kr - k' \sin kr \cos k'r \right] \\
&= \cdots \\
&= -\frac{1}{2\pi\sqrt{kk'}} \cdot \frac{1}{E-E'} \cdot \left[(k-k')\sin((k+k')r) + (k+k')\sin((k'-k)r) \right] \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{kk'}} \cdot \frac{(k-k')(k+k')}{E-E'} \cdot \left[\frac{\sin((k+k')r)}{(k+k')\pi} - \frac{\sin((k'-k)r)}{(k'-k)\pi} \right]
\end{aligned}$$

$$\text{(note)} \quad \lim_{r\to\infty} \frac{\sin((k'-k)r)}{(k'-k)\pi} = \delta(k'-k)$$

$$= \frac{dE}{dk}\delta(E'-E) = \frac{k\hbar^2}{\mu}\delta(E'-E)$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2\sqrt{kk'}} \cdot \frac{\frac{2\mu}{\hbar^2} \cdot \frac{\hbar^2}{2\mu}(k^2 - k'^2)}{E-E'} \cdot \frac{k\hbar^2}{\mu} \left[\cancel{\delta(E+E')} - \delta(E-E') \right] \\
&= \delta(E-E')
\end{aligned}$$

1中性子ハロー核の電磁双極子遷移



相対運動のハミルトニアン

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V(r)$$

$$\Psi_{lm}(\boldsymbol{r}) = \frac{u_l(r)}{r} Y_{lm}(\hat{\boldsymbol{r}})$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} + V(r) - \epsilon_l\right] u_l(r) = 0$$

境界条件(束縛状態):

$$\begin{aligned} u_{l_b}(r) &\sim r^{l_b+1} \qquad (r \sim 0) \\ &\to e^{-\kappa r} \qquad (r \to \infty) \end{aligned}$$

境界条件(連続状態):

$$\begin{aligned} u_{E,l_c}(r) &\sim r^{l_c+1} \qquad (r \sim 0) \\ &\to \sqrt{\frac{2\mu}{\pi k \hbar^2}} \sin(kr - l_c\pi/2 + \delta_{l_c}) \end{aligned}$$

$$\frac{dB(E1)}{dE} = \frac{3}{4\pi} e_{\mathrm{E1}}^2 \langle l_b 010 | l_c 0 \rangle^2 \left| \int_0^\infty r^2 dr\, r \cdot \frac{u_{l_b}(r)}{r} \cdot \frac{u_{E,l_c}(r)}{r} \right|^2$$

E1 電磁遷移強度分布の簡単な見積もり（解析的な模型）

l=0 状態から l=1 状態への遷移：

初期状態の波動関数： $\Psi_i(\boldsymbol{r}) = \sqrt{2\kappa}\,\frac{e^{-\kappa r}}{r}Y_{00}(\hat{\boldsymbol{r}})$ $\qquad \kappa = \sqrt{\frac{2\mu|E_b|}{\hbar^2}}$

終状態の波動関数： $\Psi_f(\boldsymbol{r}) = \sqrt{\frac{2\mu k}{\pi\hbar^2}}\,j_1(kr)Y_{1m}(\hat{\boldsymbol{r}})$

$j_1(kr)$ は球ベッセル関数

$$k = \sqrt{\frac{2\mu E_c}{\hbar^2}}$$

とすると、

$$\frac{dB(E1)}{dE} = \frac{3}{4\pi}e_{\mathrm{E1}}^2\left|\int_0^\infty r^2dr\,r\cdot\frac{\sqrt{2\kappa}e^{-\kappa r}}{r}\cdot\sqrt{\frac{2\mu k}{\pi\hbar^2}}j_1(kr)\right|^2$$

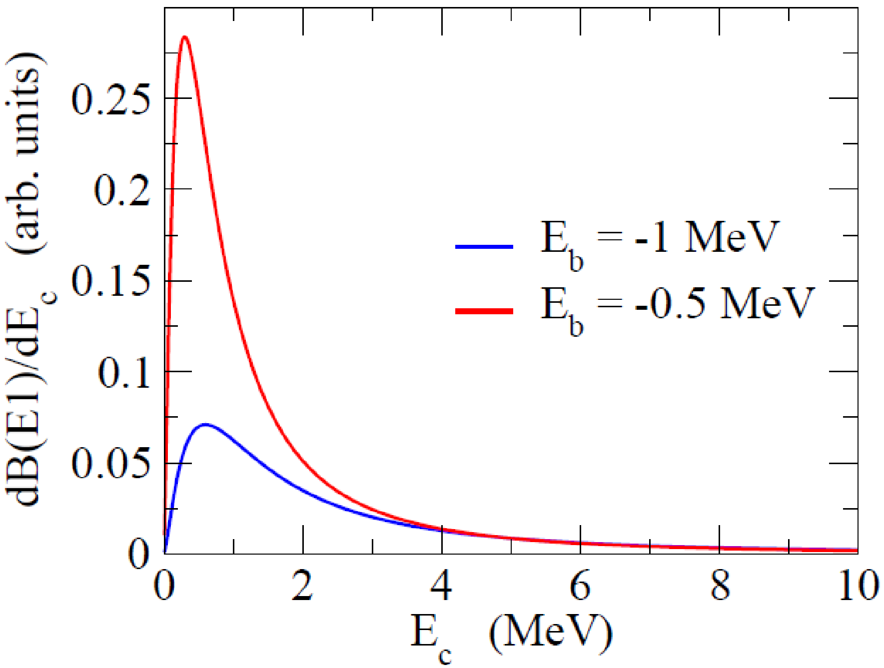
積分は解析的に実行可能

$$\boxed{\frac{dB(E1)}{dE} = \frac{3\hbar^2}{\pi^2\mu}e_{\mathrm{E1}}^2\frac{\sqrt{|E_b|}\,E_c^{3/2}}{(|E_b|+E_c)^4}}$$

Refs.（一般的な l_i, l_f の場合の式も）

- M.A. Nagarajan, S.M. Lenzi, A. Vitturi, Eur. Phys. J. A24(‘05)63
- S. Typel and G. Baur, NPA759(‘05)247

$$\boxed{\frac{dB(E1)}{dE} = \frac{3\hbar^2}{\pi^2\mu} e_{\mathrm{E1}}^2 \frac{\sqrt{|E_b|}\, E_c^{3/2}}{(|E_b| + E_c)^4}}$$



ピークの位置:　$E_c = \frac{3}{5}|E_b|$

$$\left(E_x = E_c - E_b = \frac{8}{5}|E_b|\right)$$

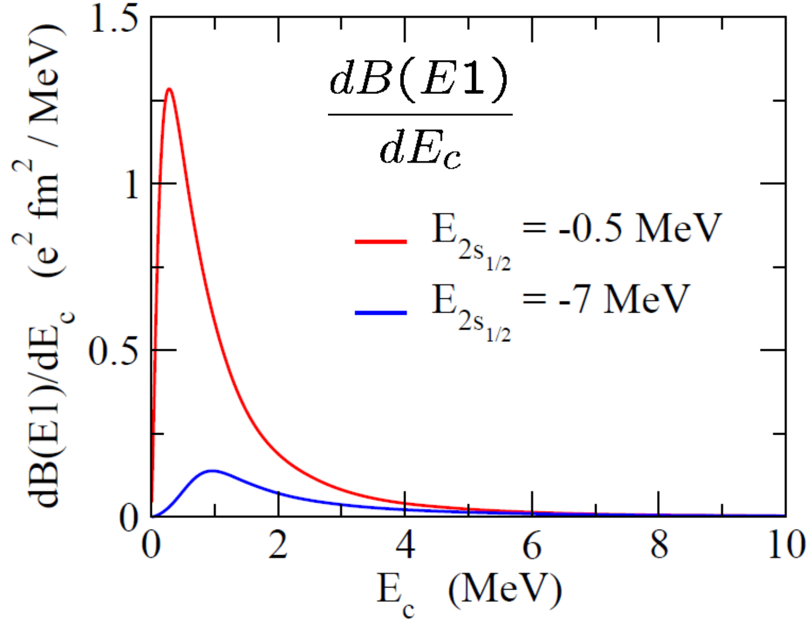
ピークの高さ:　$\propto 1/|E_b|^2$

全遷移確率:

$$B(E1) = S_0 = \frac{3\hbar^2 e_{\mathrm{E1}}^2}{16\pi^2\mu|E_b|}$$

- 束縛状態のエネルギーが小さくなると鋭くて高いピーク
- 束縛状態のエネルギーが小さくなるとピークのエネルギーが小さくなる

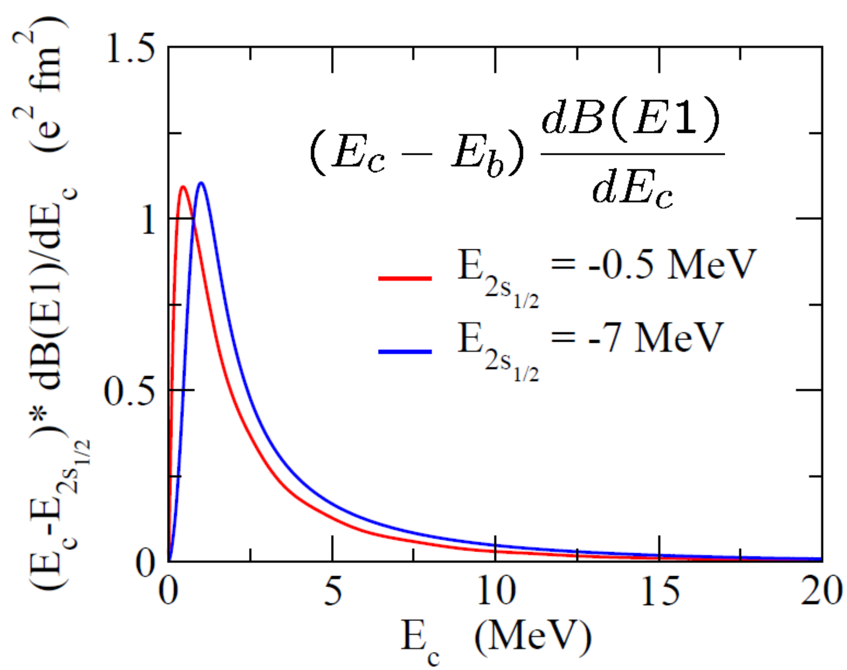
Woods-Saxon ポテンシャルを用いた実際の数値計算

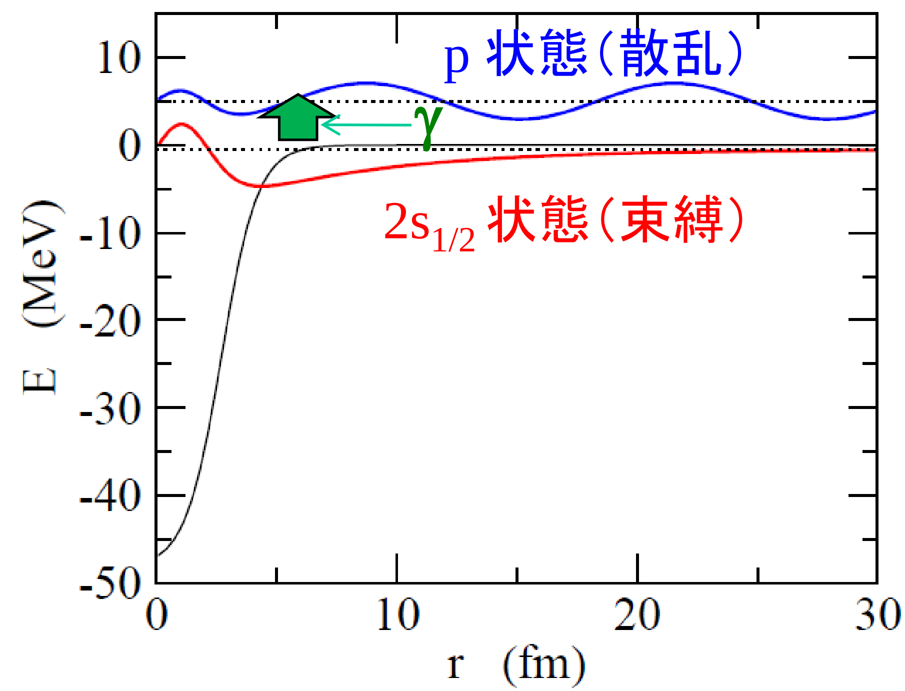


^{11}Be = ^{10}Be + n

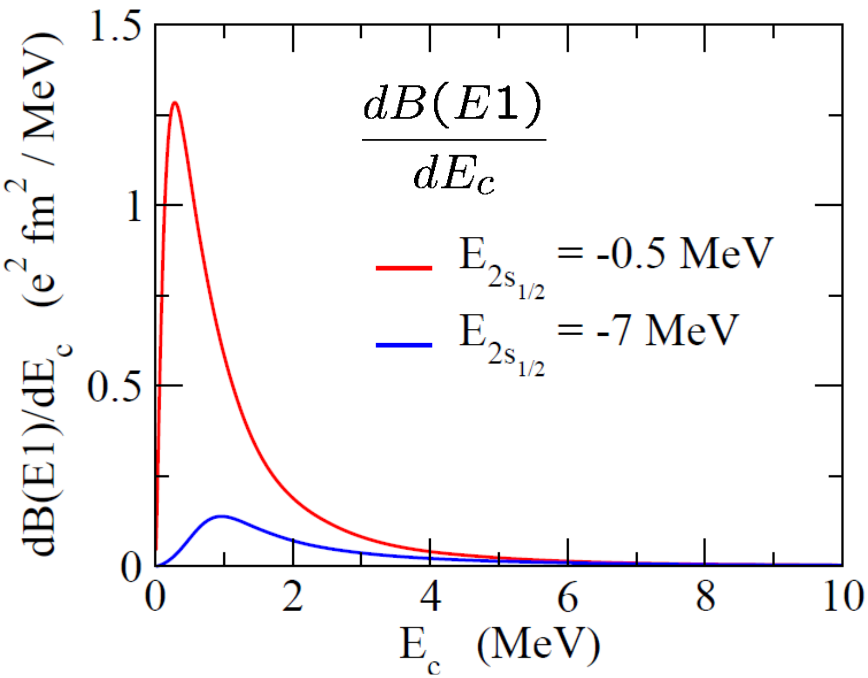
$2s_{1/2}$ 状態（束縛）から p 状態 (l = 1) への遷移強度

弱く束縛されている場合と強く束縛されている場合の比較





^{11}Be = ^{10}Be + n　　$2s_{1/2} \longrightarrow$ p 状態



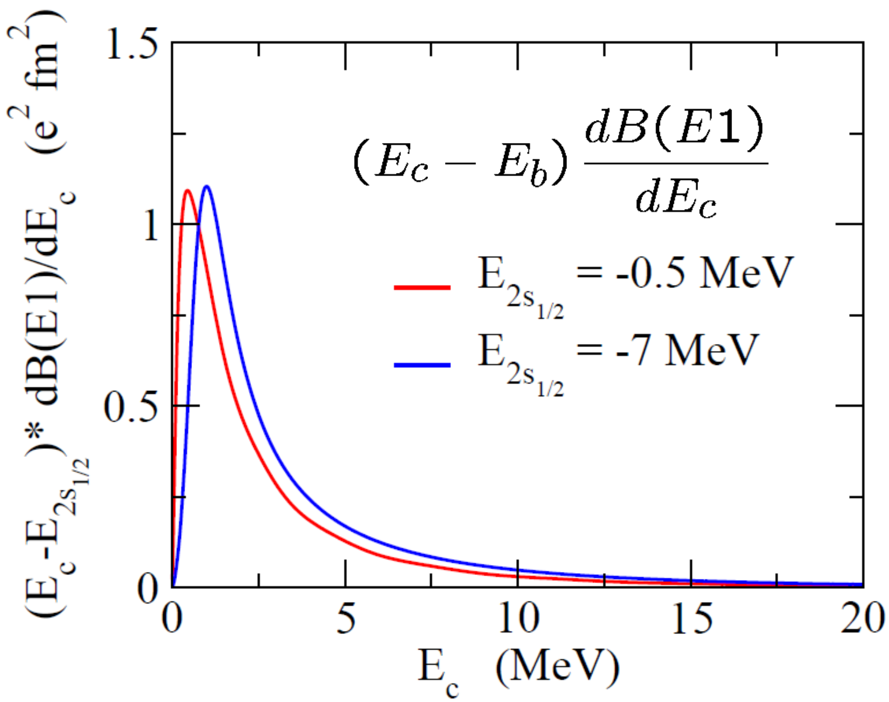
- 束縛状態のエネルギーが小さくなると鋭くて高いピーク

$$S_0 = \int_0^\infty dE_c \frac{dB(E1)}{dE_c}$$

=1.53 e^2fm^2 (E_b = -0.5 MeV)
0.32 e^2fm^2 (E_b = -7 MeV)

- 束縛状態のエネルギーが小さくなるとピークのエネルギーが小さくなる

E_{peak} = 0.28 MeV (E_b=-0.5 MeV)
0.96 MeV (E_b = -7MeV)



- 遷移強度に ($E_c - E_b$) を掛けたものはあまり E_b に依らない

$$S_1 = \int_0^\infty dE_c (E_c - E_b)\frac{dB(E1)}{dE_c}$$

=2.79 e^2fm^2 MeV (E_b = -0.5 MeV)
3.18 e^2fm^2 MeV (E_b = -7 MeV)

和則(Sum Rule)

$$\begin{cases} S_0 = \int_0^\infty dE_c \dfrac{dB(E1)}{dE_c} \\ S_1 = \int_0^\infty dE_c\,(E_c - E_b)\dfrac{dB(E1)}{dE_c} \end{cases}$$

は簡単な式で表わすことができる。

和則(わそく):Sum Rule

まず $S_0 = \int_0^\infty dE_c \frac{dB(E1)}{dE_c}$ から:

基本的な考え方: $$\boxed{\begin{aligned}\sum_f |\langle f|\hat{F}|\psi_i\rangle|^2 &= \sum_f \langle\psi_i|F|f\rangle\langle f|\hat{F}|\psi_i\rangle \\ &= \langle\psi_i|\hat{F}^2|\psi_i\rangle\end{aligned}}$$

$\uparrow$

(完全系) $\sum_f |f\rangle\langle f| = 1$

和則（わそく）: Sum Rule

$$\boxed{\begin{aligned}\sum_f |\langle f|\hat{F}|\psi_i\rangle|^2 &= \sum_f \langle\psi_i|F|f\rangle\langle f|\hat{F}|\psi_i\rangle \\ &= \langle\psi_i|\hat{F}^2|\psi_i\rangle\end{aligned}}$$

$$S_0 = \int_0^\infty dE_c \frac{dB(E1)}{dE_c} \sim \sum_f \frac{1}{2l_i+1}|\langle\psi_f||\hat{D}||\psi_i\rangle|^2$$

$$= \sum_{n_f,l_f}\sum_{m_f,m_i,\mu}\frac{1}{2l_i+1}\left|\langle\psi_{n_f l_f m_f}|\hat{D}_\mu|\psi_{l_i m_i}\rangle\right|^2$$

$$\hat{D}_\mu = e_{\mathrm{E1}} r Y_{1\mu}(\hat{\boldsymbol{r}})$$

$$= \sum_{m_i,\mu}\frac{1}{2l_i+1}\langle\psi_{l_i m_i}|\hat{D}_\mu^\dagger\hat{D}_\mu|\psi_{l_i m_i}\rangle$$

$$Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta,\ \ Y_{1\pm1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{\pm i\phi}$$

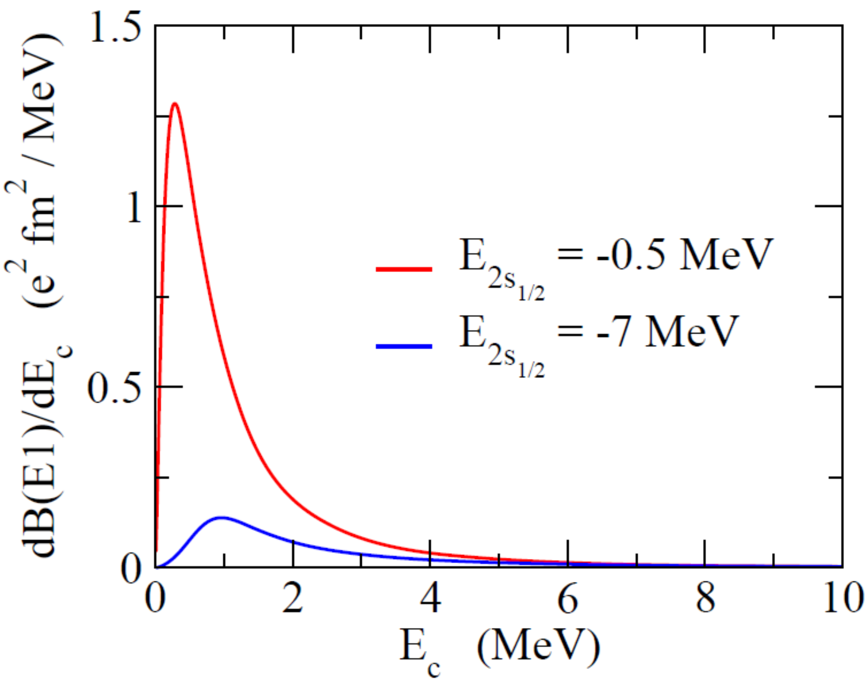
$$\longrightarrow \sum_\mu \hat{D}_\mu^\dagger\hat{D}_\mu = \frac{3}{4\pi}e_{\mathrm{E1}}^2 r^2$$

$$\boxed{= \frac{3}{4\pi}e_{\mathrm{E1}}^2\langle r^2\rangle_i}$$

和則(わそく):Sum Rule

$$S_0 = \int_0^\infty dE_c \frac{dB(E1)}{dE_c} = \frac{3}{4\pi} e_{E1}^2 \langle r^2 \rangle_i$$

全E1遷移確率は r^2 の(基底状態)期待値に比例



$$S_0 = \int_0^\infty dE_c \frac{dB(E1)}{dE_c}$$

=1.53 $e^2 fm^2$ (E_b = -0.5 MeV)
0.32 $e^2 fm^2$ (E_b = -7 MeV)

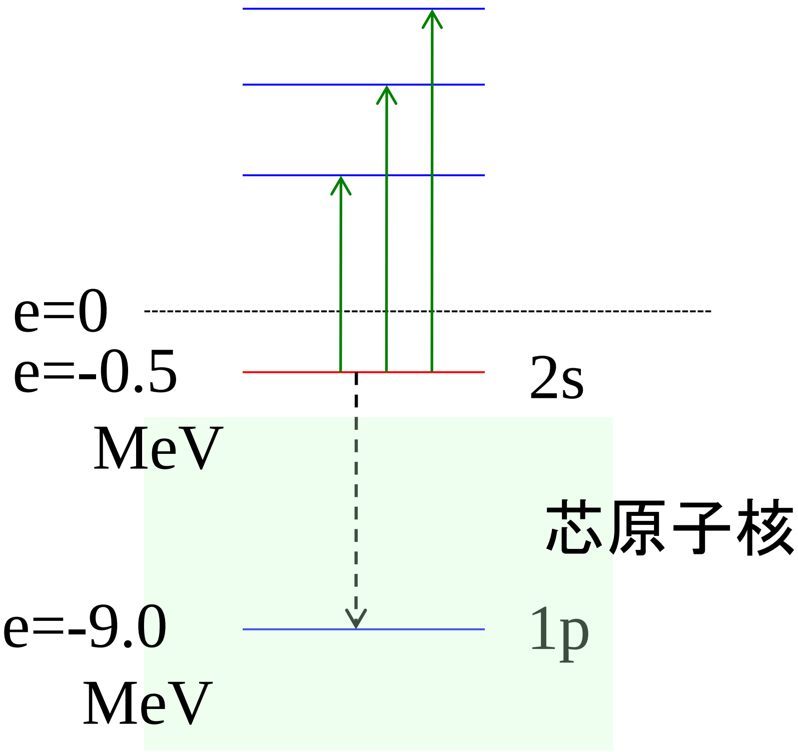
$$\frac{3}{4\pi} e_{E1}^2 \langle r^2 \rangle_i$$

=1.62 $e^2 fm^2$ (E_b = -0.5 MeV)
0.41 $e^2 fm^2$ (E_b = -7 MeV)

＊ほぼ一致。
少しずれているのはパウリ禁止遷移(2sから1pへの遷移)のため

(補足)パウリ禁止遷移

$$S_0 = \int_0^\infty dE_c \frac{dB(E1)}{dE_c} = \frac{3}{4\pi} e_{E1}^2 \langle r^2 \rangle_i$$



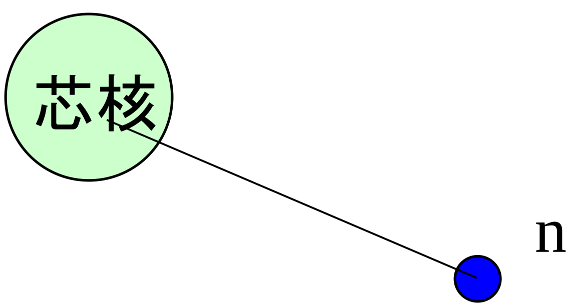
$$S_0 = \int_0^\infty dE_c \frac{dB(E1)}{dE_c}$$

$=1.5275\ e^2\mathrm{fm}^2$

B(E1: 2s→1p) = 0.0967 $e^2\mathrm{fm}^2$

$$\frac{3}{4\pi} e_{E1}^2 \langle r^2 \rangle_i$$

$=1.6244\ e^2\mathrm{fm}^2$

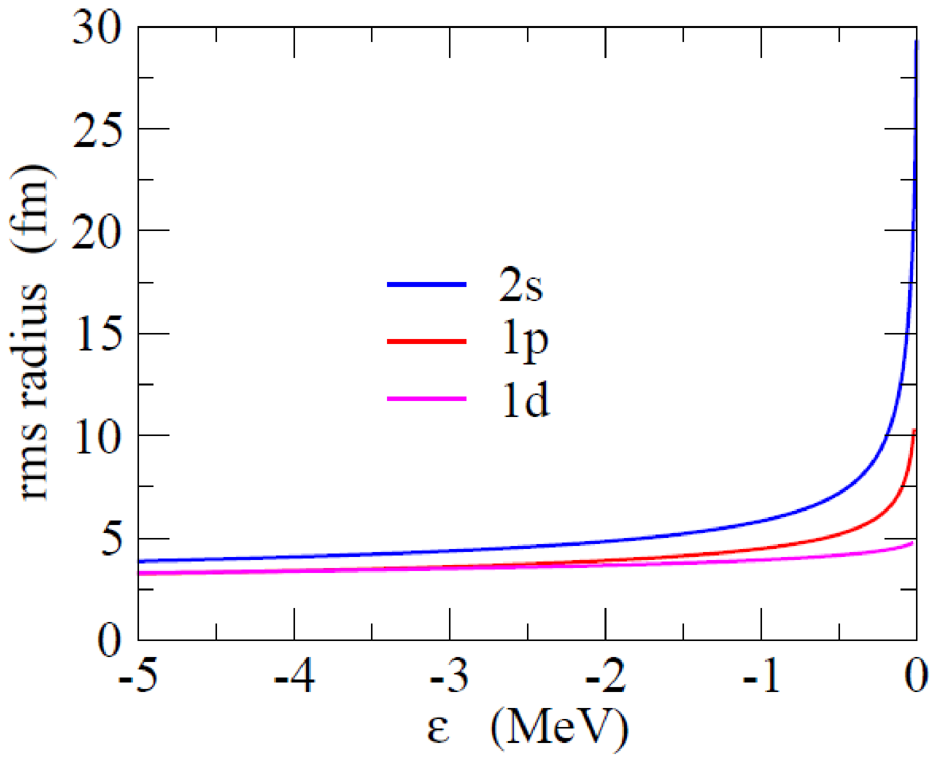


$$\underbrace{1.5275}_{\text{physical transition}} + \underbrace{0.0967}_{\text{forbidden transition}} = 1.6242$$

和則（わそく）: Sum Rule

$$S_0 = \int_0^\infty dE_c \frac{dB(E1)}{dE_c} = \frac{3}{4\pi} e_{\rm E1}^2 \langle r^2 \rangle_i$$

全E1遷移確率は r^2 の（基底状態）期待値に比例



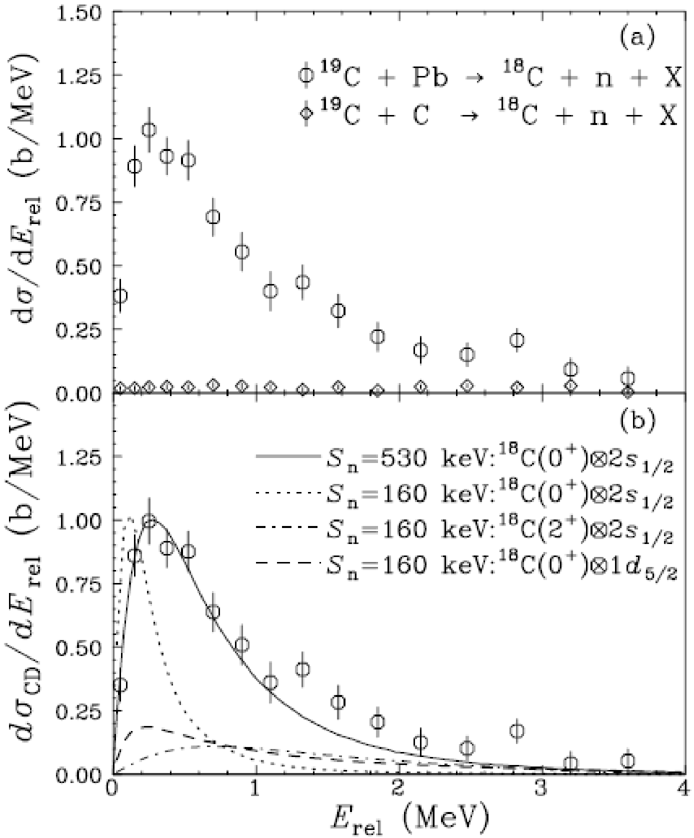
初期状態が l=0 または l=1だと束縛が弱くなるほど半径は増大

全E1遷移確率も増大

逆に大きな全E1遷移確率（またはクーロン分解断面積）が観測されたら l=0 or l=1 が示唆される → ハロー構造

1n ハロー核の他の候補

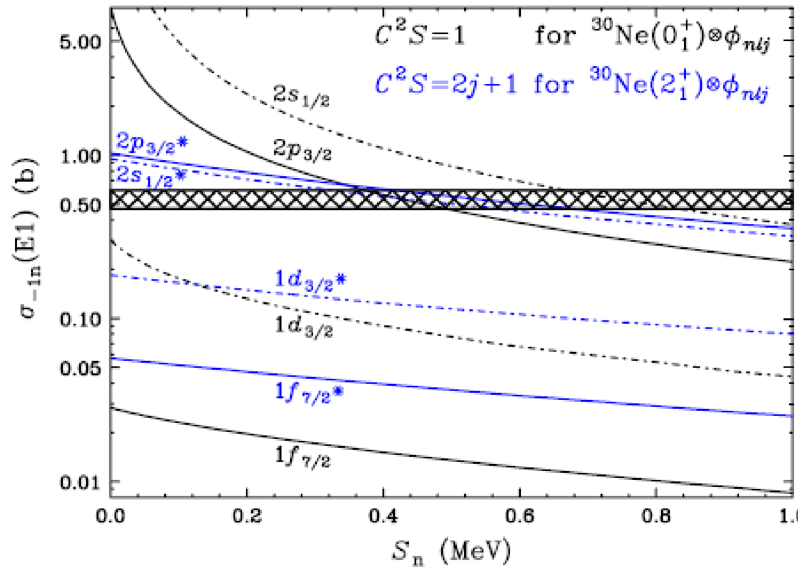
^{19}C: S_n = 0.58(9) MeV



^{19}C のクーロン分解反応

T. Nakamura et al., PRL83(‘99)1112

^{31}Ne: S_n = 0.29 +/- 1.64 MeV



大きなクーロン分解反応の断面積

T. Nakamura et al.,
PRL103(‘09)262501

和則（わそく）: Sum Rule

次に $S_1 = \int_0^\infty dE_c\,(E_c - E_b)\frac{dB(E1)}{dE_c}$ (Energy Weighted Sum Rule)

基本的な考え方:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\langle\psi_i|[\widehat{F},[H,\widehat{F}]]|\psi_i\rangle &= \frac{1}{2}\langle\psi_i|\widehat{F}(H\widehat{F}-\widehat{F}H)-(H\widehat{F}-\widehat{F}H)\widehat{F}|\psi_i\rangle \\
&= \langle\psi_i|\widehat{F}H\widehat{F}-E_i\widehat{F}^2|\psi_i\rangle \\
&= \sum_f E_f\,|\langle\psi_i|\widehat{F}|f\rangle|^2 - E_i\langle\psi_i|\widehat{F}^2|\psi_i\rangle \\
&= \sum_f (E_f - E_i)|\langle f|\widehat{F}|\psi_i\rangle|^2
\end{aligned}$$

$$\uparrow$$

$$\begin{aligned}
\langle\psi_i|\widehat{F}H\widehat{F}|\psi_i\rangle &= \sum_f \langle\psi_i|\widehat{F}H|f\rangle\langle f|\widehat{F}|\psi_i\rangle \\
&= \sum_f E_f\langle\psi_i|\widehat{F}|f\rangle\langle f|\widehat{F}|\psi_i\rangle
\end{aligned}$$

（完全系） $\sum_f |f\rangle\langle f| = 1$

和則（わそく）: Sum Rule

$$\boxed{\sum_f (E_f - E_i)|\langle f|\hat{F}|\psi_i\rangle|^2 = \frac{1}{2}\langle\psi_i|[\hat{F},[H,\hat{F}]]|\psi_i\rangle}$$

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^\infty dE_c\,(E_c - E_b)\frac{dB(E1)}{dE_c} \sim \sum_f \frac{E_f - E_i}{2l_i+1}\,|\langle\psi_f||\hat{D}||\psi_i\rangle|^2 \\ &= \sum_{n_f,l_f}\sum_{m_f,m_i}\frac{3(E_f-E_i)}{2l_i+1}\left|\langle\psi_{n_f l_f m_f}|\hat{D}_0|\psi_i\rangle\right|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{D}_0 &= e_{\mathrm{E1}}\, r Y_{10}(\hat{\boldsymbol{r}}) \\ &= e_{\mathrm{E1}}\sqrt{\frac{3}{4\pi}}z \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{2l_i+1}\sum_{m_i}\frac{1}{2}\left\langle\psi_i\left|\left[\hat{D}_0,[H_0,\hat{D}_0]\right]\right|\psi_i\right\rangle$$

$$\begin{aligned} [H_0,\hat{D}_0] &= \left[\frac{\boldsymbol{p}^2}{2\mu}+V(r),\hat{D}_0\right] = \left[\frac{p_z^2}{2\mu},\hat{D}_0\right] \\ &= \frac{1}{2\mu}\cdot e_{\mathrm{E1}}\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cdot\left[p_z^2, z\right] = \frac{1}{2\mu}\cdot e_{\mathrm{E1}}\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cdot(-i\hbar p_z) \end{aligned}$$

和則（わそく）: Sum Rule

$$\boxed{\sum_f (E_f - E_i)|\langle f|\hat{F}|\psi_i\rangle|^2 = \frac{1}{2}\langle\psi_i|[\hat{F},[H,\hat{F}]]|\psi_i\rangle}$$

$$S_1 = \frac{3}{2l_i+1}\sum_{m_i}\frac{1}{2}\left\langle\psi_i\left|\left[\hat{D}_0,[H_0,\hat{D}_0]\right]\right|\psi_i\right\rangle$$

$$\begin{aligned}\hat{D}_0 &= e_{\mathrm{E1}} r Y_{10}(\hat{\boldsymbol{r}}) \\ &= e_{\mathrm{E1}}\sqrt{\frac{3}{4\pi}}z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[H_0,\hat{D}_0] &= \left[\frac{\boldsymbol{p}^2}{2\mu}+V(r),\hat{D}_0\right] = \left[\frac{p_z^2}{2\mu},\hat{D}_0\right] \\ &= \frac{1}{2\mu}\cdot e_{\mathrm{E1}}\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cdot\left[p_z^2,z\right] = \frac{1}{2\mu}\cdot e_{\mathrm{E1}}\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cdot(-i\hbar p_z)\end{aligned}$$

$$\left[\hat{D}_0,[H_0,\hat{D}_0]\right] = \frac{-i\hbar}{\mu}\cdot\left(e_{\mathrm{E1}}\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\right)^2[z,p_z] = \frac{\hbar^2}{\mu}\cdot\left(e_{\mathrm{E1}}\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\right)^2$$

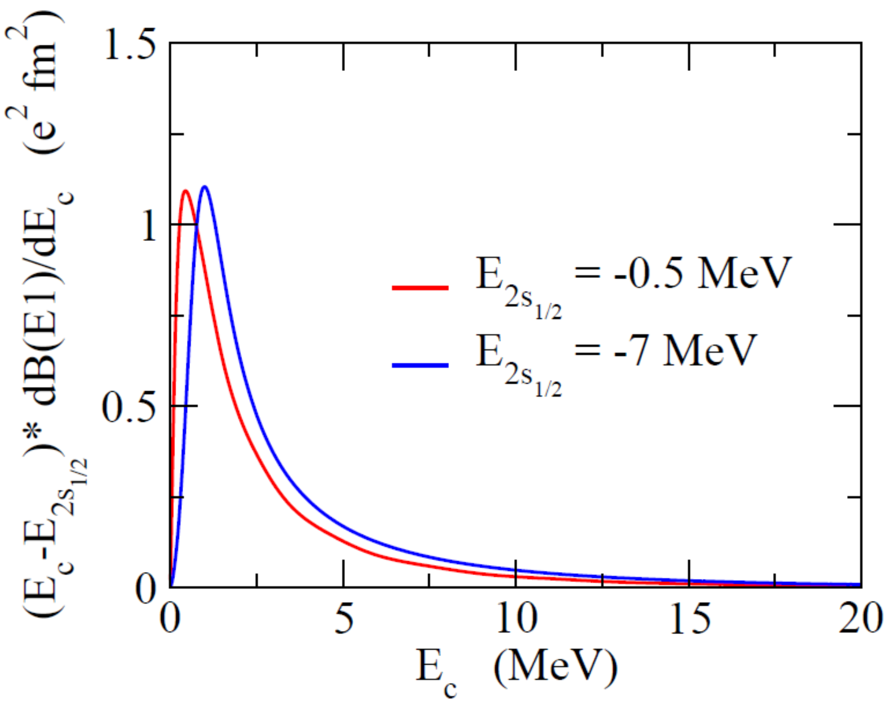
$$\boxed{S_1 = \frac{9}{8\pi}e_{\mathrm{E1}}^2\frac{\hbar^2}{\mu}}$$

モデル（ポテンシャル、束縛エネルギー、角運動量など）に依らない定数

[TRK (Thomas-Reiche-Kuhn) Sum Rule]

和則（わそく）: Sum Rule

$$S_1 = \int_0^\infty dE_c\,(E_c - E_b)\frac{dB(E1)}{dE_c} = \frac{9}{8\pi}\,e_{E1}^2\,\frac{\hbar^2}{\mu}$$



$$S_1 = \int_0^\infty dE_c\,(E_c - E_b)\frac{dB(E1)}{dE_c}$$

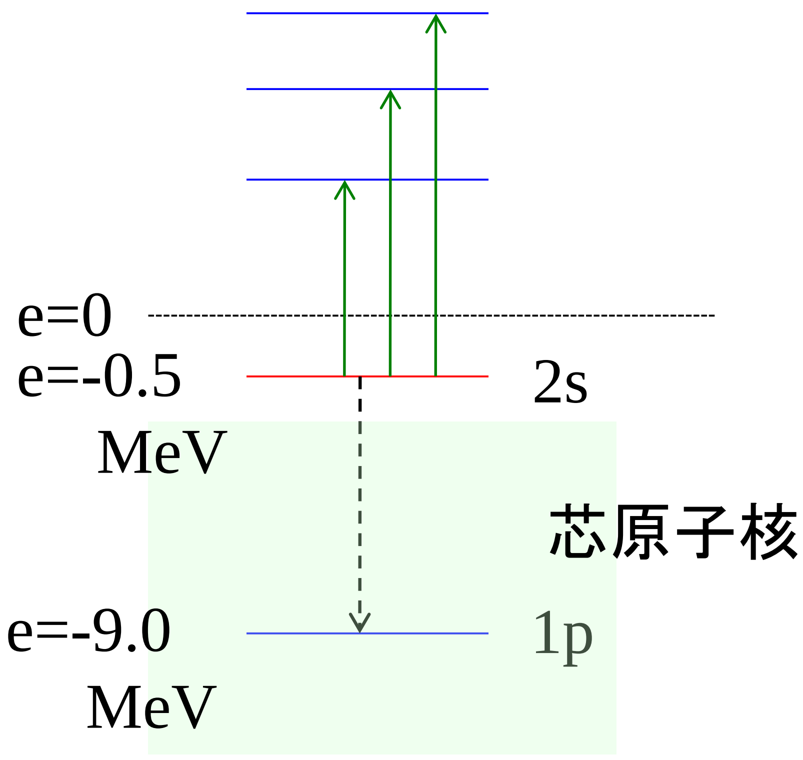
=2.79 e^2fm^2 MeV (E_b = -0.5 MeV)
3.18e^2fm^2 MeV (E_b = -7 MeV)

$$\frac{9}{8\pi}\,e_{E1}^2\,\frac{\hbar^2}{\mu}$$ =1.97 e^2fm^2 MeV

＊ほぼ一致。
少しずれているのはパウリ禁止遷移（2sから1pへの遷移）のため

(補足)パウリ禁止遷移

$$S_1=\int_0^\infty dE_c\,(E_c-E_b)\frac{dB(E1)}{dE_c}=\frac{9}{8\pi}e_{E1}^2\frac{\hbar^2}{\mu}$$

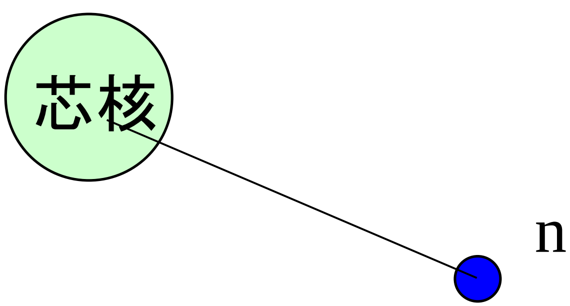


$$S_1=\int_0^\infty dE_c\,(E_c-E_b)\frac{dB(E1)}{dE_c}$$

=2.7891 e^2fm^2 MeV

$(E_{1p}-E_{2s})$ B(E1: 2s→ 1p)
= -0.8237 e^2fm^2 MeV

$$\frac{9}{8\pi}e_{E1}^2\frac{\hbar^2}{\mu}$$ =1.9657 e^2fm^2 MeV



$$\underbrace{2.7891}_{\text{physical transition}} - \underbrace{0.8237}_{\text{forbidden transition}} = 1.9654$$

(補足)TRK和則:

一般的には
$$\boxed{S_1 = \sum_\nu (E_\nu - E_0)|\langle\nu|z|0\rangle|^2 = \frac{\hbar^2 N_{sys}}{2m}}$$

原子核(安定中重核)の光吸収断面積に適用すると

$$\sigma_{\mathrm{abs}}(E_\gamma) = \frac{4\pi^2 e^2}{\hbar c}(E_f - E_i)|\langle\phi_f|\tilde{z}|\phi_i\rangle|^2\,\delta(E_\gamma - E_f + E_i)$$

$$\tilde{z} = \sum_p (z_p - Z_{cm}) \;=\; \sum_p \left\{ z_p - \frac{1}{A}\left(\sum_{p'} z_{p'} + \sum_n z_n\right)\right\}$$
$$= \frac{NZ}{A}\left(\frac{1}{Z}\sum_p z_p - \frac{1}{N}\sum_n z_n\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\int \sigma_{\mathrm{abs}}(E_\gamma)dE_\gamma &= \frac{4\pi^2 e^2}{\hbar c}\cdot\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{NZ}{A}\\ &= \frac{2\pi^2 e^2 \hbar}{mc}\cdot\frac{NZ}{A}\end{aligned}}$$

巨大双極子共鳴:Giant Dipole Resonance (GDR)

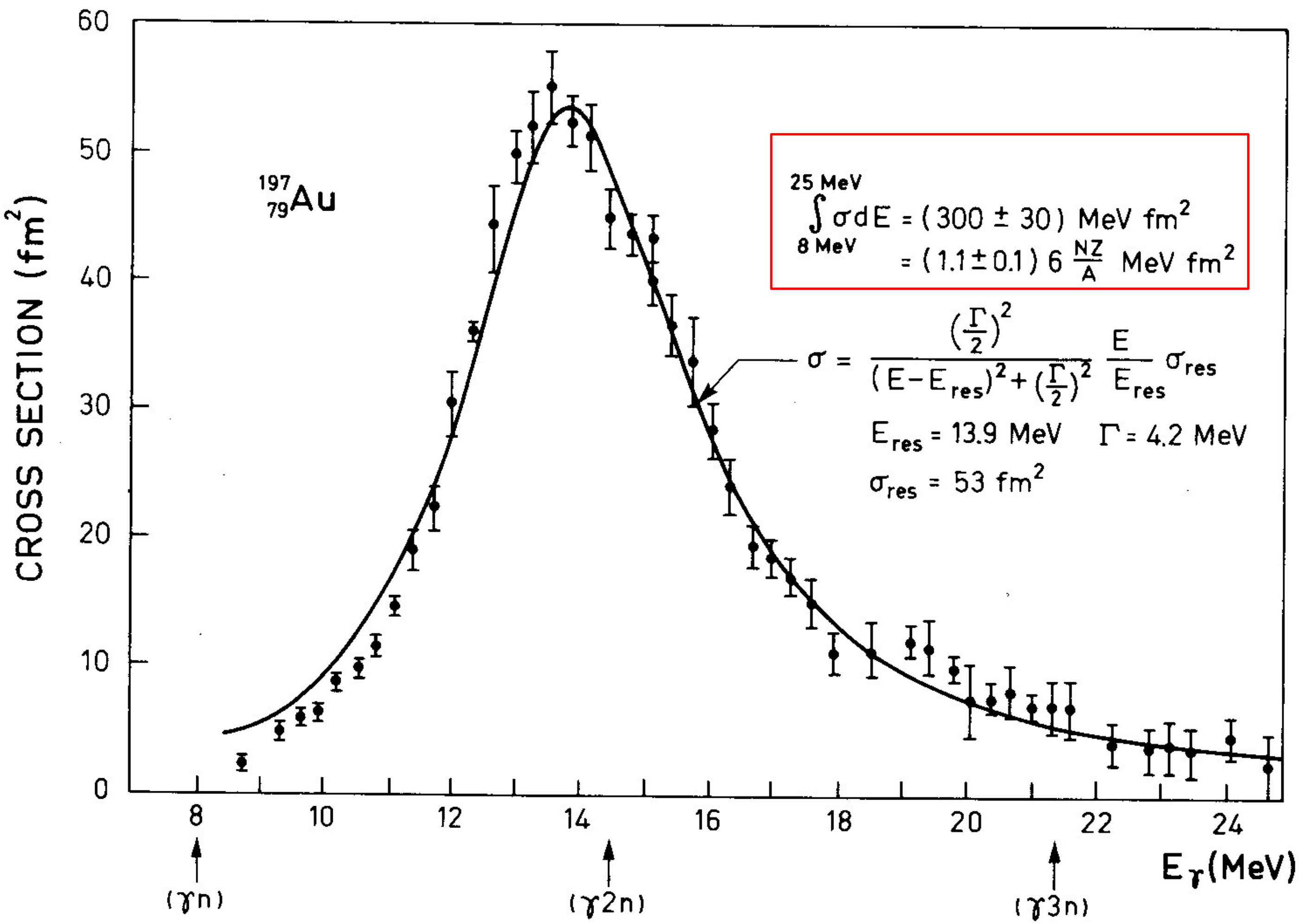


Figure 6-18 Total photoabsorption cross section for ^{197}Au. The experimental data are from S. C. Fultz, R. L. Bramblett, J. T. Caldwell, and N. A. Kerr, *Phys. Rev.* **127**, 1273 (1962). The solid curve is of Breit-Wigner shape with the indicated parameters.

Bohr-Mottelson

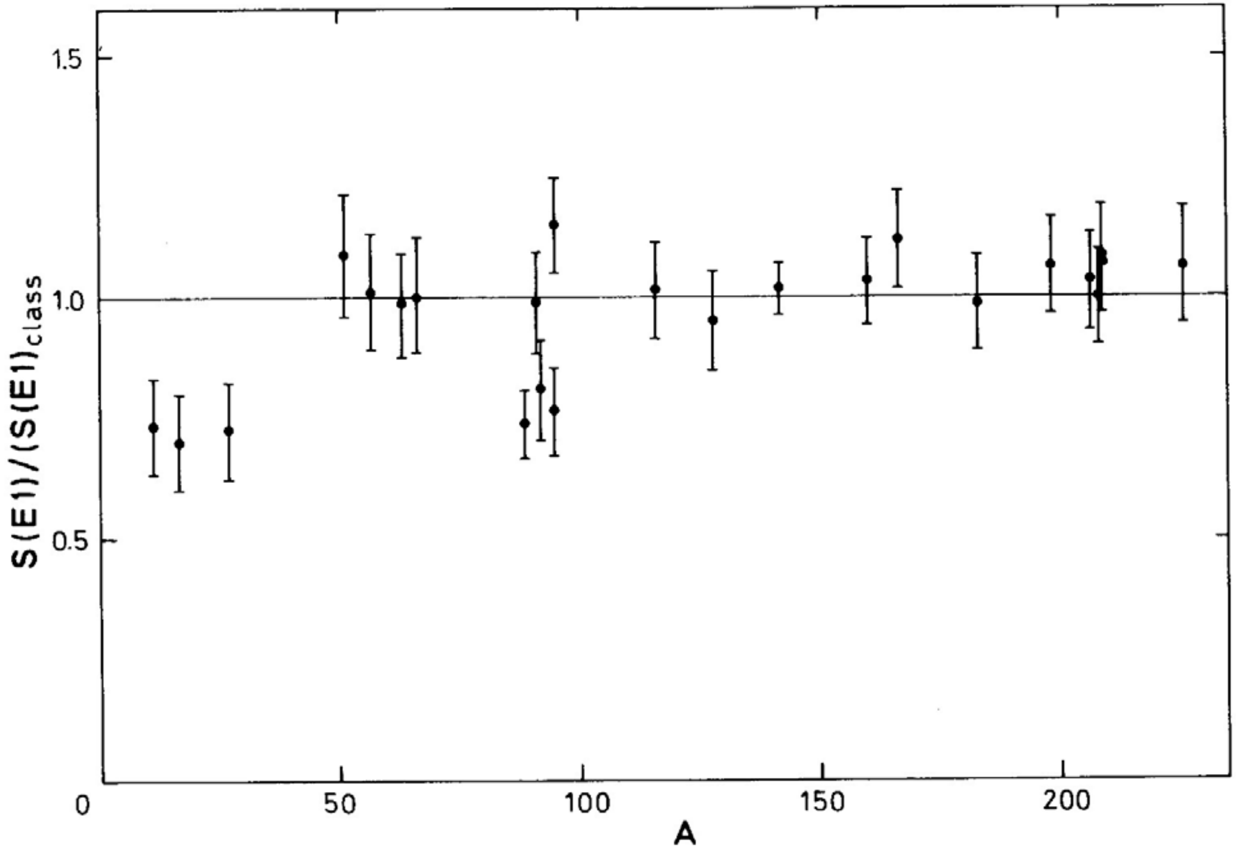


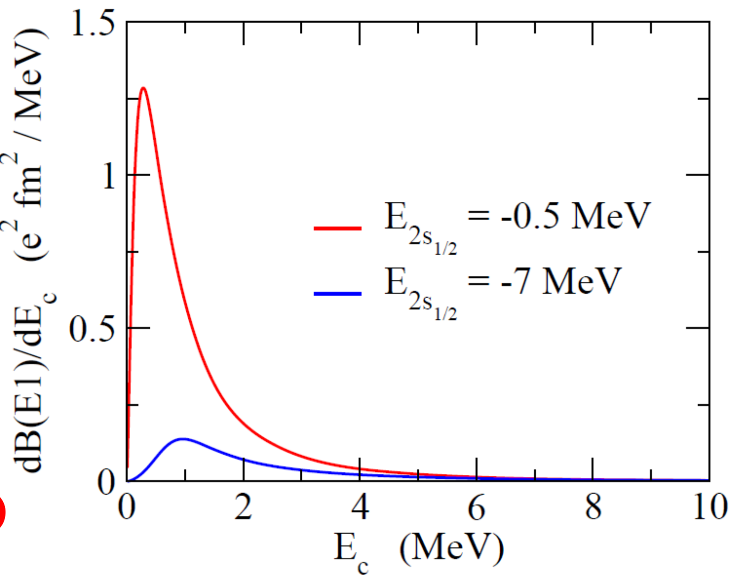
Figure 6-20 Total oscillator strength for dipole resonance. The observed total oscillator strength for energies up to 30 MeV is given in units of the classical sum rule value. For the nuclei with $A > 50$, the integrated oscillator strengths have been obtained from measurements of neutron yields produced by monochromatic γ rays (S. C. Fultz, R. L. Bramblett, B. L. Berman, J. T. Caldwell, and M. A. Kelly, in *Proc. Intern. Nuclear Physics Conference*, p. 397, ed.-in-chief R. L. Becker, Academic Press, New York, 1967). The photoscattering cross sections have been ignored, since they contribute only a very small fraction of the total cross sections. For the lighter nuclei, the yield of (γp) processes must be included and the data are from: ^{12}C and ^{27}Al (S. C. Fultz, J. T. Caldwell, B. L. Berman, R. L. Bramblett, and R. R. Harvey, *Phys. Rev.* **143**, 790, 1966); ^{16}O (Dolbilkin *et al.*, *loc.cit.*, Fig. 6-26). For the heavy nuclei ($A > 50$), other measurements have yielded total oscillator strengths that are about 20% larger than those shown in the figure (see, for example, Veyssière *et al.*, 1970).

Bohr-Mottelson

和則の利点

$$S_0 = \int_0^\infty dE_c \frac{dB(E1)}{dE_c} = \frac{3}{4\pi} e_{\rm E1}^2 \langle r^2 \rangle_i$$

$$S_1 = \frac{9}{8\pi} e_{\rm E1}^2 \frac{\hbar^2}{\mu}$$

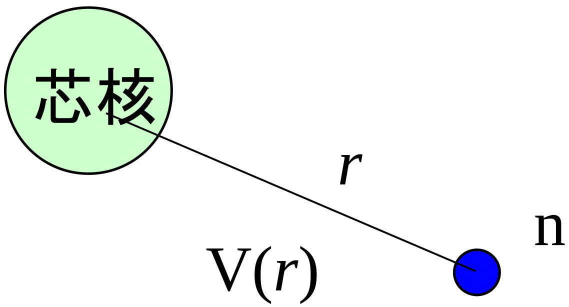


和則:
励起状態の(ある種の)情報が基底状態の性質のみによって表わされる
(励起状態の情報を知っている必要がない)。

- 実験で強度分布が測られた時、測られた範囲外にも強度があるかどうか (missing strength) 判断できる。
- 強度分布を測ることによって原子核の半径などの情報を得られる。
- 実験データや数値計算のチェックになる。
  (和則の値よりとても大きくなると何かがおかしい)。
- 近似法の妥当性が判断できる。基本的な和則を満たす近似かどうか。
  cf. RPA は TRK sum rule を満たすが、Tamm-Dancoff 近似は満たさない。

変形ハロー核

これまで、芯核は球形として ^{11}Be の最外殻中性子の一粒子運動を議論してきた:

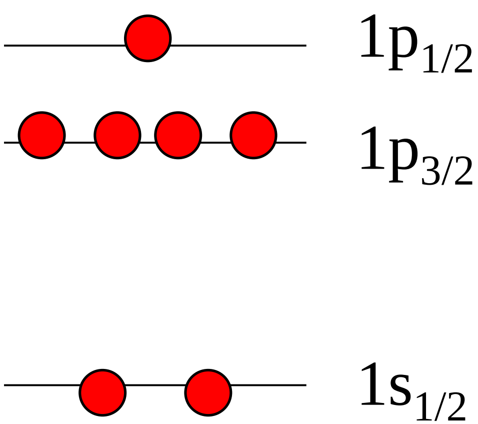


相対運動のハミルトニアン

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V(r)$$

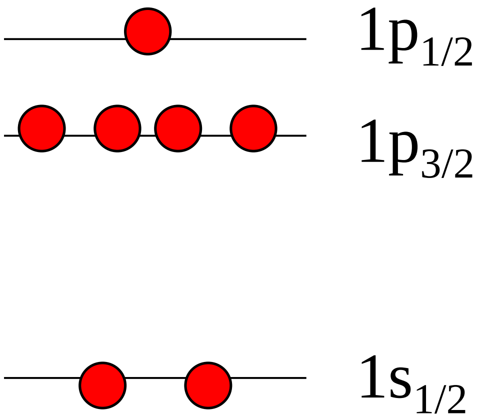
球形のポテンシャル

球形ポテンシャルの準位



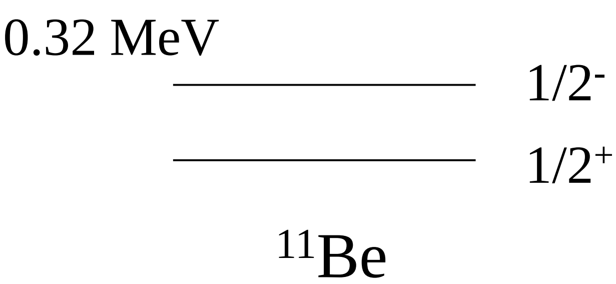
^{11}Be の基底状態は $I^{\pi} = 1/2^{-}$

球形ポテンシャルの準位

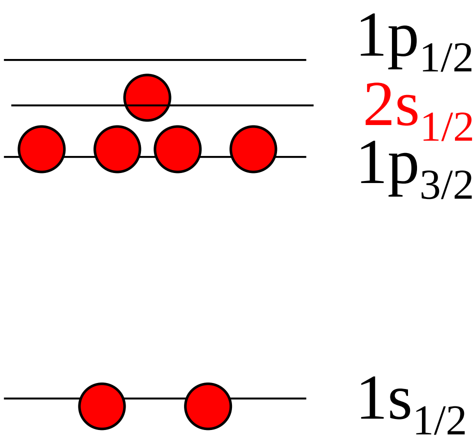


^{11}Be の基底状態は $I^{\pi} = 1/2^{-}$

実際の ^{11}Be の準位



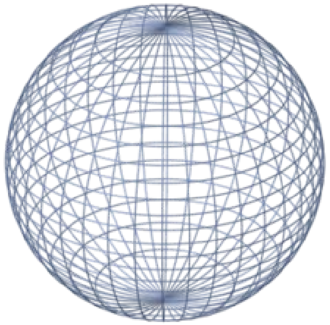
?



“parity の逆転”

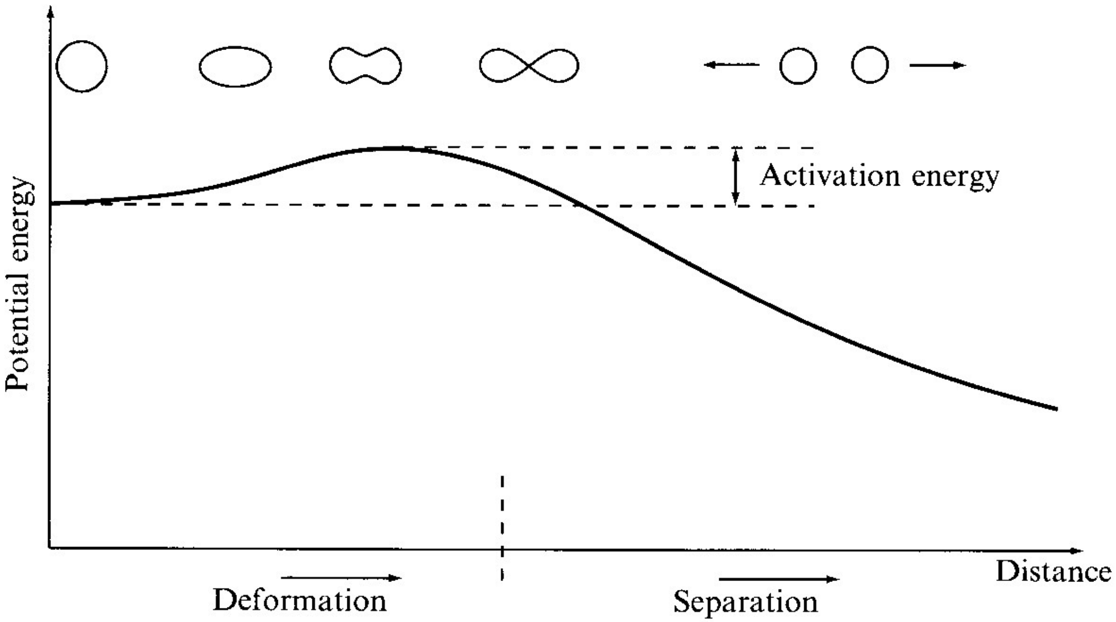
^{11}Be は変形している? ⟶ 変形したポテンシャル中の一粒子運動

(復習)殻補正と原子核の変形



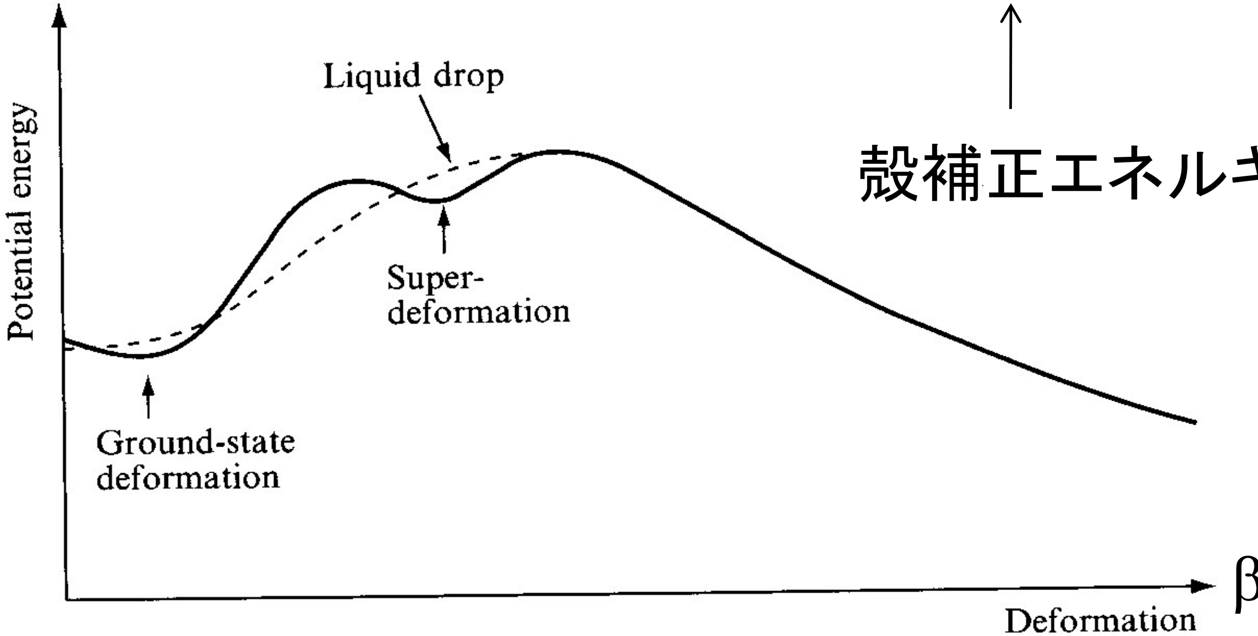
常に球形に極小値を持つ

液滴模型による変形エネルギー曲線

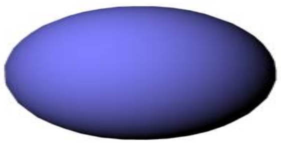


（復習）殻補正と原子核の変形

$$E(\beta) = E_{LDM}(\beta) + E_{\text{shell}}(\beta)$$



殻補正エネルギー：魔法数の起源

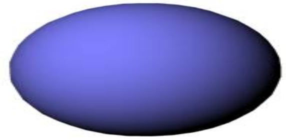


液滴模型のみ → 常に球形が基底状態

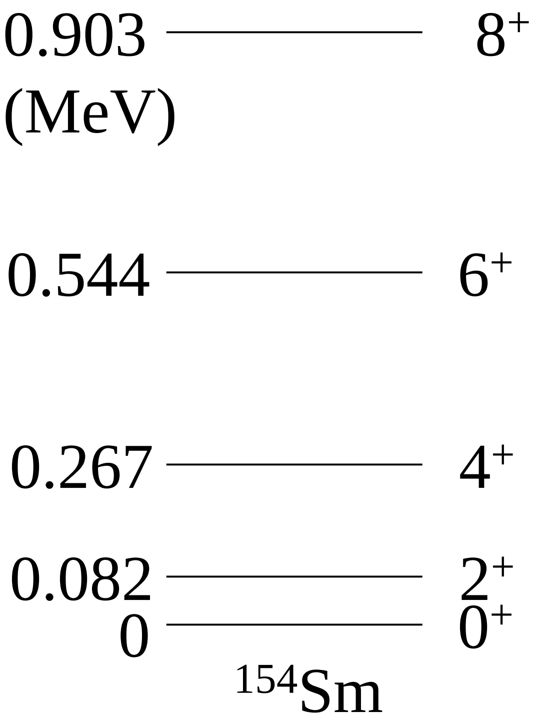
殻補正 → 変形状態が基底状態になる場合がある

＊対称性の自発的破れ

変形の証拠



^{154}Sm　のスペクトル



$$\boxed{E_I \sim \frac{I(I+1)\hbar^2}{2\mathcal{J}}}$$

cf. 剛体の回転エネルギー（古典力学）

$$E = \frac{1}{2}\mathcal{J}\omega^2 = \frac{I^2}{2\mathcal{J}}$$

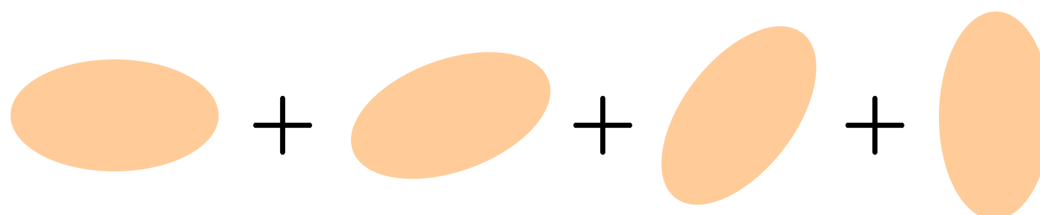
$$(I = \mathcal{J}\omega,\ \ \omega = \dot{\theta})$$

^{154}Sm は変形している

(参考) 0^+ 状態とは?

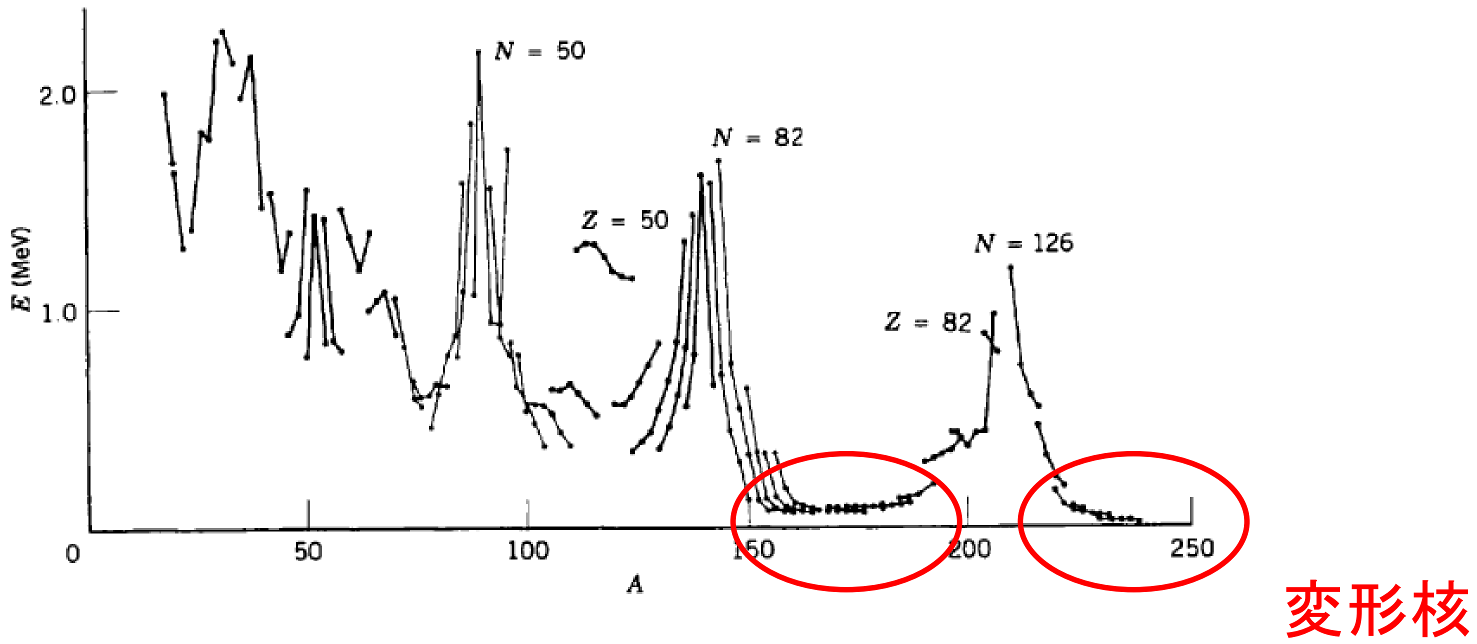
0^+: 空間異方性がない(「球形」)

→ すべての向きを同等に混ぜればよい

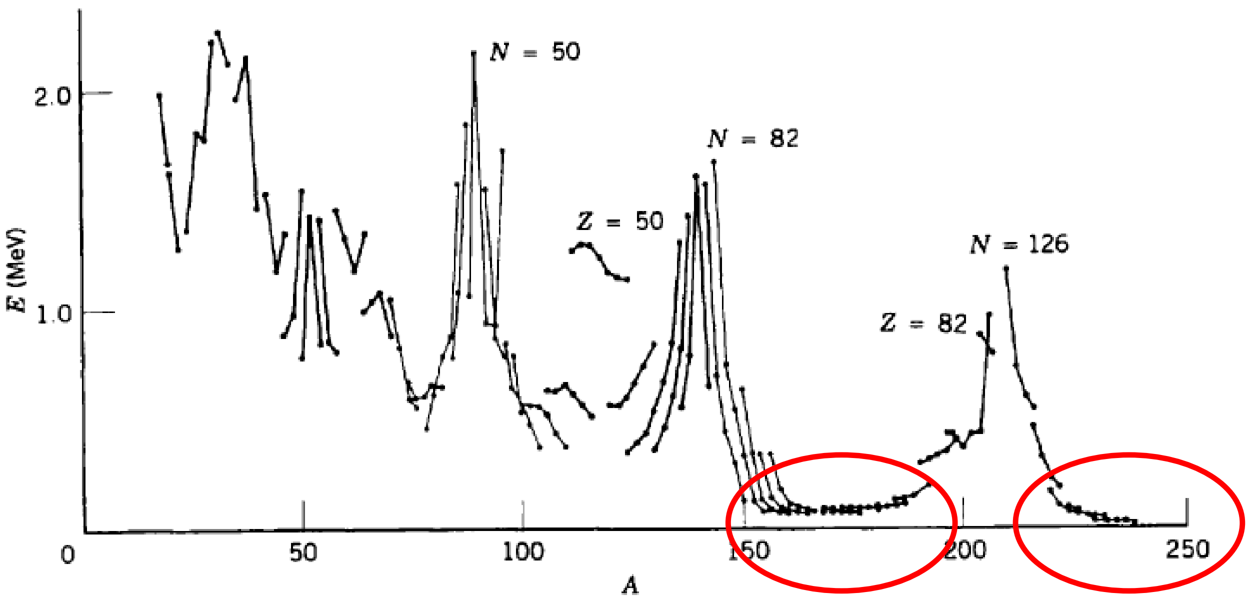


c.f. HF + Angular Momentum Projection

偶偶核の 2$^+$ 状態のエネルギー

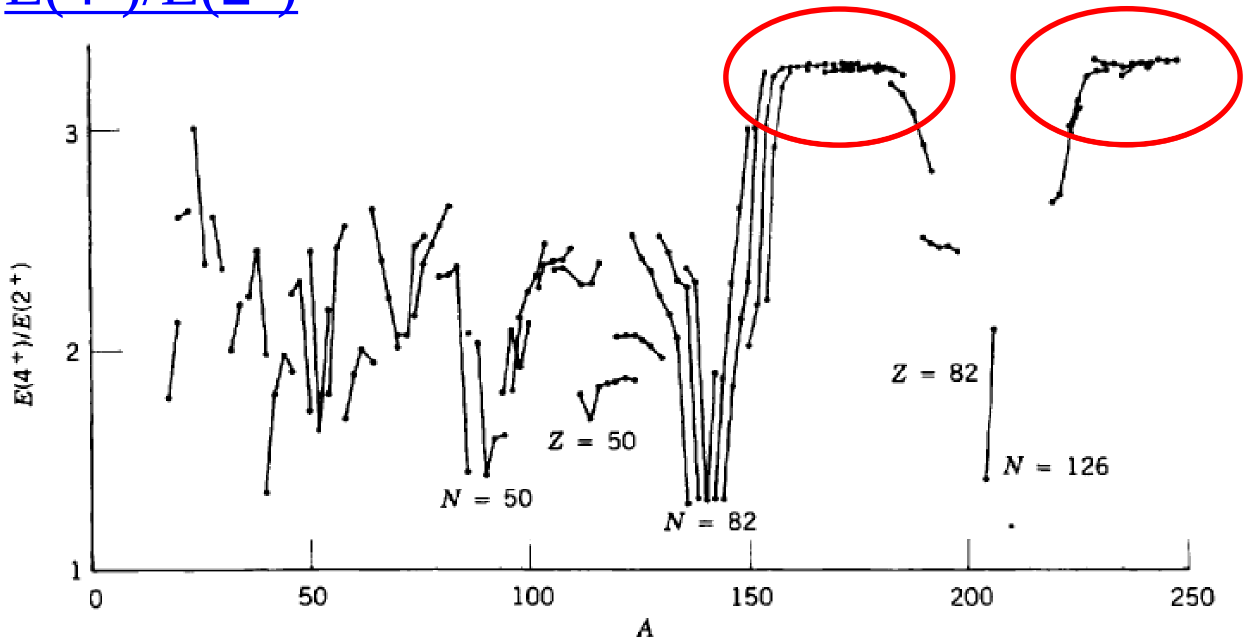


K.S. Krane, “Introductory Nuclear Physics”



変形核

E(4$^+$)/E(2$^+$)



変形核なら

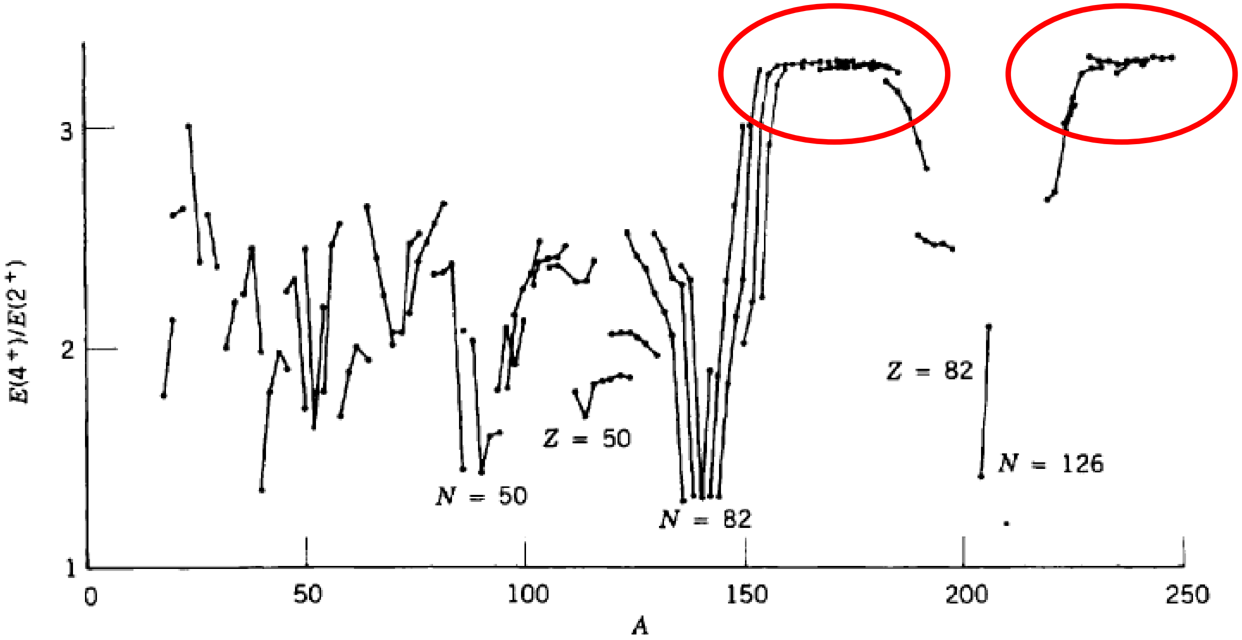
E(4$^+$)/E(2$^+$) ~ 3.3

球形核なら

E(4$^+$)/E(2$^+$) ~ 2

K.S. Krane, “Introductory Nuclear Physics”

偶偶核における E(4$^+$)/E(2$^+$)

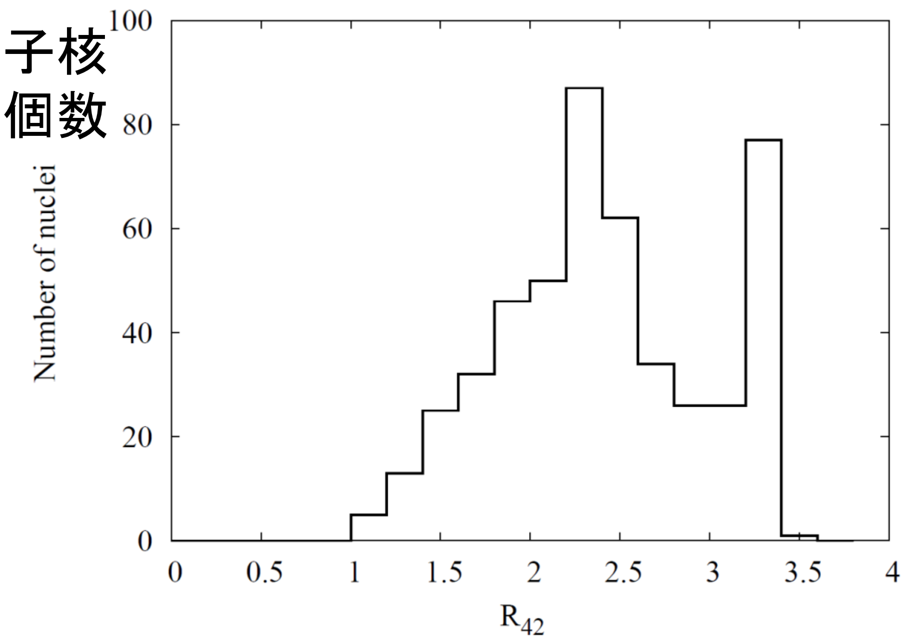


変形核なら
E(4$^+$)/E(2$^+$) ~ 3.3

球形核なら
E(4$^+$)/E(2$^+$) ~ 2

K.S. Krane, “Introductory Nuclear Physics”

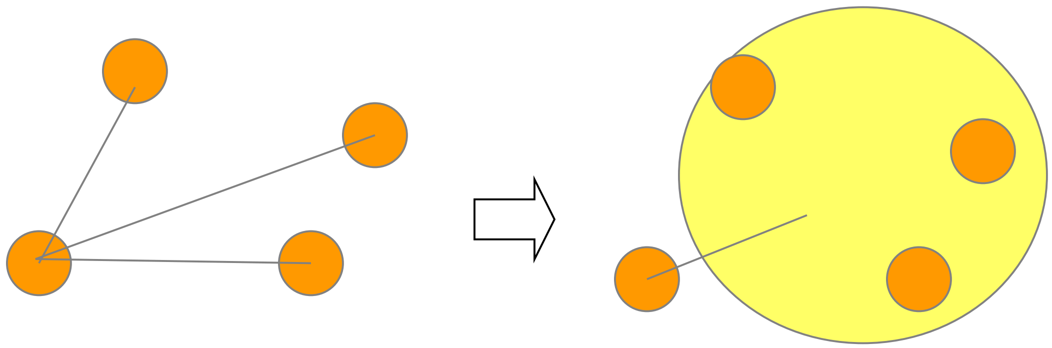
原子核の個数



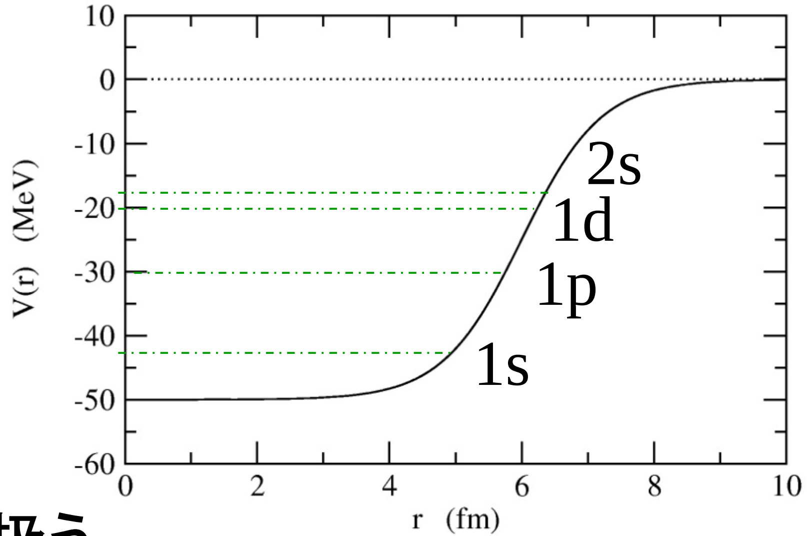
E(4$^+$)/E(2$^+$)

G.F. Bertsch,
in “Fifty Years of Nuclear BCS”, p. 26

平均場近似と変形核



Woods-Saxon ポテンシャル



他の核子との相互作用を平均的に取り扱う

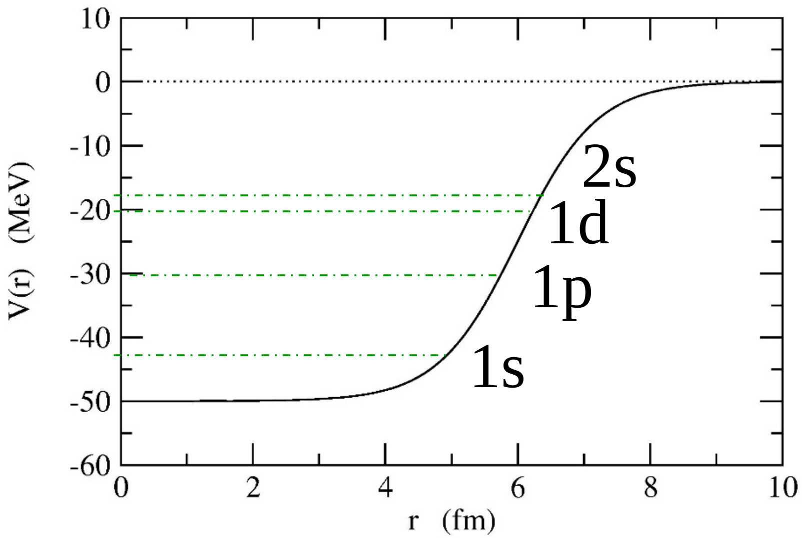
⇨ 有効ポテンシャル中の一体問題

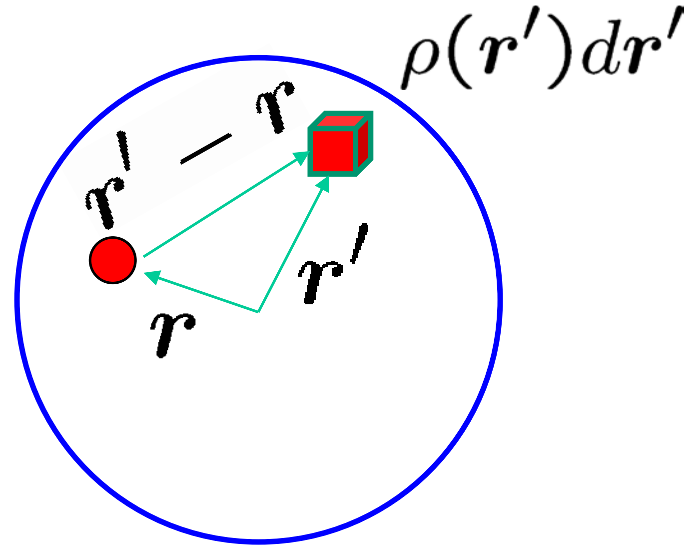
← ポテンシャルはエネルギーが最小となるように決める（変分原理の考え方）

$$V(\boldsymbol{r}) \sim \int v(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}'$$

＋反対称化の効果

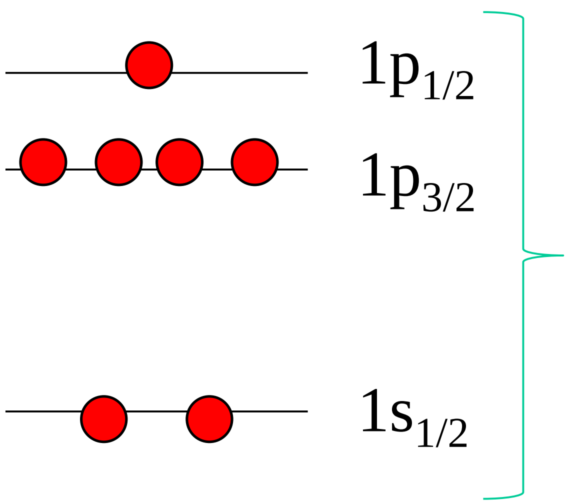
平均場近似





ナイーブには

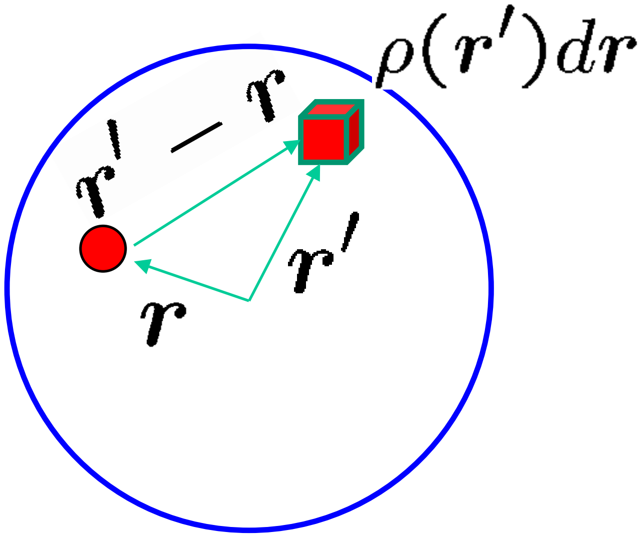
$$\boxed{V(\boldsymbol{r}) \sim \int v(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}'}$$



殻模型

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \sum_i |\psi_i(\boldsymbol{r})|^2$$

平均場近似



ナイーブには

$$\boxed{V(\boldsymbol{r}) \sim \int v(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}'}$$

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \sum_i |\psi_i(\boldsymbol{r})|^2$$

$$\begin{aligned} 0 &= \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2 + V(\boldsymbol{r}) - \epsilon_i\right]\psi_i(\boldsymbol{r}) \\ &= \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2 + \int v(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\left(\sum_j |\psi_j(\boldsymbol{r}')|^2\right)d\boldsymbol{r}' - \epsilon_i\right]\psi_i(\boldsymbol{r}) \end{aligned}$$

ポテンシャルが方程式の解を使って書かれている

平均場近似

$$
\boxed{\begin{aligned}
0 &= \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2 + V(\boldsymbol{r}) - \epsilon_i\right]\psi_i(\boldsymbol{r}) \\
&= \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2 + \int v(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\left(\sum_j |\psi_j(\boldsymbol{r}')|^2\right)d\boldsymbol{r}' - \epsilon_i\right]\psi_i(\boldsymbol{r})
\end{aligned}}
$$

ポテンシャルが方程式の解を使って書かれている

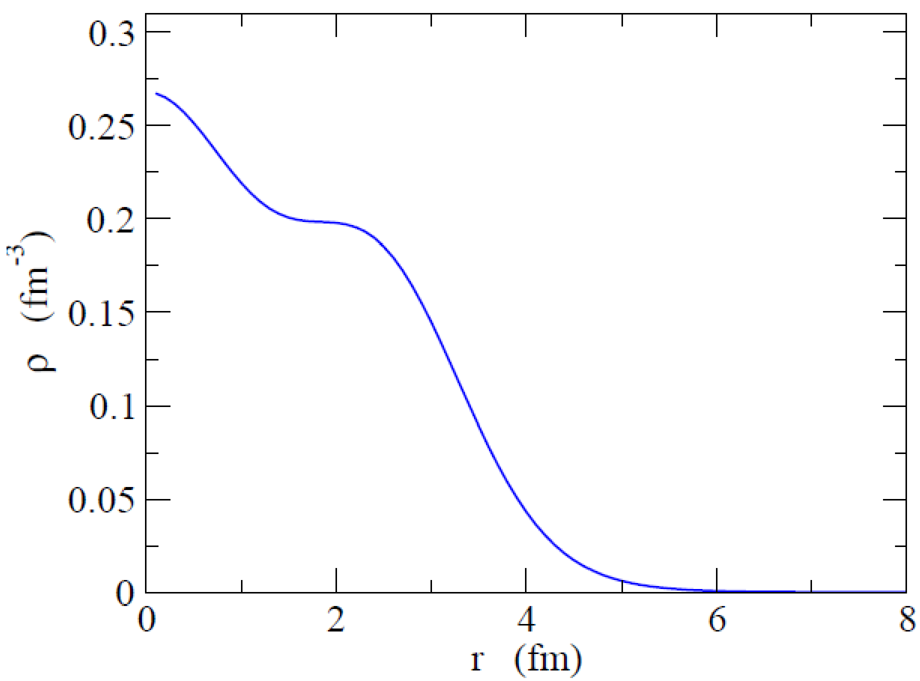
$\longrightarrow$ 自己無撞着(self-consistent)な解

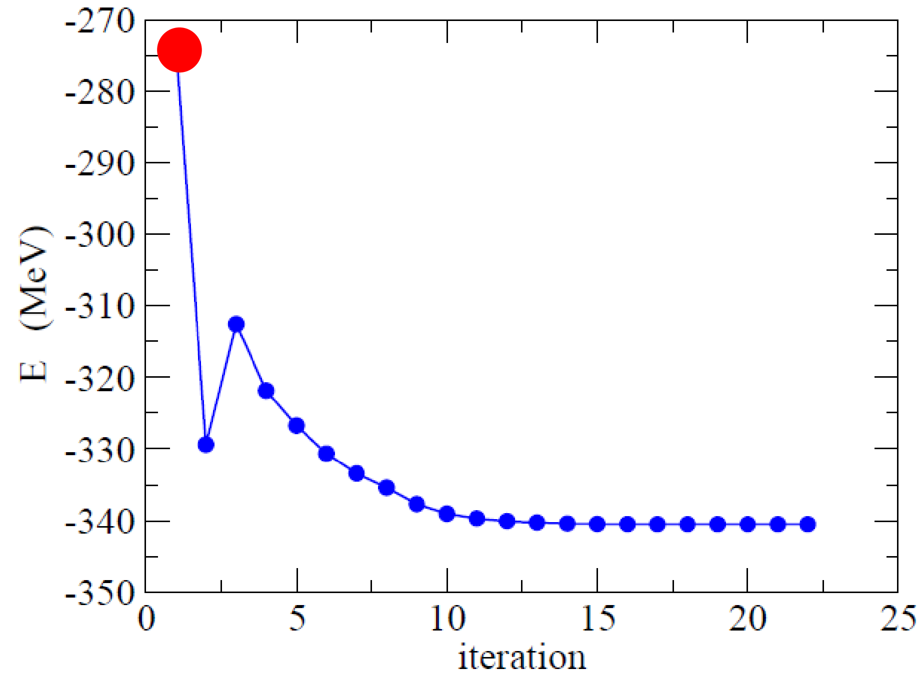
繰り返し法: $\{\psi_i\} \rightarrow \rho \rightarrow V \rightarrow \{\psi_i\} \rightarrow \cdots$

最初と最後の波動関数が同じになるまで繰り返す

"self-consistent mean-field theory"

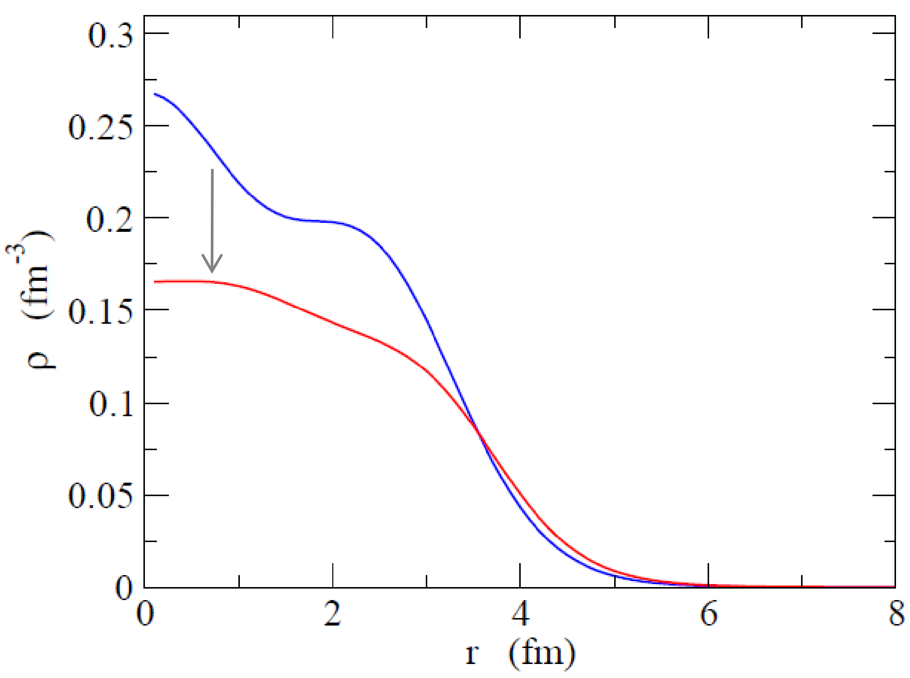
^{40}Ca に対する Skyrme-Hartree-Fock 計算

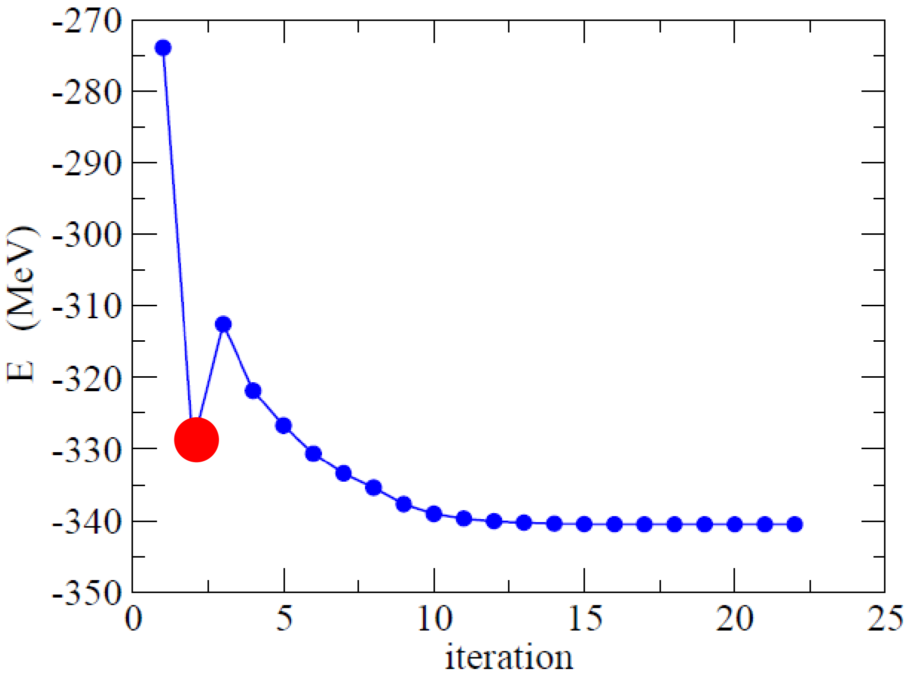




核子間の相互作用を考慮して密度を最適化

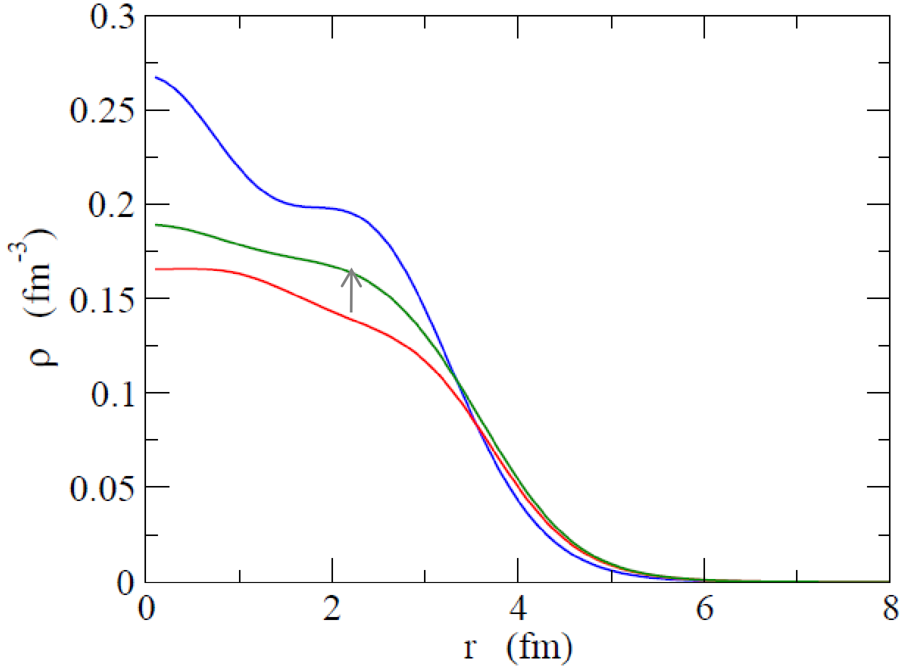
^{40}Ca に対する Skyrme-Hartree-Fock 計算

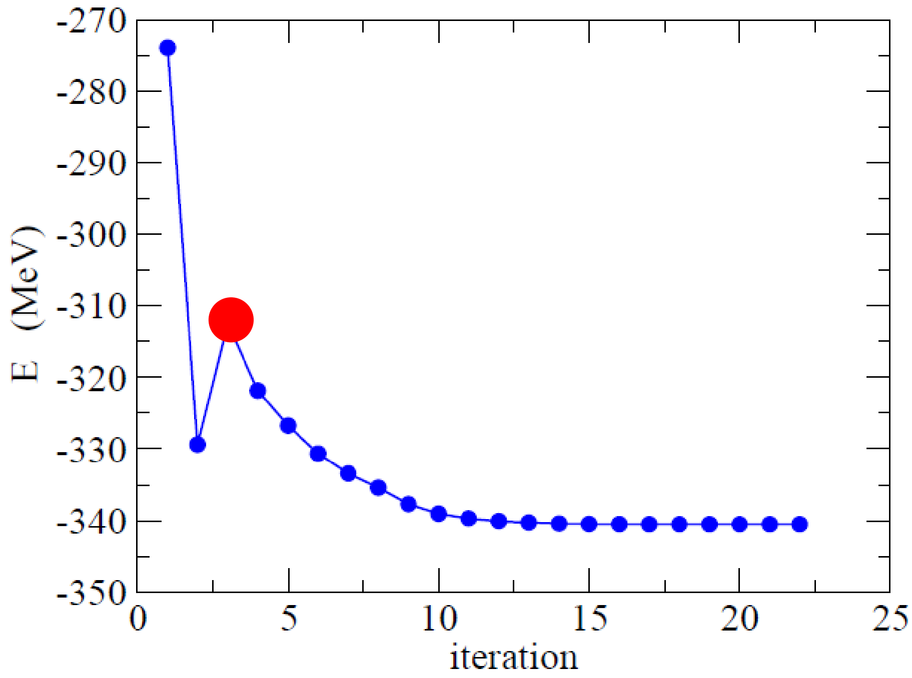




核子間の相互作用を考慮して密度を最適化

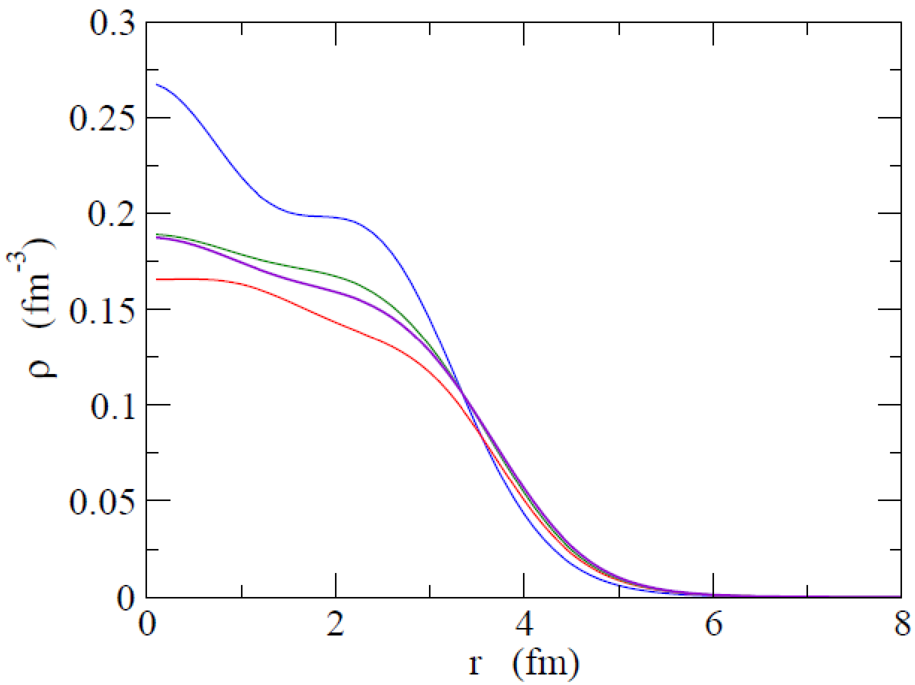
^{40}Ca に対する Skyrme-Hartree-Fock 計算

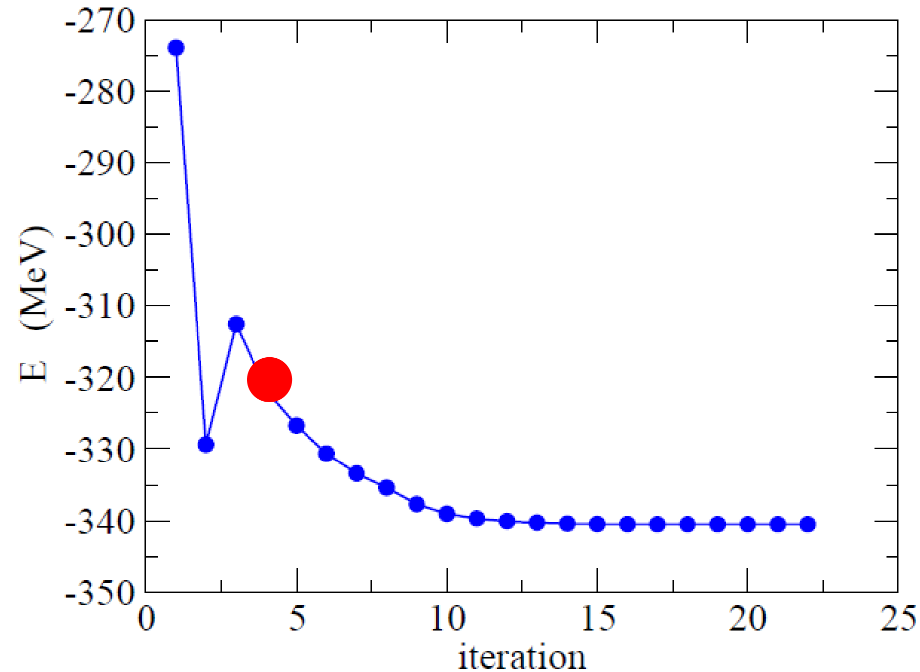




核子間の相互作用を考慮して密度を最適化

^{40}Ca に対する Skyrme-Hartree-Fock 計算





核子間の相互作用を考慮して密度を最適化

→ 自動的に最適な形、密度が決まる

変分原理　(Rayleigh-Ritz 法）

最適化 $\longleftrightarrow$ 変分原理

$$\boxed{\frac{\langle\Psi|H|\Psi\rangle}{\langle\Psi|\Psi\rangle} \geq E_{\mathrm{g.s.}}}$$

(証明)

（わかりやすいように）$E_{gs} = 0$ となるようにエネルギーの基準をとる

$$|\Psi\rangle = \sum_n C_n |\phi_n\rangle \Longrightarrow \mathrm{lhs} = \frac{\sum_{n\neq 0} C_n^2 E_n}{\sum_n C_n^2} \geq 0 = E_{\mathrm{g.s.}}$$

応用例:非調和振動子の近似解

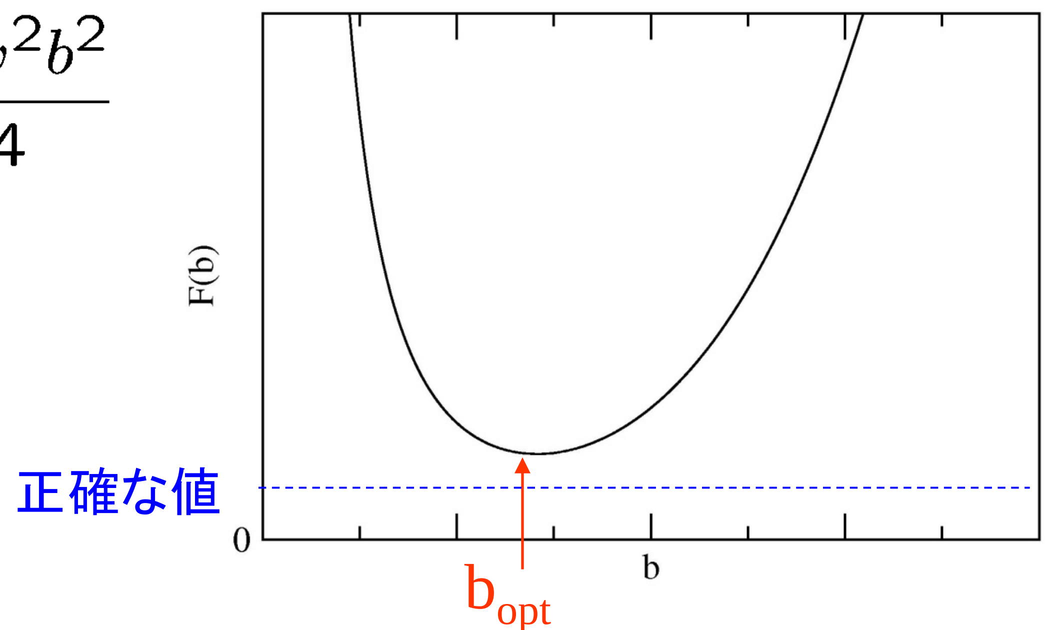
$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \beta x^4$$

試行関数:

$$\Psi(x) = (\pi b^2)^{-1/4}\ \exp(-x^2/2b^2)$$

(note) if $\beta = 0, \quad b = \sqrt{\hbar/m\omega}$

$$\frac{\langle\Psi|H|\Psi\rangle}{\langle\Psi|\Psi\rangle} = \frac{\hbar^2}{4mb^2} + \frac{m\omega^2 b^2}{4} + \frac{3\beta b^4}{4} \equiv F(b)$$



変分原理 (Rayleigh-Ritz 法）

最適化 $\longleftrightarrow$ 変分原理

$$\boxed{\frac{\langle\Psi|H|\Psi\rangle}{\langle\Psi|\Psi\rangle} \geq E_{\mathrm{g.s.}}}$$

H： 多体のハミルトニアン

$$\Psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots) = \psi_1(\boldsymbol{r}_1)\cdot\psi_2(\boldsymbol{r}_2)\cdot\psi_3(\boldsymbol{r}_3)\cdots$$

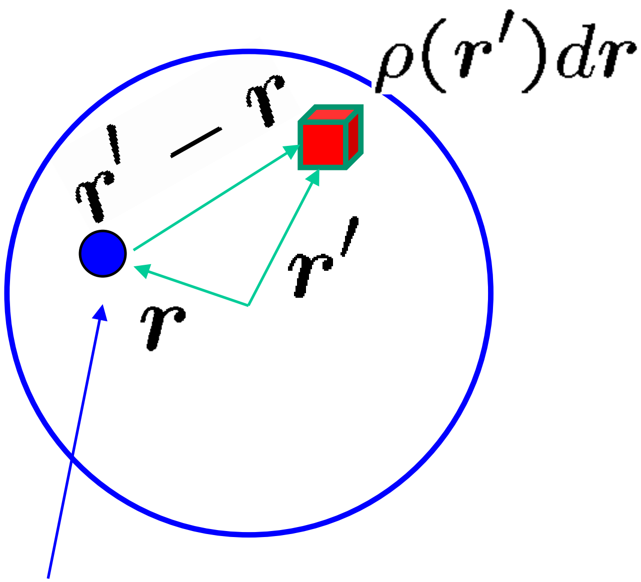
$\longleftarrow$ 独立粒子に対する多体の波動関数

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2 + \int v(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}' - \epsilon_i\right]\psi_i(\boldsymbol{r}) = 0$$

全エネルギーが最少になるようにちょっとずつ一粒子ポテンシャルを変えていく

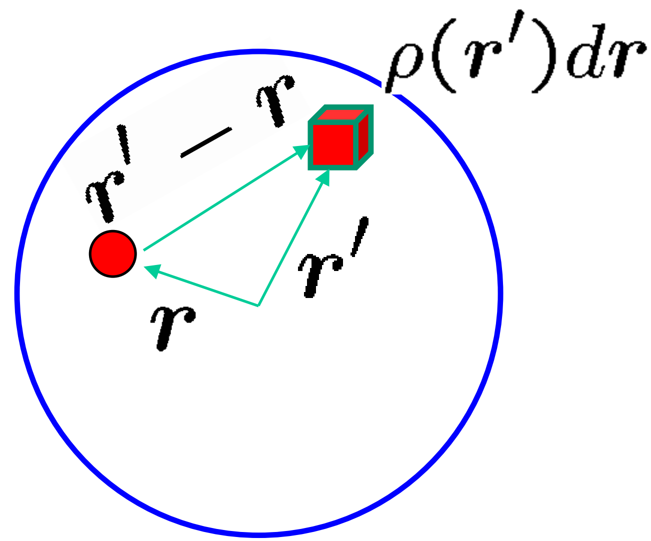
平均場近似

電磁気の場合



テスト電子

原子核の場合



同種粒子間の相互作用
→反対称化が必要

$$\boxed{V(\boldsymbol{r}) \sim \int v(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}'}$$

反対称化

核子:フェルミオン

$$\Psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3 \cdots) = -\Psi(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_3 \cdots)$$

$$\psi_1(\boldsymbol{r}_1)\psi_2(\boldsymbol{r}_2) \to [\psi_1(\boldsymbol{r}_1)\psi_2(\boldsymbol{r}_2) - \psi_2(\boldsymbol{r}_1)\psi_1(\boldsymbol{r}_2)]/\sqrt{2}$$

スレーター行列式

$$\begin{aligned}
0 \;&=\; \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2 + \int v(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\left(\sum_j |\psi_j(\boldsymbol{r}')|^2\right) d\boldsymbol{r}' - \epsilon_i\right]\psi_i(\boldsymbol{r}) \\
&\to\; \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2 + \int v(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\left(\sum_j |\psi_j(\boldsymbol{r}')|^2\right) d\boldsymbol{r}' - \epsilon_i\right]\psi_i(\boldsymbol{r}) \\
&\qquad - \int v(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\left(\sum_j \psi_j^*(\boldsymbol{r}')\psi_i(\boldsymbol{r}')\right) d\boldsymbol{r}'\psi_j(\boldsymbol{r})
\end{aligned}$$

交換項

ハートリー・フォック近似

反対称化

$$
\begin{aligned}
0 &= \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2 + \int v(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\left(\sum_j |\psi_j(\boldsymbol{r}')|^2\right) d\boldsymbol{r}' - \epsilon_i\right]\psi_i(\boldsymbol{r}) \\
&\to \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2 + \int v(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\left(\sum_j |\psi_j(\boldsymbol{r}')|^2\right) d\boldsymbol{r}' - \epsilon_i\right]\psi_i(\boldsymbol{r}) \\
&\quad - \int v(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\left(\sum_j \psi_j^*(\boldsymbol{r}')\psi_i(\boldsymbol{r}')\right) d\boldsymbol{r}'\psi_j(\boldsymbol{r}) \\
&= \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2 + V(\boldsymbol{r}) - \epsilon_i\right]\psi_i(\boldsymbol{r}) + \int d\boldsymbol{r}' V_{\mathrm{NL}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\psi_i(\boldsymbol{r}')
\end{aligned}
$$

非局所ポテンシャル

Hartree-Fock 法と対称性

$$\begin{aligned} H &= -\sum_{i=1}^{A}\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j}^{A} v(\boldsymbol{r}_i,\boldsymbol{r}_j) \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^{A}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_i^2 + V_{\mathrm{HF}}(i)\right)}_{h_{\mathrm{HF}}} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i,j}^{A} v(\boldsymbol{r}_i,\boldsymbol{r}_j) - \sum_i V_{\mathrm{HF}}(i)}_{V_{\mathrm{res}}} \end{aligned}$$

2体力→1体場に近似

残留相互作用

Slater 行列式

$$\Psi_{\mathrm{HF}}(1,2,\cdots,A) = \mathcal{A}[\psi_1(1)\psi_2(2)\cdots\psi_A(A)]$$

⇦ h_{HF} の固有状態。ただし、H の固有状態ではない。

$\boxed{\Psi_{\mathrm{HF}}\ : H \text{ の持つ対称性を必ずしも持つ必要はない。}}$

“対称性が破れた解”

“対称性の自発的破れ”

対称性の破れ

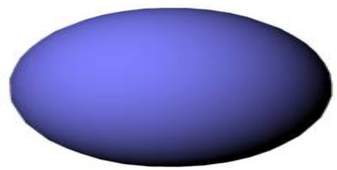
利点: 独立粒子の単純な描像を保ったまま主要な多体相関を取り入れることができる

不利な点: 実験と比べるためには(原理的には)破れた対称性を回復する必要がある。

⟶ 角運動量射影法、粒子数射影法

- 並進対称性: HF では常に破れる
- 回転対称性

変形解



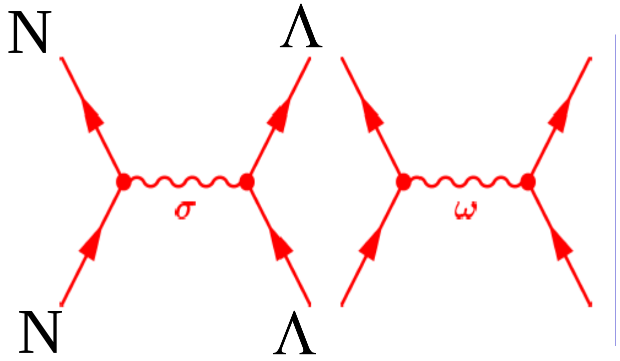
エネルギーを最適化するように原子核の形が自動的に決まる

応用例:変形したハイパー核に対するRMF計算

ハイパー核:原子核+Λ粒子

Λ粒子の原子核の形に対する影響は?

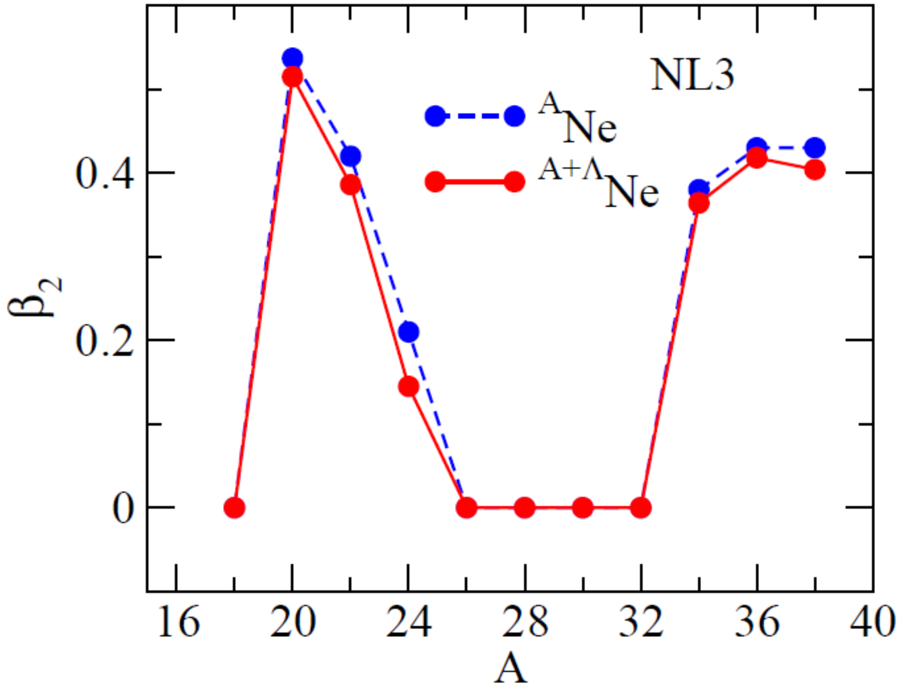
相対論的平均場理論



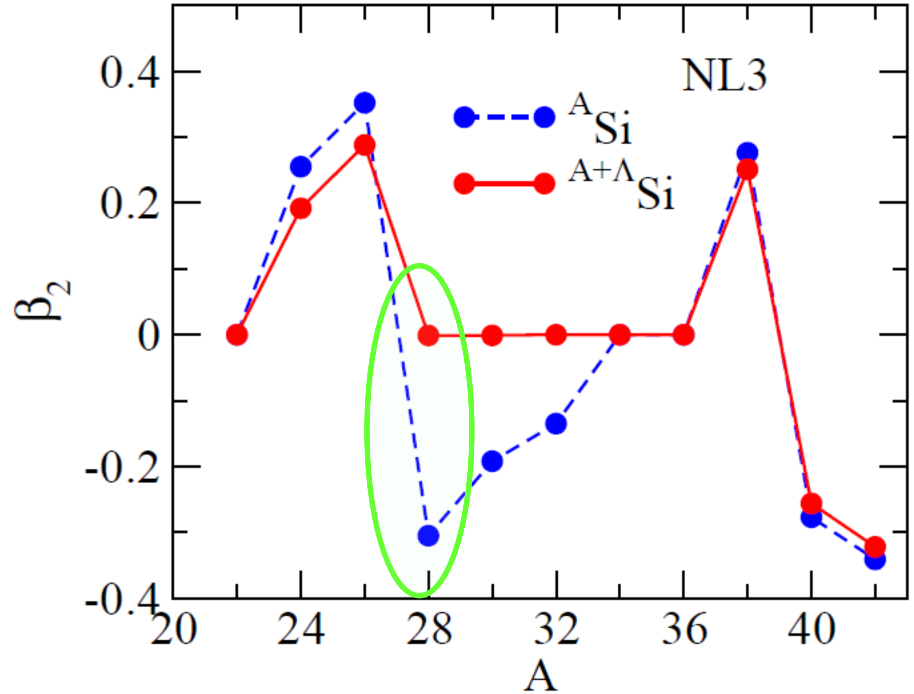
中間子交換による核子間力

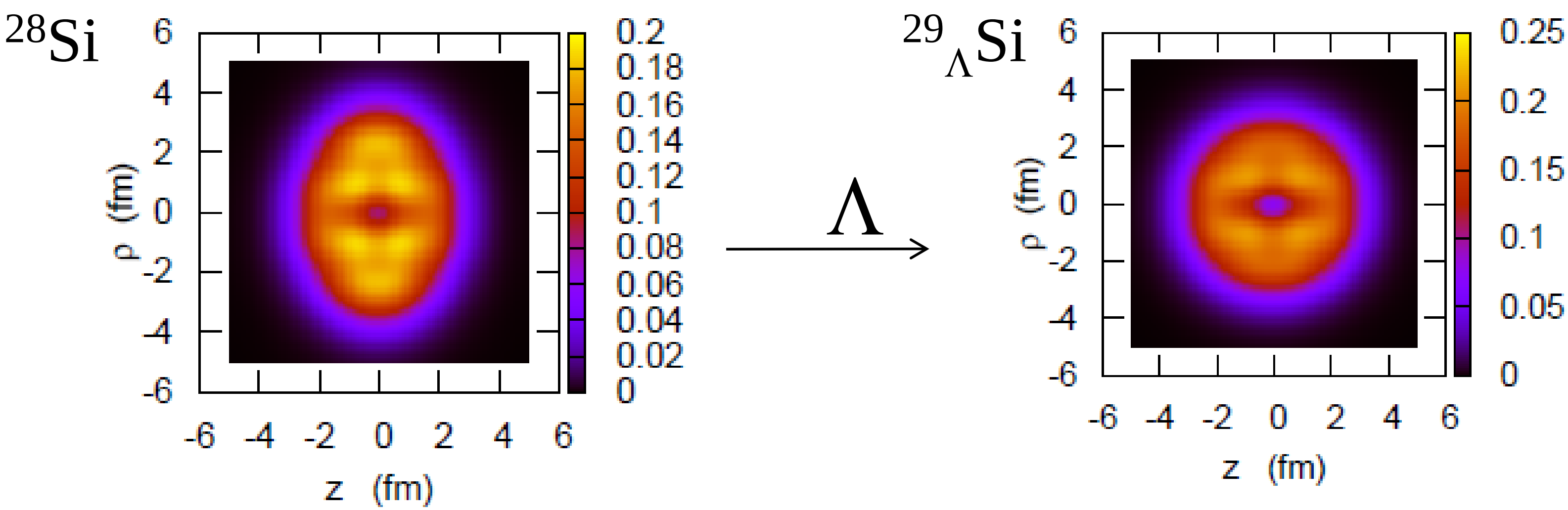
Λσ and Λω couplings

Ne isotopes



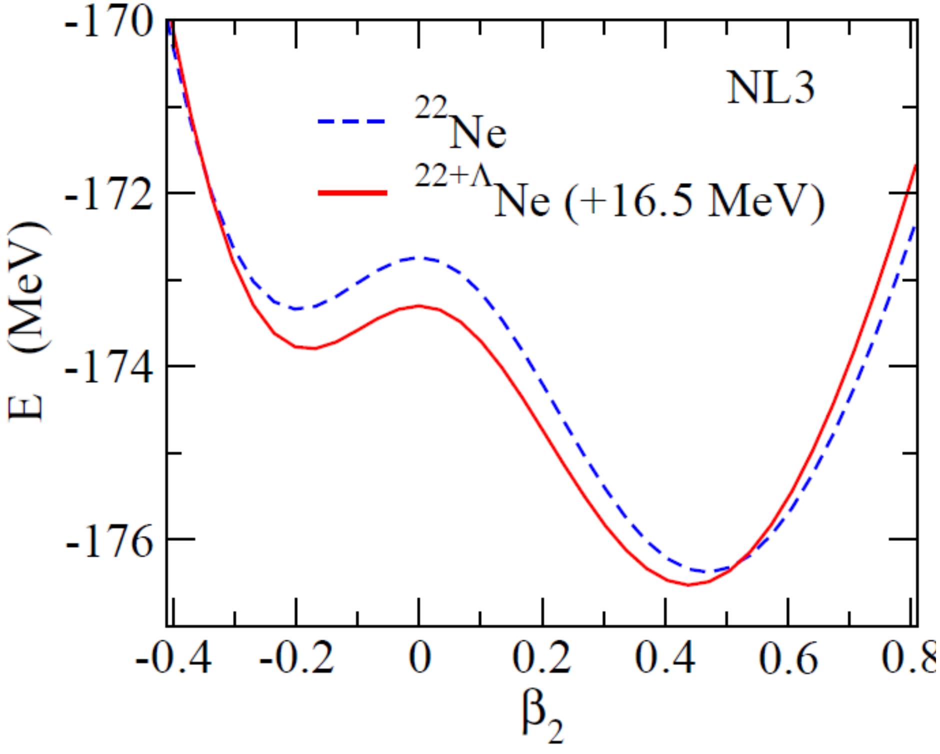
Si isotopes

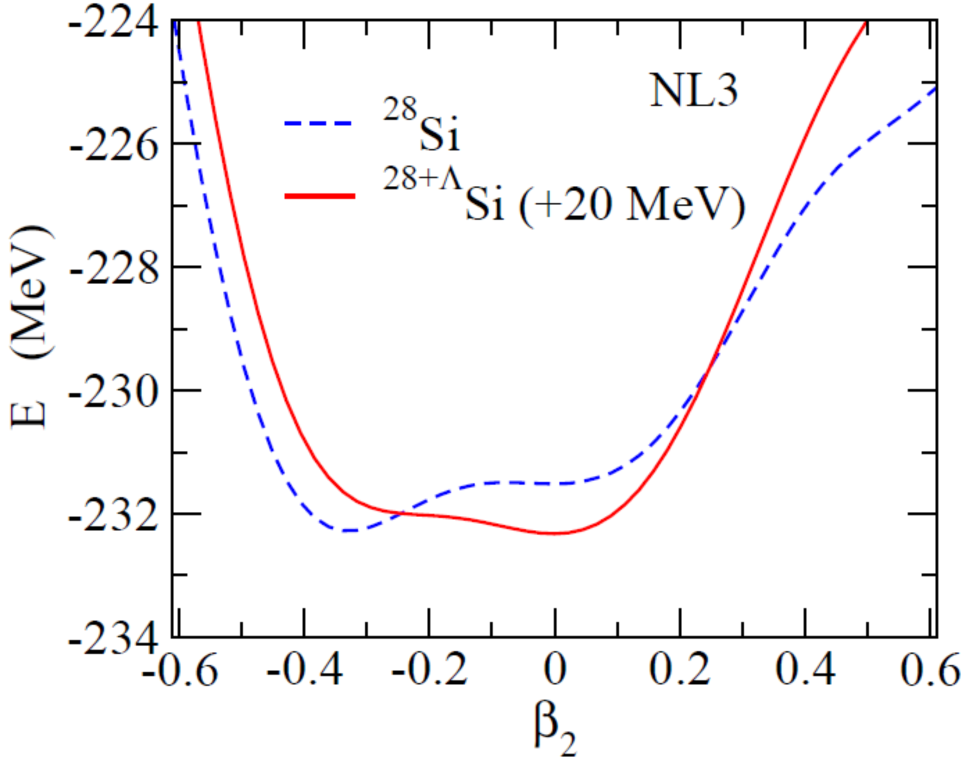




Myaing Thi Win and K.Hagino, PRC78('08)054311

Potential energy surface

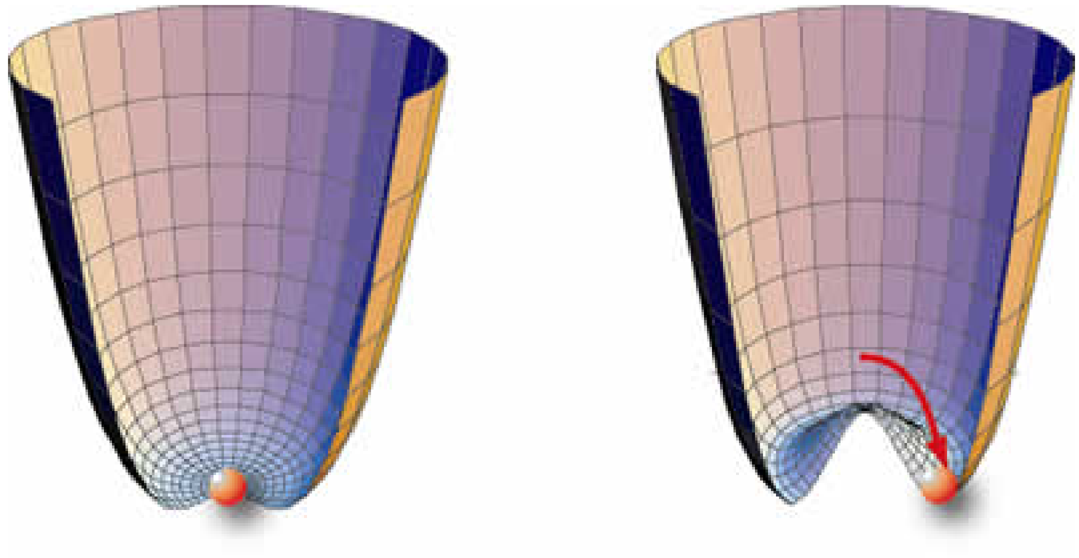


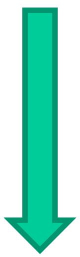


Myaing Thi Win and K.H., PRC78('08)054311

対称性の自発的破れ

ハミルトニアンが持つ対称性を、真空が持たない(破る)。



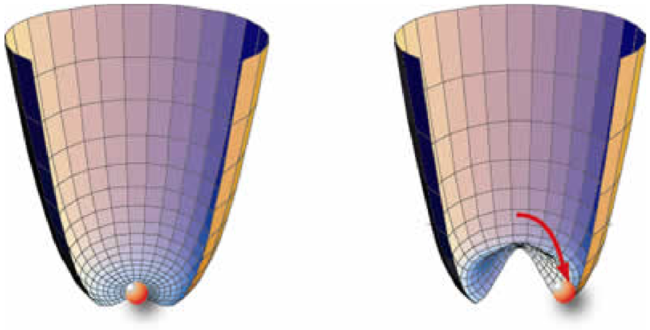


(対称性を回復するように
南部・ゴールドストン・モード(ゼロ・モード)
が発生)

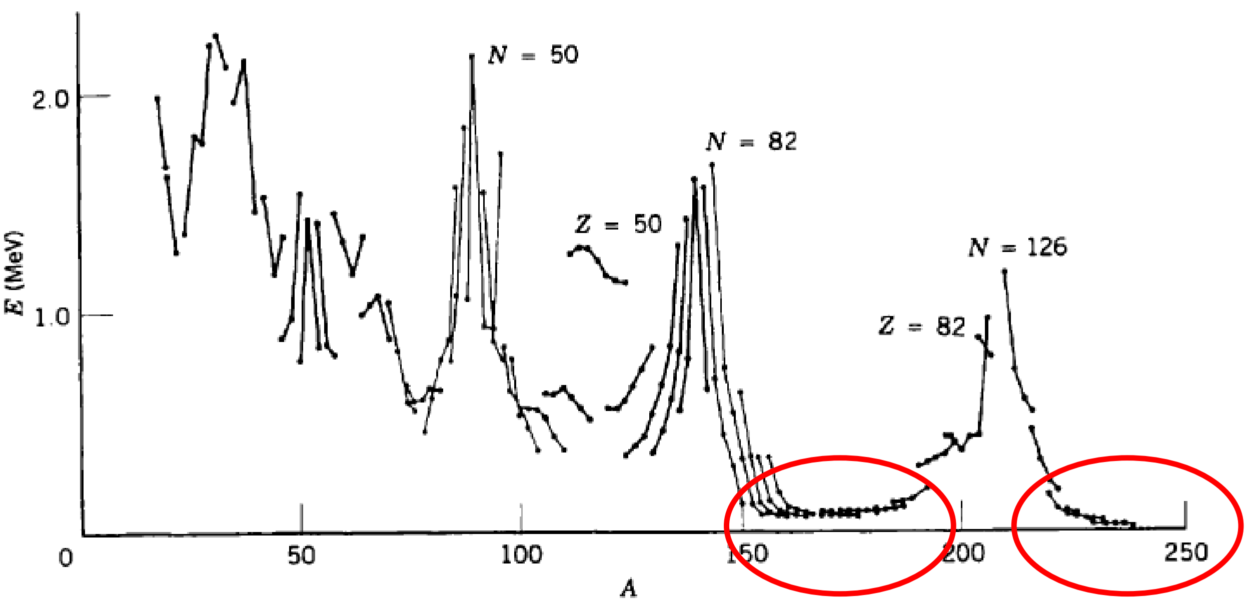
南部陽一郎
(2008年ノーベル
物理学賞)

対称性の自発的破れ

ハミルトニアンが持つ対称性を、真空が持たない(破る)。



(対称性を回復するように
南部・ゴールドストン・モード(ゼロ・モード)が発生)



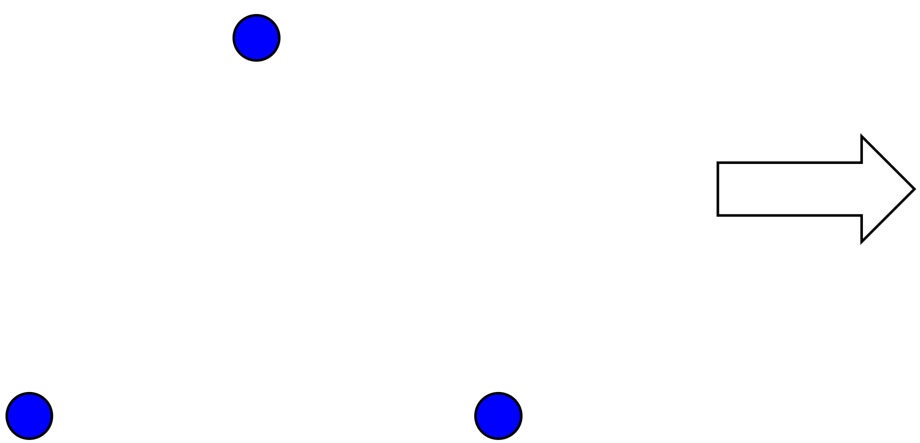
休憩（頭の体操）

頂点が何個かある

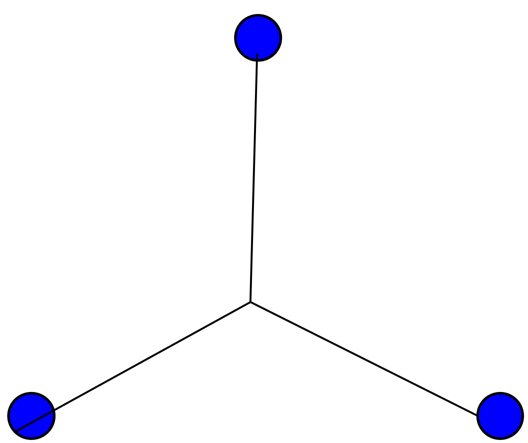
- 頂点を適当な線でつなぐ
- 何本引いてもよい
- 線は交わってもよい
- 一つの点から線を通って全ての点にいけるようにする

線の長さの合計が最短になる線のひき方は?

例）正三角形の場合



対称となるように引く



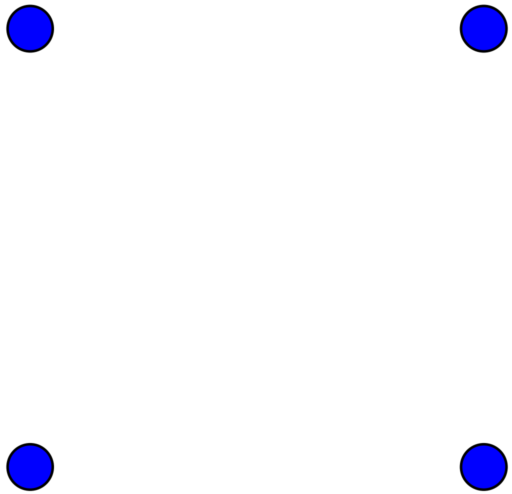
休憩(頭の体操)

頂点が何個かある

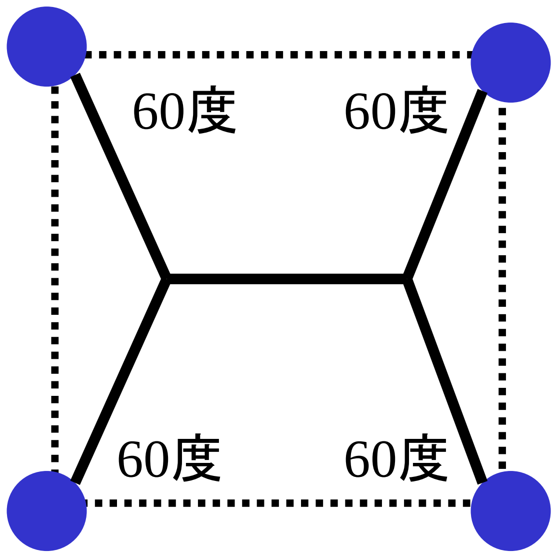
- 頂点を適当な線でつなぐ
- 何本引いてもよい
- 線は交わってもよい
- 一つの点から線を通って全ての点にいけるようにする

線の長さの合計が最短になるひき方は?

(問題)正方形の場合は?



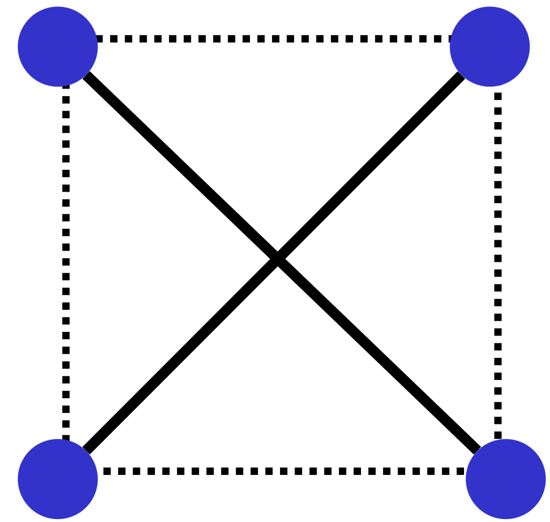
（答え）



長さ

$$4 \times \frac{1}{\sqrt{3}} + \left(1 - 2 \times \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$$
$$= 1 + \sqrt{3}$$
$$= 2.732\cdots$$

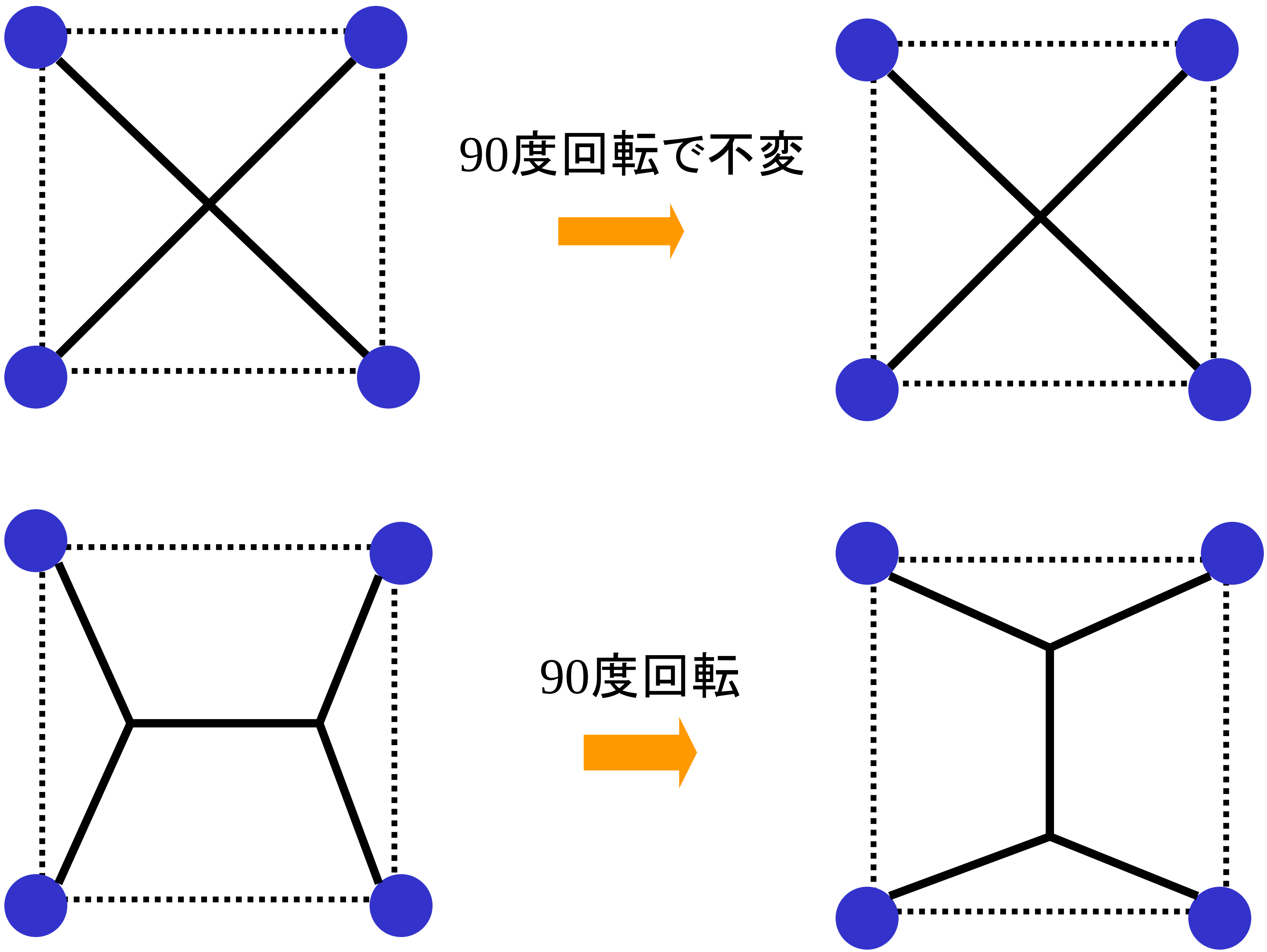
cf.



長さ

$$2 \times \sqrt{2} = 2.828\cdots$$

参考:
小池武志「原子核研究」Vol. 52 No. 2, p. 14



対称性の自発的破れの良い例

スライド：小池武志氏（東北大学）

変形ポテンシャル中の一粒子運動

$$V(\boldsymbol{r}) \sim \int v(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}' \sim -g\rho(\boldsymbol{r}) \qquad \text{if} \quad v(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -g\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

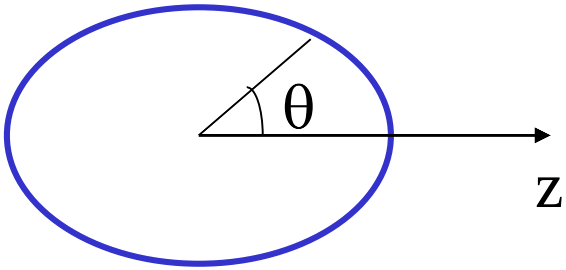
密度分布が変形すると、平均場ポテンシャルも同じように変形

(note) 軸対称な回転楕円体の半径: $R(\theta) = R_0(1+\beta_2 Y_{20}(\theta))$

Woods-Saxon ポテンシャル

$V(r) = -V_0/[1+\exp((r-R_0)/a)]$

の半径 R_0 を $R(\theta)$ に変えると



変形Woods-Saxon ポテンシャル

$$\boxed{\begin{aligned} V(r,\theta) &= -V_0/[1+\exp((r-R_0-R_0\beta_2 Y_{20}(\theta))/a] \\ &\sim V_0(r) - \beta_2 R_0 \frac{dV_0}{dr} Y_{20}(\theta) + \cdots \end{aligned}}$$

変形ポテンシャル中の一粒子運動

変形Woods-Saxon ポテンシャル

$$\boxed{\begin{aligned} V(r,\theta) &= -V_0/[1+\exp((r-R_0-R_0\beta_2 Y_{20}(\theta))/a] \\ &\sim V_0(r) - \beta_2 R_0 \frac{dV_0}{dr} Y_{20}(\theta) + \cdots \end{aligned}}$$

ポテンシャルが回転対称性を持たない

$\longrightarrow$ 角運動量がいい量子数にならない
（保存しない）

■Y_{20}の項の効果を1次の摂動論を用いて考察してみよう

（復習）1次の摂動論

$$H = H_0 + H_1$$

H_0 の固有値、固有状態がわかっているとする:

$$H_0|\phi_n^{(0)}\rangle = E_n^{(0)}|\phi_n^{(0)}\rangle$$

H_1 があることによって、固有値、固有関数は次のように変化する:

$$\begin{aligned} E_n &= E_n^{(0)} + \langle\phi_n^{(0)}|H_1|\phi_n^{(0)}\rangle + \cdots \\ |\phi_n\rangle &= |\phi_n^{(0)}\rangle + \sum_{m\neq n} \frac{\langle\phi_m^{(0)}|H_1|\phi_n^{(0)}\rangle}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}|\phi_m\rangle + \cdots \end{aligned}$$

変形ポテンシャル中の一粒子運動

変形Woods-Saxon ポテンシャル

$$\boxed{V(r,\theta) \sim V_0(r) - \beta_2 R_0 \frac{dV_0}{dr} Y_{20}(\theta) + \cdots}$$

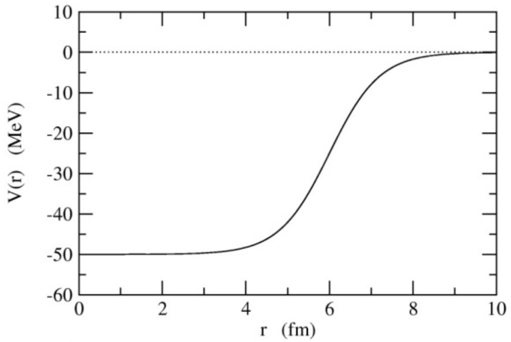
■Y_{20}の項の効果を1次の摂動論を用いて考察してみよう

β=0（球形ポテンシャル）の時の固有関数: $\psi_{nlK}(\boldsymbol{r}) = R_{nl}(r)Y_{lK}(\hat{\boldsymbol{r}})$

固有値: E_{nl} (K には依存しない)

エネルギーの変化分:

$$\begin{aligned} E_{nl} &\rightarrow E_{nl} + \langle\psi_{nlK}|\Delta V|\psi_{nlK}\rangle \\ &= E_{nl} - \beta_2 R_0 \underbrace{\left[\int_0^\infty r^2 dr \frac{dV_0}{dr}(R_{nl}(r))^2\right]}_{\text{正の量}} \cdot \underbrace{\langle Y_{lK}|Y_{20}|Y_{lK}\rangle}_{\propto -(3K^2 - l(l+1))} \end{aligned}$$



変形ポテンシャル中の一粒子運動

変形Woods-Saxon ポテンシャル

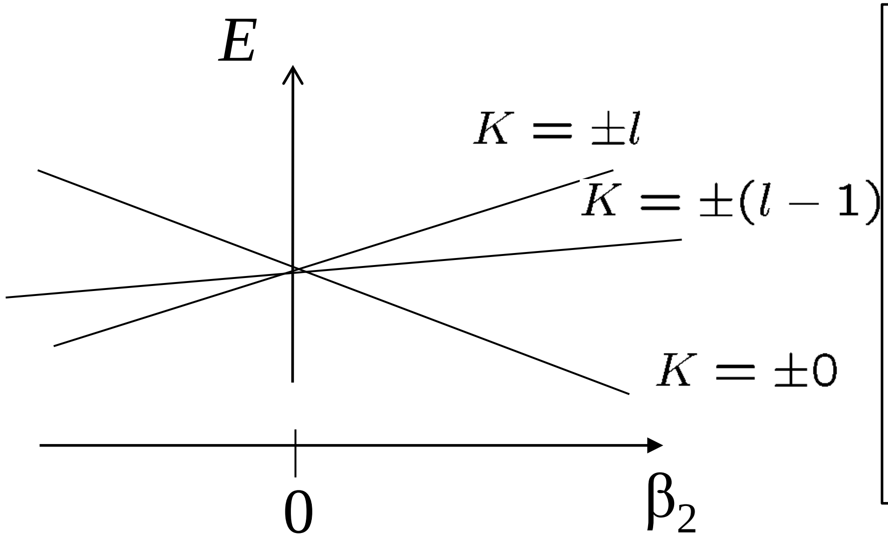
$$\psi_{nlK}(\boldsymbol{r}) = R_{nl}(r)Y_{lK}(\hat{\boldsymbol{r}})$$

$$\boxed{V(r,\theta) \sim V_0(r) - \beta_2 R_0 \frac{dV_0}{dr} Y_{20}(\theta) + \cdots}$$

■Y_{20}の項の効果を1次の摂動論を用いて考察してみよう

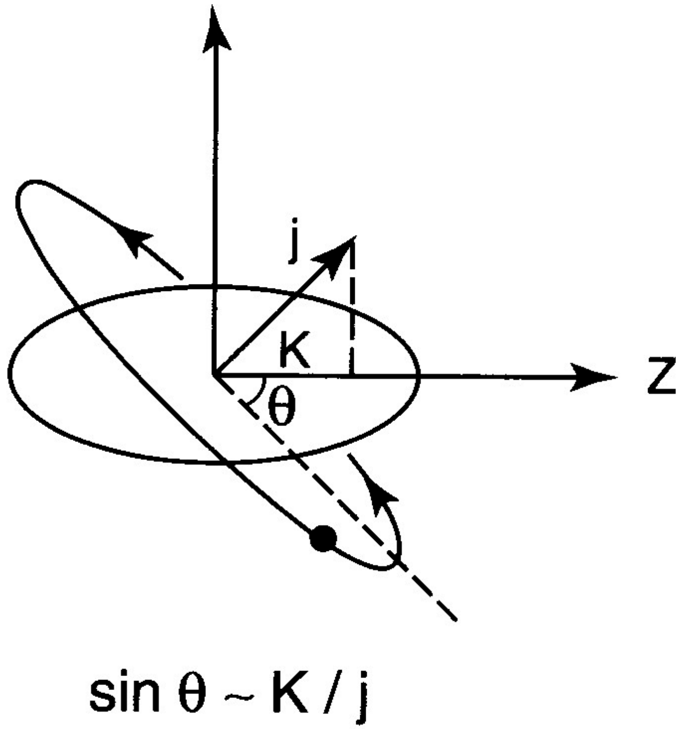
エネルギーの変化分:

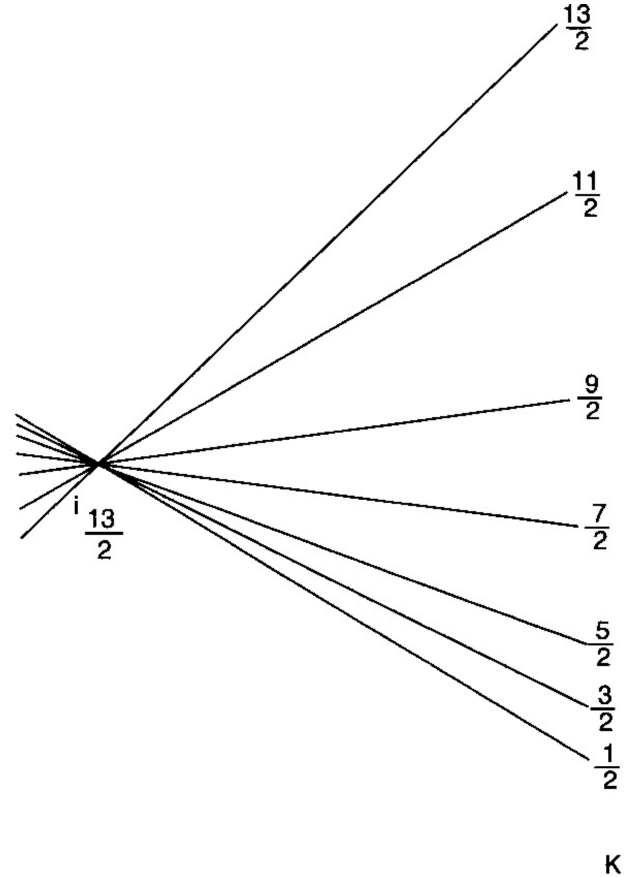
$$E_{nl} \ \rightarrow \ E_{nl} + \alpha_{nl}\beta_2(3K^2 - l(l+1)) \qquad (\alpha_{nl} > 0)$$



- K ごとにエネルギー変化が異なる（縮退が解ける）
- $\beta_2 > 0$ では K が小さいほどエネルギーが低くなる。
- $\beta_2 < 0$ ではその逆
- K と $-K$ は縮退する

幾何学的解釈





- K は角運動量ベクトルの z 軸への射影
- 核子の軌道は角運動量ベクトルに垂直な平面内
- プロレート変形の場合、小さな K ほど長軸に沿って運動。
- 従ってより引力を感じてエネルギーが下がる。
- 大きな K は短軸に沿って運動し、エネルギーを損する。

変形ポテンシャル中の一粒子運動

$$V(r,\theta) \sim V_0(r) - \beta_2 R_0 \frac{dV_0}{dr} Y_{20}(\theta) + \cdots$$

■Y_{20}の項の効果を1次の摂動論を用いて考察してみよう

次に波動関数の変化分: $|\phi_n\rangle \;=\; |\phi_n^{(0)}\rangle + \sum_{m\neq n} \frac{\langle\phi_m^{(0)}|H_1|\phi_n^{(0)}\rangle}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} |\phi_m\rangle + \cdots$

β=0 (球形ポテンシャル)の時の固有関数: $\psi_{nlK}(\boldsymbol{r}) = R_{nl}(r) Y_{lK}(\hat{\boldsymbol{r}})$

$$\psi_{nlK} \to \psi_{nlK} + \sum_{n'l'K'} \frac{\langle\psi_{n'l'K'}|\Delta V|\psi_{nlK}\rangle}{E_{nl} - E_{n'l'}} \psi_{n'l'K'}$$

$\langle Y_{l'K'}|Y_{20}|Y_{lK}\rangle$ でつながる状態が波動関数に混ざる

- l は保存せず、様々な l が波動関数に混ざる
- 軸対称変形 (Y_{20}) の場合、K は変化しない ($K' = K$)、すなわち保存量
- Y_{20} はパリティを変えない。従って、パリティも保存量。

変形ポテンシャル中の一粒子運動

$$\boxed{V(r,\theta) \sim V_0(r) - \beta_2 R_0 \frac{dV_0}{dr} Y_{20}(\theta) + \cdots}$$

一般的には、

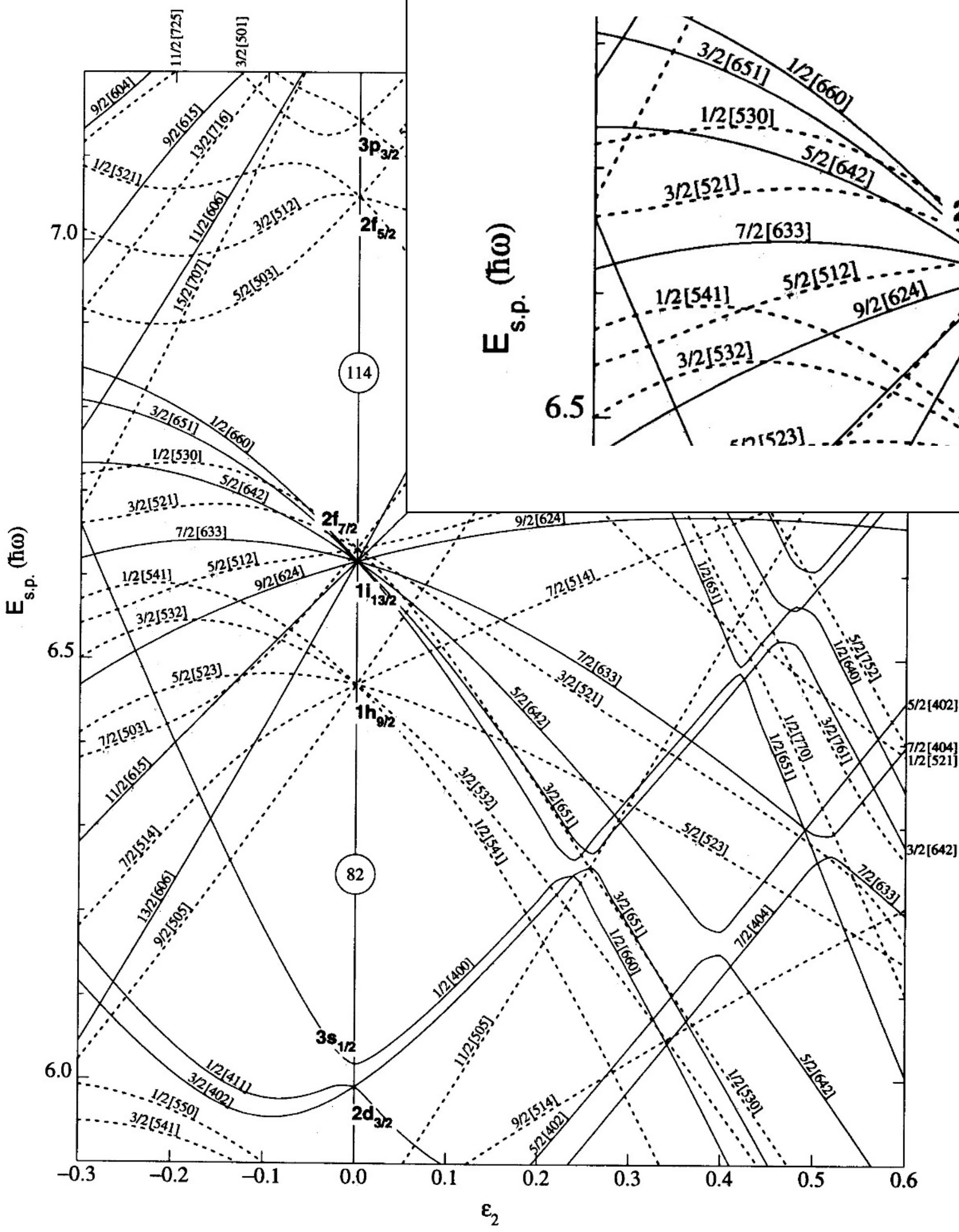
$$\Psi_K(\boldsymbol{r}) = \sum_l \frac{u_{lK}(r)}{r} Y_{lK}(\hat{\boldsymbol{r}})$$

＊u_{lK} を球形ポテンシャルの固有関数で展開することも可能。その場合

$$u_{lK}(r) = \sum_n \alpha_{nlK} u_{nl}(r)$$

例）

$$\begin{aligned}
|K^\pi\rangle = \left|0^+\right\rangle &= A_s |Y_{00}\rangle + A_d |Y_{20}\rangle + A_g |Y_{40}\rangle + \cdots \\
\left|1^+\right\rangle &= B_d |Y_{21}\rangle + B_g |Y_{41}\rangle + \cdots \\
\left|0^-\right\rangle &= C_p |Y_{10}\rangle + C_f |Y_{30}\rangle + C_h |Y_{50}\rangle + \cdots
\end{aligned}$$



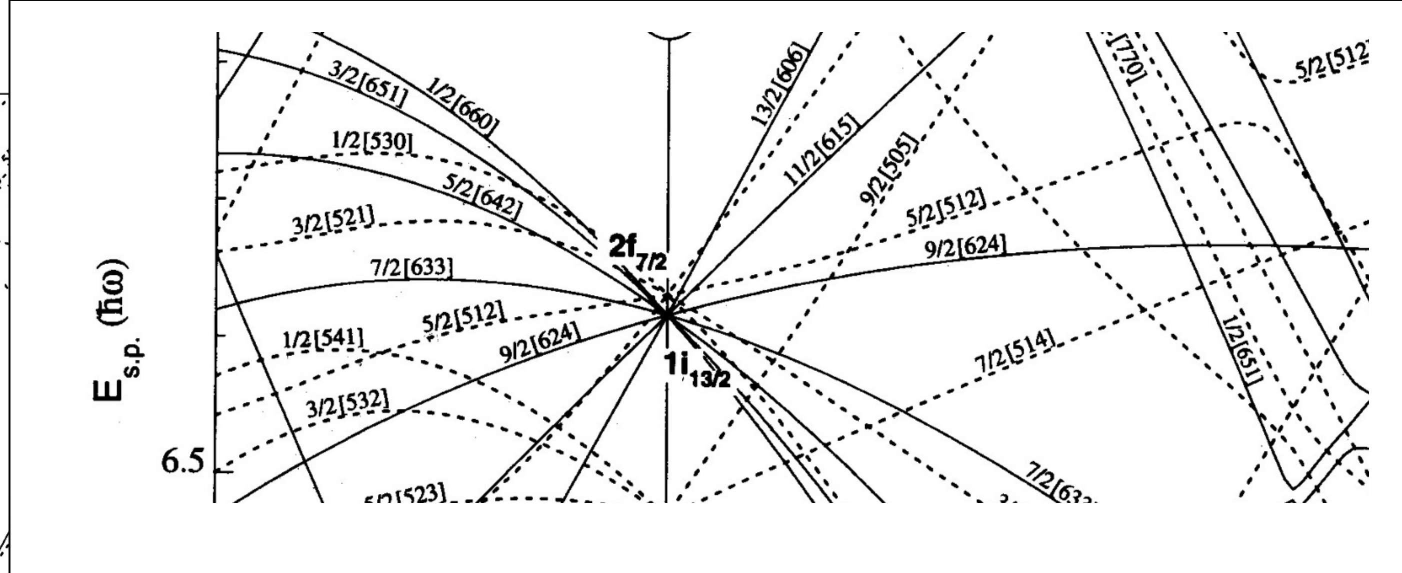


Figure 13. Nilsson diagram for protons, Z ≥ 82 ($\varepsilon_4 = \varepsilon_2^2/6$).

ニルソン図

(参考)準位交差の問題:同じ量子数を持つ2つの状態は交差しない

「ノイマン‐ウィグナーの定理」

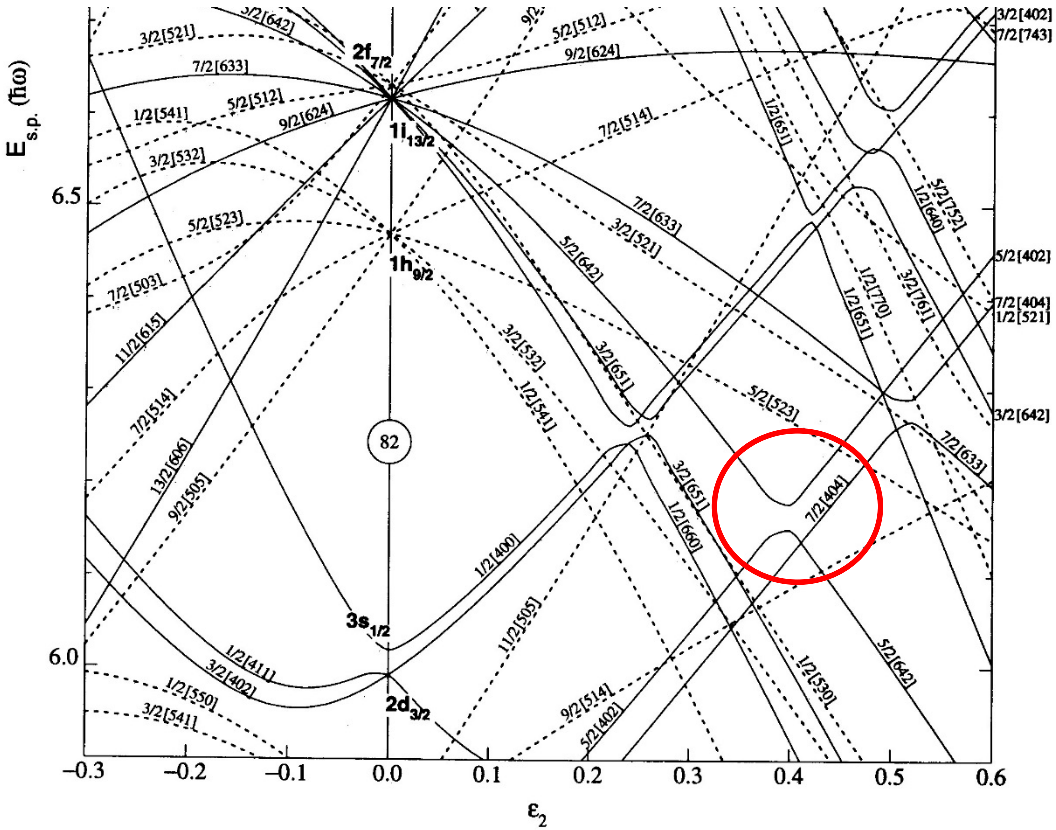
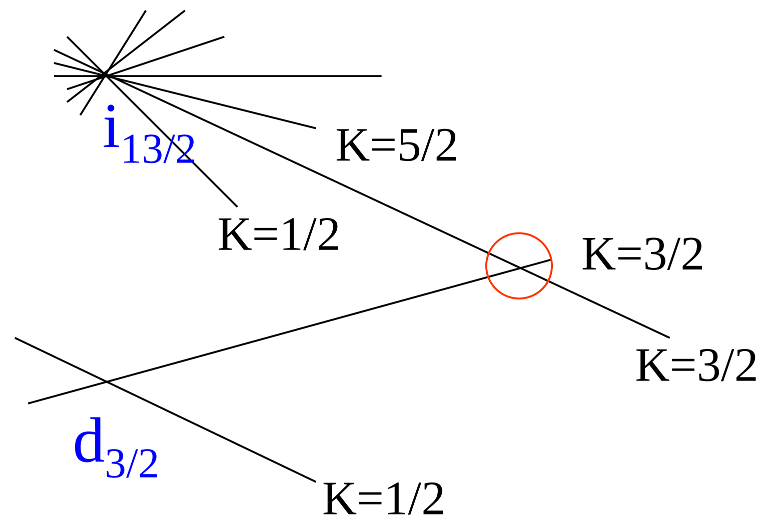


Figure 13. Nilsson diagram for protons, Z ≥ 82 ($\varepsilon_4 = \varepsilon_2^2/6$).

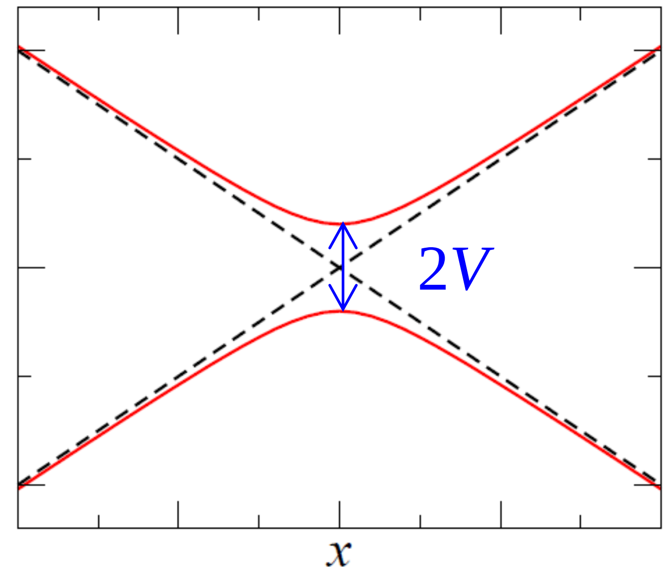


(参考)準位交差の問題:同じ量子数を持つ2つの状態は交差しない

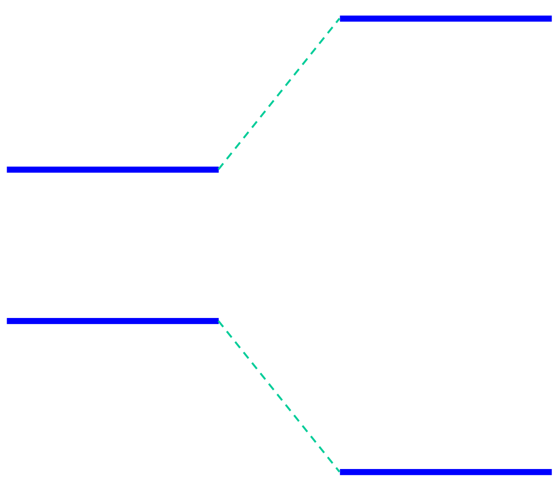
「ノイマン‐ウィグナーの定理」

$$\begin{pmatrix} -\epsilon x & V \\ V & \epsilon x \end{pmatrix}$$

対角化 $\rightarrow \lambda_{\pm}(x) = \pm\sqrt{\epsilon^2 x^2 + V^2}$

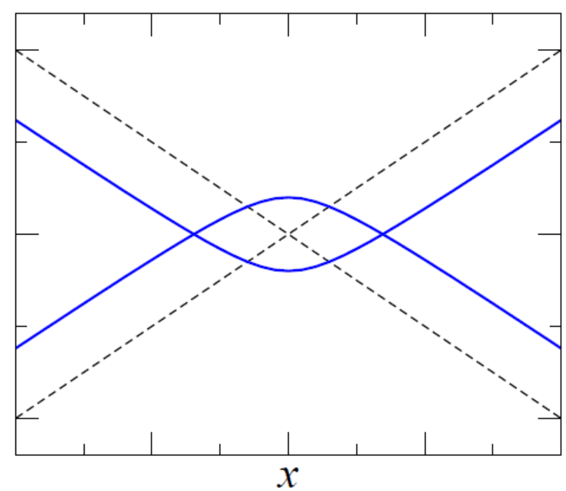


「疑似交差」、「準位反発」



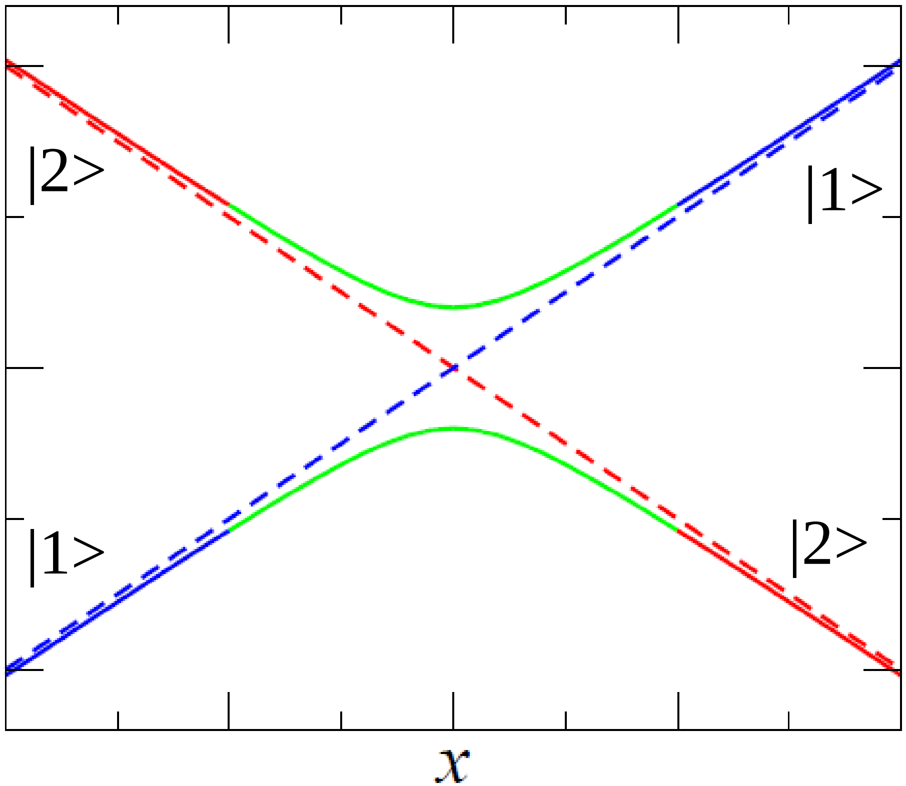
$V = 0$　　$V \neq 0$

V の符号によらず必ず反発



このようになることはない

x がゆっくりと変化すると断熱的に状態が |1> から |2> へ変化
（断熱遷移）



Landau-Zener の式:

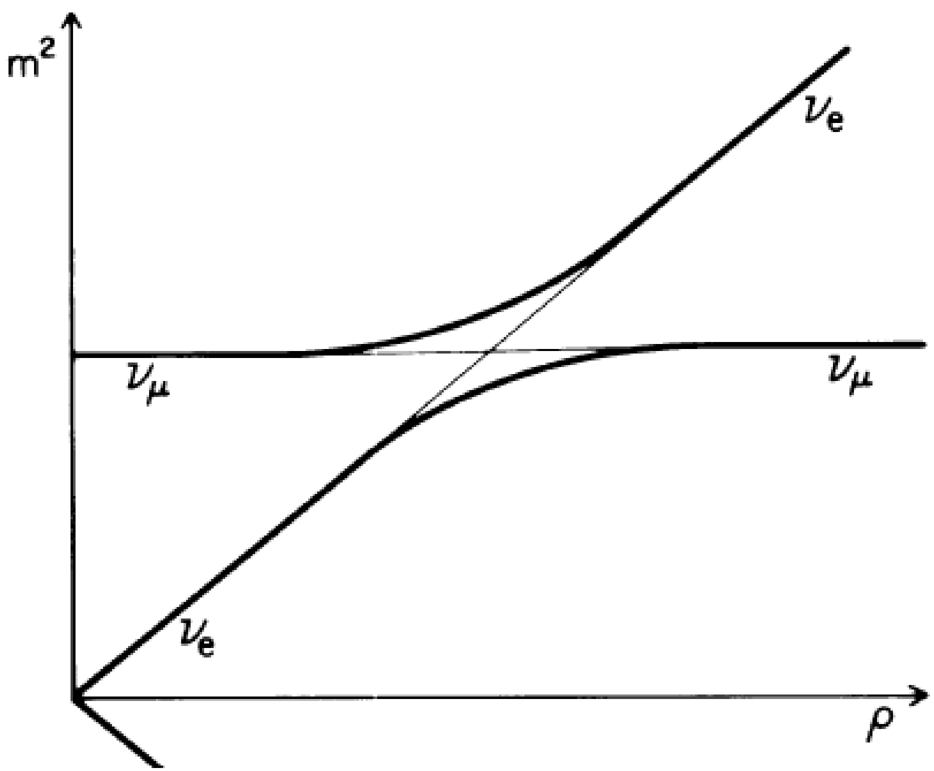
$$P(|1\rangle \to |1\rangle) = \exp\left(-\frac{2\pi V^2}{\hbar|\dot{x}| \cdot 2\epsilon}\right)$$

cf. ニュートリノ振動と準位交差問題

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\Psi_e\\ \Psi_\mu\end{pmatrix}=\left[\begin{pmatrix}E+A(r) & 0\\ 0 & E\end{pmatrix}+a\begin{pmatrix}-\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ \sin 2\theta & \cos 2\theta\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\Psi_e\\ \Psi_\mu\end{pmatrix}$$

$$E=\frac{1}{2}(m_1^2+m_2^2),\qquad a=\frac{1}{2}(m_2^2-m_1^2)$$

電子ニュートリノと
物質中の電子との相互作用

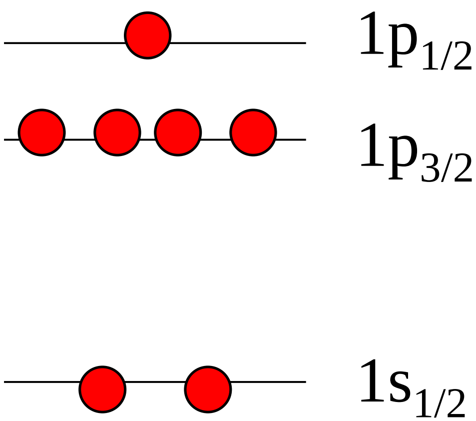


物質中で共鳴的に
ニュートリノ振動が起こる
= MSW 効果

Ref.
H.A. Bethe, PRL56(‘86)1305,
W.C. Haxton, PRL57(‘86)1271

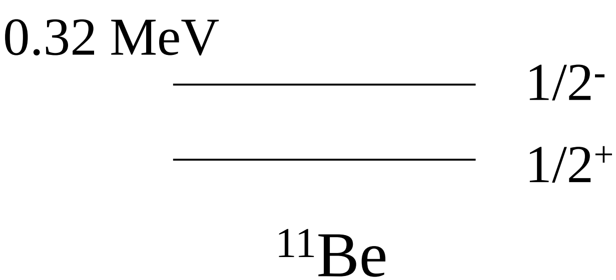
^{11}Be の問題に戻ると。。。。

球形ポテンシャルの準位

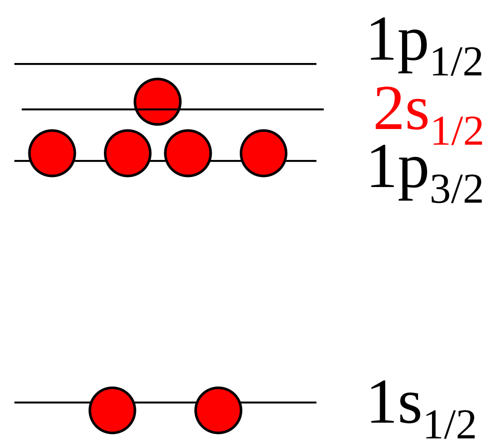


^{11}Be の基底状態は $I^\pi = 1/2^-$

実際の ^{11}Be の準位

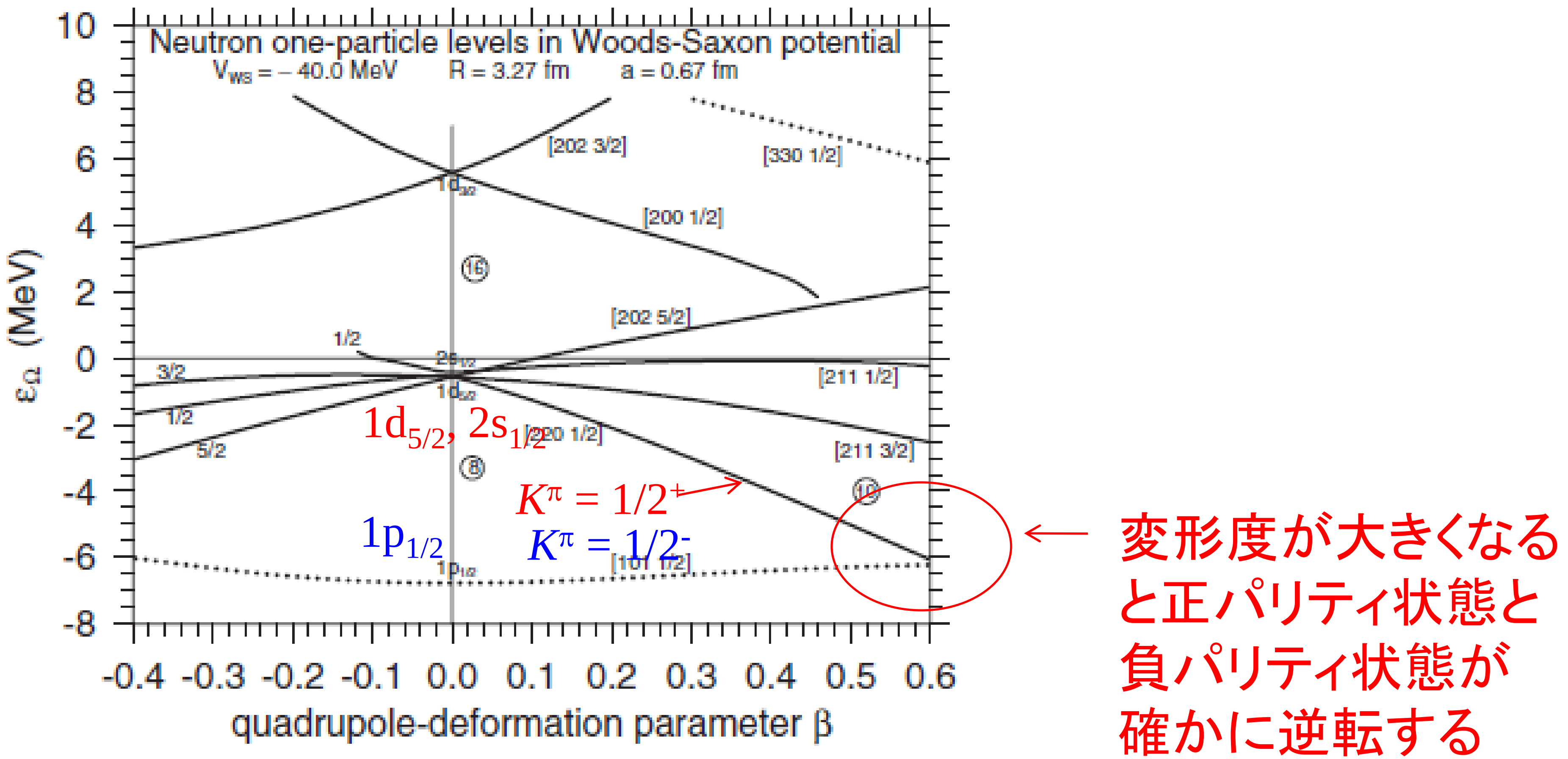


?



"parity inversion"

変形の効果で^{11}Be の準位構造は説明できるか?



I. Hamamoto, J. Phys. G37('10)055102

（参考）^{10}Be の回転励起（有限の励起エネルギー）を取り入れた結合チャンネル計算:

H. Esbensen, B.A. Brown, H. Sagawa, PRC51('95)1274

F.M. Nunes, I.J. Thompson, R.C. Johnson, NPA596('96)171

s-wave dominance 現象

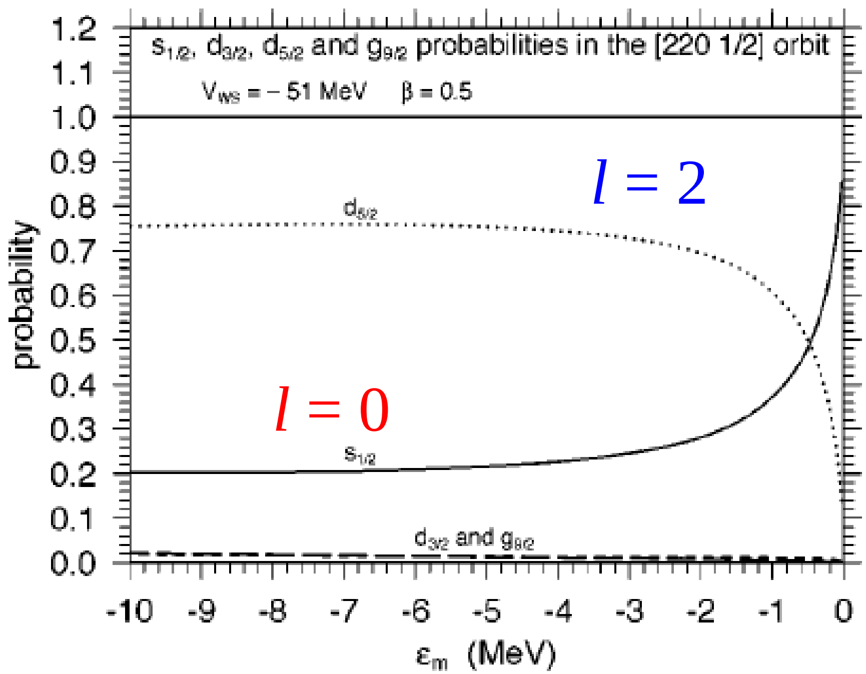
変形核では様々な l の成分が混ざる:

$$\Psi_{K^\pi=0^+}(\boldsymbol{r}) = R_0(r)Y_{00}(\hat{\boldsymbol{r}}) + R_2(r)Y_{20}(\hat{\boldsymbol{r}}) + R_4(r)Y_{40}(\hat{\boldsymbol{r}}) + \cdots$$

束縛が弱くなると、どんなに小さな変形においても、l = 0 の項がドミナントになる。

（束縛エネルギーがゼロの極限では l =0 の成分が 100%）

T. Misu, W. Nazarewicz, and S. Aberg, NPA614(‘97)44



I. Hamamoto, PRC69(‘04)041306(R)

s-wave dominance 現象

（摂動は成り立たないが）あえて摂動で考えてみると:

$$\psi_{l=2} \to \psi_{l=2} + \frac{\langle \psi_{l=0} | \Delta V | \psi_{l=2} \rangle}{E_{l=2} - E_{l=0}} \psi_{l=0} + (l=4)$$

$$\Delta V(r,\theta) = -\beta_2 R_0 \frac{dV_0}{dr} Y_{20}(\theta)$$

(note)

$$\int_0^\infty r^{n+2} dr\, R_l(r) R_{l'}(r) \propto \begin{cases} |\epsilon|^{(l+l'-n-1)/2} & (n > l+l'-1) \\ -\frac{1}{2}\ln|\epsilon| & (n = l+l'-1) \\ \text{const.} & (n < l+l'-1) \end{cases}$$

T. Misu, W. Nazarewicz, and S. Aberg, NPA614('97)44

for l = 2, l' = 0: n = 1 以上で発散

l = 2, l' = 4: n = 5 以上で発散

s-wave dominance 現象

（摂動は成り立たないが）あえて摂動で考えてみると:

$$\psi_{l=2} \to \psi_{l=2} + \frac{\langle \psi_{l=0} | \Delta V | \psi_{l=2} \rangle}{E_{l=2} - E_{l=0}} \psi_{l=0} + (l=4)$$

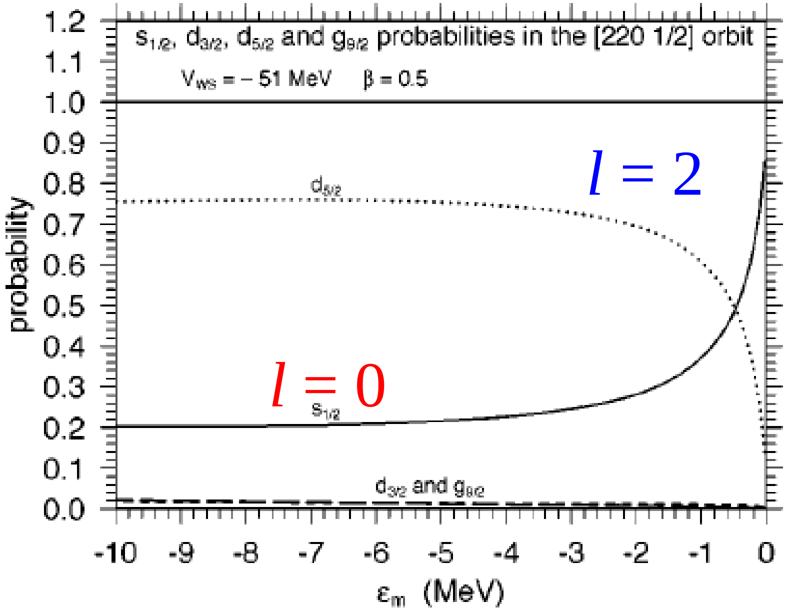
$$\Delta V(r,\theta) = -\beta_2 R_0 \frac{dV_0}{dr} Y_{20}(\theta)$$

(note) $\int_0^\infty r^{n+2} dr\, R_l(r) R_{l'}(r)$:for l = 2, l' = 0: n = 1 以上で発散

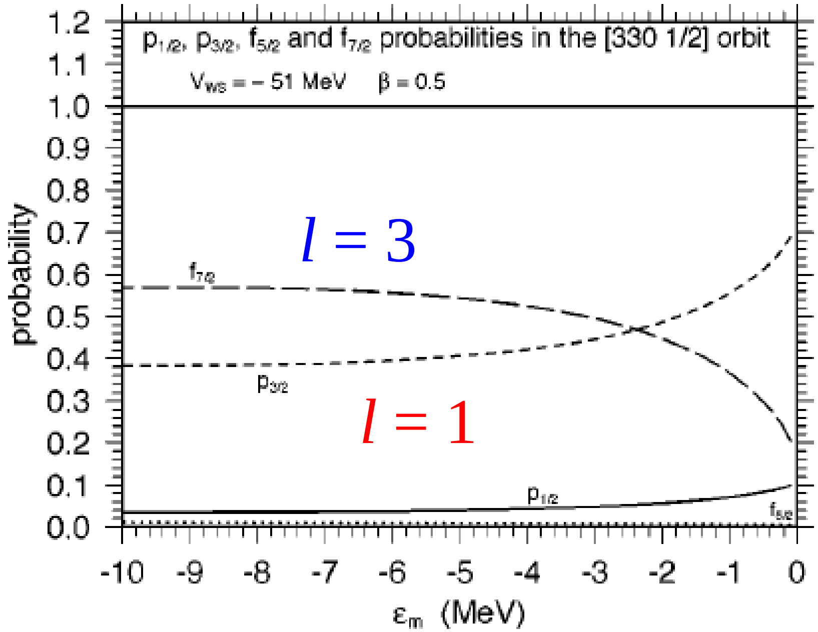
l = 2, l' = 4: n = 5 以上で発散

$$\boxed{\begin{aligned} \psi &= \frac{\psi_{l=2} + c_0 \psi_{l=0} + c_4 \psi_{l=4}}{\sqrt{1 + c_0^2 + c_4^2}} \\ &\to \psi_{l=0} \qquad (c_0 \to \infty) \end{aligned}}$$

s-wave dominance 現象

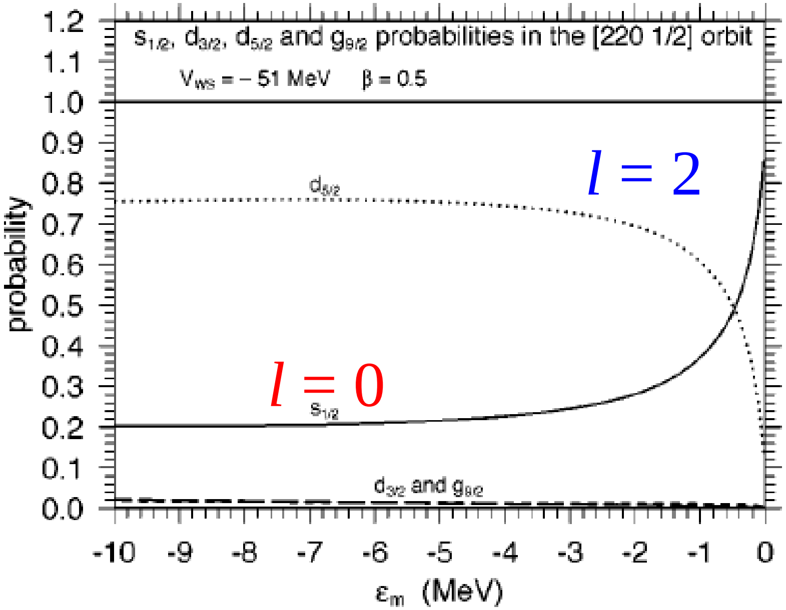


I. Hamamoto, PRC69(‘04)041306(R)

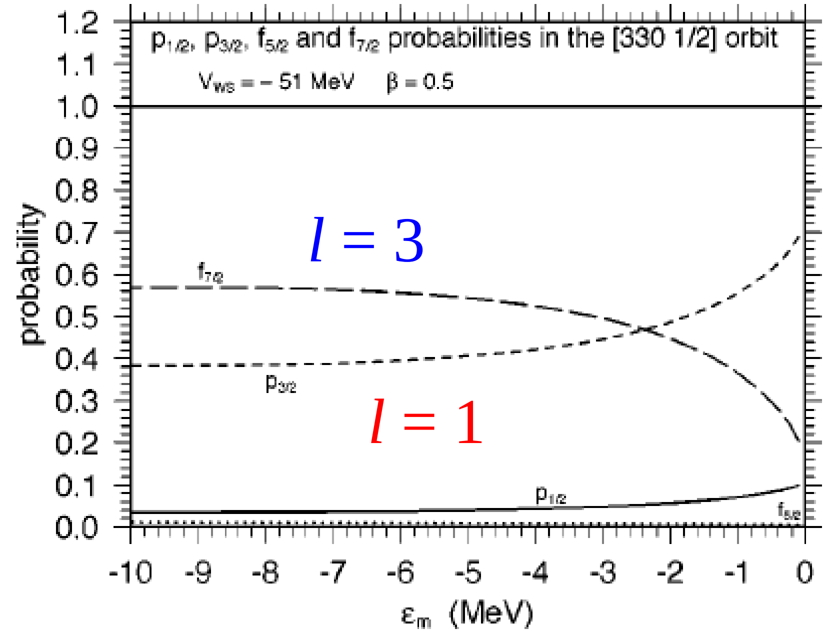


$l = 1$ の成分も同様に弱束縛
で増大（但し 100% にはならない）

s-wave dominance 現象



I. Hamamoto, PRC69(‘04)041306(R)

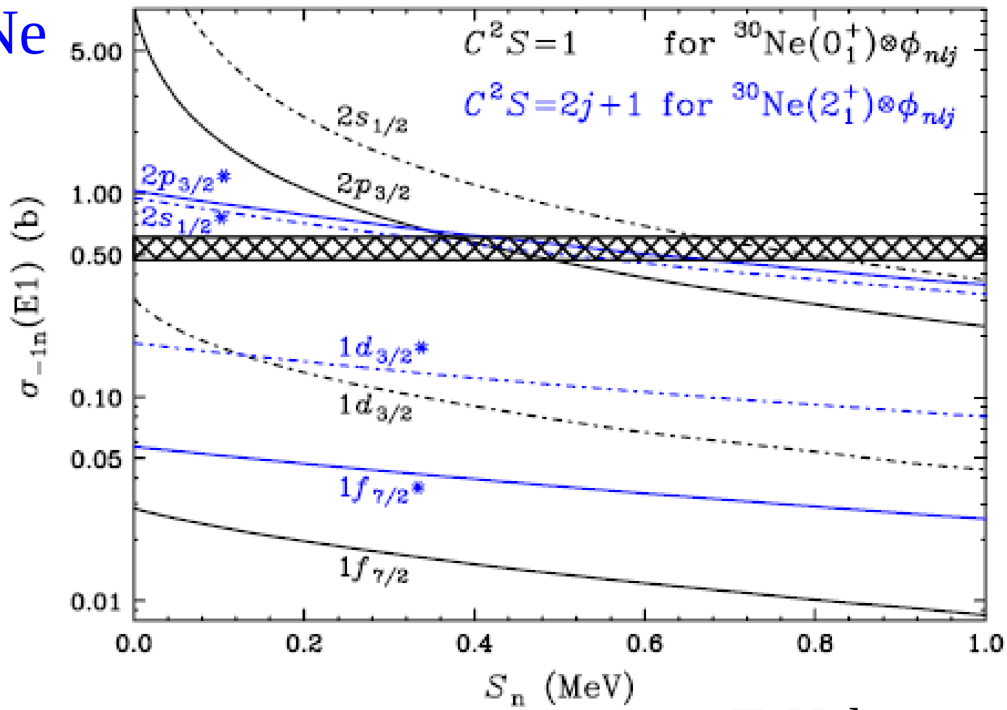


$l = 1$ の成分も同様に弱束縛
で増大（但し 100% にはならない）

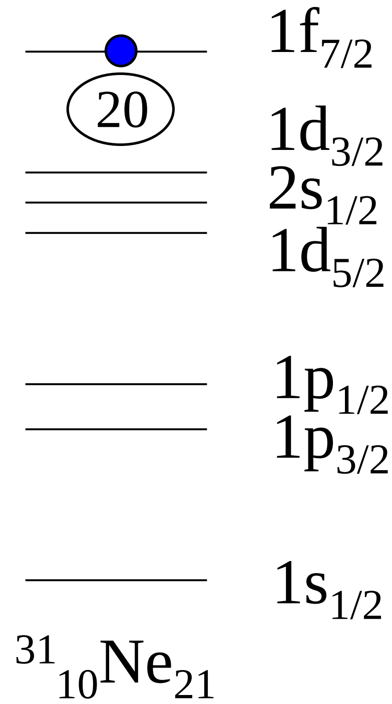
⇒ 変形したハロー核の可能性: ^{31}Ne

変形ハロー核

^{31}Ne



T. Nakamura et al., PRL103('09)262501



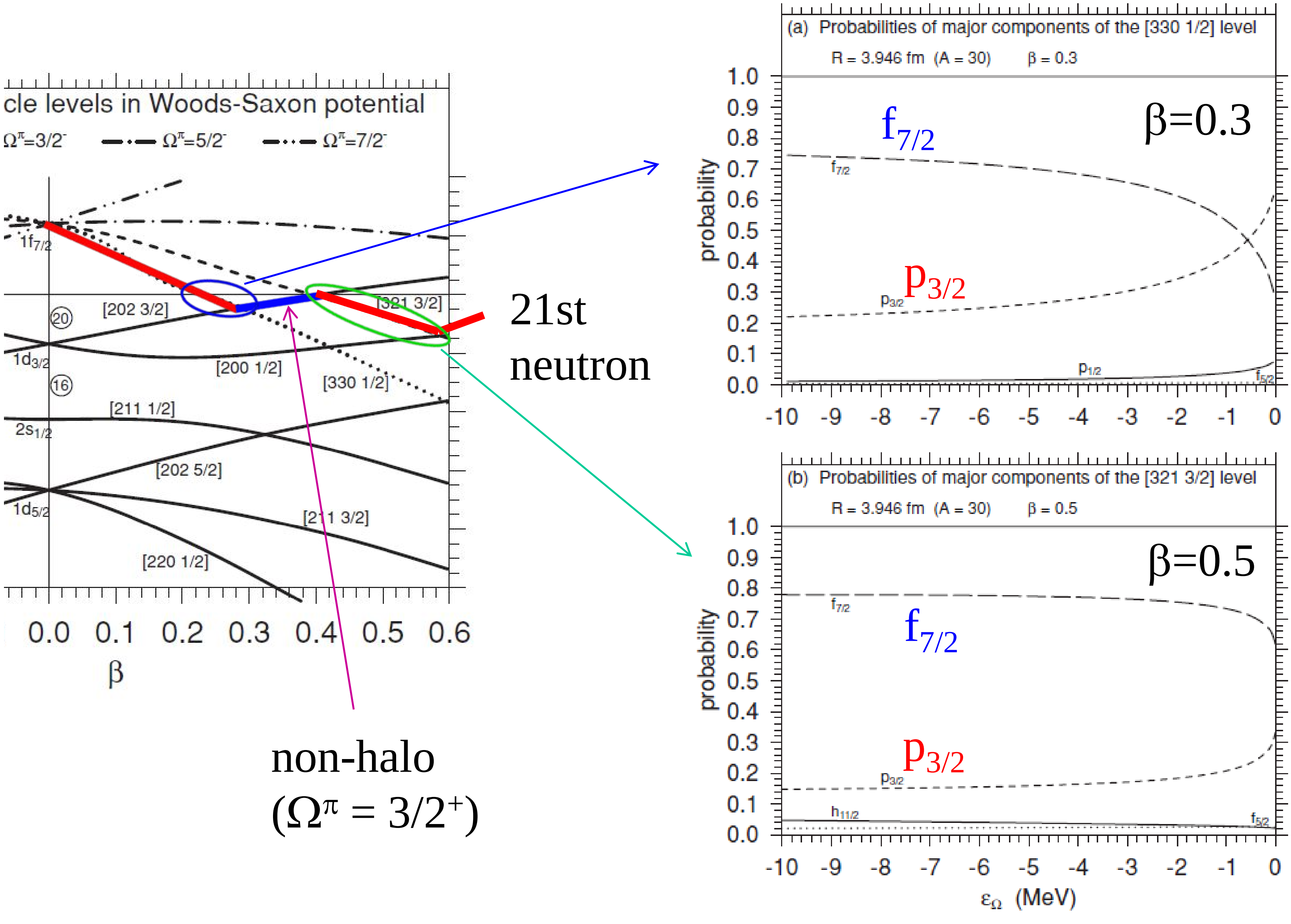
大きなクーロン分解反応の断面積

→ ハロー構造を示唆

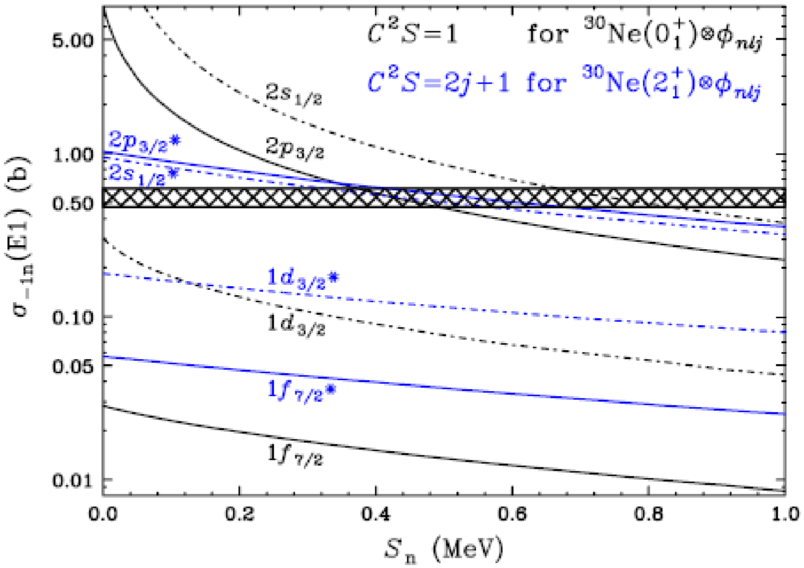
^{31}Ne がハロー構造を持つためには球形だとダメ (f 波なので)

→ 変形?

Nilsson 模型による解析 [I. Hamamoto, PRC81('10)021304(R)]

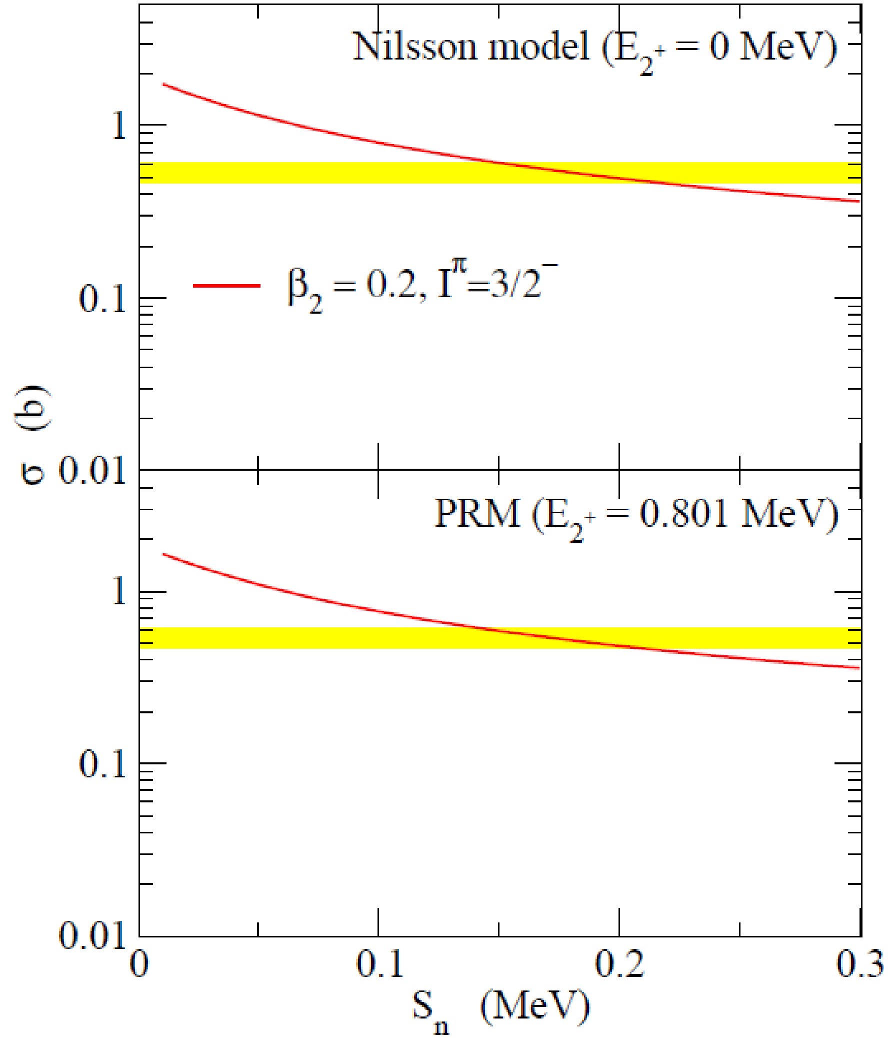


^{31}Ne



T. Nakamura et al.,
PRL103('09)262501

大きなクーロン分解反応の
断面積



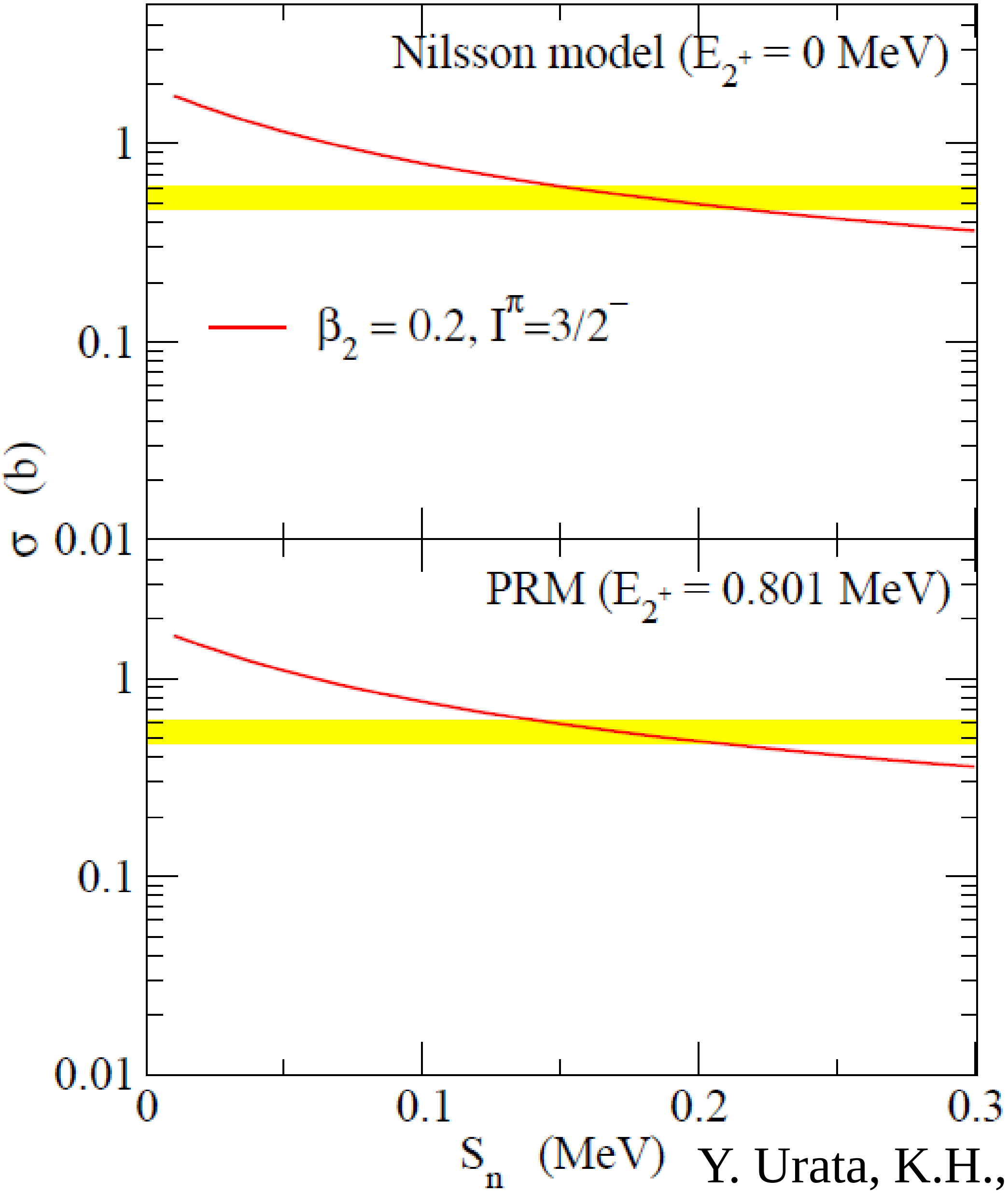
E_{2+} (^{30}Ne) = 0.801(7) MeV

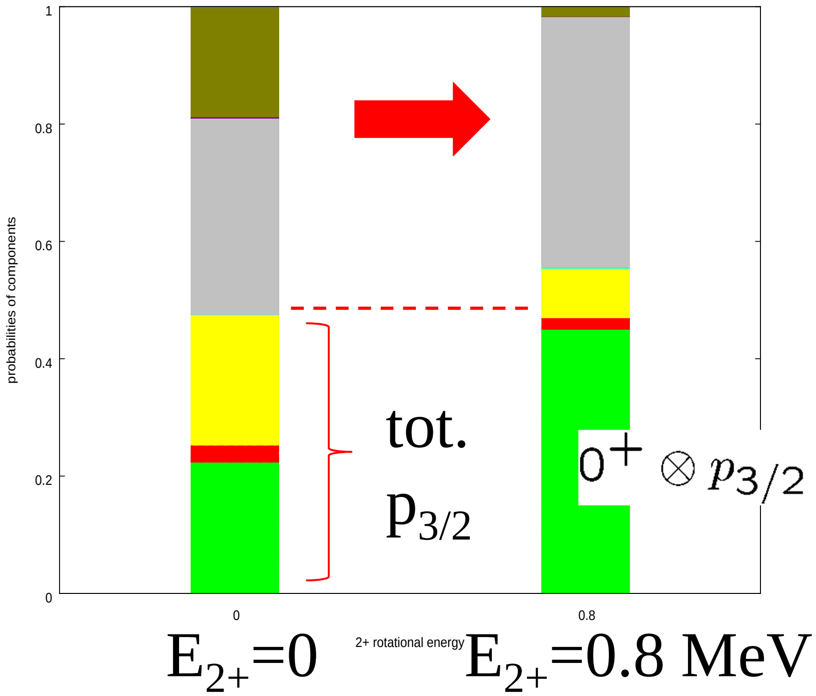
P. Doornenbal et al.,
PRL103('09)032501

S_n (^{31}Ne) = 0.29 +/- 1.64 MeV

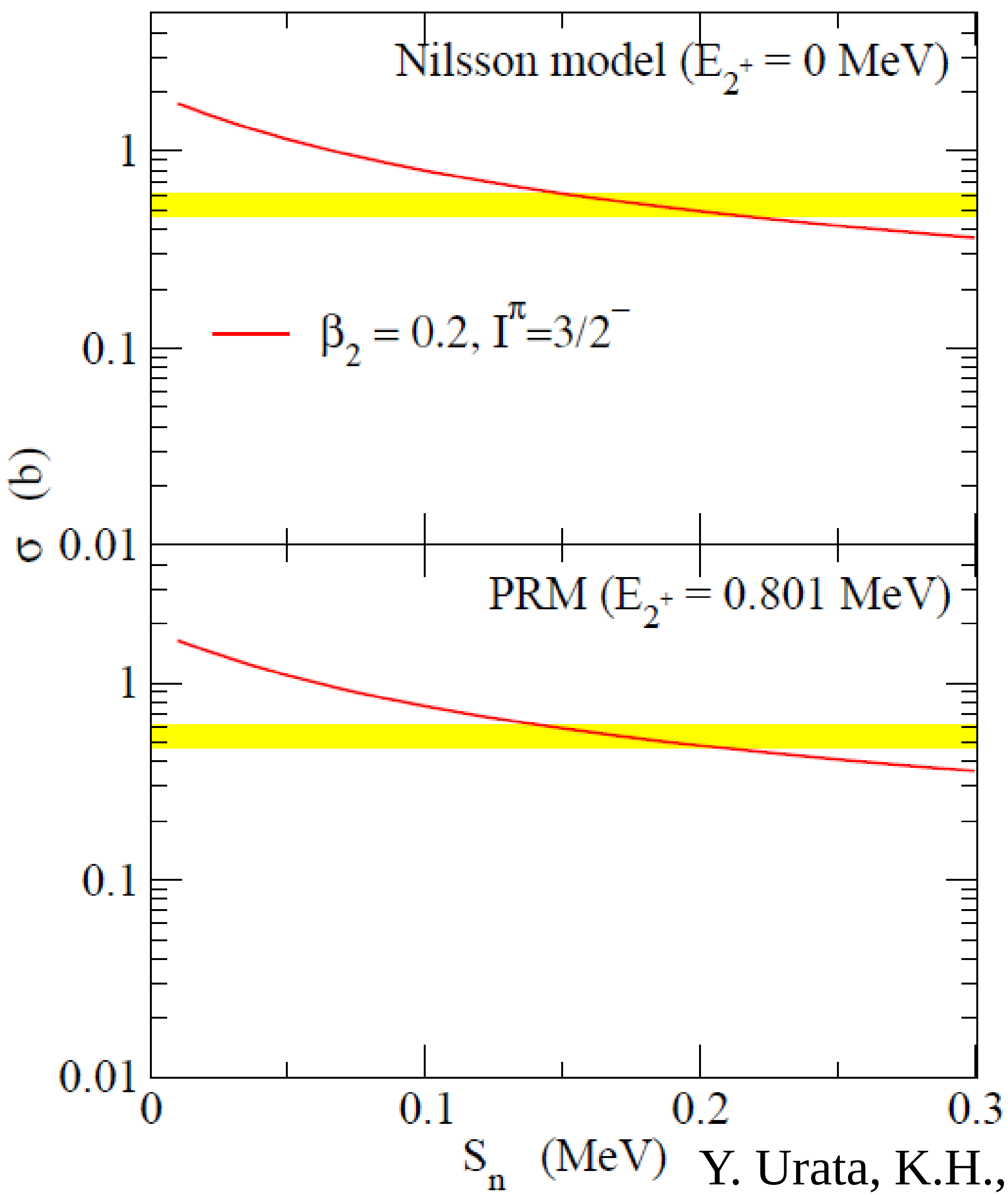
Y. Urata, K.H., and H. Sagawa,
PRC83('11)041303(R)

$\beta \sim 0.2$: small non-adiabatic effects





Y. Urata, K.H., and H. Sagawa, PRC83('11)041303(R)



^{31}Ne → ^{30}Ne (0^+) + n

Coul.BU

$\sigma_{bu}(0^+) = 0.448(0.108)$ b

T. Nakamura et al.,
PRL112 ('14) 142501

RPM for S_n = 0.2 MeV

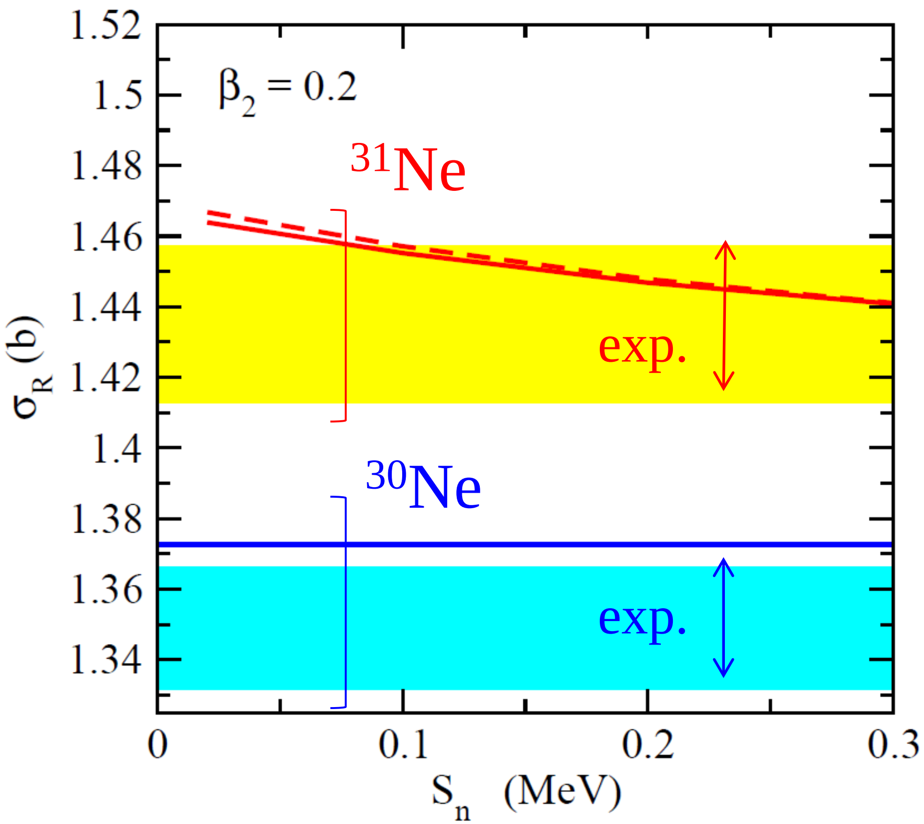
$\sigma_{bu}(0^+) = 0.443$ b

good agreement with the data

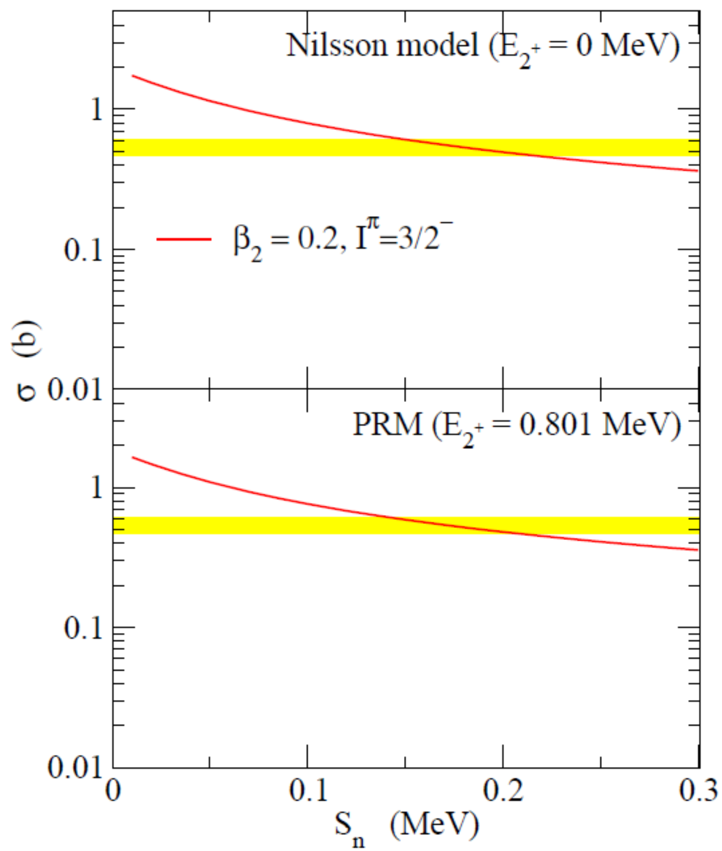
cf. Nilsson: $\sigma_{bu}(0^+) = 0.216$ b

Y. Urata, K.H., and H. Sagawa,
PRC83('11)041303(R)

^{31}Ne の反応断面積



$I^\pi = 3/2^-$ at $\beta \sim 0.2$:
consistent both with σ_{bu} and σ_R



Y. Urata, K.H., and H. Sagawa,
PRC86 ('12) 044613

変形ハロー核の他の例: ^{37}Mg

PRL **112,** 242501 (2014) PHYSICAL REVIEW LETTERS week ending 20 JUNE 2014

Observation of a *p*-Wave One-Neutron Halo Configuration in ^{37}Mg

N. Kobayashi,[1,*] T. Nakamura,[1] Y. Kondo,[1] J. A. Tostevin,[2,1] Y. Utsuno,[3] N. Aoi,[4,†] H. Baba,[4] R. Barthelemy,[5] M. A. Famiano,[5] N. Fukuda,[4] N. Inabe,[4] M. Ishihara,[4] R. Kanungo,[6] S. Kim,[7] T. Kubo,[4] G. S. Lee,[1] H. S. Lee,[7] M. Matsushita,[4,‡] T. Motobayashi,[4] T. Ohnishi,[4] N. A. Orr,[8] H. Otsu,[4] T. Otsuka,[9] T. Sako,[1] H. Sakurai,[4] Y. Satou,[7] T. Sumikama,[10,§] H. Takeda,[4] S. Takeuchi,[4] R. Tanaka,[1] Y. Togano,[4,¶] and K. Yoneda[4]

[1]*Department of Physics, Tokyo Institute of Technology, 2-12-1 O-Okayama, Meguro, Tokyo 152-8551, Japan*
[2]*Department of Physics, Faculty of Engineering and Physical Sciences, University of Surrey, Guildford, Surrey GU2 7XH, United Kingdom*
[3]*Japan Atomic Energy Agency, Tokai, Ibaraki 319-1195, Japan*
[4]*RIKEN Nishina Center, Hirosawa 2-1, Wako, Saitama 351-0198, Japan*
[5]*Department of Physics, Western Michigan University, Kalamazoo, Michigan 49008, USA*
[6]*Astronomy and Physics Department, Saint Mary's University, Halifax, Nova Scotia B3 H 3C3, Canada*
[7]*Department of Physics and Astronomy, Seoul National University, Seoul 151-742, Korea*
[8]*LPC-Caen, ENSICAEN, IN2P3-CNRS, Université de Caen, 14050 Caen Cedex, France*
[9]*CNS, University of Tokyo, RIKEN Campus, Wako, Saitama 351-0198, Japan*
[10]*Department of Physics, Tokyo University of Science, Chiba 278-8510, Japan*

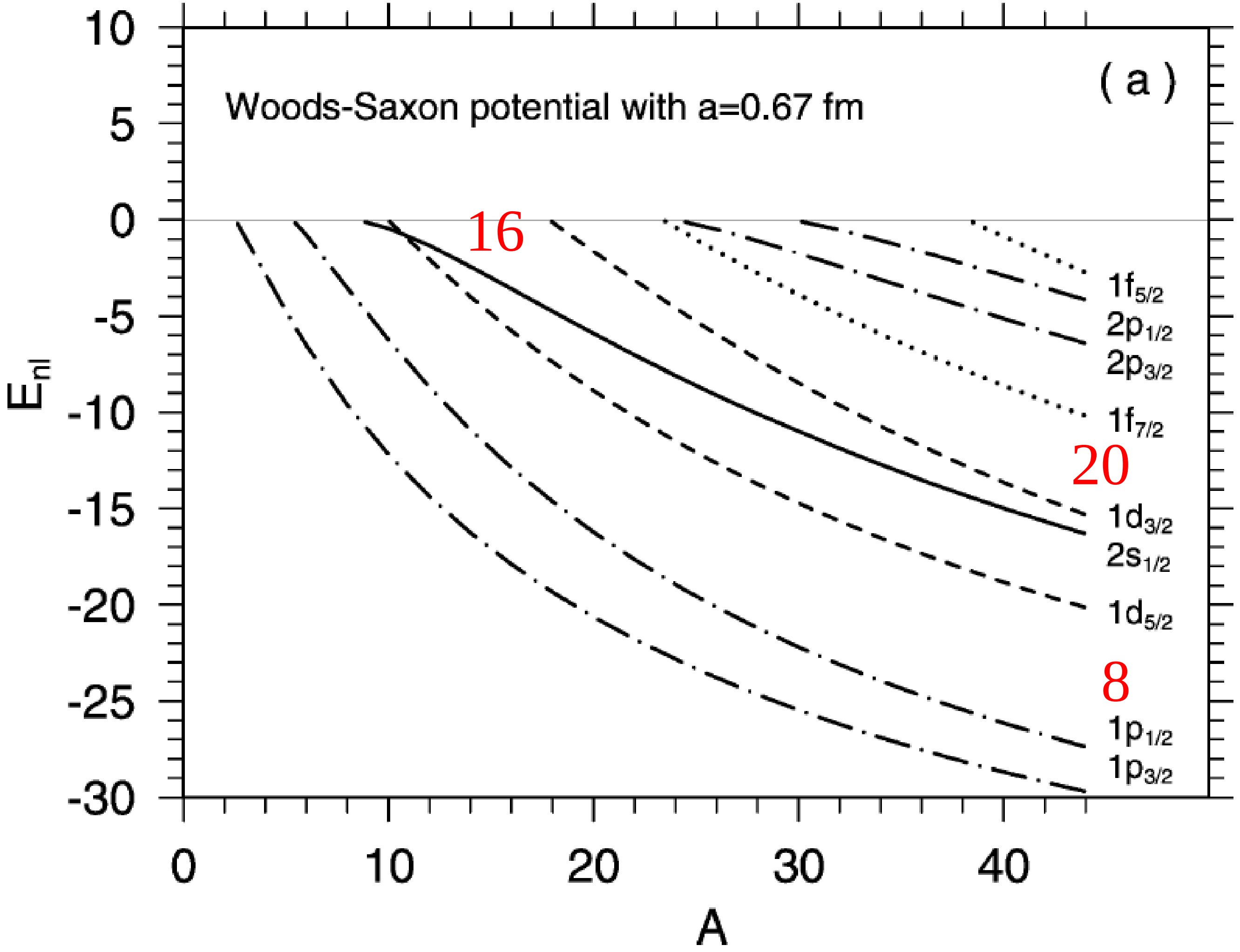
(Received 13 March 2014; published 18 June 2014)

σ_{CBU} = 490 (50) mb
S_n = 0.16 +/- 0.68 MeV ⟶ ハロー?

cf. σ_{CBU} (^{31}Ne) = 529 (63) mb
S_n = 0.29 +/- 1.64 MeV

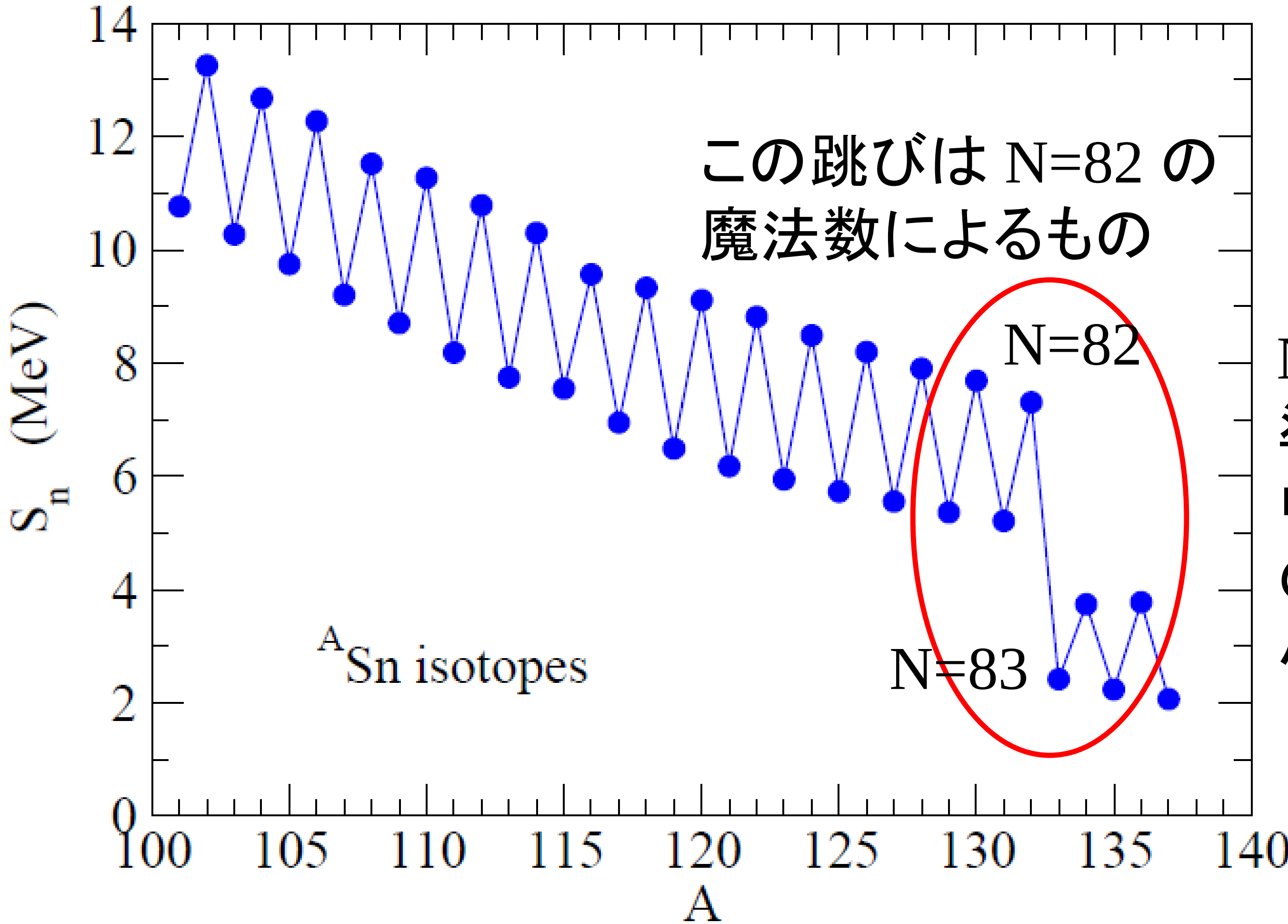
最近の話題:魔法数は変化する?

^{30}Ne : N = 20 なのに変形?



I. Hamamoto, S.V. Lukyanov, and X.Z. Zhang, NPA683 (‘01) 255

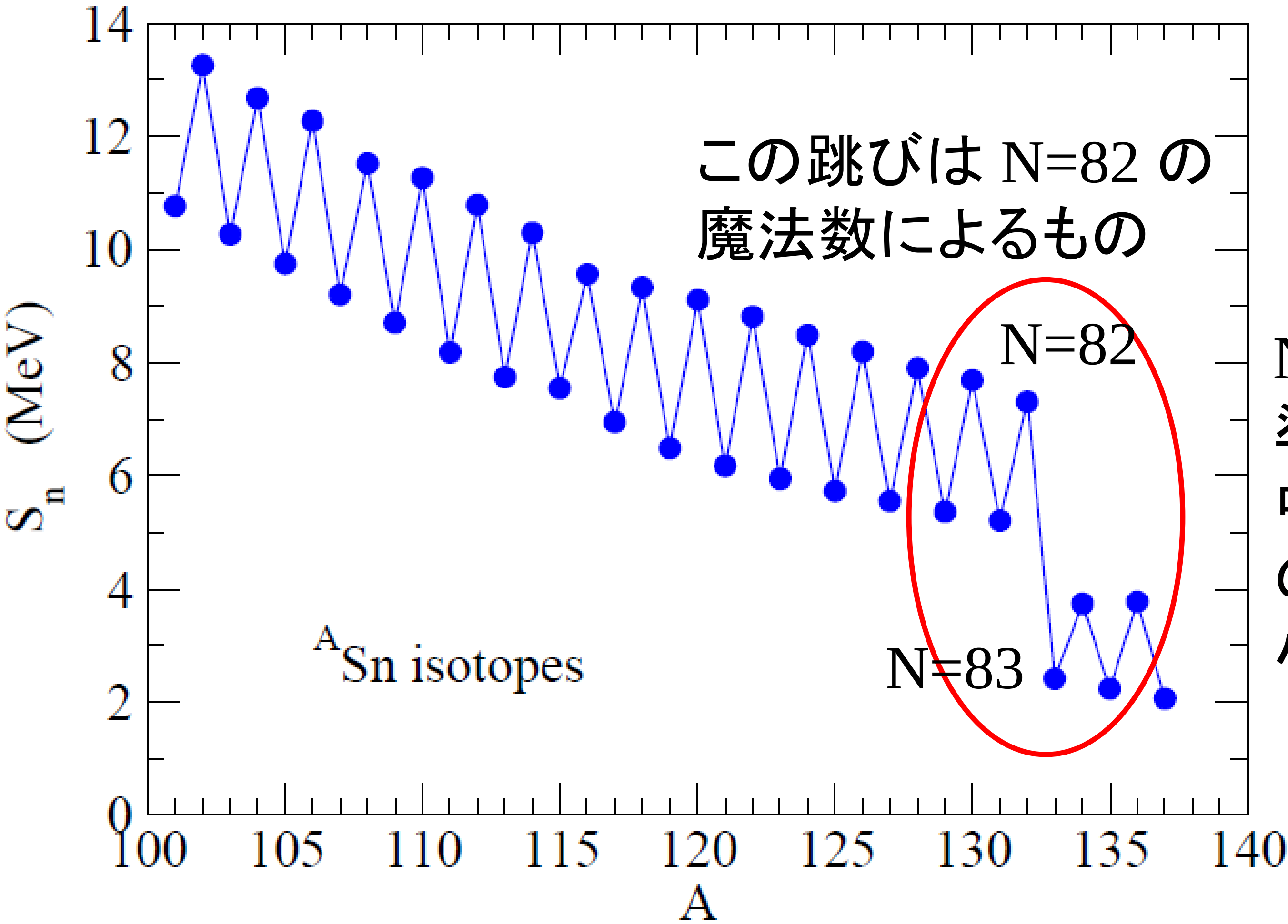
Sn アイソトープの Sn（1中性子分離エネルギー）



N=83から上の
準位がつまるため
中性子をとりのぞく
のにエネルギーが
小さくてすむ

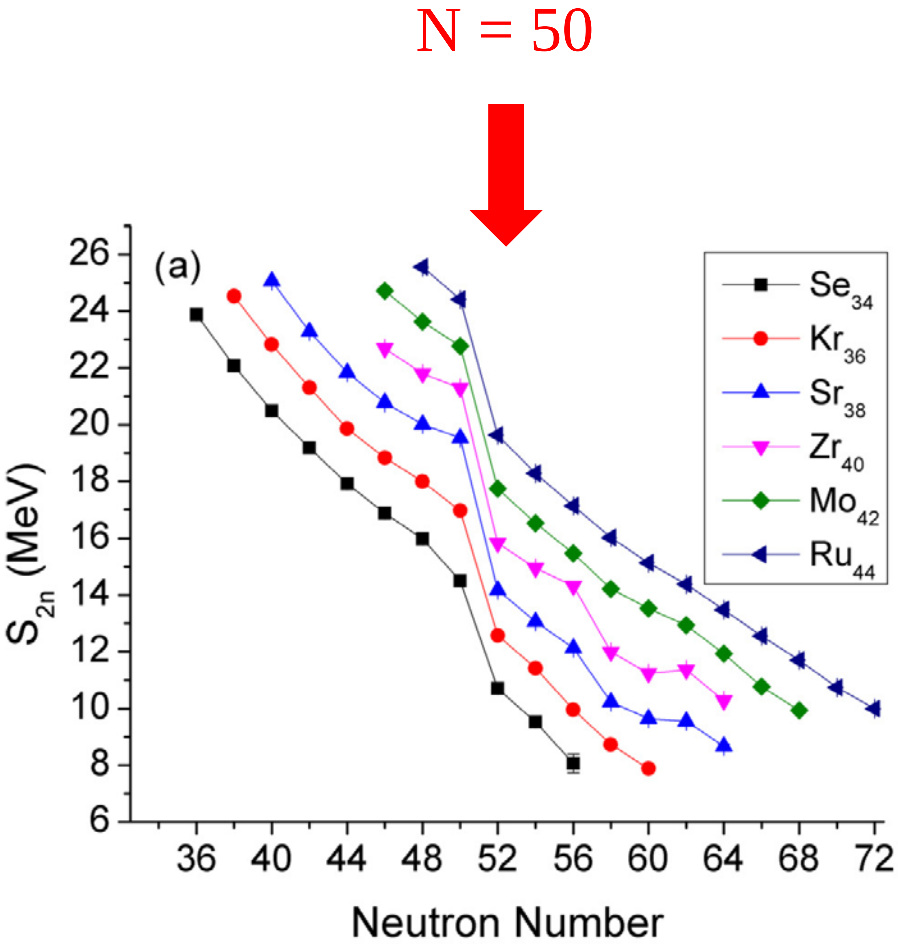
1n separation energy: $S_n\,(A,Z) = B(A,Z) - B(A\text{-}1,Z)$

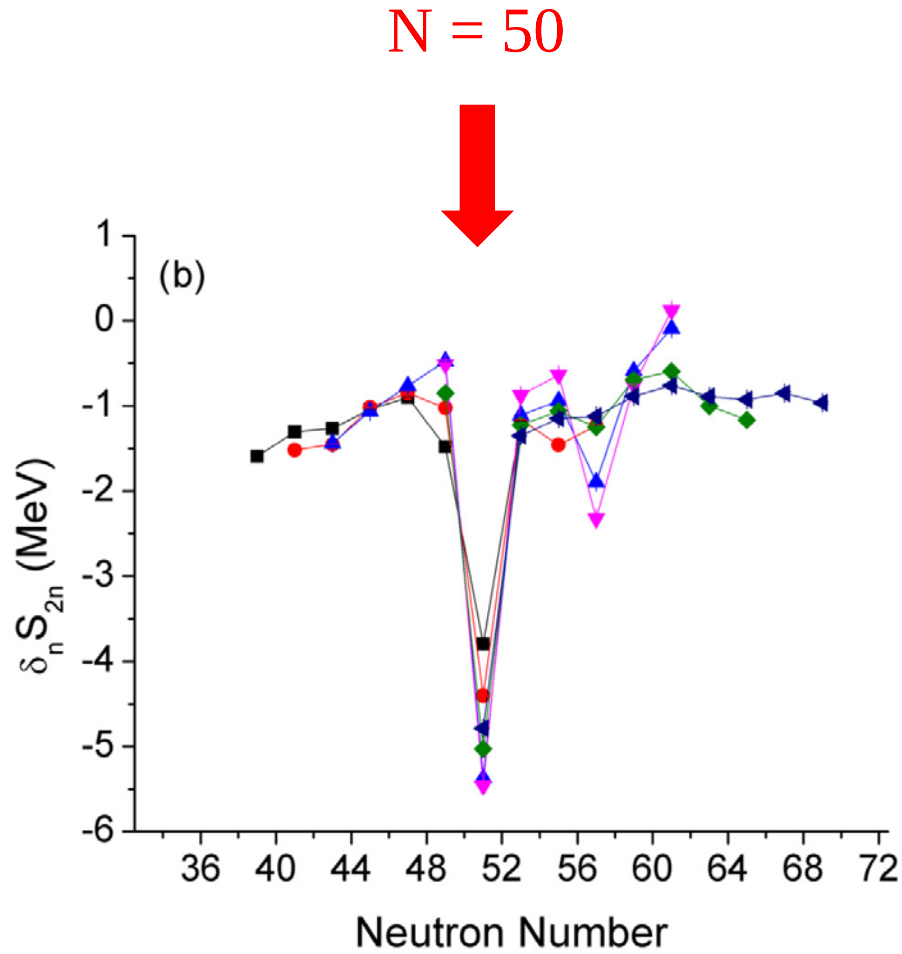
Sn アイソトープの S_n（1中性子分離エネルギー）



N=83から上の
準位がつまるため
中性子をとりのぞく
のにエネルギーが
小さくてすむ

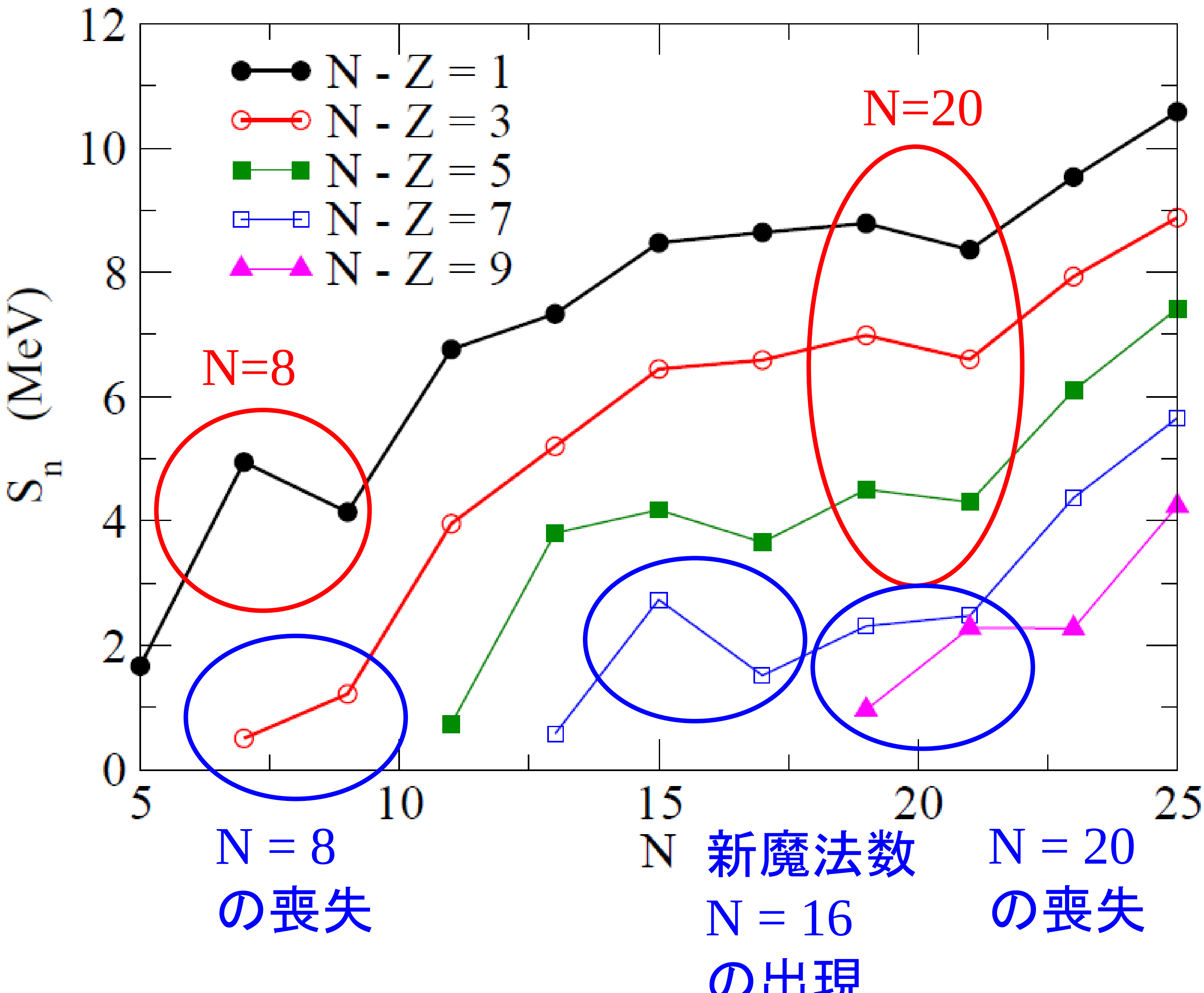
1n separation energy: $S_n\,(A,Z) = B(A,Z) - B(A\text{-}1,Z)$





I. Bentley et al., PRC93 (‘16) 044337

魔法数が変化している実験的な証拠



A. Ozawa et al., PRL84 (‘00)5493

最近では、
魔法数 N=20, 28 の喪失
新魔法数 N=34 の出現
なども。

↓

より重い領域でどうなるか?

RIBF物理の大きな柱の一つ

Nature, vol. 502 (2013)
新魔法数 N=34 の発見

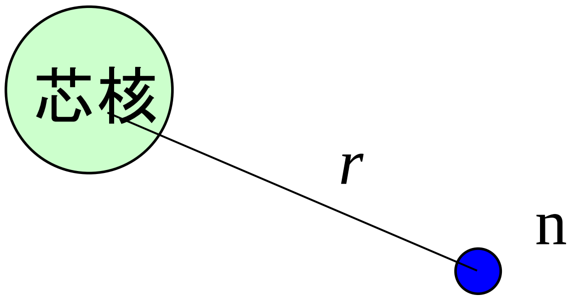
2粒子ハロー核の性質

ーペアリング

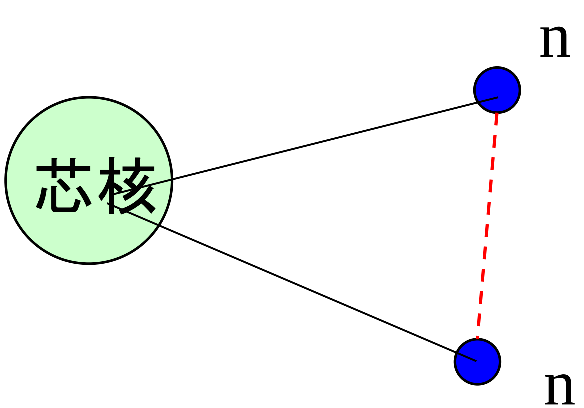
ーボロミアン原子核

ーダイ・ニュートロン相関

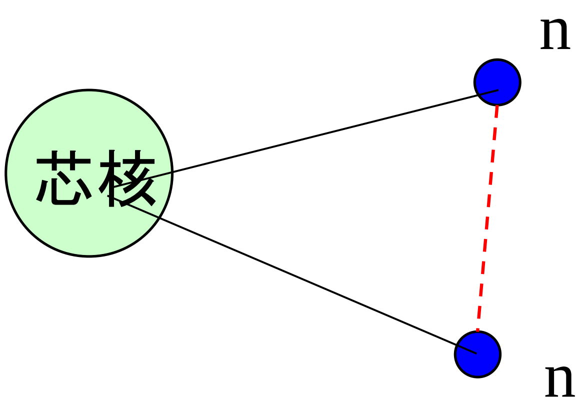
これまでは、芯核のまわりに中性子が１個ある場合を考えてきた



芯核のまわりに中性子が２個あるとどうなる?

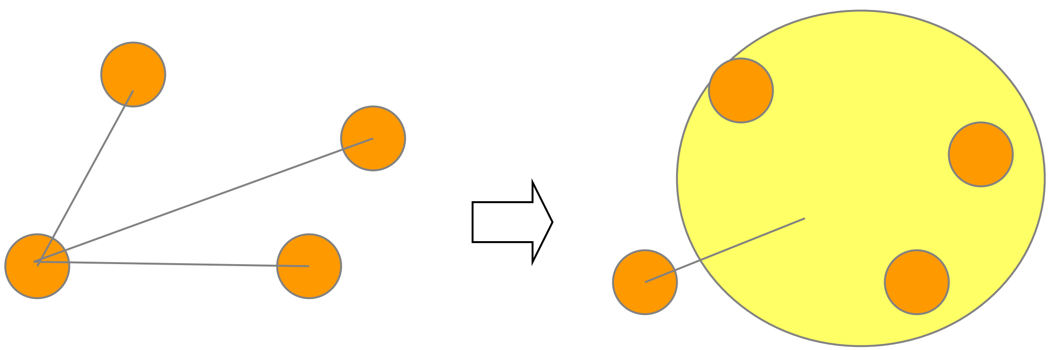


2中性子間に働く相互作用の影響は?



2中性子間に働く相互作用の影響は?

平均場理論



他の核子との相互作用を平均的に取り扱う

単純な平均場近似が完全に成り立っているとすると、2中性子間相互作用は平均場ポテンシャルを通じて考慮され、それ以上の相互作用を考える必要はない。(2中性子が独立に運動。)

$$H=\sum_i T_i+\sum_{i<j}v_{ij}\rightarrow H=\sum_i(T_i+V_i)+\underbrace{\cancel{\sum_{i<j}v_{ij}-\sum_i V_i}}_{\text{平均からのずれ（残留相互作用）}}$$

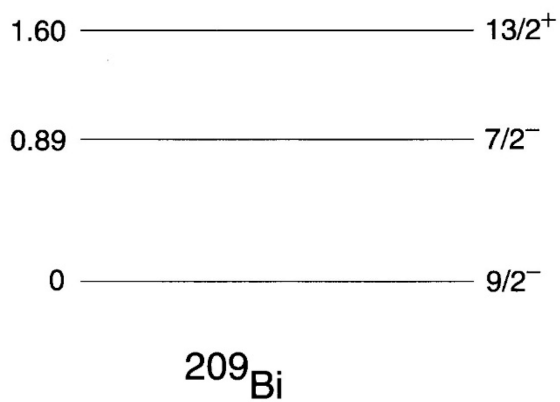
残留相互作用は完全に無視してもよいのか?

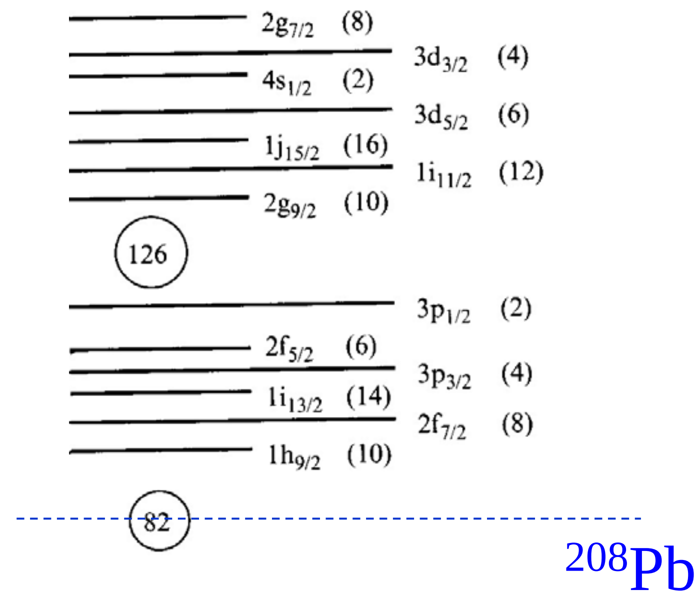
$\longrightarrow$ 開殻原子核では重要な役割を果たすことが知られている（ペアリング）

対相関

殻模型:閉核+1核子
は非常にうまくいく

$^{209}_{83}\mathrm{Bi}_{126} = {}^{208}_{82}\mathrm{Pb}_{126} + \mathrm{p}$





閉核+2核子
だとどうなる?

$^{210}_{84}\mathrm{Po}_{126} = {}^{208}_{82}\mathrm{Pb}_{126} + 2\mathrm{p}$

独立粒子模型から予測される状態:

$$E = 0\text{: } [h_{9/2} \otimes h_{9/2}]^I \qquad (I = 0,2,4,6,8)$$

$$E = 0.89\ \text{MeV: } [h_{9/2} \otimes f_{7/2}]^I$$
$$(I = 1,2,3,4,5,6,7,8)$$

⇨ 1 MeV　以下の励起エネルギーに 13　個の状態

$^{210}_{84}\mathrm{Po}_{126} = {}^{208}_{82}\mathrm{Pb}_{126} + 2\mathrm{p}$

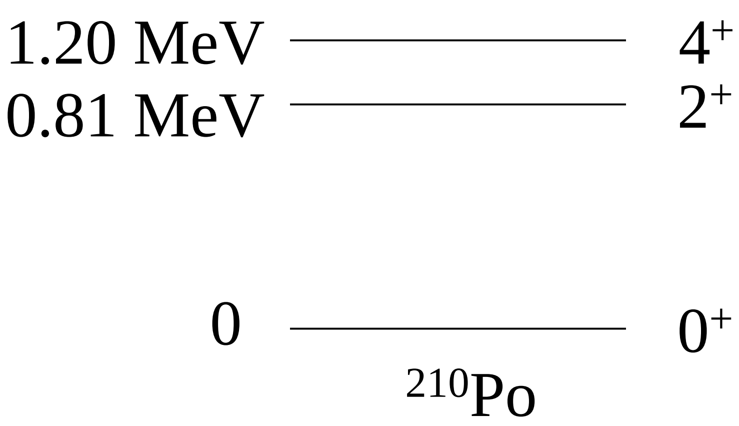
独立粒子模型の予測:

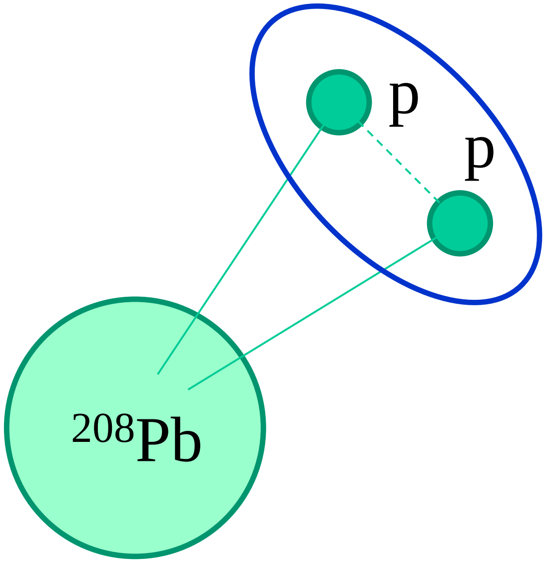
$E = 0$: $[h_{9/2} \otimes h_{9/2}]^I$ $(I = 0,2,4,6,8)$

$E = 0.89$ MeV: $[h_{9/2} \otimes f_{7/2}]^I$ $(I = 1,2,3,4,5,6,7,8)$

1 MeV 以下の励起エネルギーに 13 個の状態

実際に観測されたスペクトル:





陽子間の相互作用の効果

対相関(ペアリング)

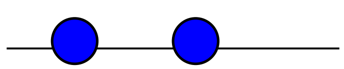
$$H = \sum_{i=1}^{A}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_i^2 + V_{\mathrm{HF}}(i)\right) + \frac{1}{2}\sum_{i,j}^{A} v(\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{r}_j) - \sum_i V_{\mathrm{HF}}(i)$$

簡単のために、残留相互作用としてデルタ関数を仮定してみる
(超短距離力)

$$\begin{aligned} v_{\mathrm{res}}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') &\sim -g\,\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') \\ &= -g\frac{\delta(r - r')}{rr'}\sum_{\lambda\mu} Y^*_{\lambda\mu}(\hat{\boldsymbol{r}})Y_{\lambda\mu}(\hat{\boldsymbol{r}}') \end{aligned}$$

<u>摂動論で残留相互作用の効果を見積もってみる:</u>

l



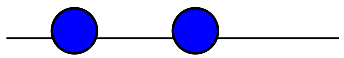
非摂動な波動関数:
角運動量 l の状態に中性子2個、それが
全角運動量 L を組んでいる

$$\boxed{|(ll)LM\rangle = \sum_{m,m'} \langle lmlm'|LM\rangle \psi_{lm}(\boldsymbol{r})\psi_{lm'}(\boldsymbol{r}')}$$

対相関（ペアリング）

$$
\begin{aligned}
v_{\rm res}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') &\sim -g\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \\
&= -g\frac{\delta(r-r')}{rr'}\sum_{\lambda\mu}Y^*_{\lambda\mu}(\hat{\boldsymbol{r}})Y_{\lambda\mu}(\hat{\boldsymbol{r}}')
\end{aligned}
$$

l



$$
\boxed{|(ll)LM\rangle = \sum_{m,m'}\langle lmlm'|LM\rangle\psi_{lm}(\boldsymbol{r})\psi_{lm'}(\boldsymbol{r}')}
$$

$$\Downarrow$$

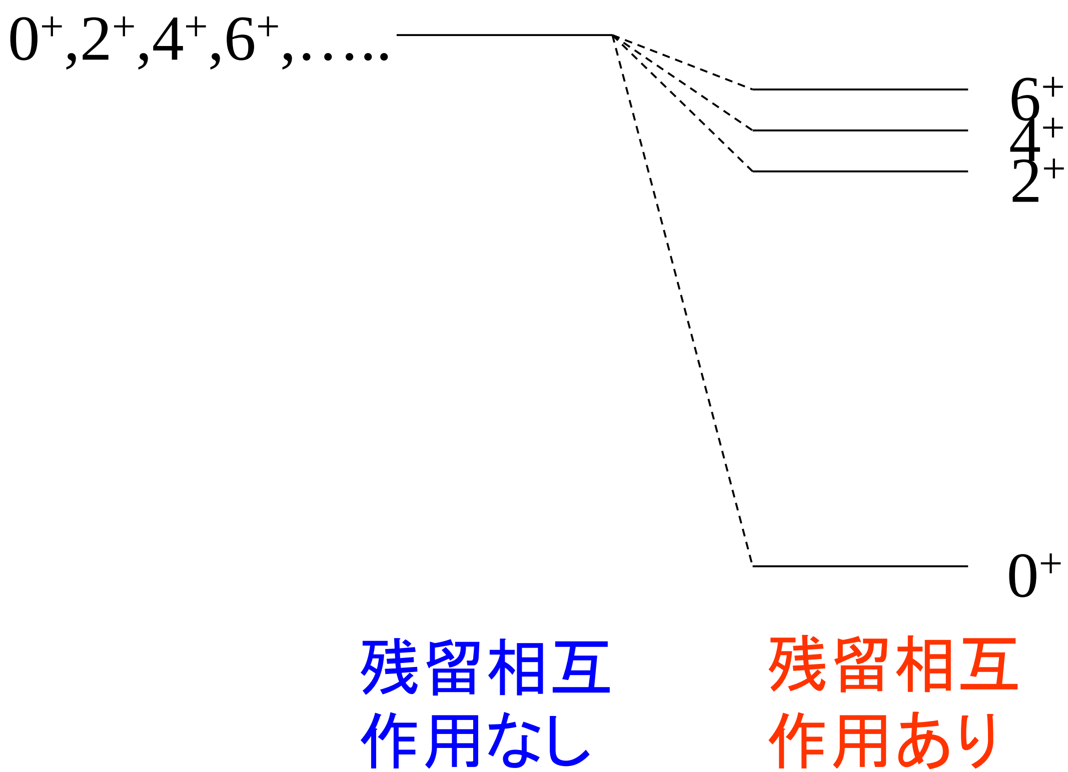
残留相互作用によるエネルギー変化：

$$
\begin{aligned}
\Delta E_L &= \langle (ll)LM|v_{\rm res}|(ll)LM\rangle \\
&= -g\,I_r^{(l)}\frac{(2l+1)^2}{4\pi}\begin{pmatrix} l & l & L \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^2
\end{aligned}
$$

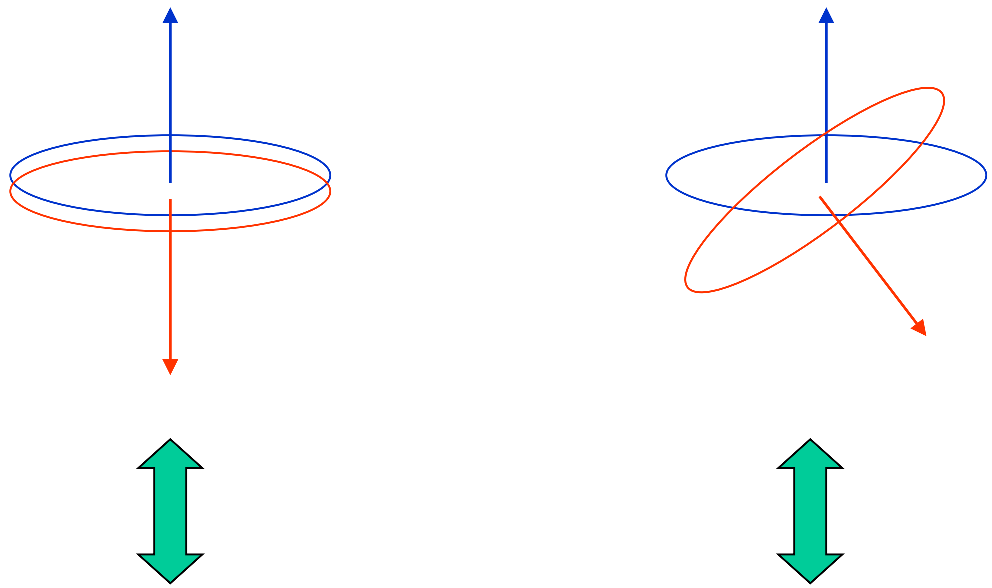
$$
I_r^{(l)} = \int_0^\infty r^2dr\,(R_l(r))^4
$$

$$\Delta E_L = -g\, I_r^{(l)} \frac{(2l+1)^2}{4\pi} \begin{pmatrix} l & l & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \equiv -g\, I_r^{(l)} \frac{A(ll;L)}{4\pi}$$

$A(ll;L)$	L=0	L=2	L=4	L=6	L=8
l = 2	5.00	1.43	1.43	---	---
l = 3	7.00	1.87	1.27	1.63	---
l = 4	9.00	2.34	1.46	1.26	1.81



簡単な解釈:



L=0　対　　　　　　　　$L \neq 0$　対

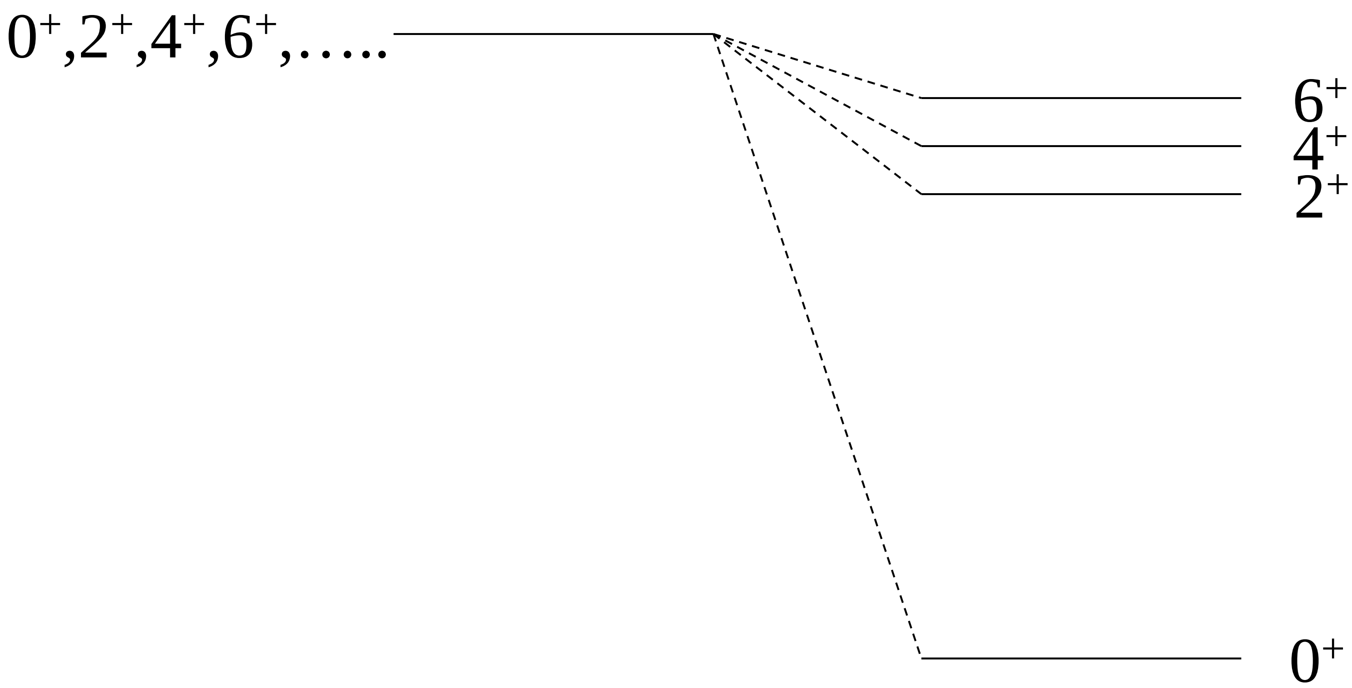
L=0 対に対して空間的重なりが最大（エネルギー的に得）

"対相関"

(note)

$$\psi(l^2; L=0) = \sum_m \langle l m l - m | L=0,0\rangle \, Y_{lm}(\hat{\boldsymbol{r}}_1) Y_{l-\mu}(\hat{\boldsymbol{r}}_2) = Y_{l0}(\theta_{12})/\sqrt{4\pi}$$

すべての m が「コヒーレント」に寄与



残留相互作用なし

残留相互作用あり

<u>原子核の基底状態のスピン</u>

- 偶々核:例外なしに 0^+
- 奇核: 最外殻核子の角運動量と一致

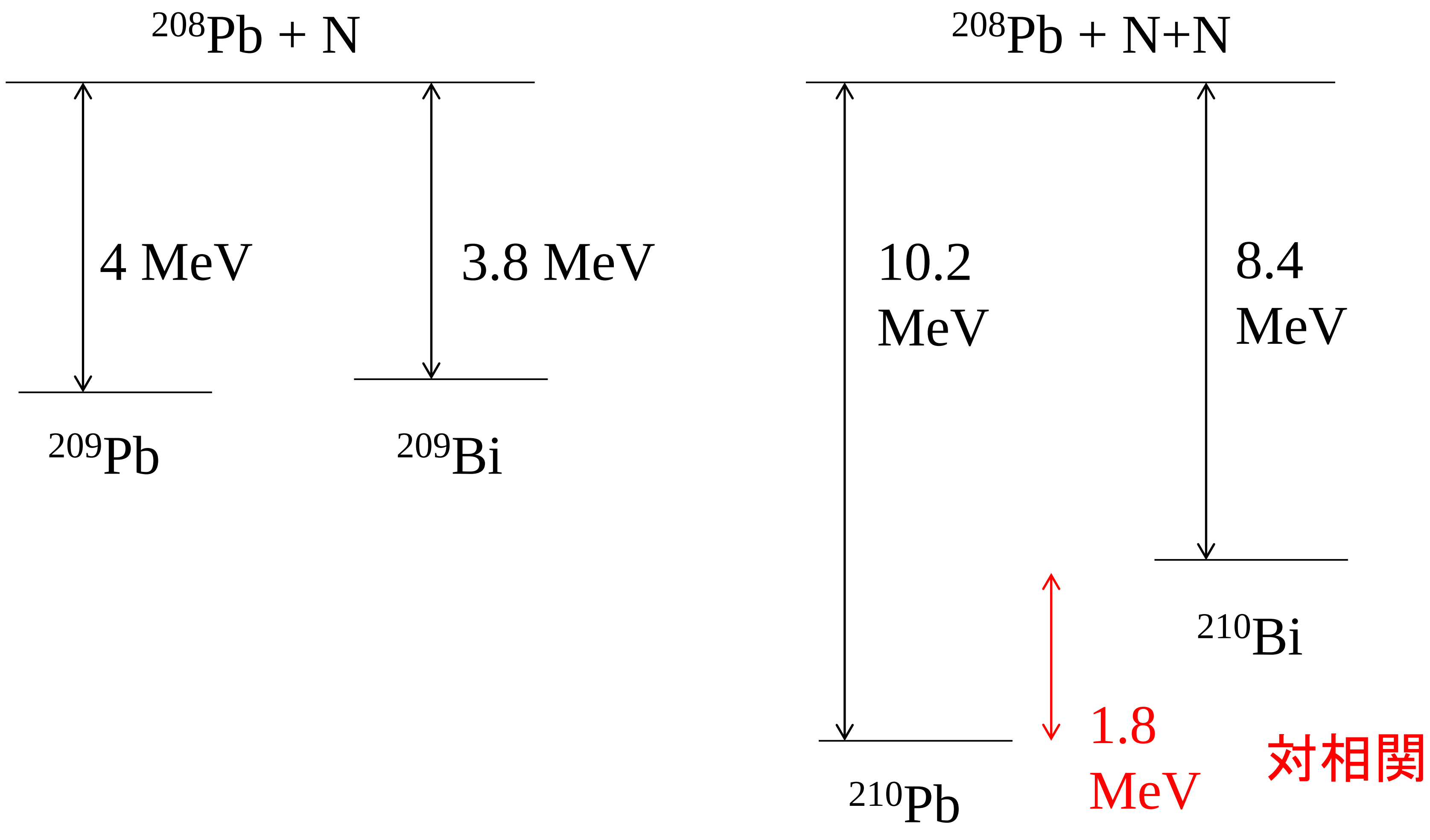
束縛エネルギー

対相関のため、同種核子（2つの中性子または2つの陽子）が角運動量ゼロを組むと安定化

例:

	束縛エネルギー (MeV)
$^{210}_{82}Pb_{128} = {}^{208}_{82}Pb_{126}+2n$	1646.6
$^{210}_{83}Bi_{127} = {}^{208}_{82}Pb_{126}+n+p$	1644.8
$^{209}_{82}Pb_{127} = {}^{208}_{82}Pb_{126}+n$	1640.4
$^{209}_{83}Bi_{126} = {}^{208}_{82}Pb_{126}+p$	1640.2

^{208}Pb の束縛エネルギー：1636.4 MeV



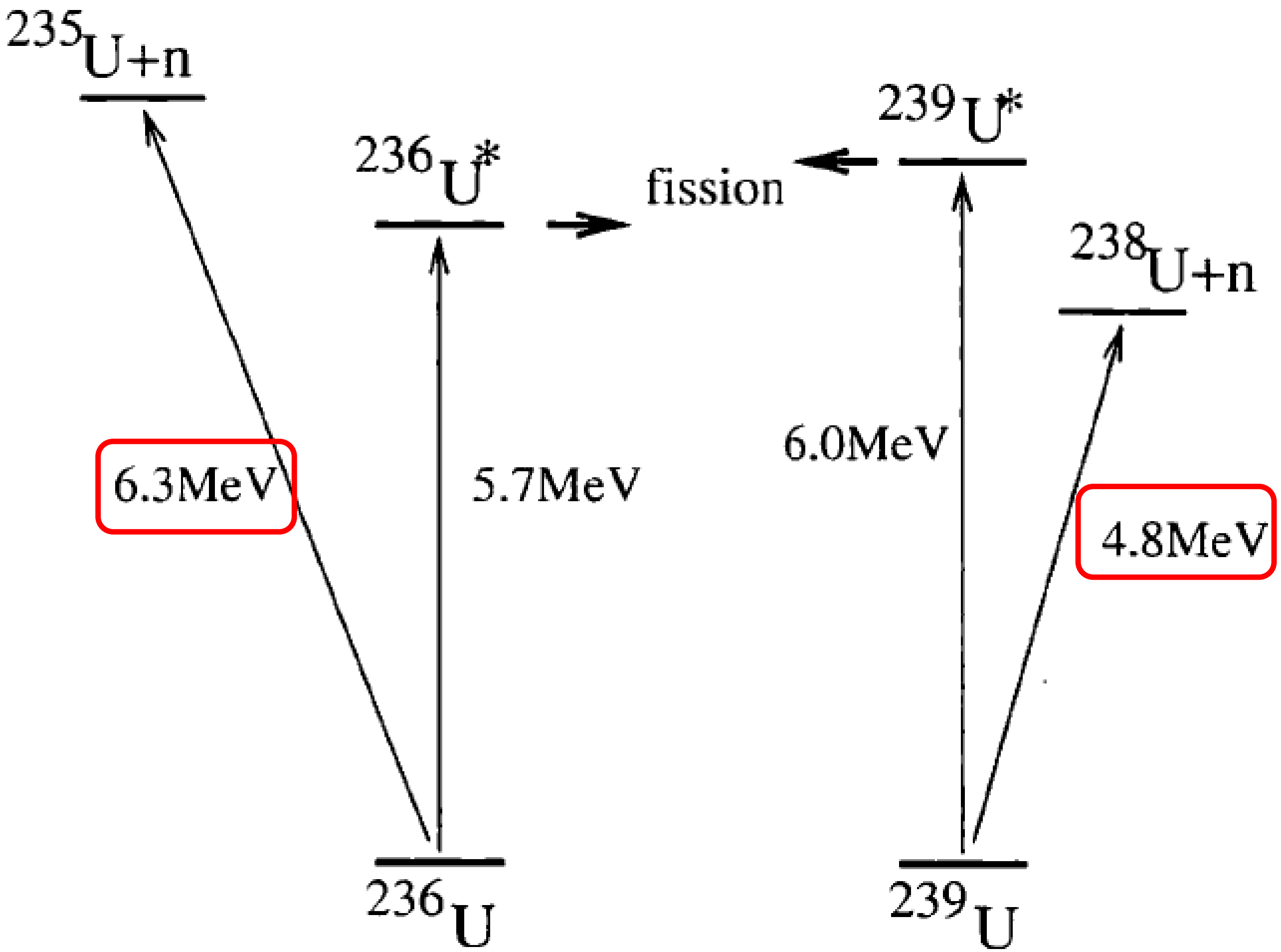
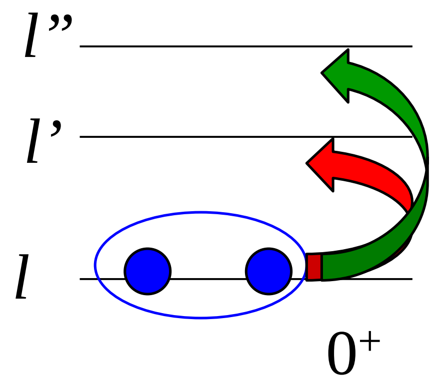
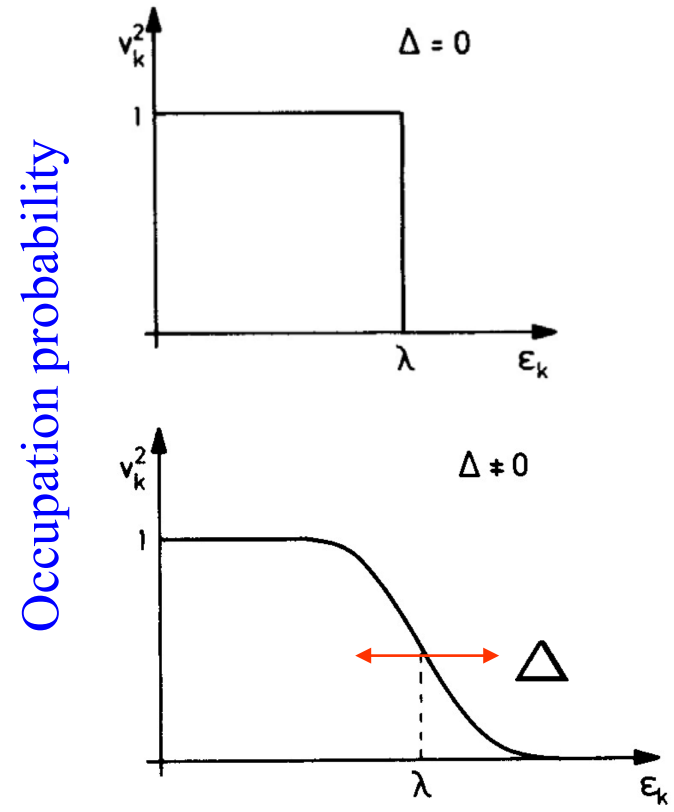


Fig. 6.6. Levels of the systems $A = 236$ and $A = 239$ involved in the fission of ^{236}U and ^{239}U. The addition of a motionless (or thermal) neutron to ^{235}U can lead to the fission of ^{236}U. On the other hand, fission of ^{239}U requires the addition of a neutron of kinetic energy $T_n = 6.0 - 4.8 = 1.2$ MeV.

核分裂障壁の高さと1中性子分離エネルギーの関係

波動関数:





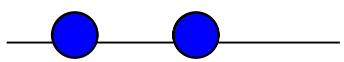
$$
\begin{aligned}
|\Psi_{0^+}\rangle &= |(ll)L=0\rangle \\
&\quad + \sum_{l'} \frac{\langle (l'l')L=0|v_{\rm res}|(ll)L=0\rangle}{2\epsilon_l - 2\epsilon_{l'}} |(l'l')L=0\rangle + \cdots
\end{aligned}
$$

各軌道は部分的にのみ占有されることになる

cf. BCS 理論

（参考）スピンを考慮すると:

$$v_{\rm res}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \sim -g\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$
$$= -g\frac{\delta(r-r')}{rr'}\sum_{\lambda\mu}Y^*_{\lambda\mu}(\hat{\boldsymbol{r}})Y_{\lambda\mu}(\hat{\boldsymbol{r}}')$$

j 

$$\boxed{|(jj)IM\rangle = \sum_{\mu,\mu'}\langle j\mu j\mu'|IM\rangle\psi_{j\mu}(\boldsymbol{r})\psi_{j\mu'}(\boldsymbol{r}')}$$

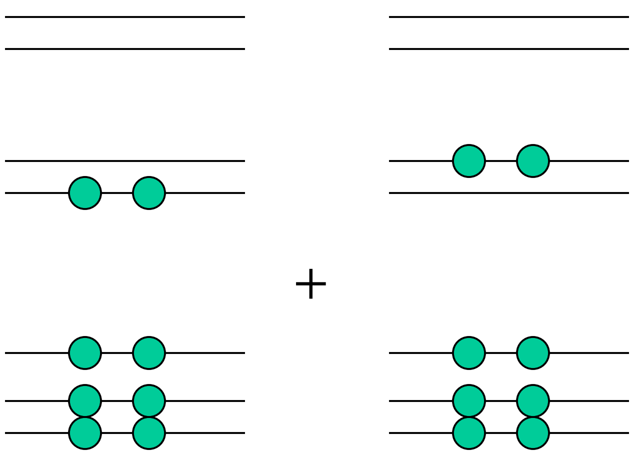
$$\Delta E_I \sim \langle (jj)IM| - g\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')|(jj)IM\rangle$$
$$= -g\,F_r\,\frac{(2j+1)^2}{2}\begin{pmatrix} j & j & I \\ 1/2 & -1/2 & 0\end{pmatrix}^2$$

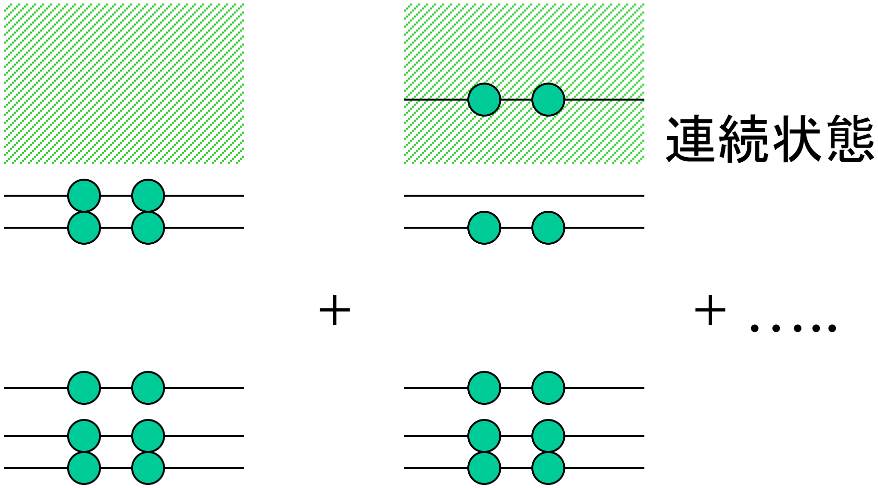
(for even I)

$$F_r = \int dr\frac{u^4_{jl}(r)}{4\pi r^2}$$ (radial integral)

弱束縛核における対相関

$$H = \sum_i T_i + \sum_{i<j} v_{ij} \to H = \sum_i (T_i + V_i) + \underbrace{\sum_{i<j} v_{ij} - \sum_i V_i}_{\text{平均からのずれ（残留相互作用）}}$$





安定な原子核

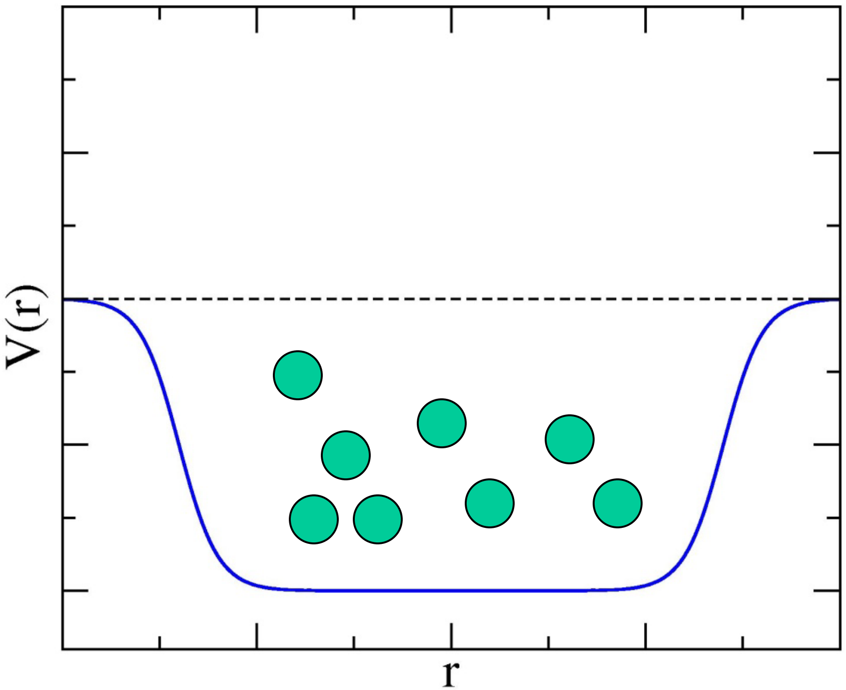
$\longrightarrow$ 超流動状態

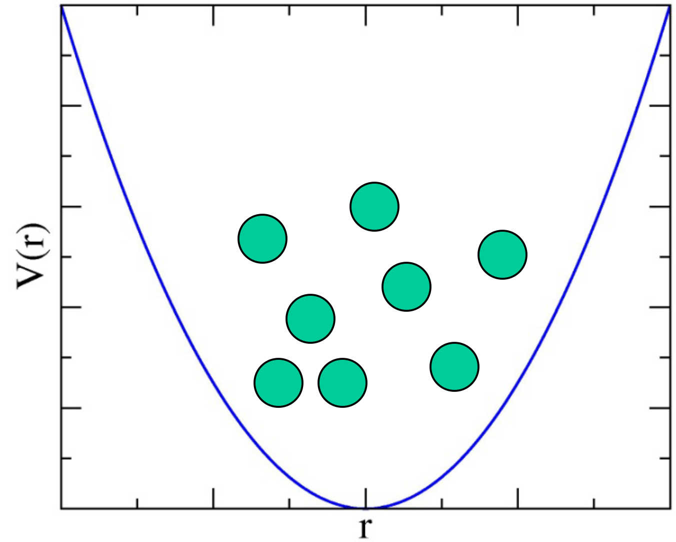
弱く束縛された系

中性子過剰核の物理

- 弱束縛系
- 残留相互作用（対相関）
- 連続状態との結合

ポテンシャルの井戸に束縛された相互作用する多フェルミオン系





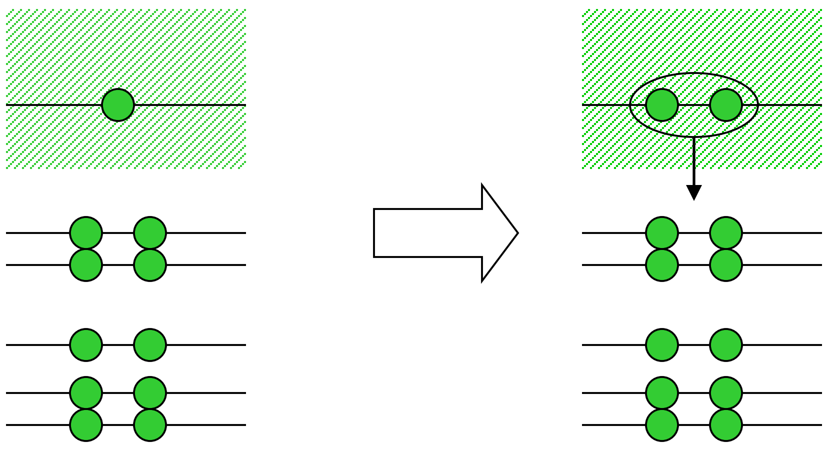
cf. a harmonic trap

- 有限の深さを持つ井戸
- 自己無撞着性

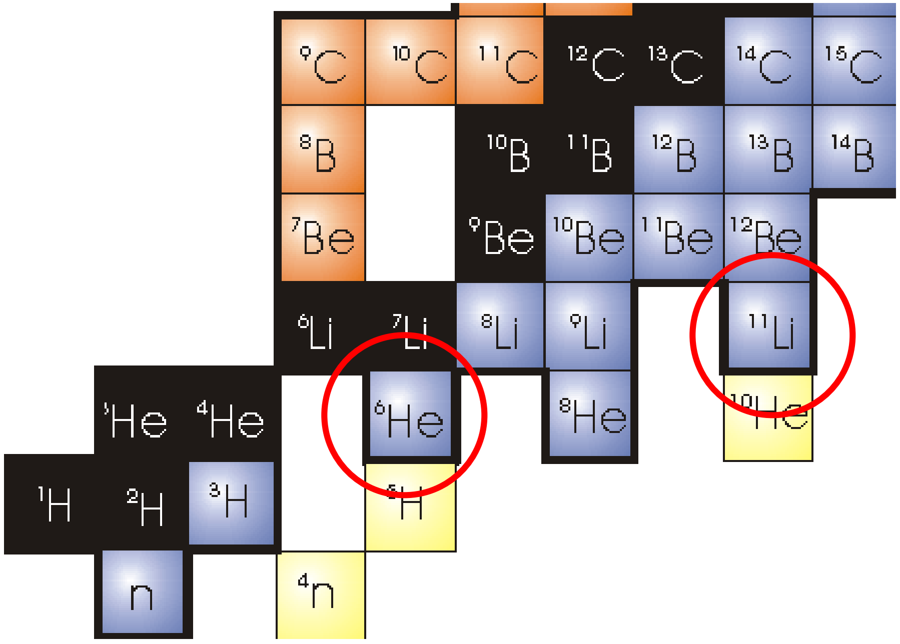
→ とてもチャレンジングな問題
（わからないことは色々ある）

ボロミアン原子核

残留相互作用 → 引力



不安定　　　　安定



“ボロミアン核”

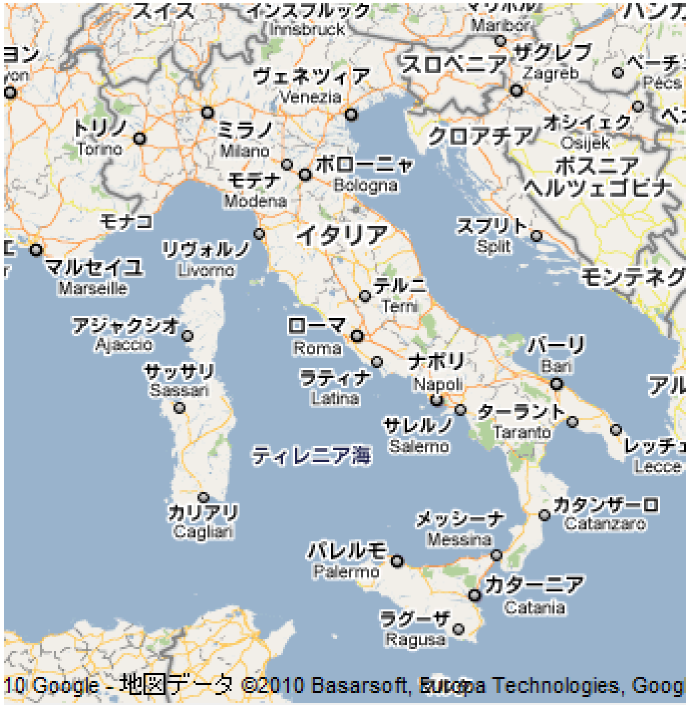
ボロミアン核の構造

- ✓多体相関のため non-trivial
- ✓多くの注目を集めている

（休憩）ボロミアンって何?

ボッロメオ諸島
（北イタリア、マッジョーレ湖）
ミラノの近く

ボッロメオ家（13世紀）の紋章


イタリア
ミラノ
Milano
トリノ
Torino
ヴェネツィア
Venezia
ボローニャ
Bologna
ローマ
Roma
ナポリ
Napoli
ティレニア海
パレルモ
Palermo
スロベニア
クロアチア
ボスニア
ヘルツェゴビナ
スイス
マルセイユ
Marseille
10 Google - 地図データ ©2010 Basarsoft, Europa Technologies, Goog


ミラノ
Milano
ロカルノ
Locarno
ルガノ
Lugano
ベルバニア
Verbania
バレーゼ
Varese
コモ
Como
レッコ
Lecco
モンツァ
Monza
ベルガモ
Bergamo
ブレシア
Brescia
ノバラ
Novara
トリノ
Torino
パヴィーア
Pavia
ピアチェンツァ
Piacenza
クレモナ
Cremona
アレッサンドリア
Alessandria
ツェルマット
Zermatt

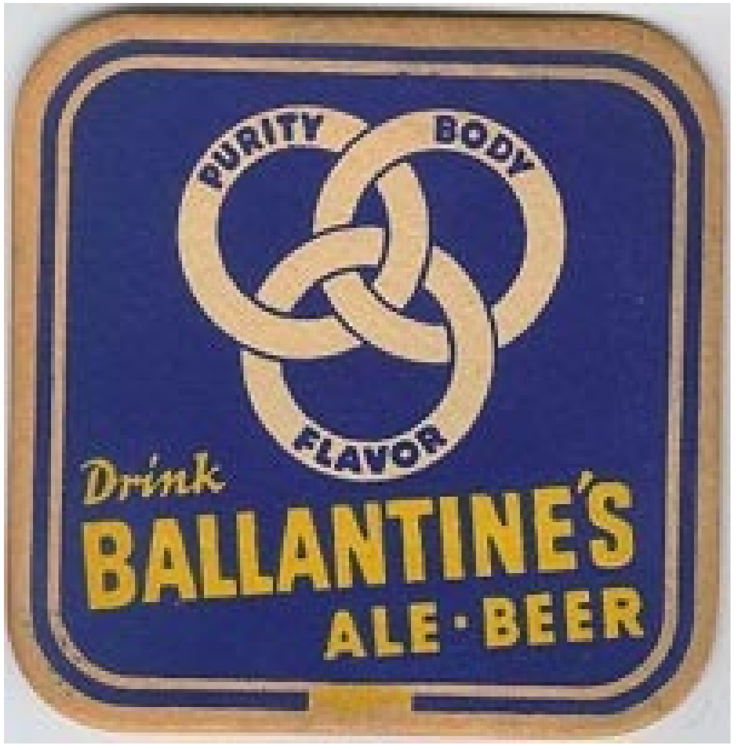

ベルバニア
Verbania
イントラ
Intra
イーソラ
マードレ
Isola Madre
イーソラ
スペリオーレ
Isola Superiore
イーソラ
ベッラ
Isola Bella
ストレーザ
Stresa
バヴェーノ
Baveno
ラヴェーノ＝
モンベッロ
Laveno-Mombello
フェリオロ
Feriolo
ボロミオ諸島

（休憩）ボロミアンって何?

ちなみに日本でも。。。。。

三つ輪違い紋
（徳川旗本金田家の紋）

大神（おおみわ）神社
奈良県桜井市



バランタイン・エール（アメリカのビール）

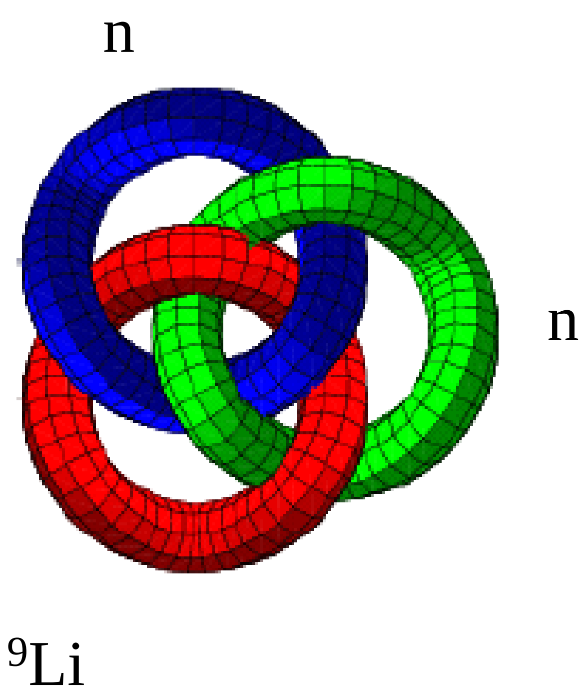
(休憩)ボロミアンって何?

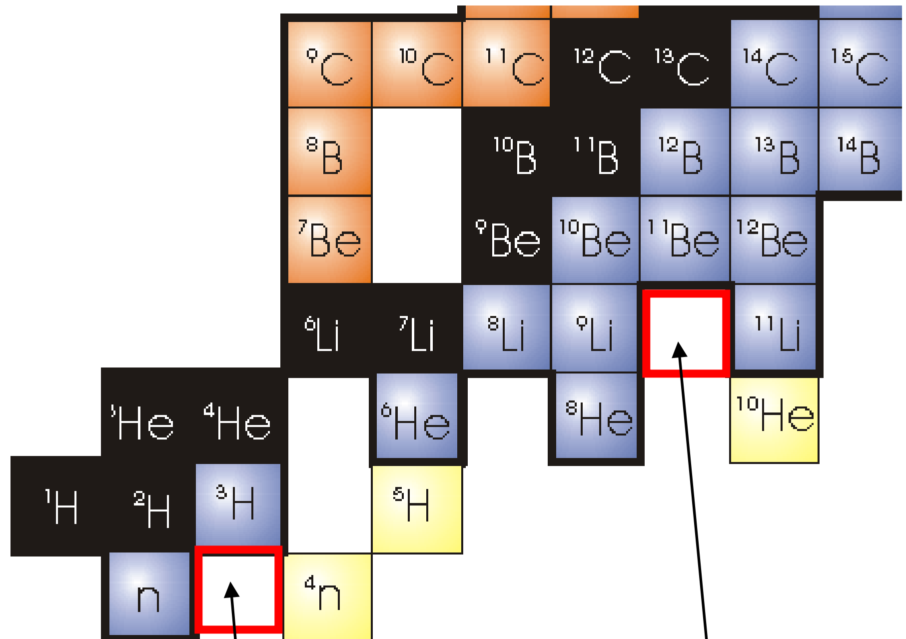
三つ輪違い紋
（徳川旗本金田家の紋）

３つの輪はつながっているけど、どれか１つを
はずすとバラバラになる

「ボロミアン・リング」

ボロミアン原子核





^{10}Li (^{9}Li+n) は存在せず

ボロミアン核

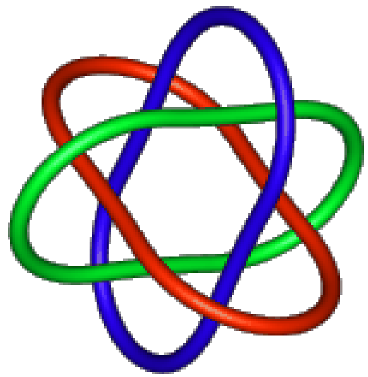
^{2}n (n+n) は存在せず

他にも、^{6}He が典型的な例

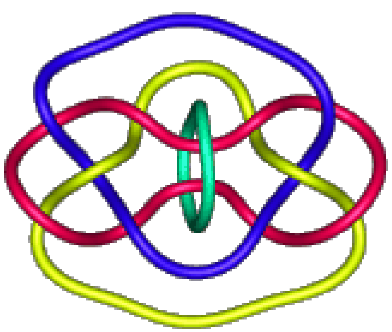
（参考）ブルニアン・リンク：拡張されたボロミアン

結び目理論: 位相幾何学の分野（数学）

n=3: Borromean



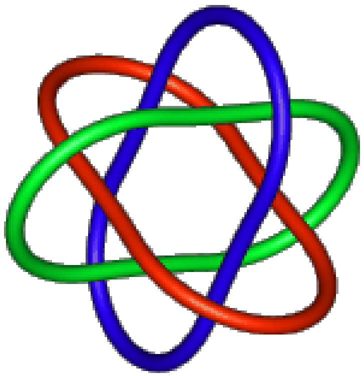
n=4



n=6

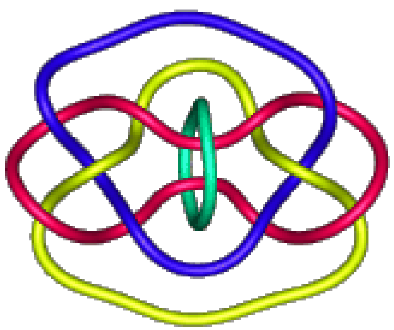
（参考）ブルニアン原子核

n=3: Borromean



^{11}Li, ^{6}He, etc.

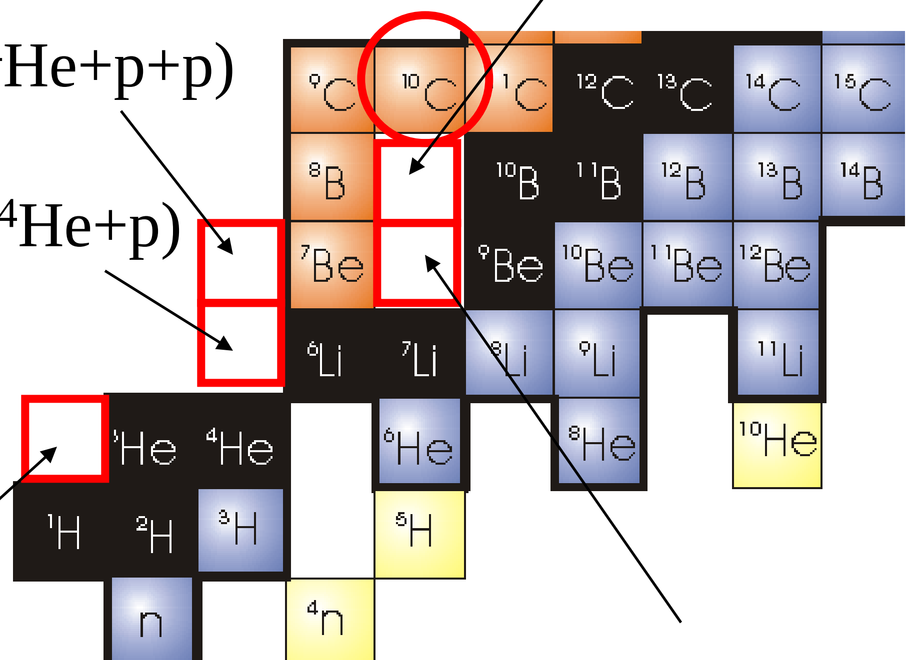
n=4: ^{10}C = ^{4}He+^{4}He+p+p



^{9}B (^{4}He+^{4}He+p)

^{6}Be (^{4}He+p+p)

^{5}Li (^{4}He+p)

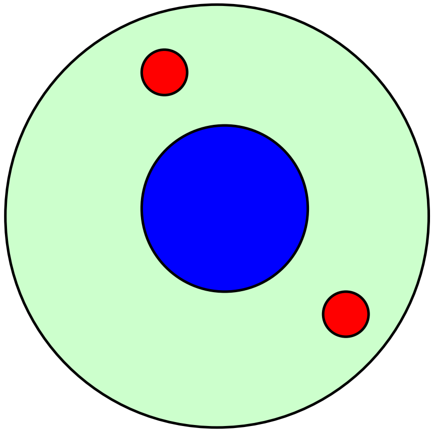


^{2}He (p+p)

^{8}Be (^{4}He+^{4}He)

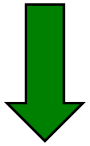
cf. N. Curtis et al., PRC77('08)021301(R)

ダイ・ニュートロン相関



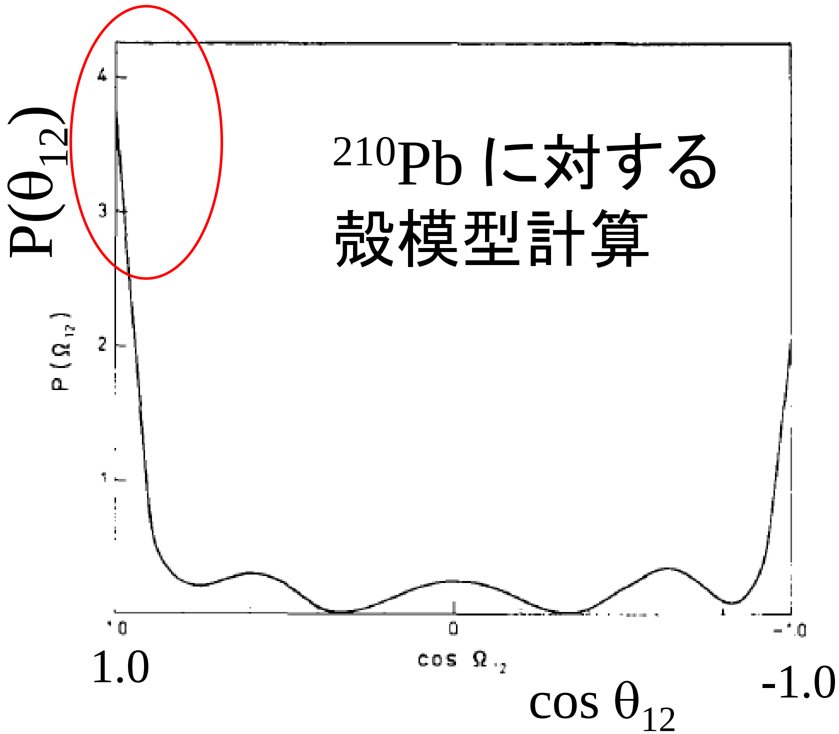
原子核中で2つの中性子は空間的に
どのように配置されているのか?

2つの中性子が独立に運動していると
すると、片方の中性子がどこにいようとも
もう片方は関知しない

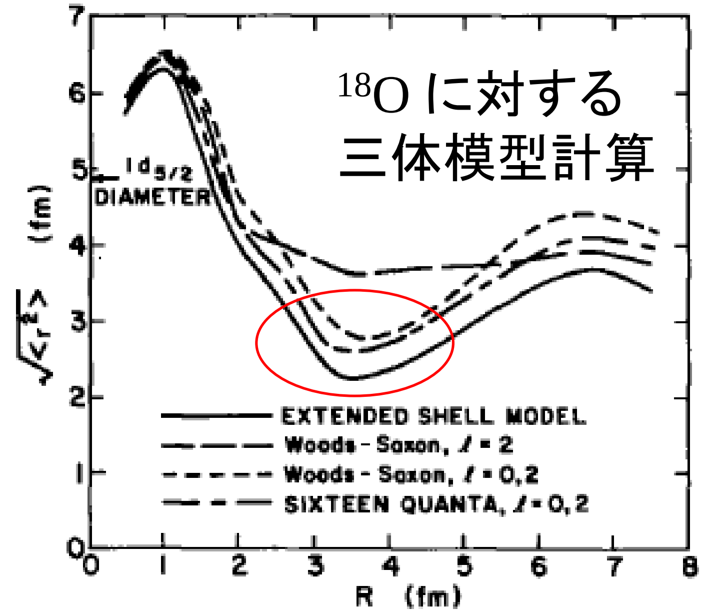


対相関が働くとどうなるか?

この問題はかなり古くから議論されてきた



G.F. Bertsch, R.A. Broglia, and C. Riedel, NPA91(‘67)123



R.H. Ibarra et al., NPA288(‘77)397

2中性子は空間的に局在している（ダイ・ニュートロン相関）

cf. A.B. Migdal, “Two interacting particles in a potential well”, Soviet J. of Nucl. Phys. 16 (‘73) 238.

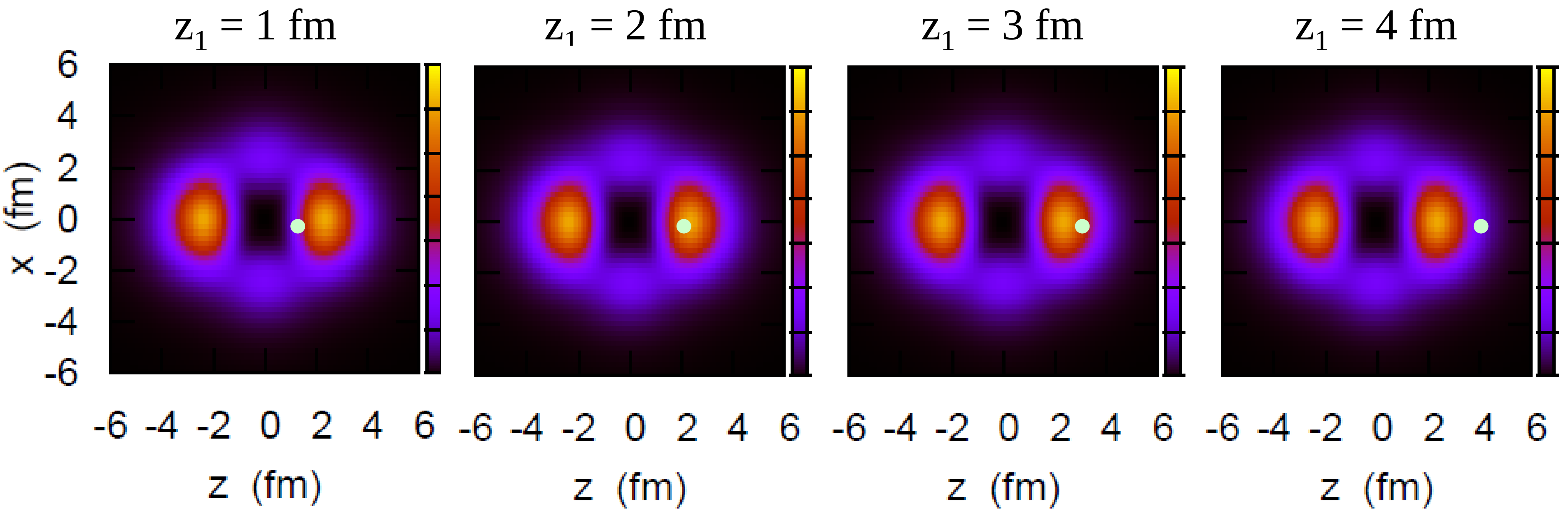
Dineutron 相関とはどういうものか?

相関: $\langle AB \rangle \neq \langle A \rangle \langle B \rangle$

例) $^{18}O = {}^{16}O + n + n$ cf. ^{16}O + n : 3つの束縛状態($1d_{5/2}$, $2s_{1/2}$, $1d_{3/2}$)

i) 2中性子相関がない場合 $|nn\rangle = |(1d_{5/2})^2\rangle$

中性子1を z_1 に置いたときの中性子2の分布:



✓2つの粒子が独立に運動
✓中性子1がどこにいても中性子2の分布は影響されない

$$\langle AB \rangle = \langle A \rangle \langle B \rangle$$

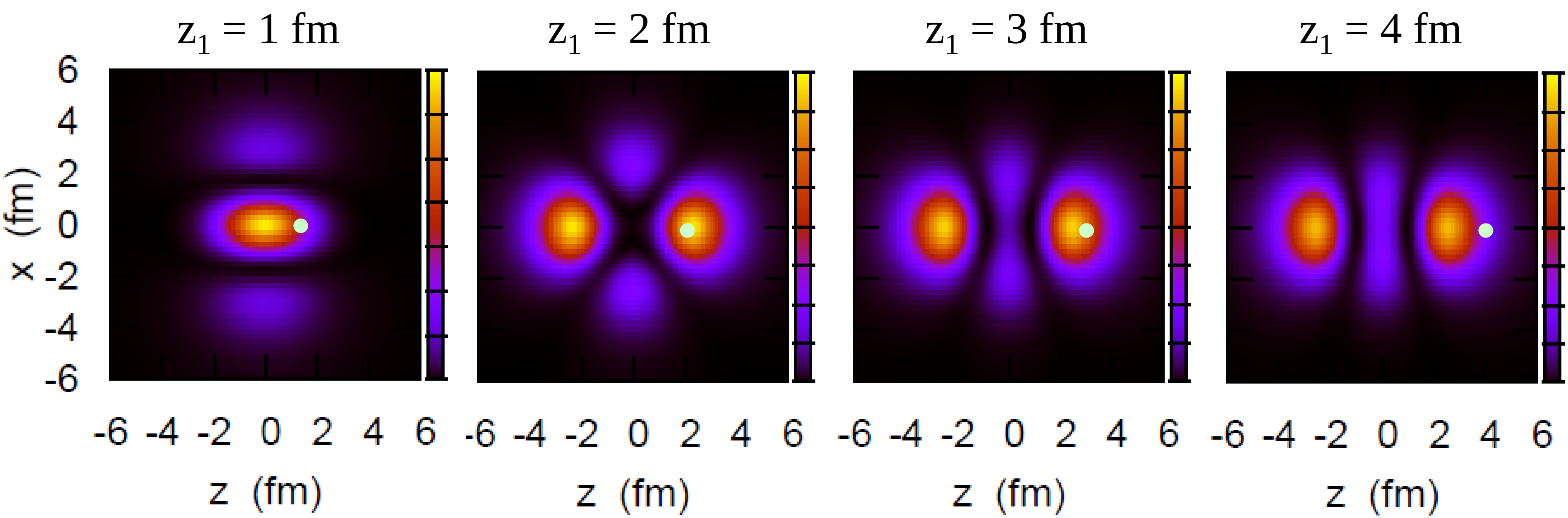
Dineutron 相関とはどういうものか?

相関:　$\langle AB\rangle \neq \langle A\rangle\langle B\rangle$

例) $^{18}O = {}^{16}O + n + n$　cf. $^{16}O + n$: 3つの束縛状態($1d_{5/2}$, $2s_{1/2}$, $1d_{3/2}$)

ii) 2中性子相関が同パリティ状態(束縛状態)にのみ働く場合

$$|nn\rangle = \alpha|(1d_{5/2})^2\rangle + \beta|(2s_{1/2})^2\rangle + \gamma|(1d_{3/2})^2\rangle$$



✓中性子1とともに中性子2の分布が変化 (2中性子相関)

✓ただし、中性子2は z_1 と $-z_1$ の両方にピーク

$\longrightarrow$ このようなものは di-neutron 相関とは言わない

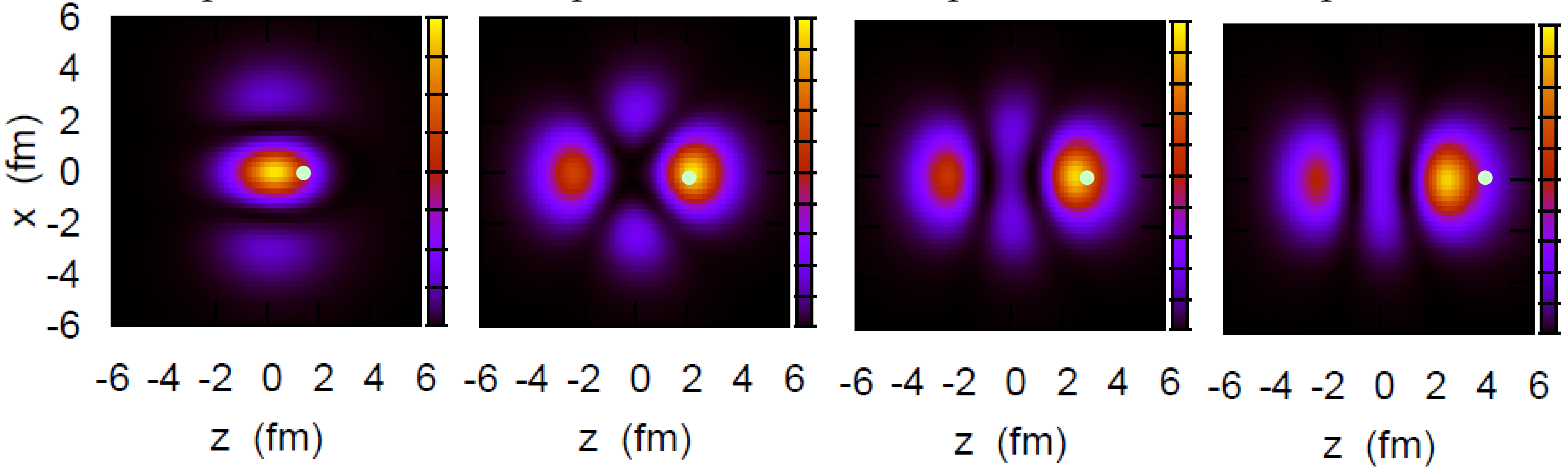
Dineutron 相関とはどういうものか?

相関: $\langle AB \rangle \neq \langle A \rangle \langle B \rangle$

例) ^{18}O = ^{16}O + n + n　　cf. ^{16}O + n : 3つの束縛状態($1d_{5/2}$, $2s_{1/2}$, $1d_{3/2}$)

iii) 2中性子相関が連続状態にも働く場合

$$|nn\rangle = \sum_{n,n',j,l} C_{nn'jl} |(nn'jl)^2\rangle$$



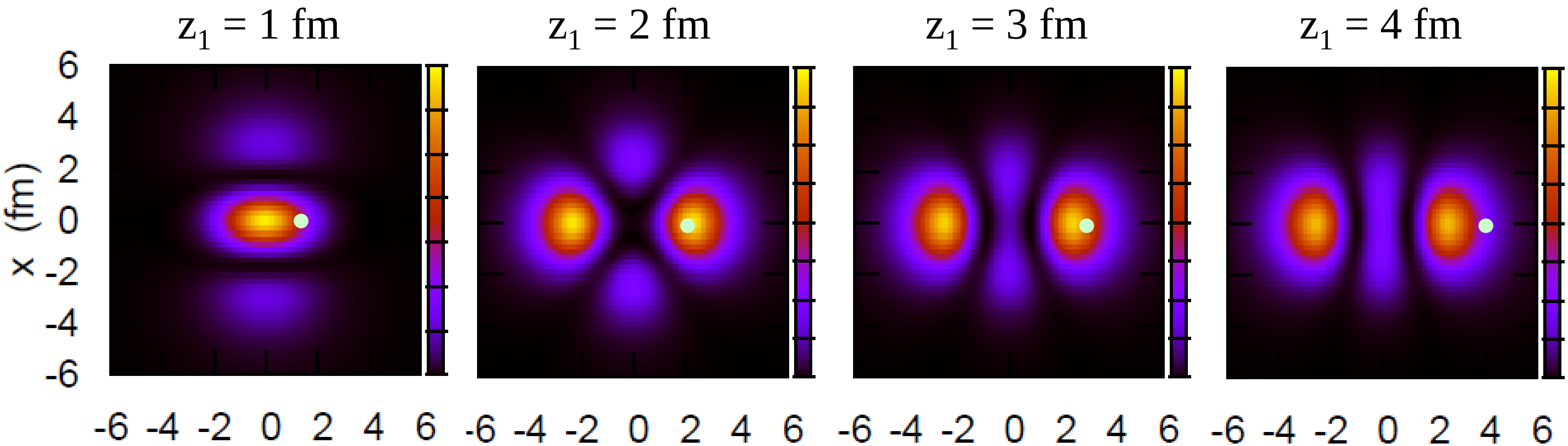
✓空間的な相関: 中性子2の密度は中性子1側にかたよる

✓パリティ混合が本質的な役割　　（dineutron 相関）

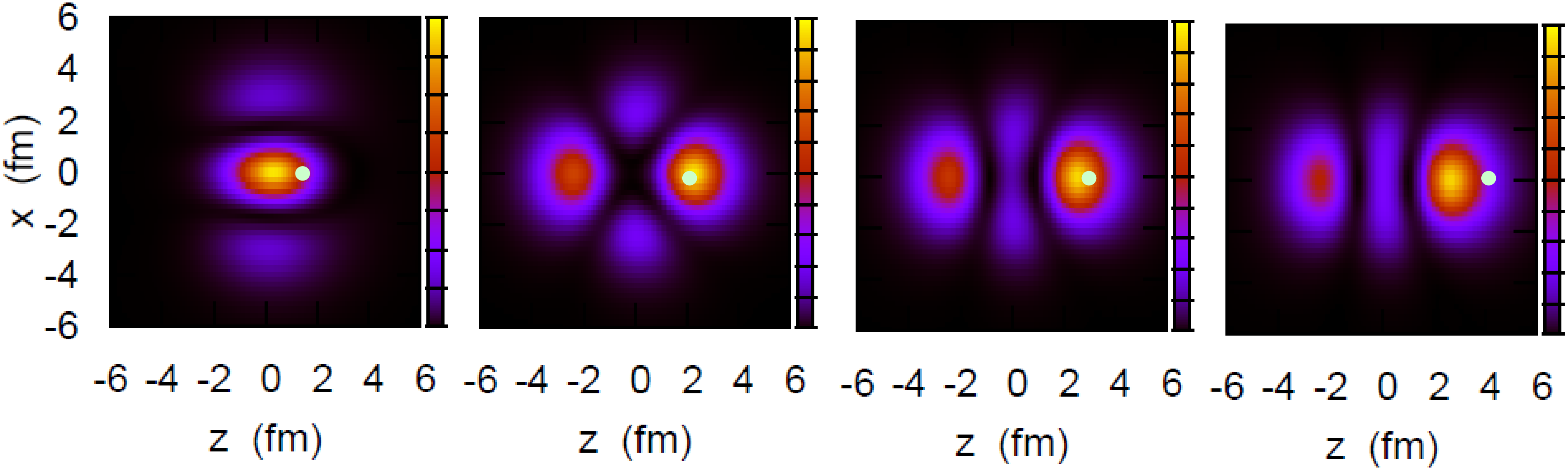
cf. F. Catara, A. Insolia, E. Maglione, and A. Vitturi, PRC29('84)1091

例）$^{18}\mathrm{O} = {}^{16}\mathrm{O} + n + n$　cf. $^{16}\mathrm{O} + n$: 3つの束縛状態（$1d_{5/2}$, $2s_{1/2}$, $1d_{3/2}$）

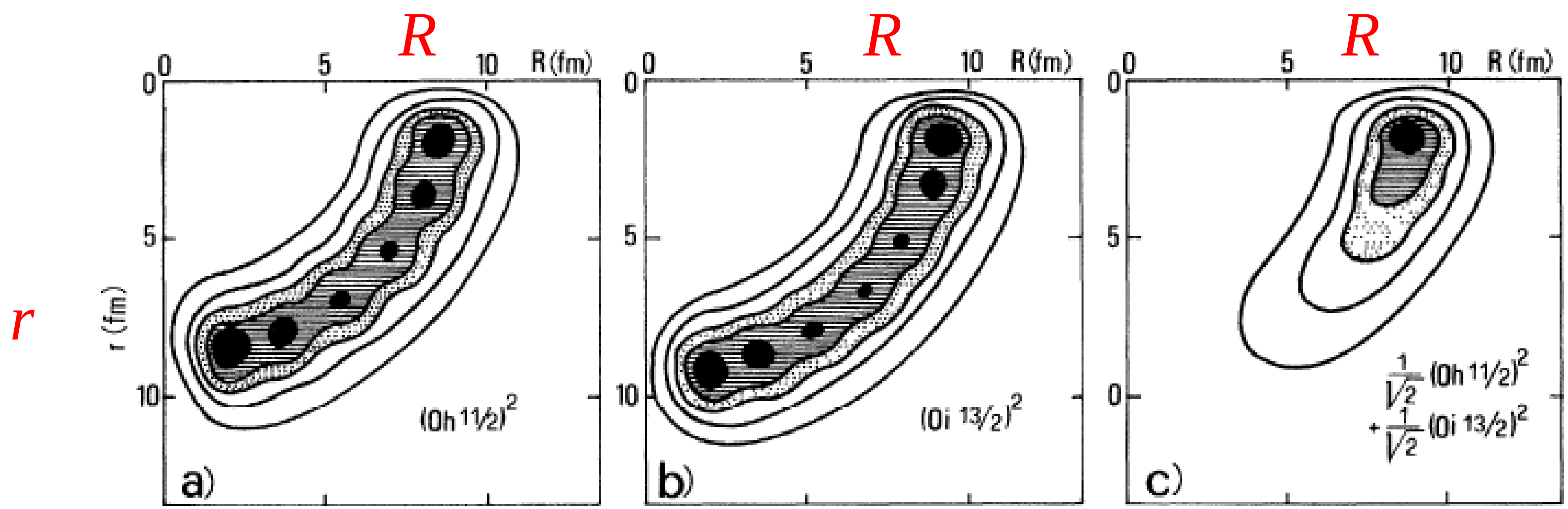
i) 正パリティのみ　⟶　不十分



ii) 正＋負パリティ（束縛＋連続状態）

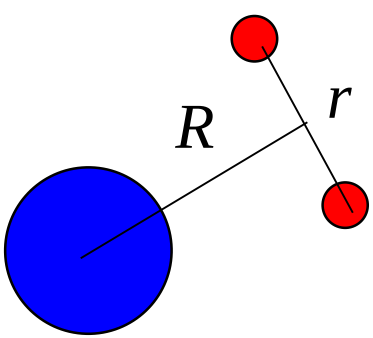


dineutron 相関は異なるパリティ状態の混合によって生じる



$(0h_{11/2})^2$ $(0i_{13/2})^2$ $\frac{1}{\sqrt{2}}(0h_{11/2})^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}(0i_{13/2})^2$

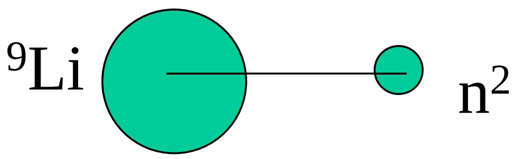
F. Catara, A. Insolia, E. Maglione, and A. Vitturi, PRC29('84)1091



（後でもう少し説明します）

Dineutron クラスター模型

Dineutron 相関の考えを中性子過剰核へ最初に適用したのは Hansen と Jonson



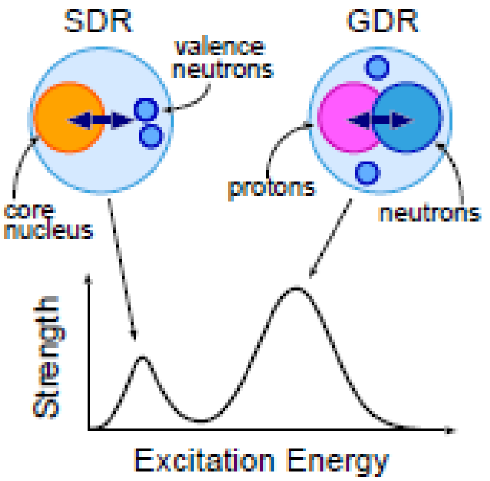
^{9}Li と n^2 の2体系として ^{11}Li の構造を考えた ($l = 0$ で束縛する)

dineutron は束縛されたクラスターと仮定(構造はナシ)

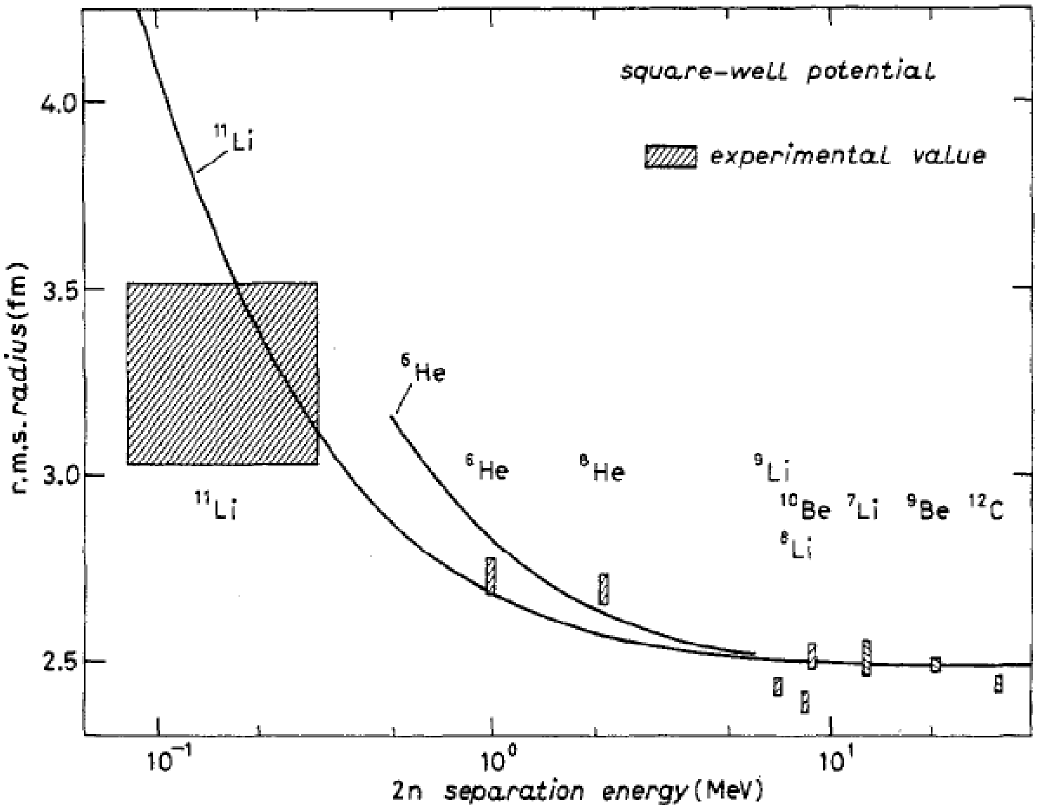
P.G. Hansen and B. Jonson, Europhys. Lett. 4('87)409

cf. ソフト双極子励起

K. Ikeda, INS Report JHP-7 ('88)

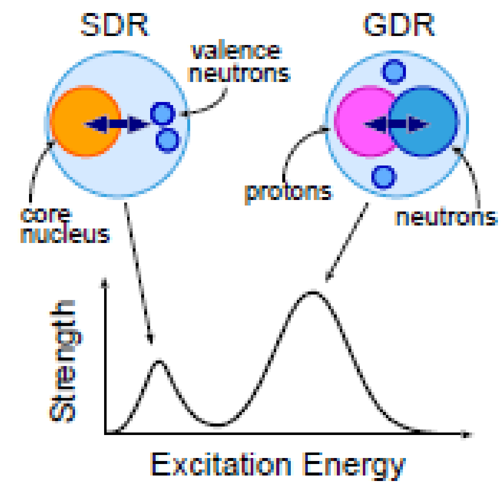


K. Ikeda, T. Myo, K. Kato, and H. Toki, Lecture Note in Phys., vol. 818



P.G. Hansen and B. Jonson, Europhys. Lett. 4('87)409

この他にソフトE1励起の議論も。



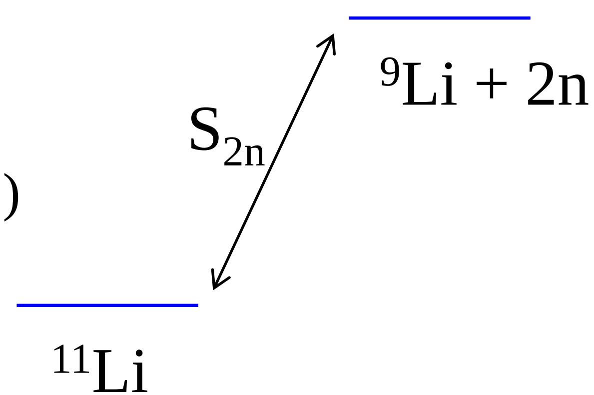
2中性子分離エネルギー:

S_{2n} = 378 +/- 5 keV for ^{11}Li

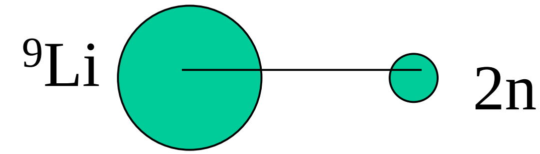
973 keV for ^{6}He

(C. Bachelet et al., PRL100('08)182501)

⟹ ハロー構造



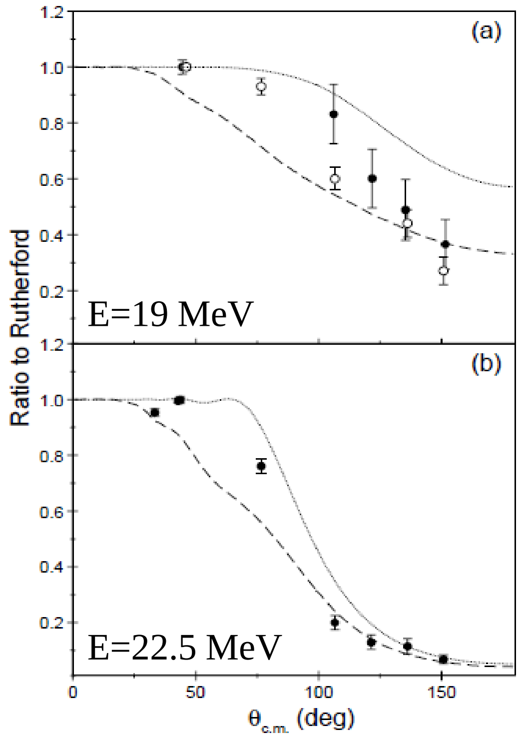
Dineutron クラスター模型



dineutron クラスター模型を用いた原子核反応の計算も多くなされた

核融合: N. Takigawa and H. Sagawa, PLB265('91)23
N. Takigawa, M. Kuratani, H. Sagawa, PRC47('93)R2470
M.S. Hussein, M.P. Pato, L.F. Canto, and R. Donangelo, PRC46('92)377

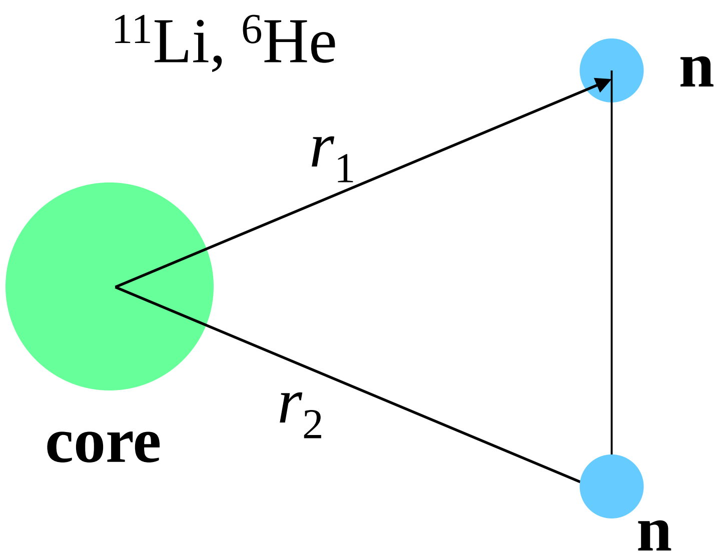
CDCC (弾性散乱、分解反応): N. Keeley et al., PRC68('03)054601



^{6}He+^{209}Bi
弾性散乱の角度分布

cf. 4-body CDCC
T. Matsumoto et al.,
PRC73('06)051602

3体模型計算 ('90~): dineutron クラスター模型の微視的理解



$$H = \frac{\boldsymbol{p}_1^2}{2m} + \frac{\boldsymbol{p}_2^2}{2m} + V_{nC}(r_1) + V_{nC}(r_2) + V_{nn} + \frac{(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2)^2}{2A_c m}$$

（最後の項は3体系の静止系で考えた芯原子核の運動エネルギー項。）

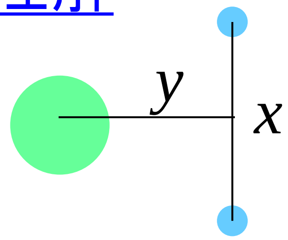
⇨ この3体ハミルトニアンの基底状態を求め、密度分布を調べる:

（例えば）V_{nn} がないときの状態で展開し、展開係数を求める

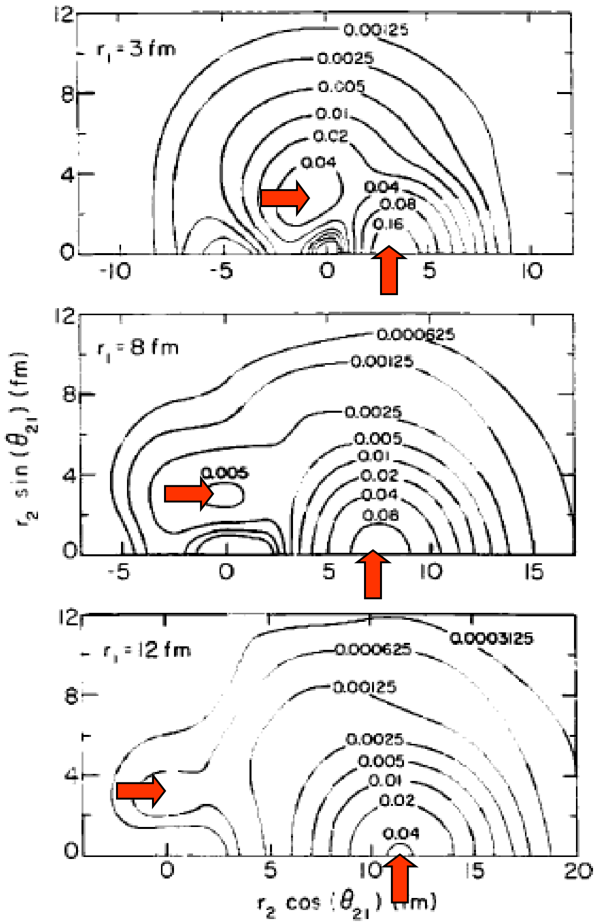
$$\boxed{\Psi_{gs}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = \mathcal{A} \sum_{nn'lj} \alpha_{nn'lj} \Psi^{(2)}_{nn'lj}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)}$$

$$\Psi^{(2)}_{nn'lj}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = \sum_m \langle jmj-m|00\rangle \psi_{nljm}(\boldsymbol{r}_1)\psi_{n'lj-m}(\boldsymbol{r}_2)$$

3体模型計算 ('90~): dineutron クラスター模型の微視的理解



$\rho_2(r_1, r_2, \theta_{12})$ for ^{11}Li



G.F. Bertsch, H. Esbensen,
Ann. of Phys., 209('91)327

$x^2 y^2 \rho_2(x, y)$ for ^{6}He

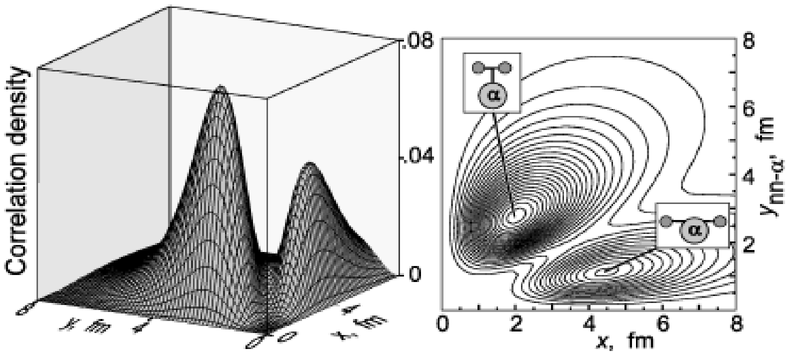


FIG. 1. Spatial correlation density plot for the 0^+ ground state of ^{6}He. Two components—di-neutron and cigarlike—are shown schematically.

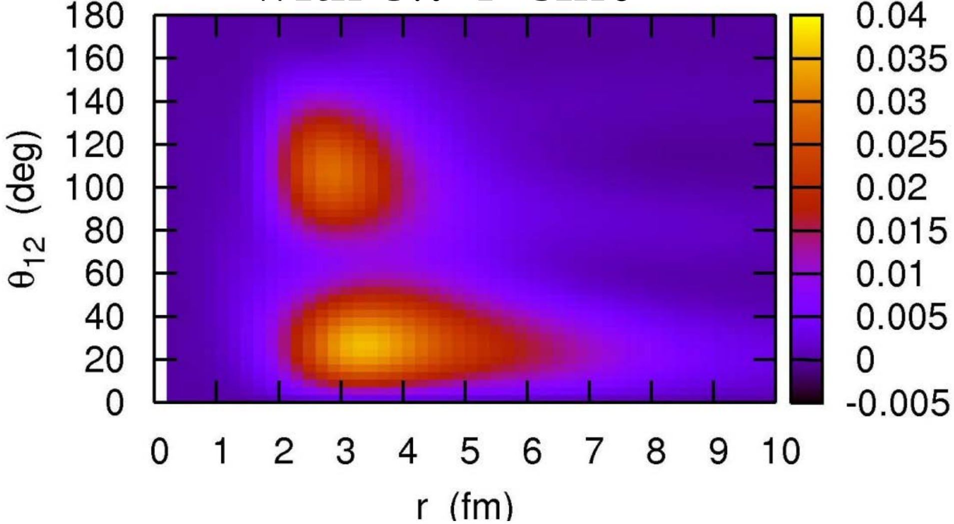
Yu.Ts. Oganessian, V.I. Zagrebaev,
and J.S. Vaagen, *PRL82('99)4996*
M.V. Zhukov et al., *Phys. Rep. 231('93)151*

"di-neutron" and *"cigar-like"* configurations

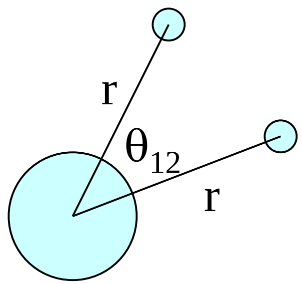
3体模型計算 ('90~): dineutron クラスター模型の微視的理解

^{11}Li

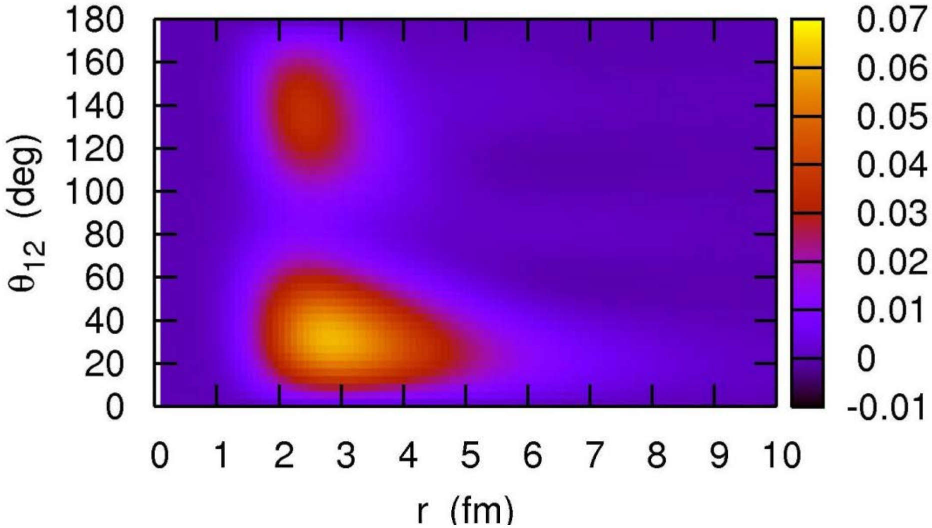
with $8\pi^2 r^4 \sin\theta$



別の representation



^{6}He



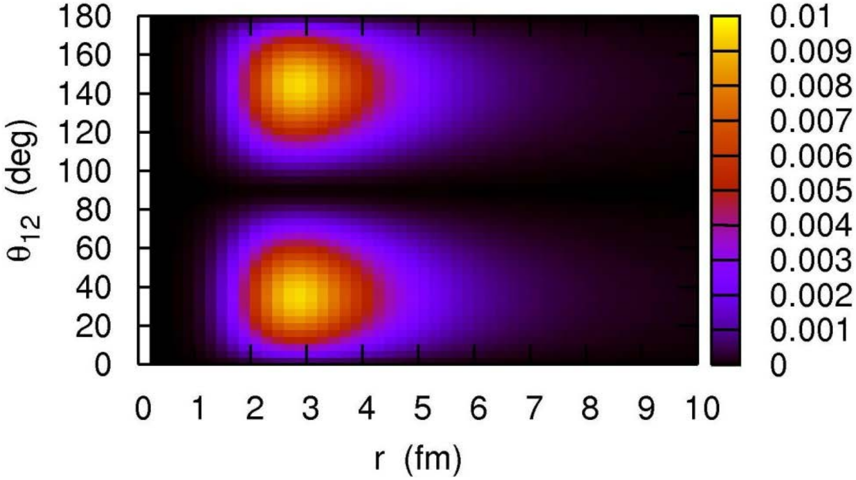
芯核と中性子の間の距離を
2つの中性子とも同じにとり、
r と θ の2次元プロット

K.Hagino and H. Sagawa, PRC72('05)044321

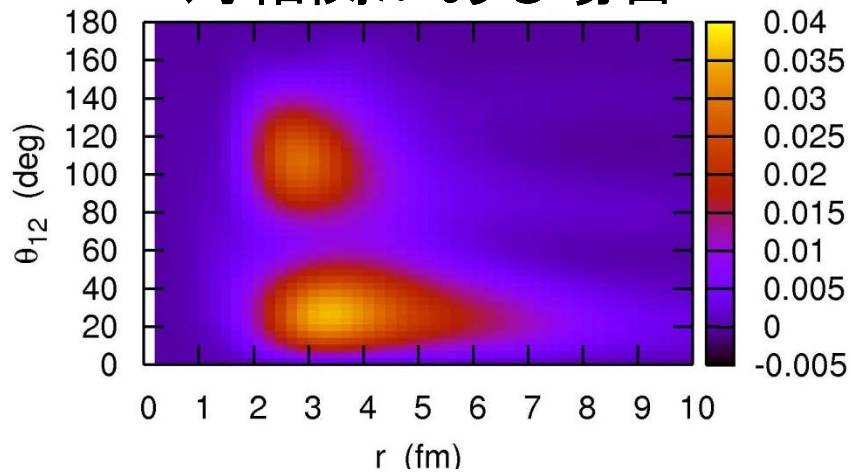
対相関力がある場合とない場合の比較:

^{11}Li

対相関がない場合 $[1p_{1/2}]^2$



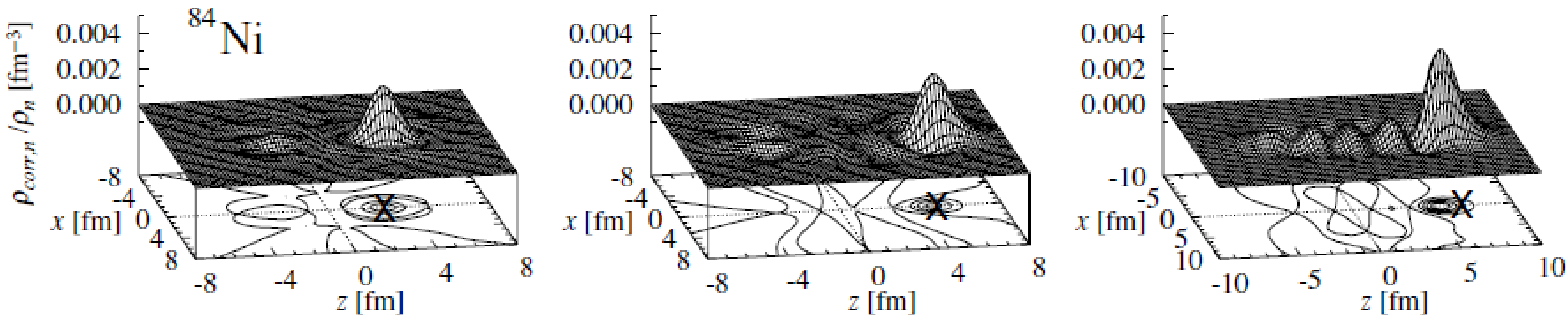
対相関がある場合



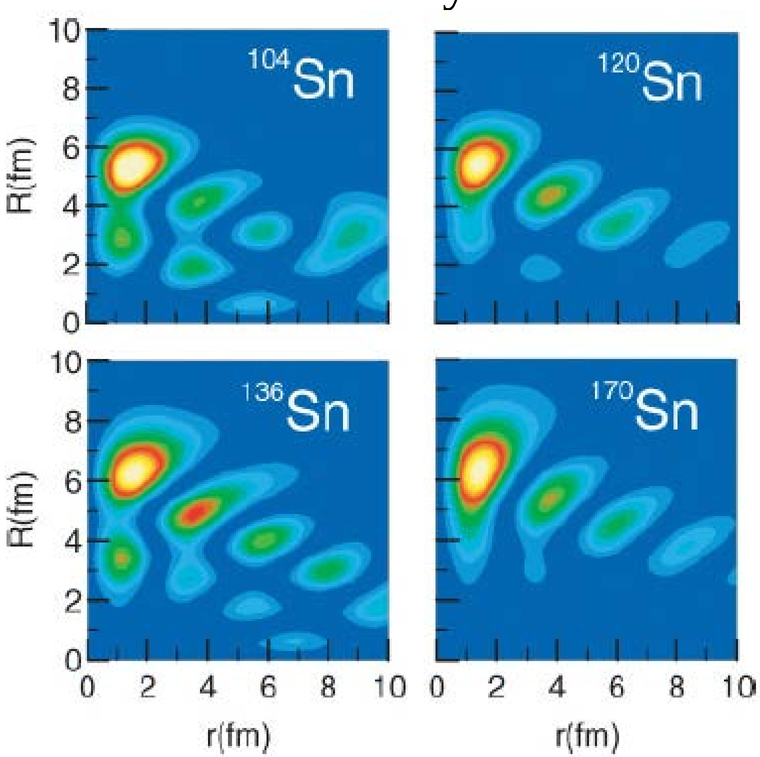
- 対相関がないと、2つの対称的なピーク($p_{1/2}$ 状態を反映)。
- 対相関があると、大きい θ にあるピークが抑制され、小さい θ にあるピークが増幅する(双中性子相関)。
- 小さい θ にあるピークのテールがのびる(ハロー構造)。

$\longleftarrow$ 対相関による連続状態との結合の効果

重い中性子過剰核の dineutron 相関

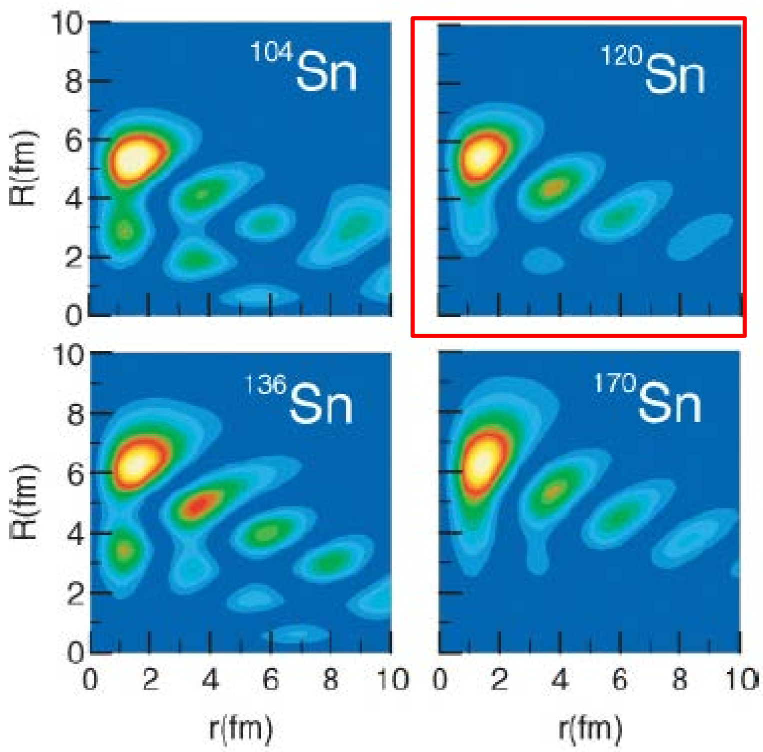


M. Matsuo, K. Mizuyama, and Y. Serizawa, PRC71(‘05)064326
Skyrme HFB



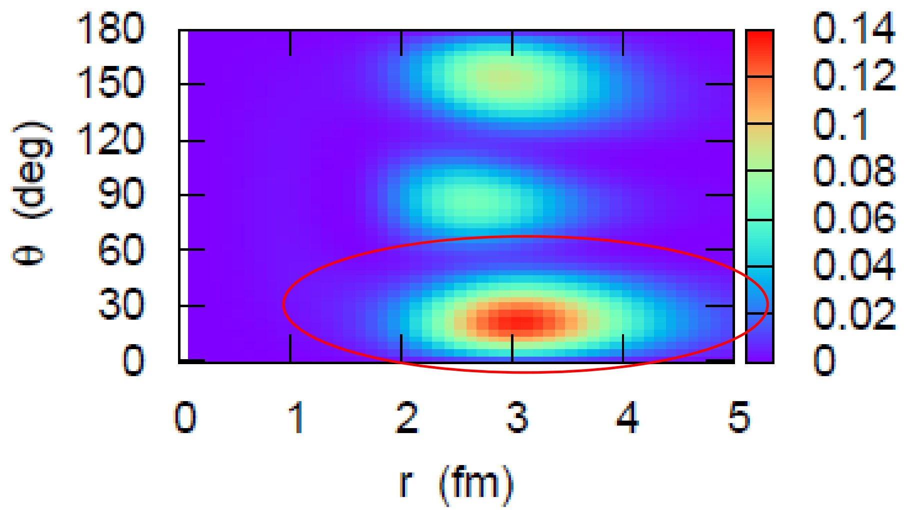
N. Pillet, N. Sandulescu, and P. Schuck,
PRC76(‘07)024310
Gogny HFB

（注）dineutron 相関は弱束縛に特有な現象というわけではない



N. Pillet, N. Sandulescu, and P. Schuck, PRC76(‘07)024310

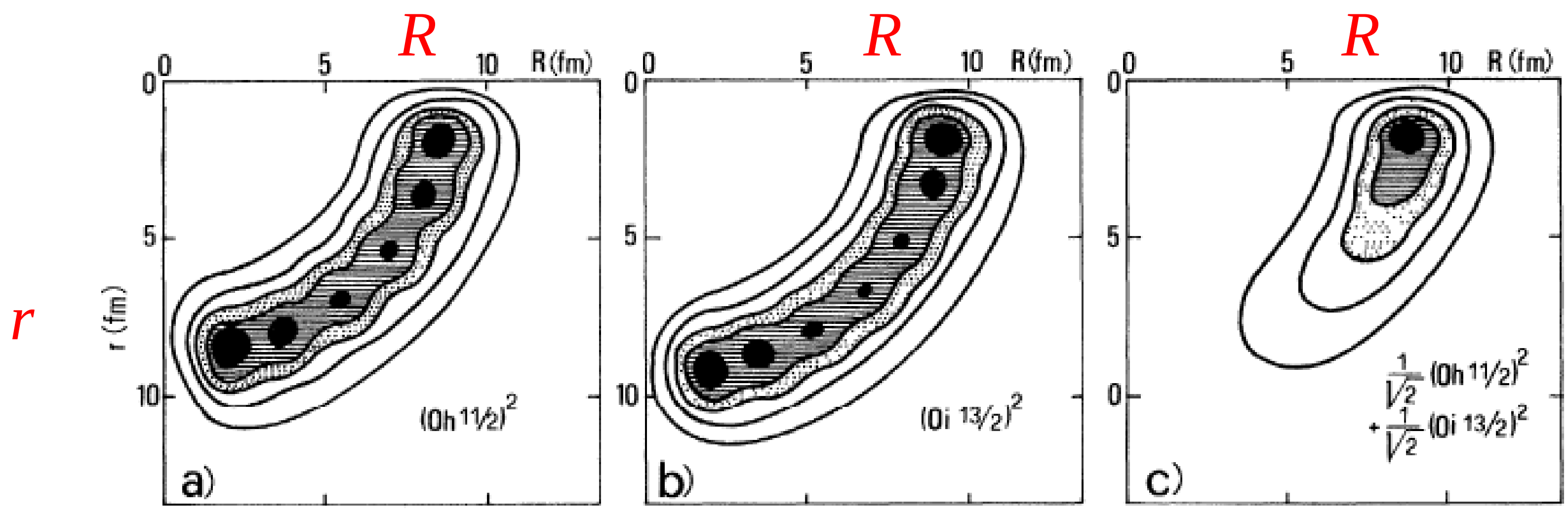
^{18}O の3体模型計算



K. Hagino, H. Sagawa, and P. Schuck, J. of Phys. G37(‘10)064040

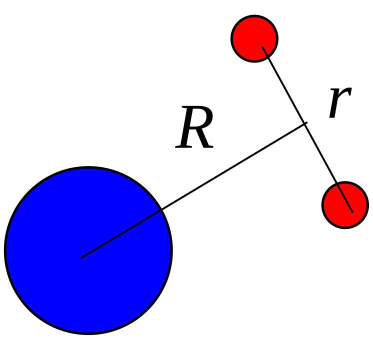
むしろ、対相関力による異なるパリティ状態の混合が本質的

dineutron 相関は異なるパリティ状態の混合によって生じる



$$(0h_{11/2})^2 \qquad (0i_{13/2})^2 \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}(0h_{11/2})^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}(0i_{13/2})^2$$

F. Catara, A. Insolia, E. Maglione, and A. Vitturi, PRC29('84)1091



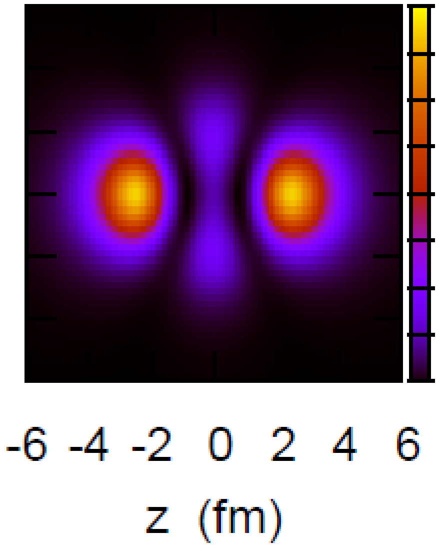
2中性子は空間的に局在(dineutron相関)

cf. Migdal, Soviet J. of Nucl. Phys. 16 (‘73) 238
Bertsch, Broglia, Riedel, NPA91(‘67)123

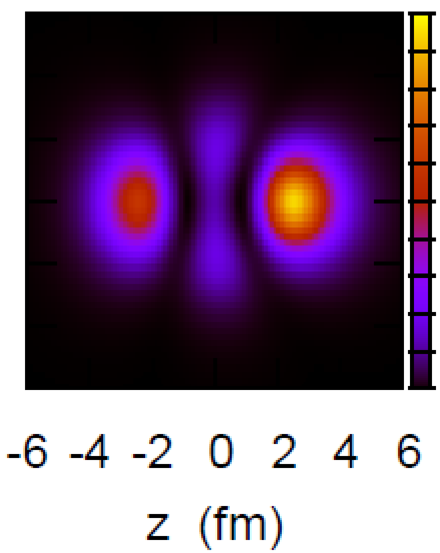
弱束縛核

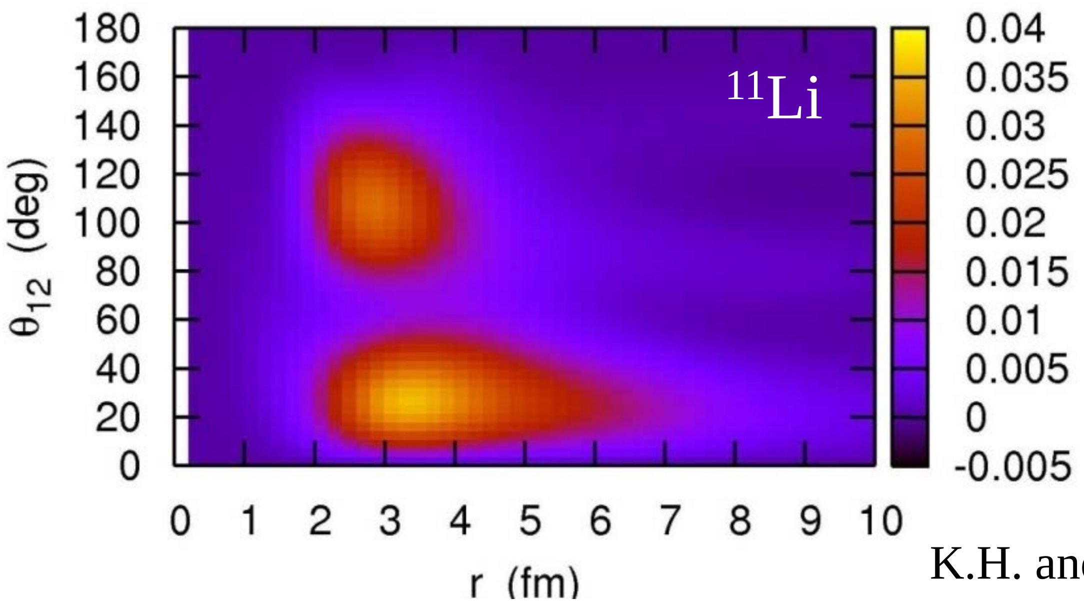
→連続状態のためにパリティ混合が起きやすい
＋ 表面領域における対相関力の増大
→dineutron 相関が増幅される

cf. - Bertsch, Esbensen, Ann. of Phys. 209(’91)327
- M. Matsuo, K. Mizuyama, Y. Serizawa, PRC71(‘05)064326



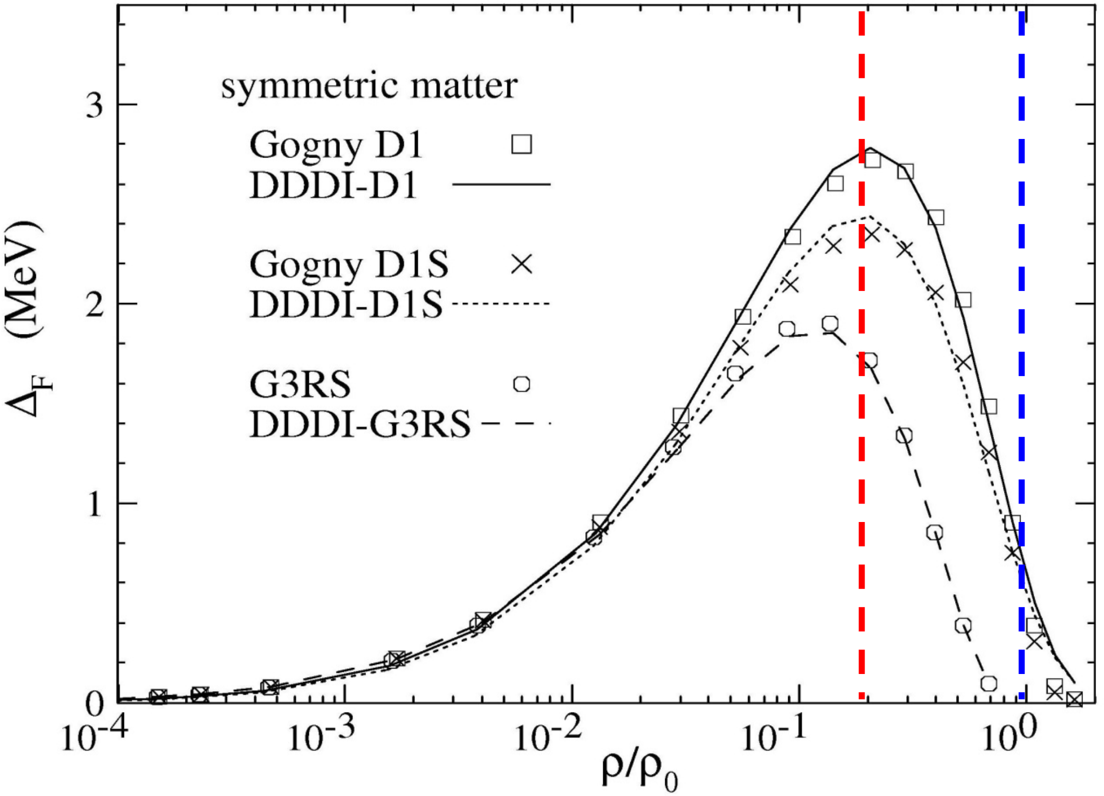
パリティ混合





K.H. and H. Sagawa, PRC72(’05)044321

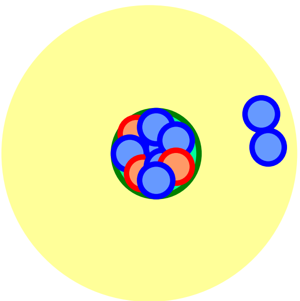
無限核物質の対ギャップ



M. Matsuo, PRC73('06)044309

運動量空間でのダイ・ニュートロン相関

$$\boxed{\Psi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \alpha\,\Psi_{s^2}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') + \beta\,\Psi_{p^2}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')} \longrightarrow \theta_r = 0\text{: 増大}$$

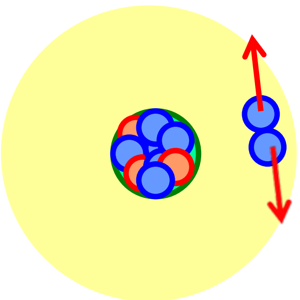


$\longrightarrow$ フーリエ変換

$$\tilde{\Psi}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}') = \int e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} e^{i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}'} \Psi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\,d\boldsymbol{r}\,d\boldsymbol{r}'$$

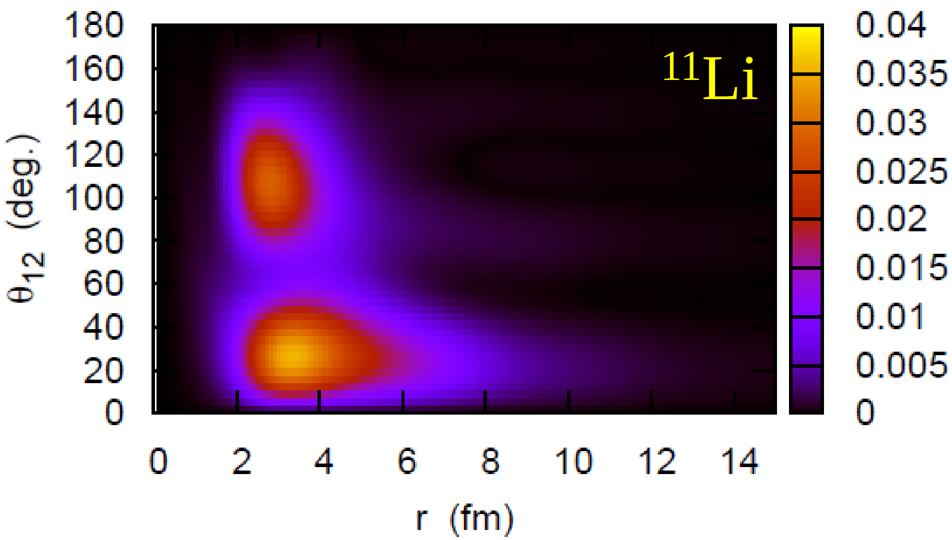
$$e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} = \sum_l (2l+1)\,i^l \ldots\ldots \longrightarrow \underset{\substack{\uparrow\\ r}}{i^l} \cdot \underset{\substack{\uparrow\\ r'}}{i^l} = i^{2l} = (-)^l$$

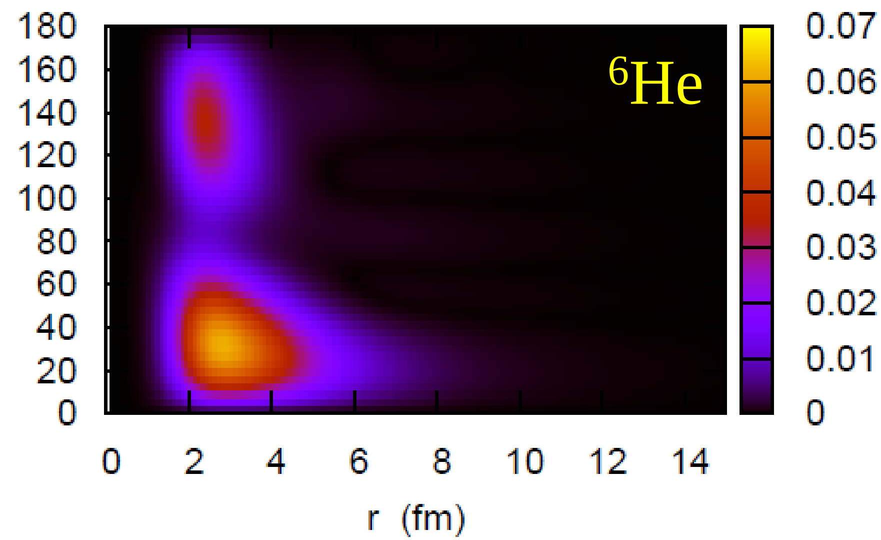
$$\boxed{\tilde{\Psi}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}') = \alpha\,\tilde{\Psi}_{s^2}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}') - \beta\,\tilde{\Psi}_{p^2}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}')} \longrightarrow \theta_k = \pi\text{: 増大}$$



座標空間での2粒子密度:

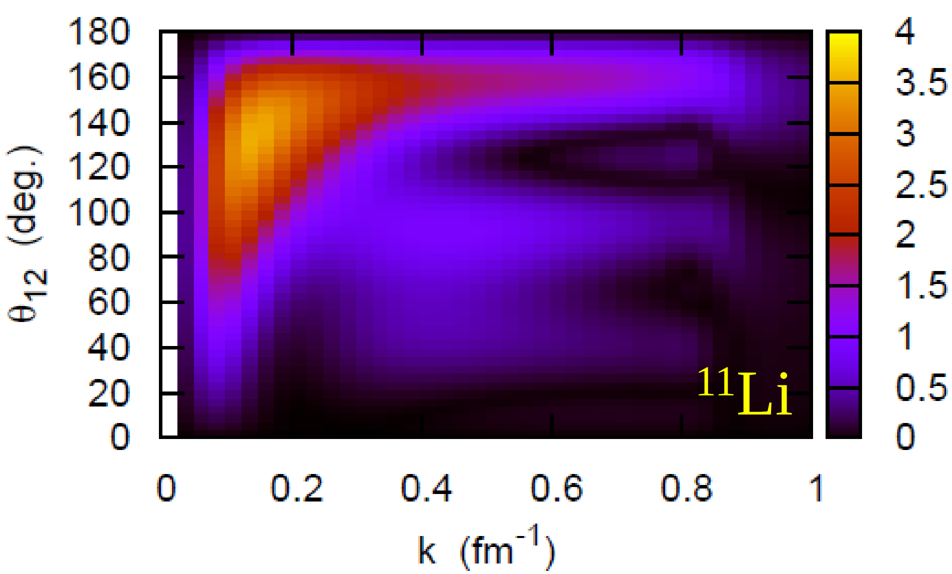
$$8\pi^2 r^4 \sin\theta \cdot \rho(r, r, \theta)$$

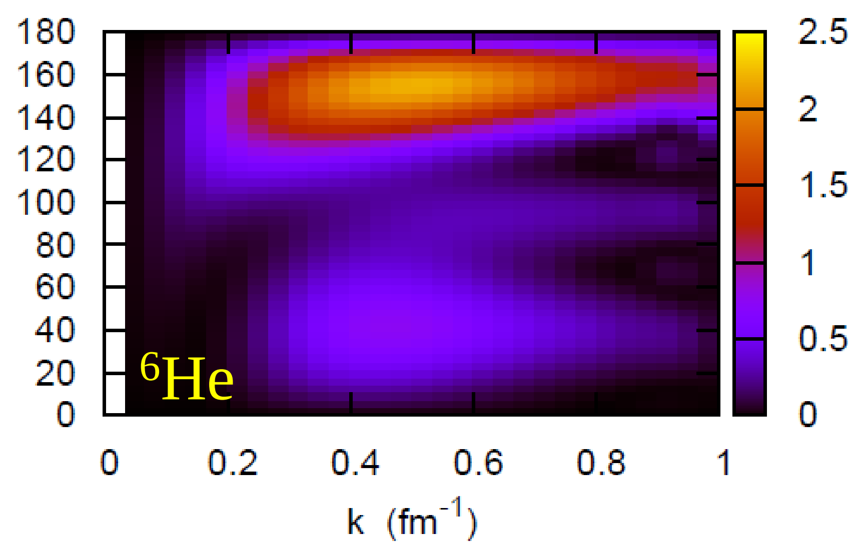




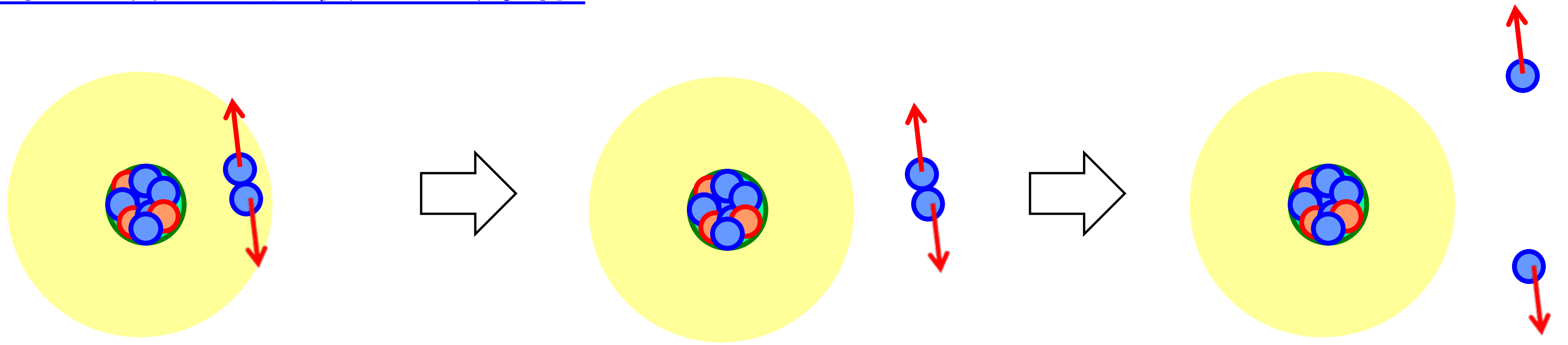
運動量空間での2粒子密度:

$$8\pi^2 k^4 \sin\theta \cdot \rho(k, k, \theta)$$

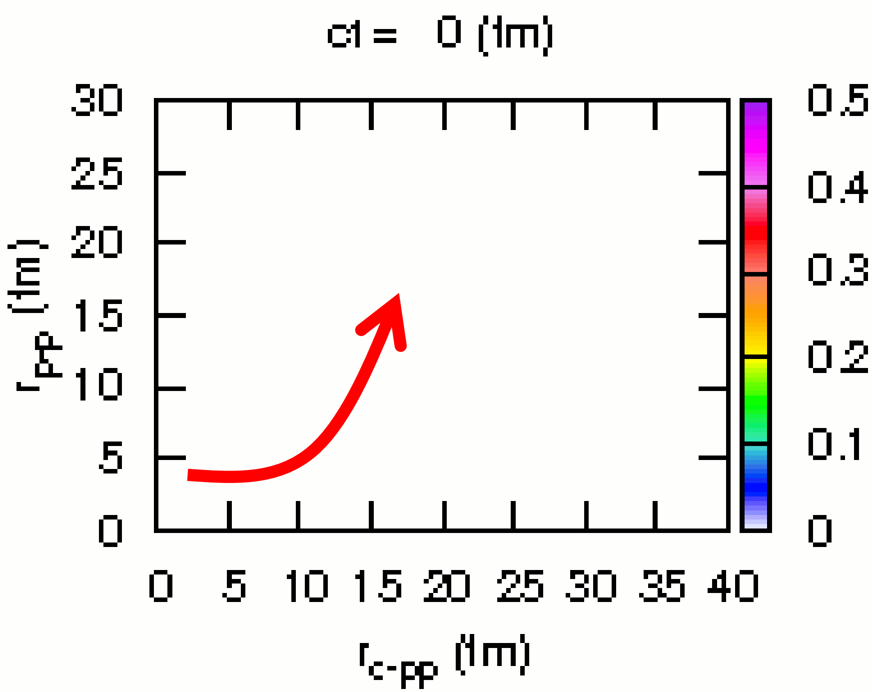




2粒子放出崩壊への帰結



^{6}Be　の2陽子放出崩壊：時間依存アプローチ

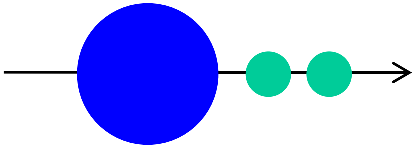


大石知広君の計算

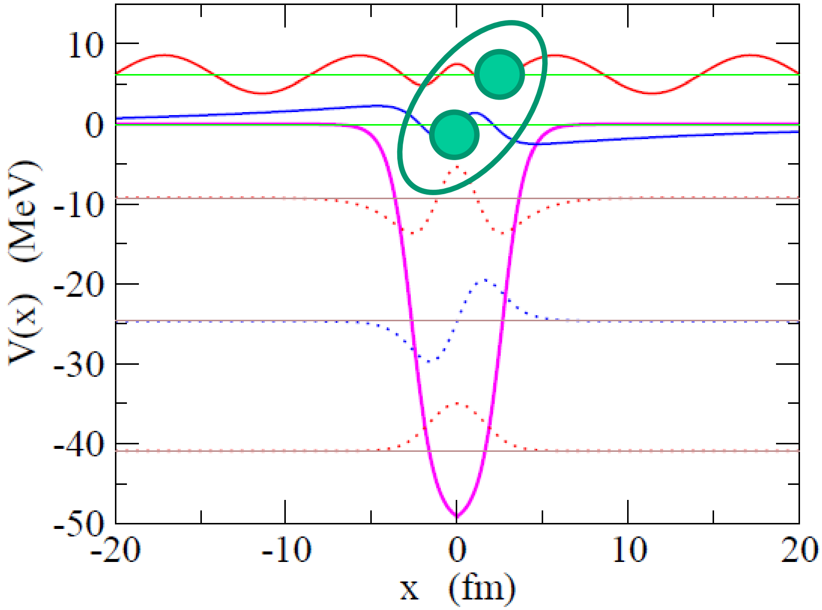
T. Oishi, K.H., H. Sagawa,
PRC90 ('14) 034303

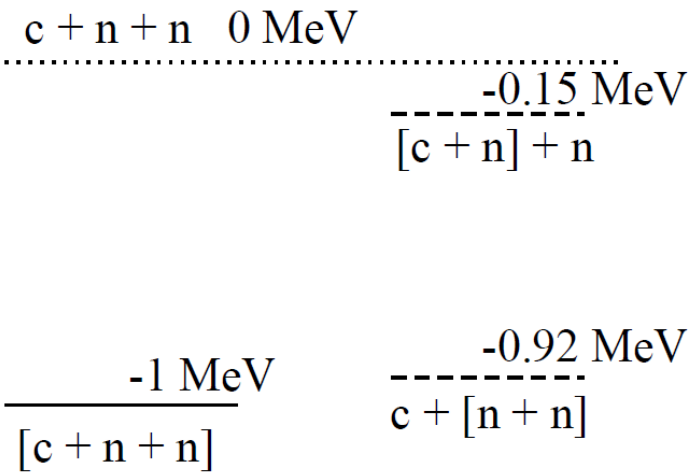
何故、異なるパリティが混ざると dineutron 相関が生じるのか?

2中性子ハロー核に対する1次元模型:



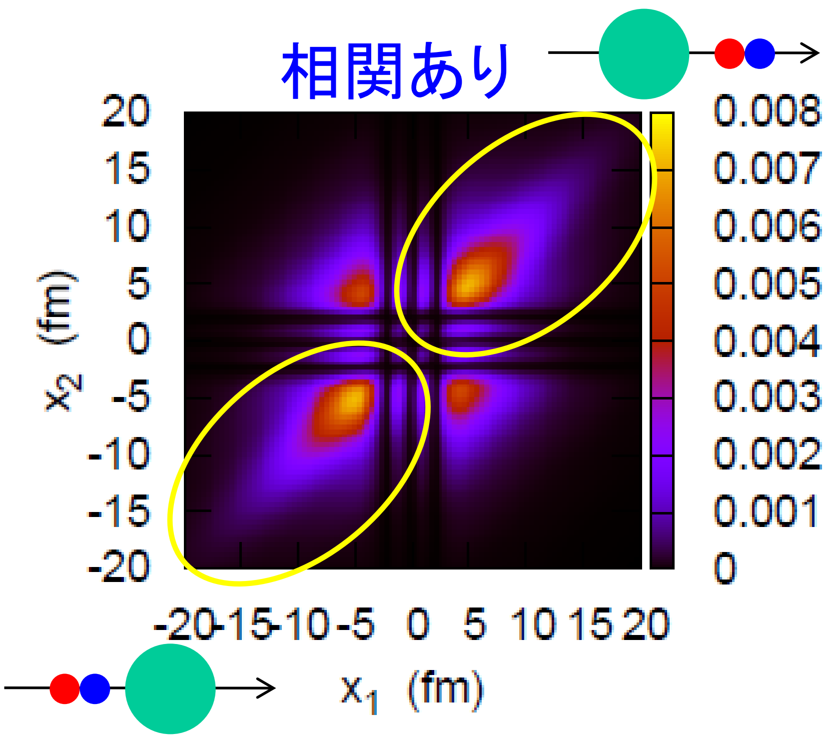
$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx_1^2} + V(x_1) - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx_2^2} + V(x_2) + v_{nn}(x_1, x_2)$$

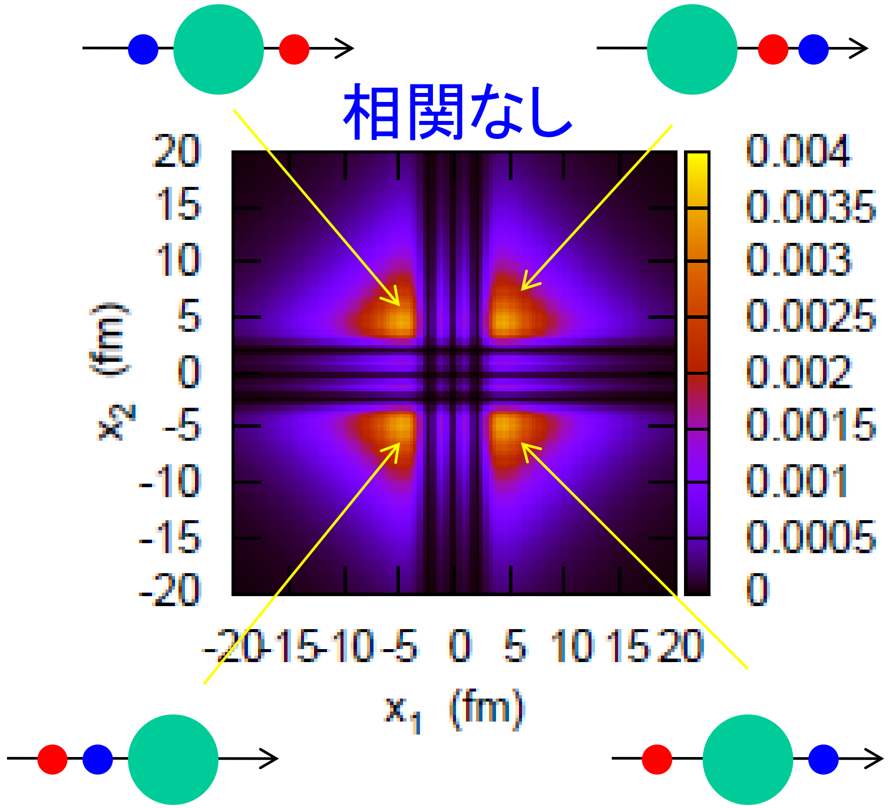




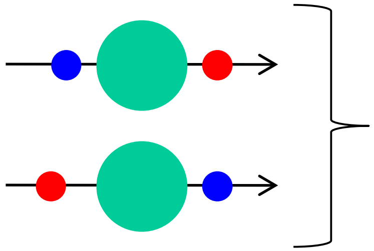
1次元ポテンシャル $V(x)$ の固有状態:正パリティ状態と負パリティ状態に分類される

何故、異なるパリティが混ざると dineutron 相関が生じるのか?





双中性子相関



大きく抑制

4つの対称的な分布

K. Hagino, A. Vitturi, F. Perez-Bernal, and H. Sagawa, J. Phys. G38 ('11) 015105

何故、異なるパリティが混ざると dineutron 相関が生じるのか?

波動関数の構造: $\Psi_{\rm gs}(x_1,x_2)=\sum_{n\leq n'}\alpha_{nn'}\Psi_{nn'}(x_1,x_2)$

$$\Psi_{nn'}(x_1,x_2) \;\propto\; \mathcal{S}[\phi_n(x_1)\phi_{n'}(x_2)] \times|S=0\rangle$$

$$\Psi_{\rm gs}(x_1,x_2)=\Psi_{\rm ee}(x_1,x_2)+\Psi_{\rm oo}(x_1,x_2)$$

$\Psi_{\rm ee}$: 2つの中性子とも
正パリティ状態

$\Psi_{\rm oo}$: 2つの中性子とも
負パリティ状態

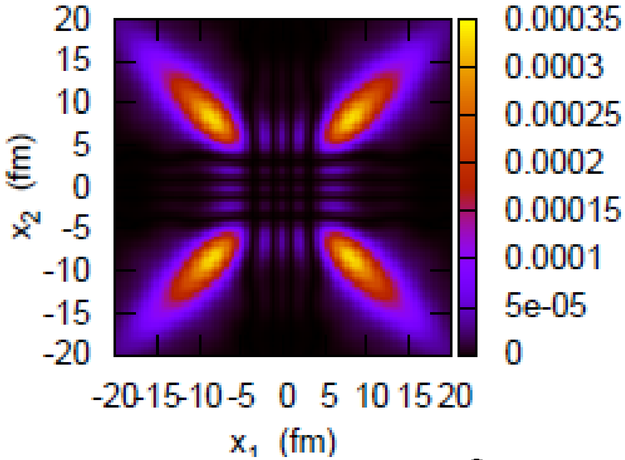
$$\begin{aligned}\longrightarrow\quad \rho_2(x_1,x_2) &= |\Psi_{\rm gs}(x_1,x_2)|^2 \\ &= |\Psi_{\rm ee}(x_1,x_2)|^2+|\Psi_{\rm oo}(x_1,x_2)|^2 \\ &\quad +2\Psi_{\rm ee}(x_1,x_2)\Psi_{\rm oo}(x_1,x_2)\end{aligned}$$

K. Hagino, A. Vitturi, F. Perez-Bernal, and H. Sagawa, J. Phys. G38 ('11) 015105

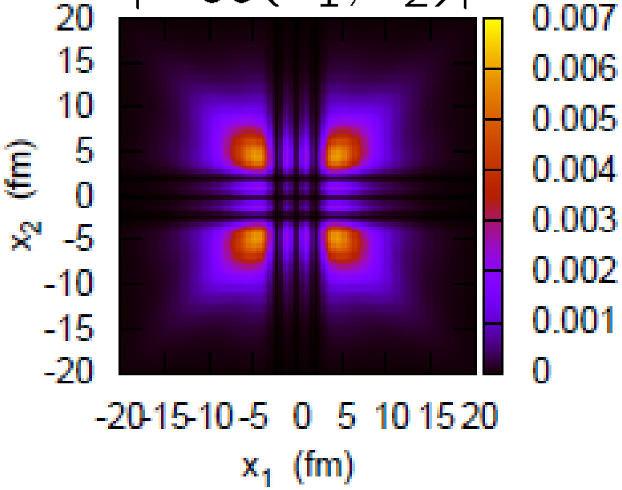
何故、異なるパリティが混ざると dineutron 相関が生じるのか?

$$\rho_2(x_1,x_2) = |\Psi_{ee}(x_1,x_2)|^2 + |\Psi_{oo}(x_1,x_2)|^2 + 2\Psi_{ee}(x_1,x_2)\Psi_{oo}(x_1,x_2)$$

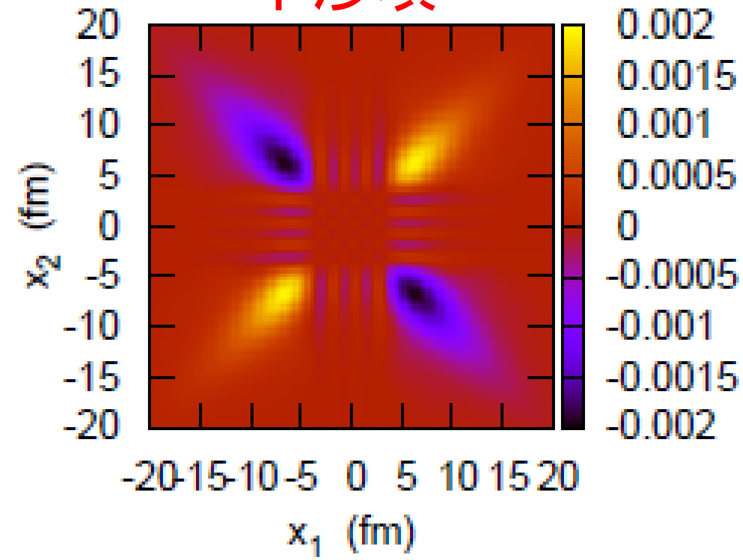
$|\Psi_{ee}(x_1,x_2)|^2$



$|\Psi_{oo}(x_1,x_2)|^2$



干渉項



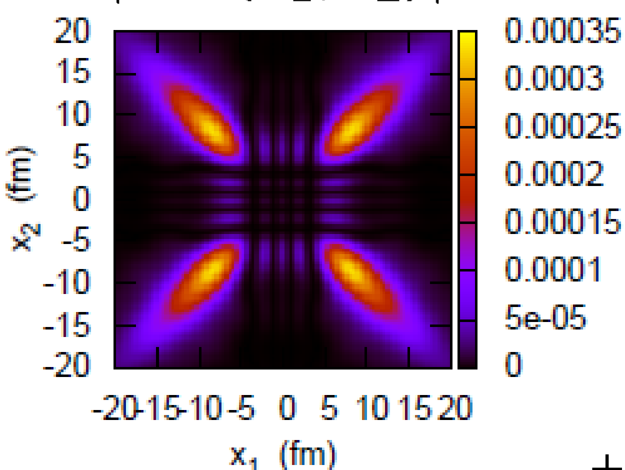
$$\Psi_{ee}(x_1,x_2)\Psi_{oo}(x_1,x_2) = -\Psi_{ee}(x_1,-x_2)\Psi_{oo}(x_1,-x_2)$$

K. Hagino, A. Vitturi, F. Perez-Bernal, and H. Sagawa,
J. Phys. G38 ('11) 015105

何故、異なるパリティが混ざると dineutron 相関が生じるのか?

$$\rho_2(x_1,x_2) \;=\; |\Psi_{\rm ee}(x_1,x_2)|^2+|\Psi_{\rm oo}(x_1,x_2)|^2 \\ +2\Psi_{\rm ee}(x_1,x_2)\Psi_{\rm oo}(x_1,x_2)$$

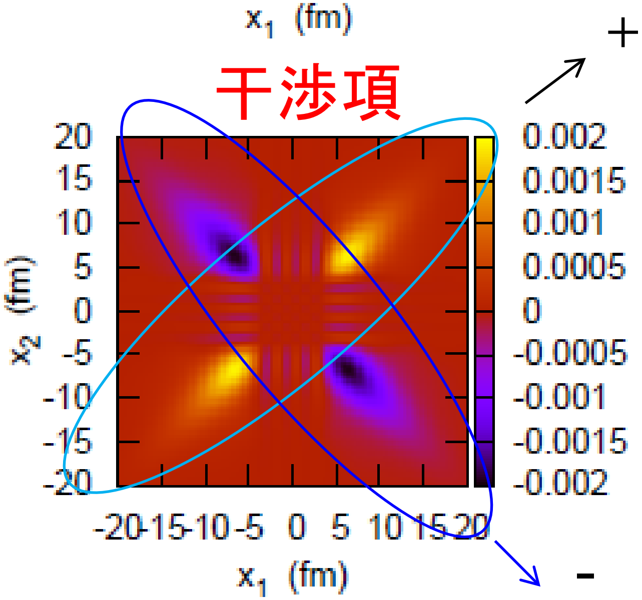
$$|\Psi_{\rm ee}(x_1,x_2)|^2$$

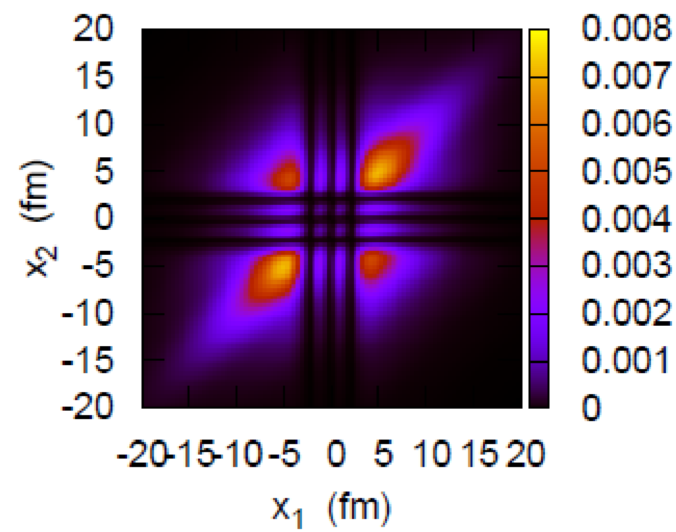


$$\Psi_{\rm ee}(-x_1,x_2) \;=\; \Psi_{\rm ee}(x_1,x_2)$$
$$\Psi_{\rm oo}(-x_1,x_2) \;=\; -\Psi_{\rm oo}(x_1,x_2)$$

$$\rho_2(-x_1,x_2) \\ =|\Psi_{\rm ee}(x_1,x_2)|^2+|\Psi_{\rm oo}(x_1,x_2)|^2 \\ -2\Psi_{\rm ee}(x_1,x_2)\Psi_{\rm oo}(x_1,x_2)$$

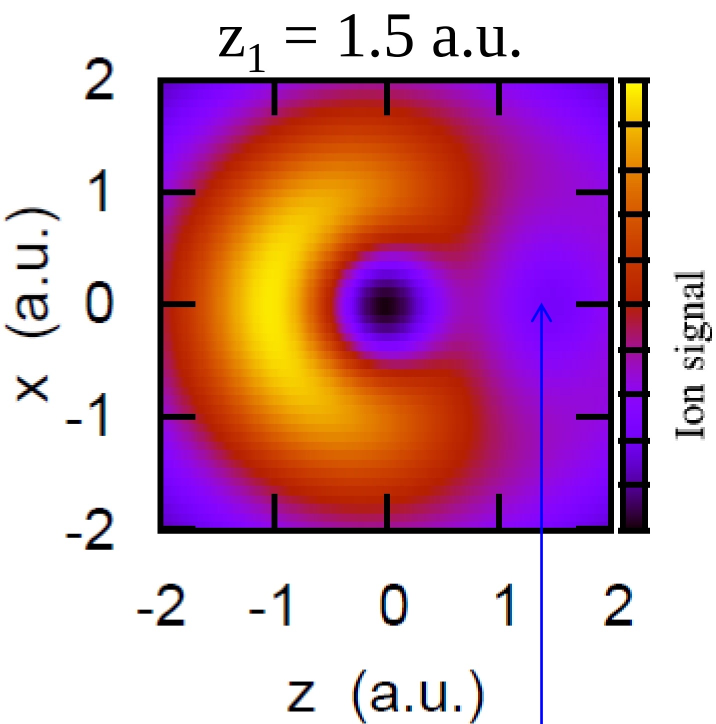
干渉項



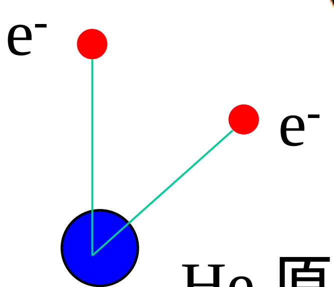


どのように相関をプローブするか?

cf. He 原子の場合

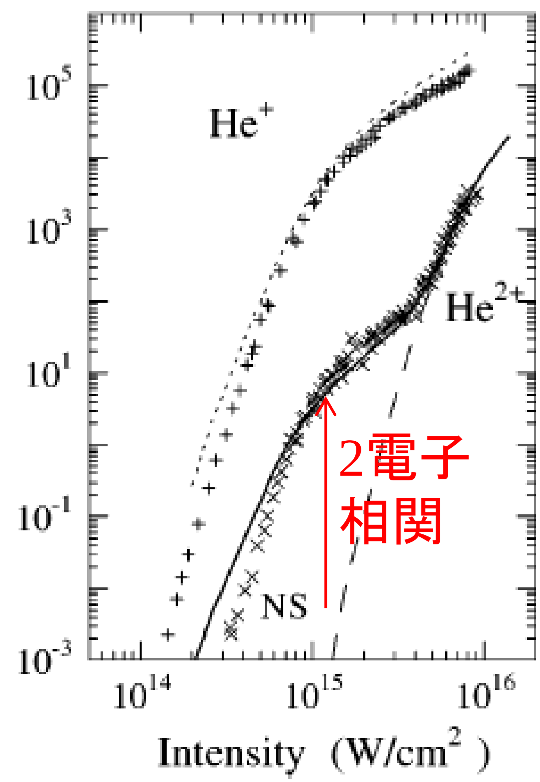


Coulomb hole



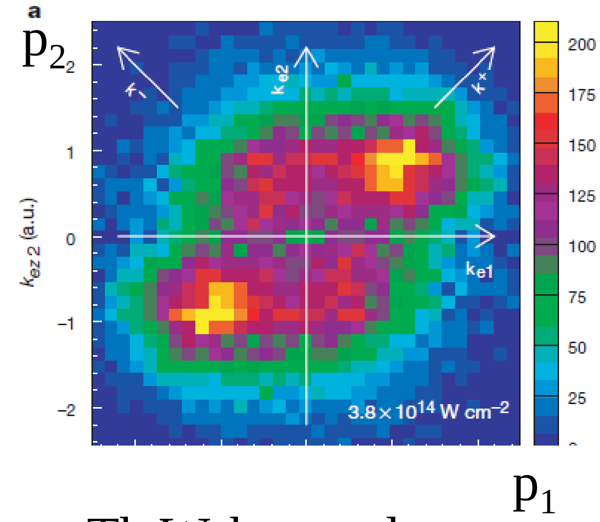
He 原子核

レーザー照射による2重イオン化



J.B. Watson et al., PRL78(‘97)1884

放出2電子の運動量分布(Ar イオンの場合)



Th.Weber et al., Nature 405 (‘00) 658

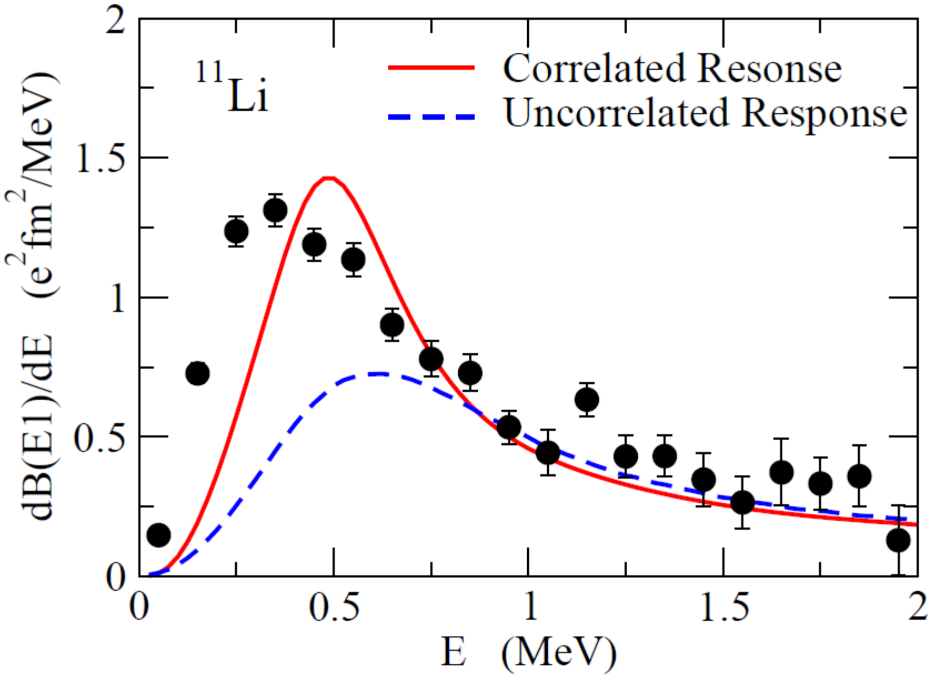
明らかな2電子相関の効果

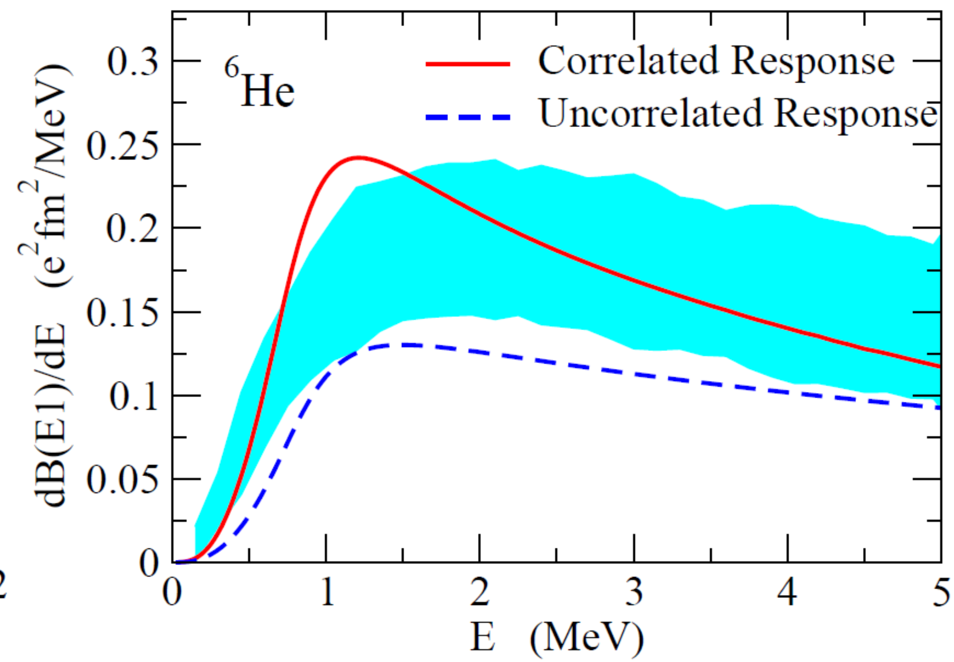
(ただし、基底状態における相関より励起状態における相関が主)

「クーロン再散乱」 →

2中性子ハロー核のクーロン分解

外的刺激を与えて放出2粒子（2中性子）を観測する ⟶ クーロン分解





実験:

T. Nakamura et al., PRL96('06)252502

T. Aumann et al., PRC59('99)1252

三体模型計算:

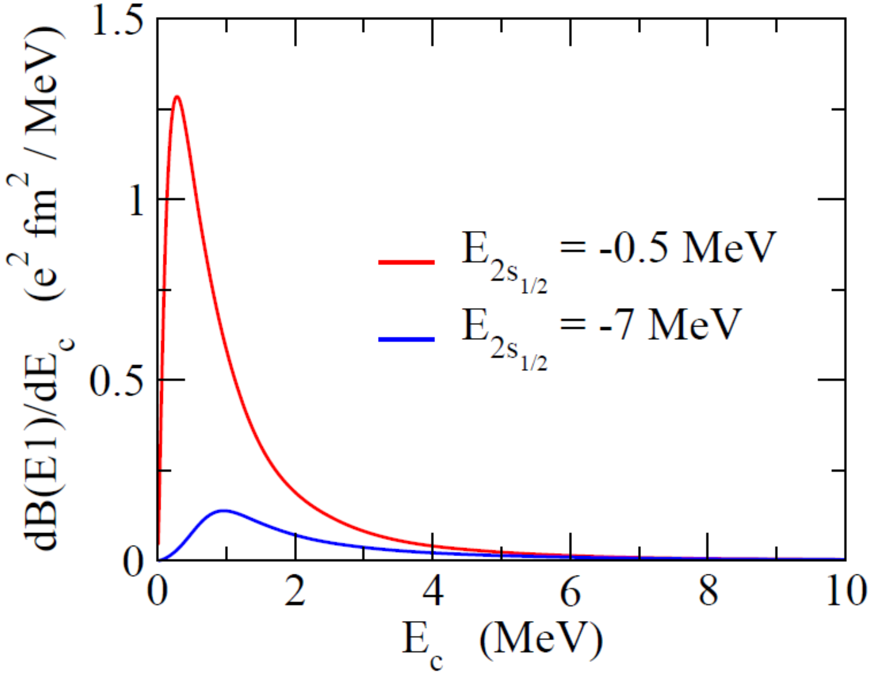
K.H., H. Sagawa, T. Nakamura, S. Shimoura, PRC80('09)031301(R)

cf. Y. Kikuchi et al., PRC87('13)034606 ⟵ ^{9}Li の構造

他にも ^{22}C, ^{14}Be, ^{19}B など (T. Nakamura et al.)

ボロミアン原子核のE1励起

1中性子ハロー核の場合

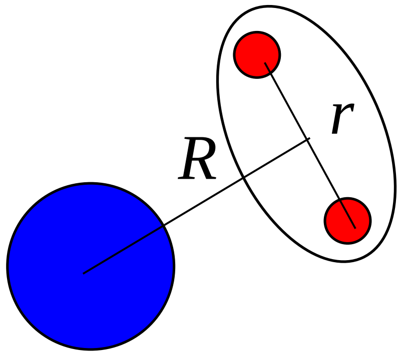


$$\hat{D}_\mu = e_{\rm E1} \cdot rY_{1\mu}(\theta, \phi)$$

$$e_{\rm E1} = \frac{Z_c}{A_c + 1} e$$

$$B_{\rm tot}(E1) = \int_0^\infty dE_c \frac{dB(E1)}{dE_c} = \frac{3}{4\pi} e_{\rm E1}^2 \langle r^2 \rangle_i$$

2中性子ハロー核の場合



$$\hat{D}_\mu = e_{\rm E1} \cdot RY_{1\mu}(\theta_R, \phi_R)$$

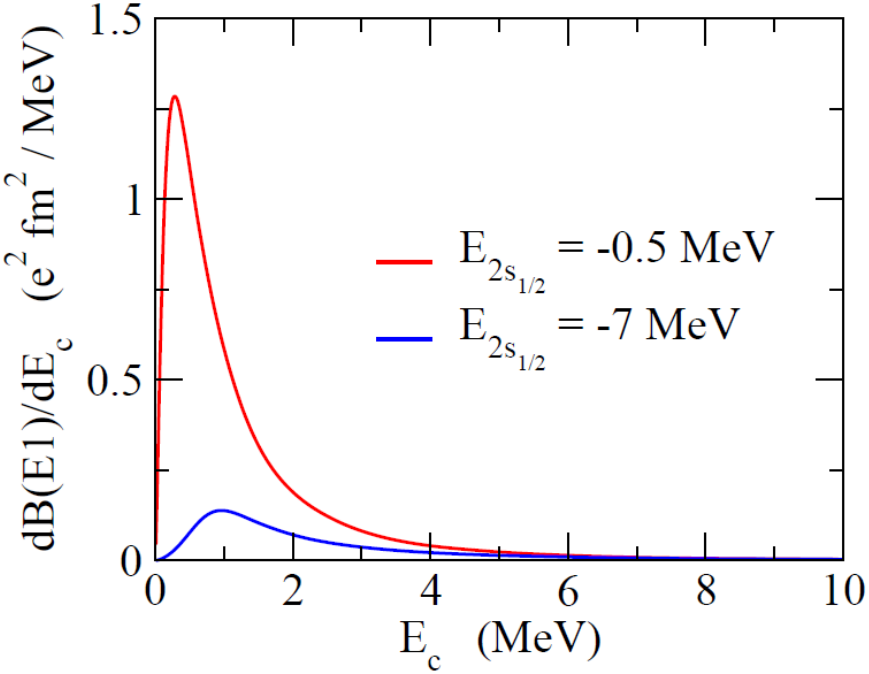
$$\boldsymbol{R} = (\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2)/2$$

$$e_{\rm E1} = \frac{2Z_c - 0 \cdot A_c}{A_c + 2} e = \frac{2Z_c}{A_c + 2} e$$

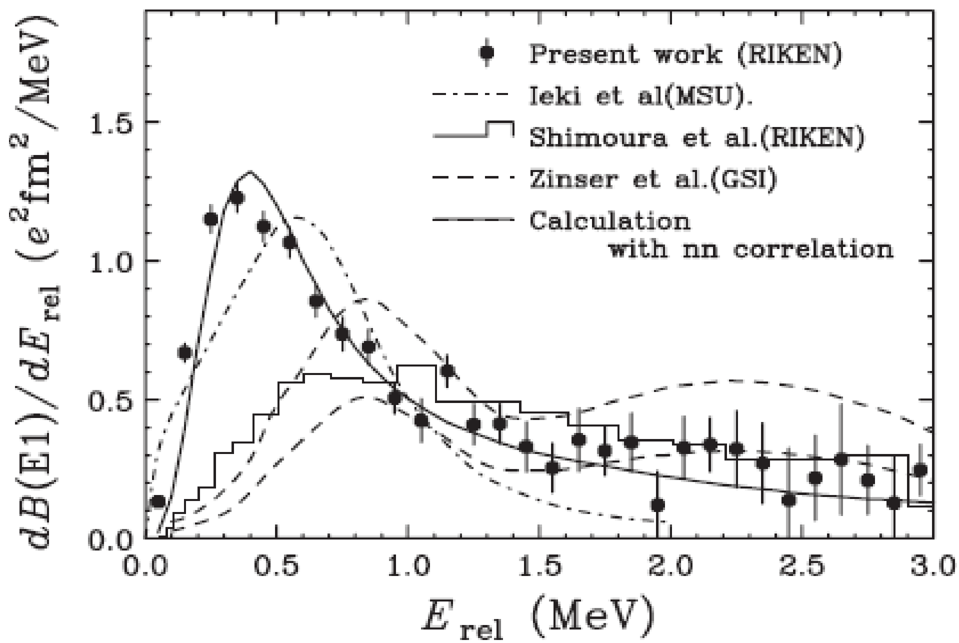
$$B_{\rm tot}(E1) = \frac{3}{4\pi} e_{\rm E1}^2 \langle R^2 \rangle = \frac{3}{\pi} \left(\frac{Z_c e}{A_c + 2} \right)^2 \langle R^2 \rangle$$

ボロミアン原子核のE1励起

1中性子ハロー核の場合



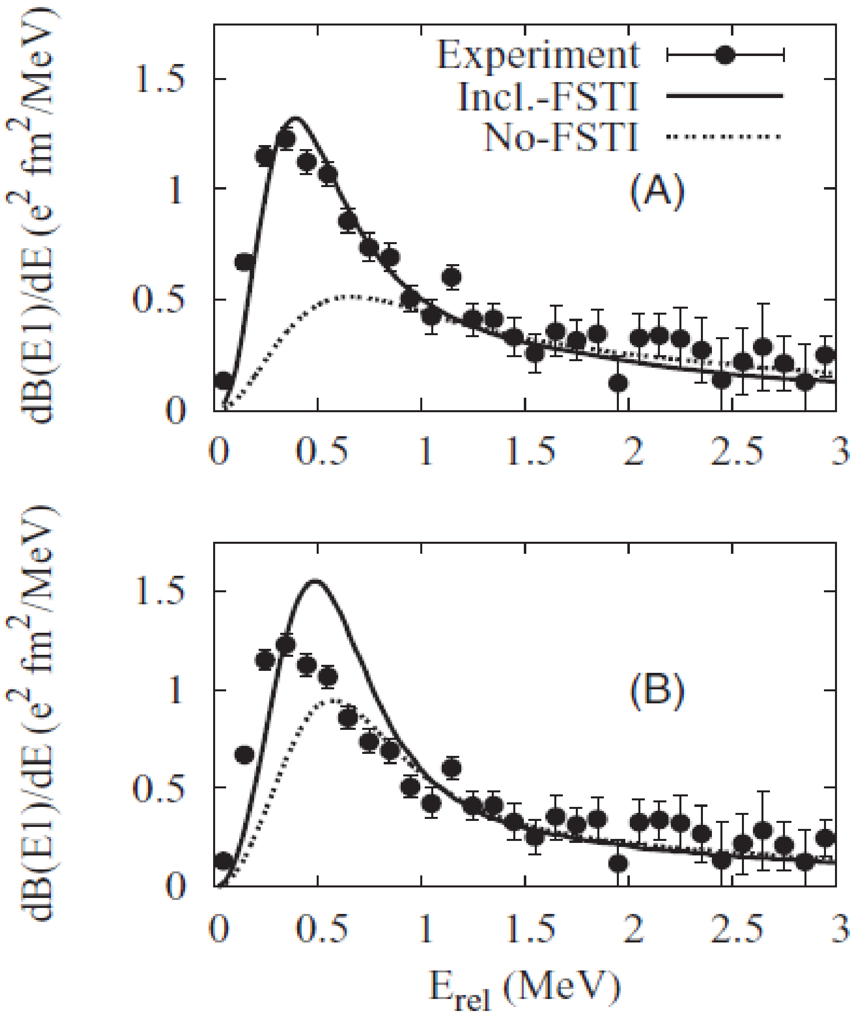
^{11}Li 原子核の実験データ



T. Nakamura et al., PRL96('06)252502

低エネルギー領域にするどいピーク

ボロミアン原子核のE1励起

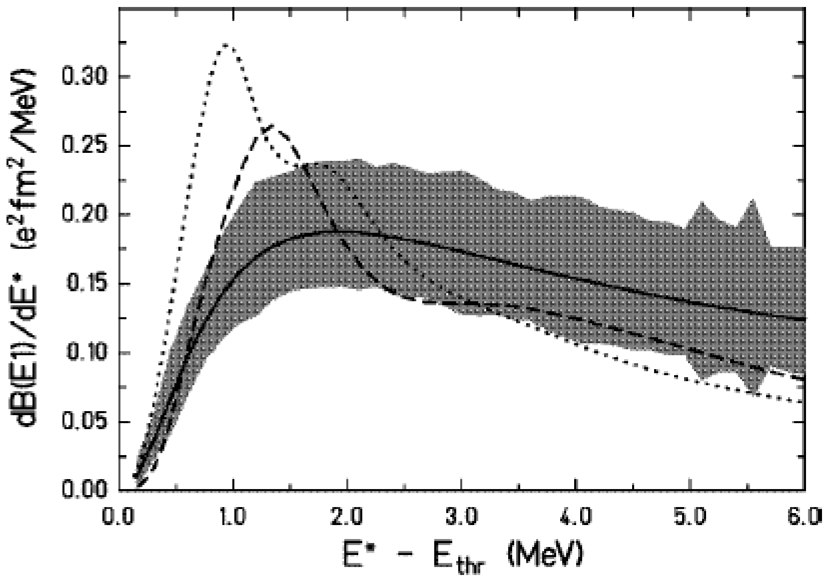


実験データは *nn* 相関を考慮しない限り説明できない

ダイ・ニュートロン相関の有力な実験的証拠

H. Esbensen, K. Hagino, P. Mueller, and H. Sagawa, PRC76(’07)024302

^{6}He の実験データ

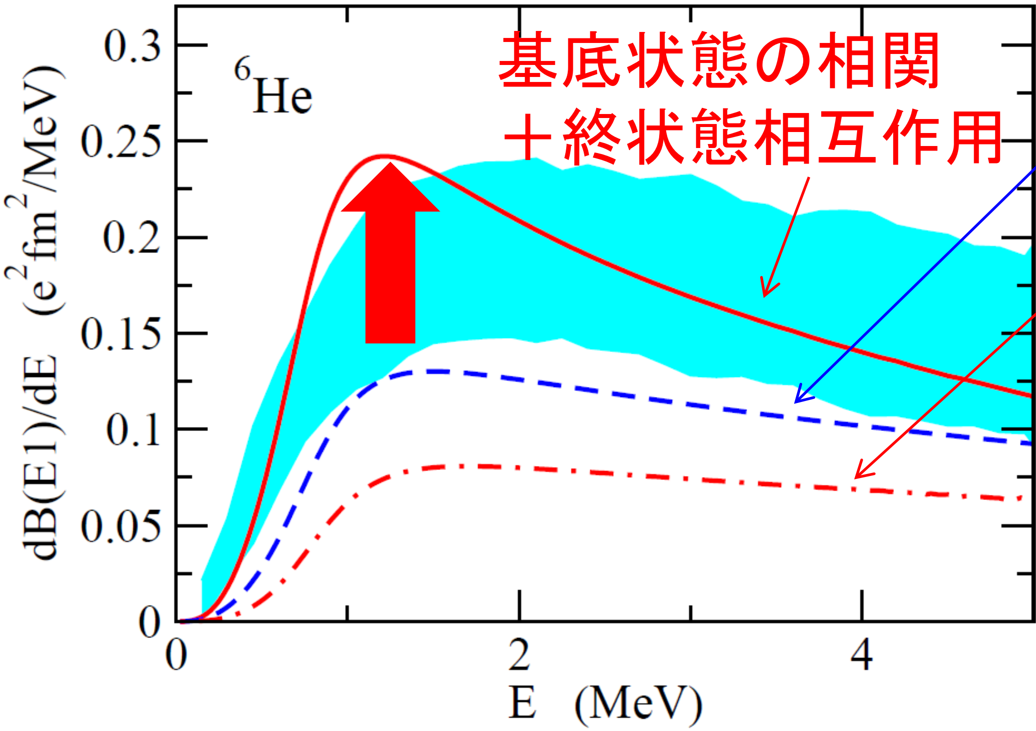


T. Aumann et al., PRC59(‘99)1252

TABLE II. Experimental values (Expt.) for the integrated ($E^* \leqslant 5$ MeV and $E^* \leqslant 10$ MeV) non-energy-weighted [$\Sigma B(E1)$] and energy-weighted [$\Sigma E^{**} B(E1)$] dipole strength. Corresponding theoretical values from “Ref.” and sum rule values are given for comparison.

Ref.	$\Sigma B(E1)$ (e^2 fm^2)	$\Sigma E^{**} B(E1)$ (e^2 fm^2 MeV)
Expt. ($E^* \leqslant 5$ MeV)	0.59 ± 0.12	1.9 ± 0.4
[7] ($E^* \leqslant 5$ MeV)	0.71	2.46
Expt. ($E^* \leqslant 10$ MeV)	1.2 ± 0.2	6.4 ± 1.3
[7] ($E^* \leqslant 10$ MeV)	1.02	4.97
Cluster sum rule	1.37 [7]	4.95
TRK sum rule		19.7

基底状態の相関? or 励起状態の相関?



基底状態の相関のみ
（終状態での nn 相互作用はゼロ）

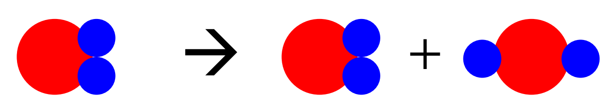
基底状態：odd-l のみ
（di-neutron 相関はなし）
＋終状態相互作用

cf. クラスター和則

$$B_{\rm tot}(E1) \sim \frac{3}{\pi}\left(\frac{Z_c e}{A_c+2}\right)^2 \langle R^2_{\rm c-2n}\rangle$$

✓終状態相互作用を切ると強度分布が高エネルギー側にシフト
→低エネルギー領域では強度分布が小さくなる
（ただし、和則があるので全強度は変化なし）

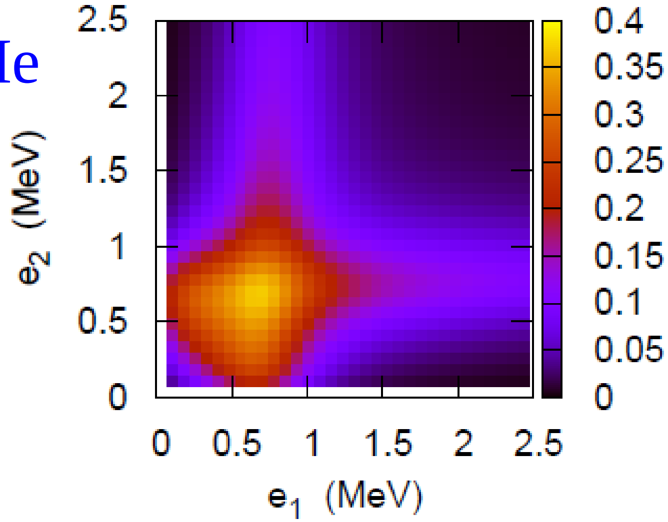
✓基底状態のdi-neutron相関を切るとE1 強度は小さくなる
← $R_{c\text{-}2n}$ が小さくなるため (3.63 → 2.61 fm)



基底状態の相関と励起状態の相関の両方が重要

放出2中性子のエネルギー分布

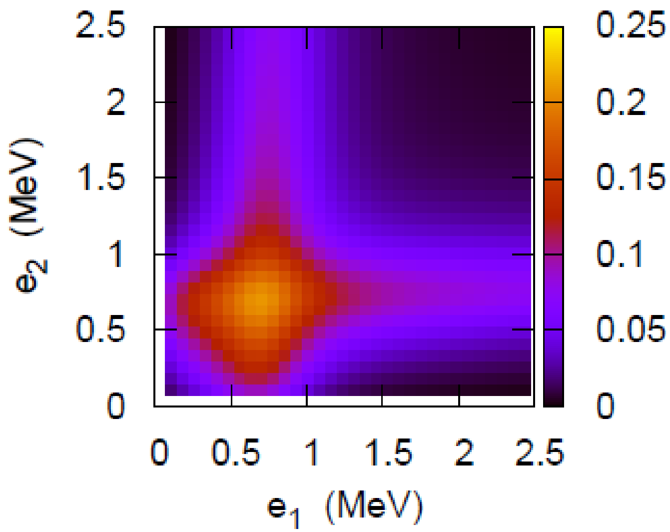
^{6}He



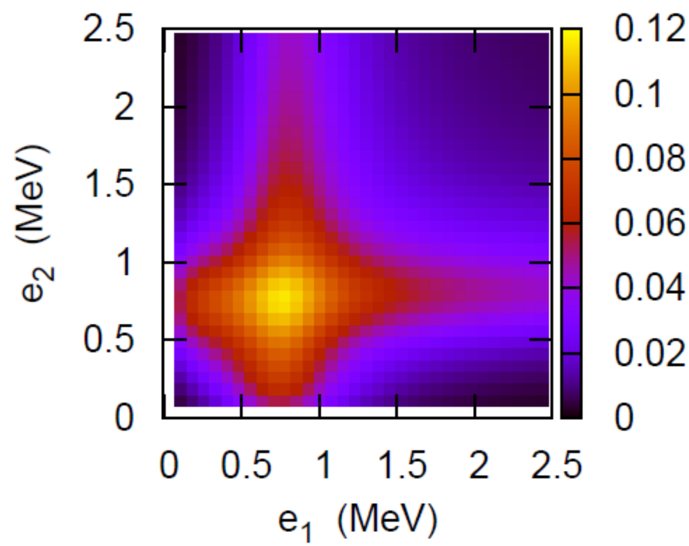
✓分布の仕方は nn 相関にあまり依らない（ただし絶対値は変化）
✓V_{nC} の性質に大きく依存
✓^{11}Li でも ^{6}He でも同様

→ クーロン分解は2段階過程

$v_{nn} = 0$

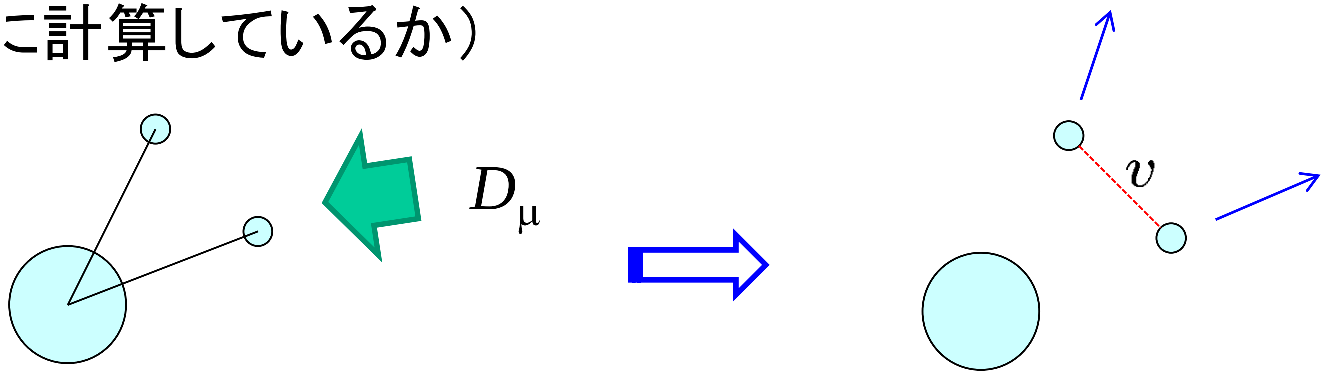


基底状態：di-neutron 相関なし（odd-l のみ）の場合



K.H., H. Sagawa, T. Nakamura, S. Shimoura, PRC80('09)031301(R)

（どのように計算しているか）



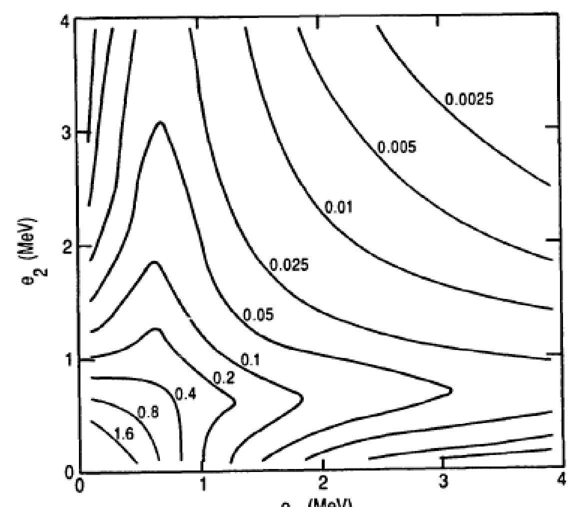
$$
\begin{aligned}
M(E1) &= \langle (j_1 j_2)^1_\mu | (1 - vG_0 + vG_0 vG_0 - \cdots) D_\mu | \Psi_{gs} \rangle \\
&= \langle (j_1 j_2)^1_\mu | \underbrace{(1 + vG_0)^{-1}}_{\text{FSI}} D_\mu | \Psi_{gs} \rangle
\end{aligned}
$$

双極子オペレーター

非相関wf

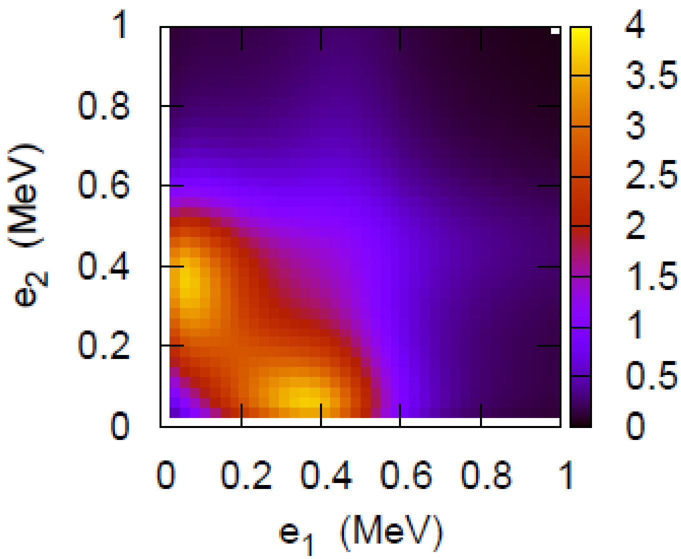
$$
G_0(E) = \sum_{\mu, f.st.} \frac{\left|(j_1 j_2)^1_\mu\right\rangle \left\langle (j_1 j_2)^1_\mu\right|}{e_1 + e_2 - E - i\eta}
$$

$$
\boxed{\frac{d^2 B(E1)}{de_1 de_2} = 3 \sum_{l_1 j_2 l_2 j_2} |M(E1)|^2 \frac{dk_1}{de_1} \frac{dk_2}{de_2}}
$$

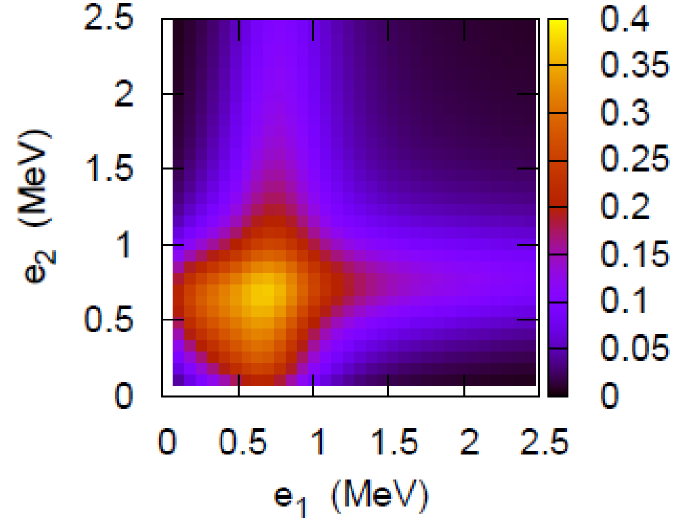


H. Esbensen and G.F. Bertsch, NPA542('92)310

^{11}Li

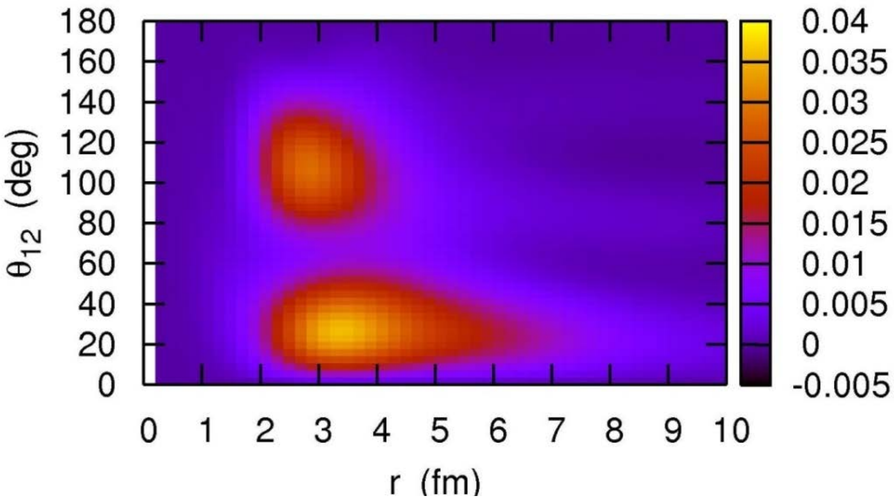


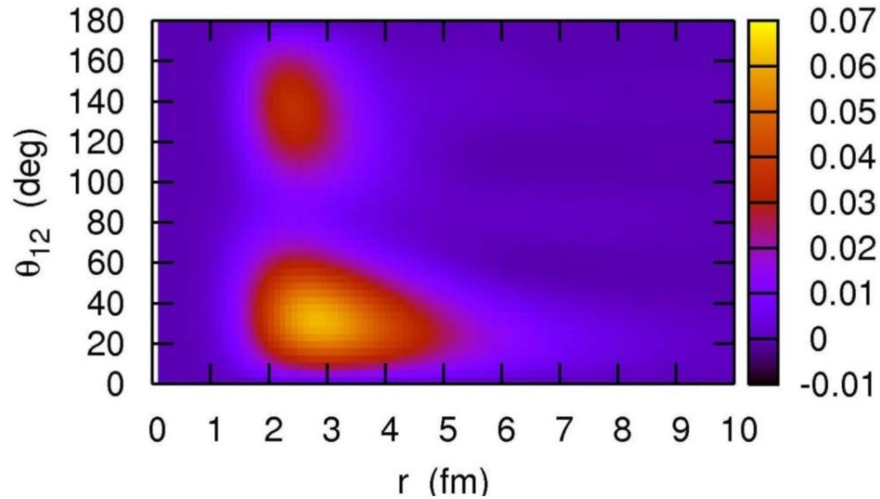
^{6}He



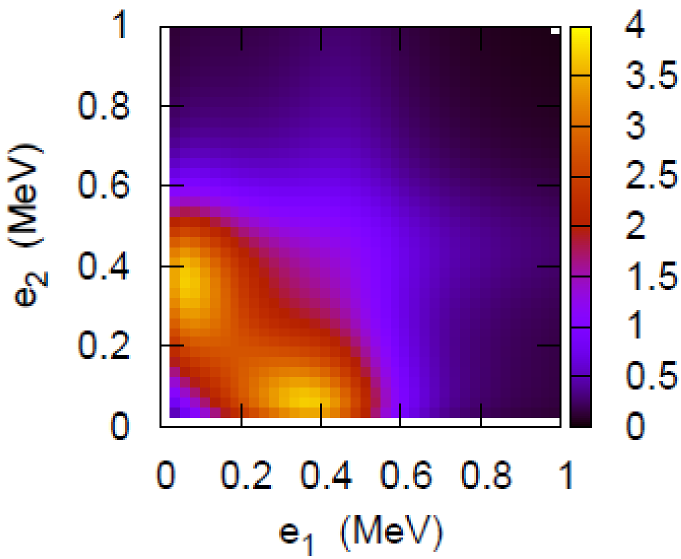
K.H., H. Sagawa, T. Nakamura, S. Shimoura, PRC80(‘09)031301(R)

cf. 基底状態の密度

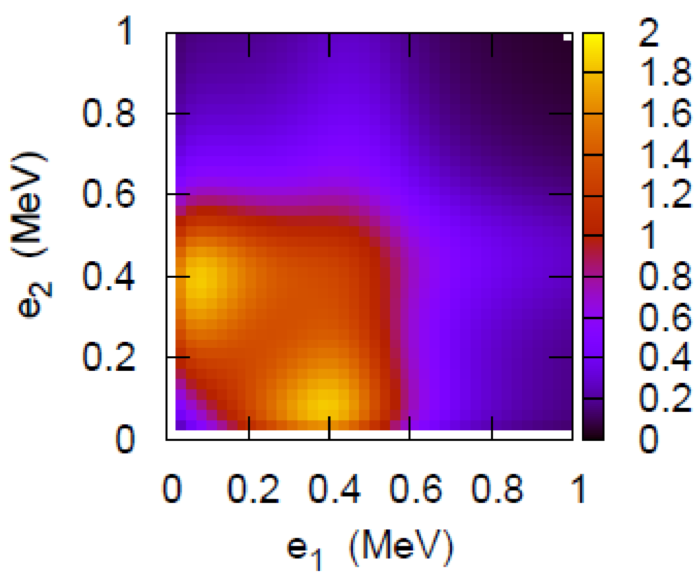




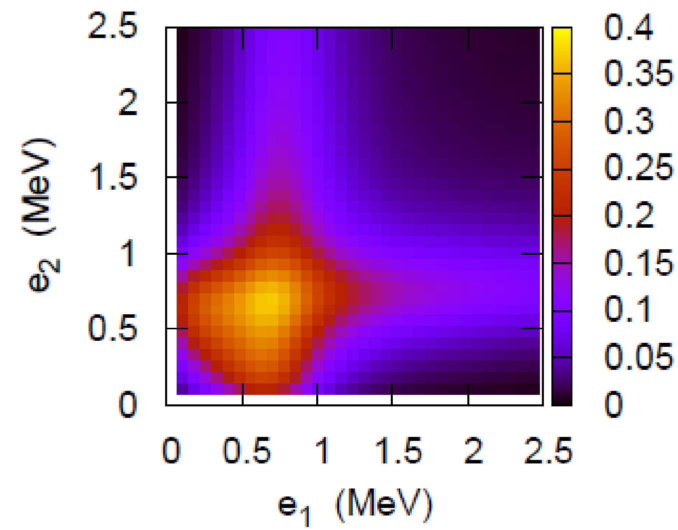
^{11}Li



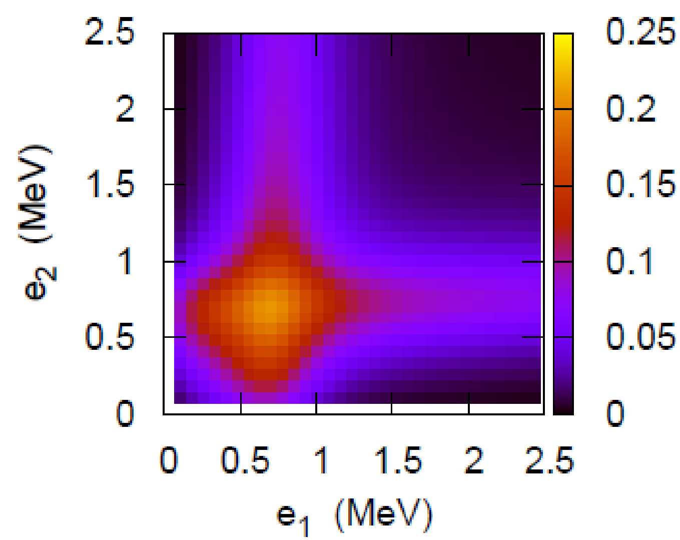
$v_{nn} = 0$



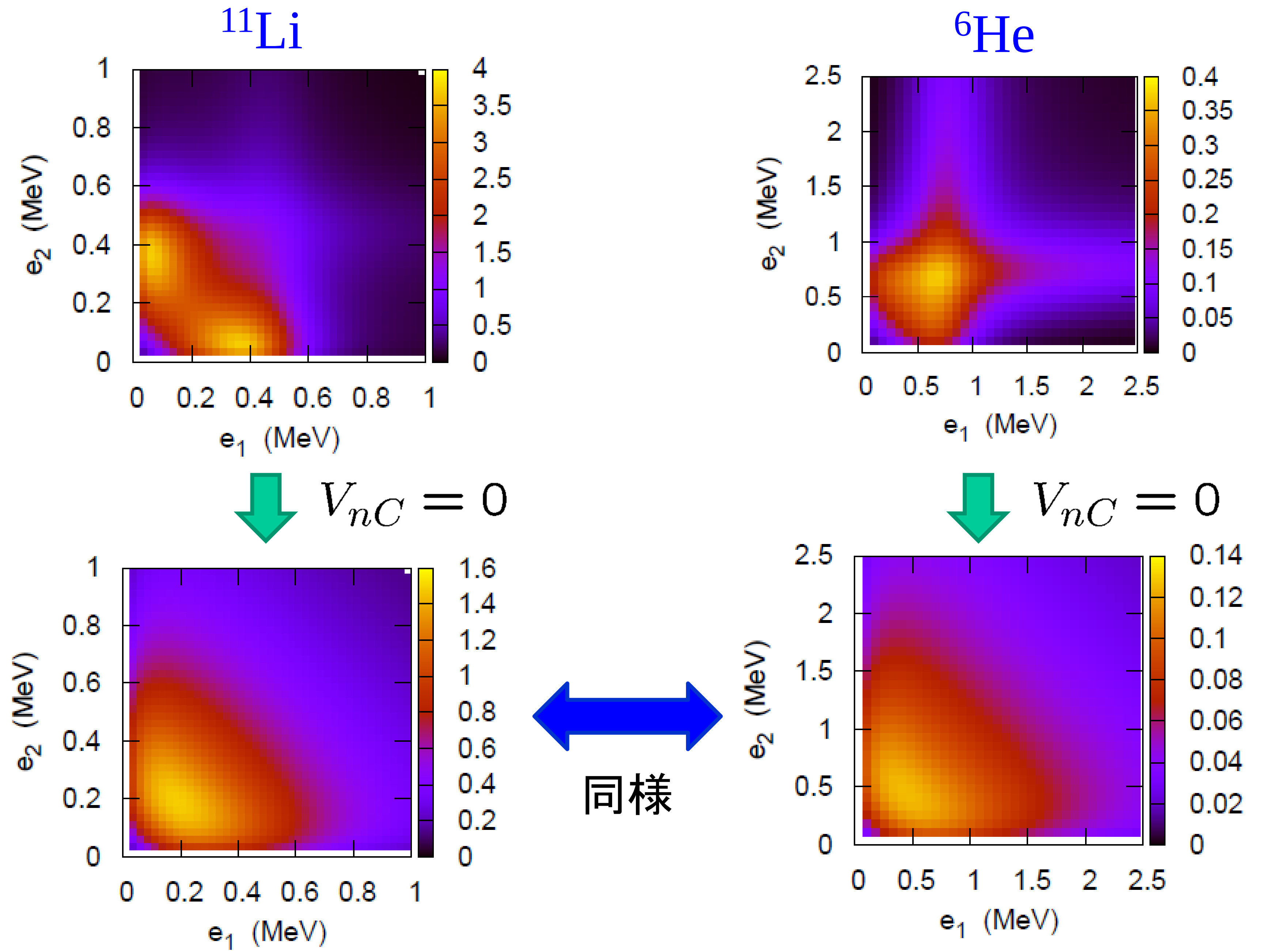
^{6}He



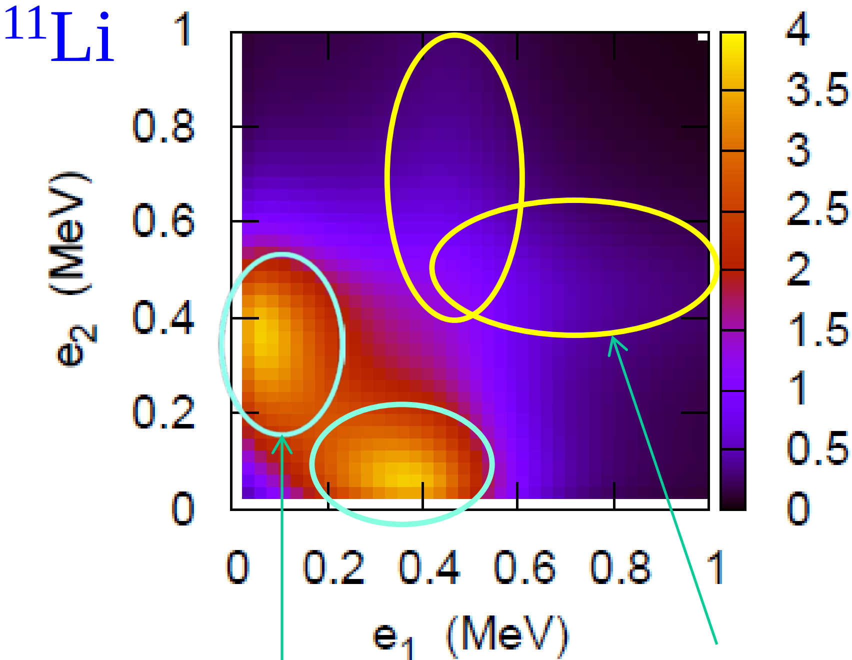
$v_{nn} = 0$

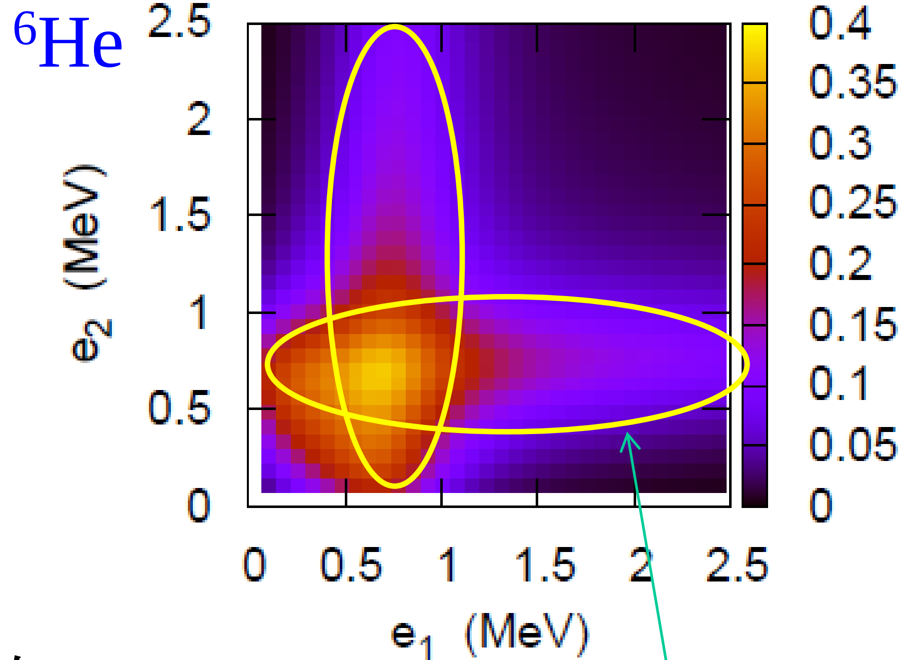


K.H., H. Sagawa, T. Nakamura, S. Shimoura, PRC80(‘09)031301(R)



K.H., H. Sagawa, T. Nakamura, S. Shimoura, PRC80('09)031301(R)





s波のヴァーチャル状態 ^{10}Li

^{10}Liの$p_{1/2}$共鳴状態（0.54 MeV）

^{5}He の $p_{3/2}$ 共鳴状態（0.91 MeV）

(s波の散乱長: a =-30 $^{+12}_{-31}$ fm)

(cf. s波の散乱長: a = +4.97 +/- 0.12 fm)

$$k \cot \delta = -\frac{1}{a} + \cdots$$

＊E=0 に束縛状態があると a は＋に発散、その手前では－に発散

K.H., H. Sagawa, T. Nakamura, S. Shimoura, PRC80('09)031301(R)

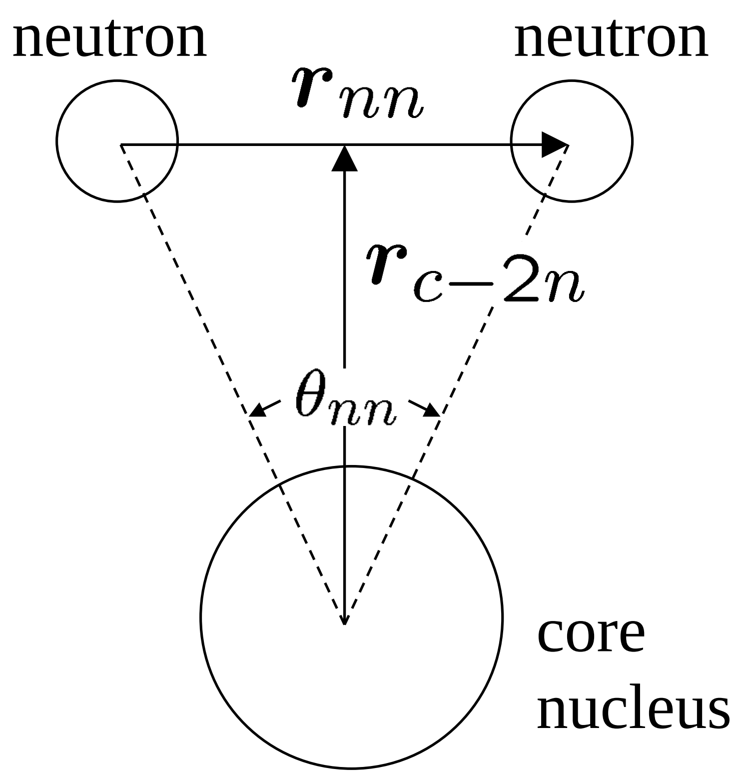
ボロミアン原子核の幾何学

実験データから2中性子の空間的配位を決められないか?

$r_{\text{c-2n}}$ と r_{nn} の情報があれば、2中性子の間の角度は

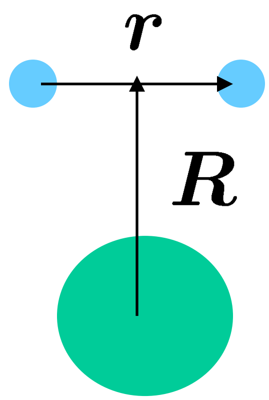
$$\cos\frac{\theta_{\text{nn}}}{2} \sim \frac{r_{\text{c}-2\text{n}}}{\sqrt{r_{\text{c}-2\text{n}}^2 + \frac{r_{\text{nn}}^2}{4}}}$$

と見積もることができる。



C.A. Bertulani and M.S. Hussein, PRC76(‘07)051602(R)
K. Hagino and H. Sagawa, PRC76(‘07)047302

ボロミアン原子核の幾何学



$\boxed{\sqrt{\langle R^2 \rangle}}$ は、$B_{tot}(E1)$ から見積もることができる:

$$B_{\rm tot}(E1) \;\sim\; \frac{3}{\pi}\left(\frac{Z_c e}{A_c+2}\right)^2 \langle R^2 \rangle$$

$\boxed{\sqrt{\langle r^2 \rangle}}$ は、物質密度半径から見積もることができる:

$$\boxed{\langle r_m^2 \rangle = \frac{A_c}{A_c+2}\langle r_m^2 \rangle_{A_c} + \frac{2A_c}{(A_c+2)^2}\langle R^2 \rangle + \frac{1}{2(A_c+2)}\langle r^2 \rangle}$$

または、2n 分解反応のHBT解析より見積もれる:

$$C(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2) = \frac{P_2(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2)}{P_1(\boldsymbol{p}_1)P_1(\boldsymbol{p}_2)}$$

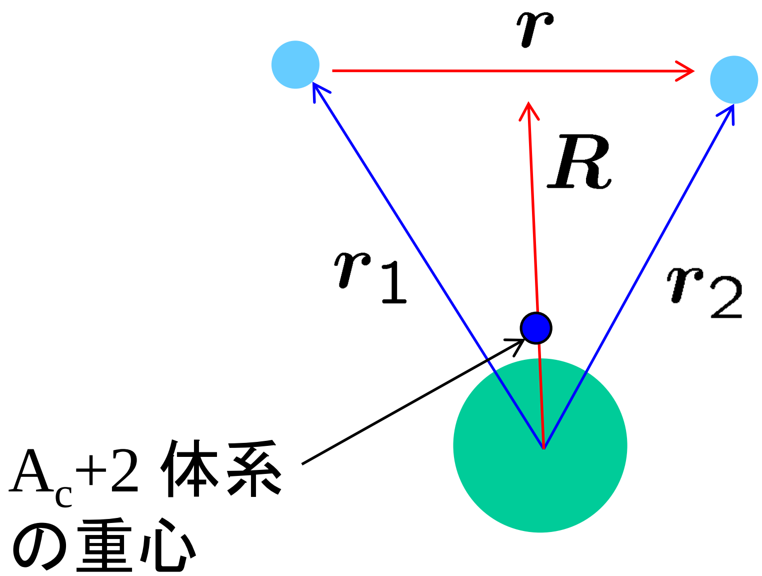
(C.A. Bertulani and M.S. Hussein, PRC76('07)051602)

3体模型に基づく matter radius の式

芯原子核の重心を原点にとる。

A_c+2 体系の重心は、

$$\boldsymbol{R}_{\rm cm} = \frac{A_c\boldsymbol{R}_{\rm core} + \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2}{A_C + 2} = \frac{\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2}{A_C + 2}$$



$$\langle r^2\rangle_{A_c+2} = \frac{1}{A_c+2}\cdot\left\langle\sum_{i=1}^{A_c+2}(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{R}_{\rm cm})^2\right\rangle$$

$$= \frac{1}{A_c+2}\cdot\left\langle\left(\boldsymbol{r}_1 - \frac{\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2}{A_c+2}\right)^2 + \left(\boldsymbol{r}_2 - \frac{\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2}{A_c+2}\right)^2 + \sum_{i=3}^{A_c+2}(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{R}_{\rm cm})^2\right\rangle$$

(note)

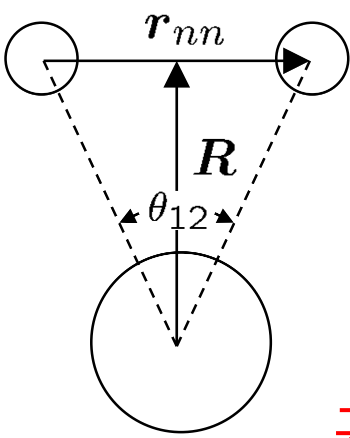
$$\left\langle \sum_{i=3}^{A_c+2} (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{R}_{\mathrm{cm}})^2 \right\rangle = \left\langle \sum_{i=3}^{A_c+2} \boldsymbol{r}_i^2 - 2\boldsymbol{R}_{\mathrm{cm}} \cdot \cancelto{0}{\sum_{i=3}^{A_c+2} \boldsymbol{r}_i} + A_c \cdot \boldsymbol{R}_{\mathrm{cm}}^2 \right\rangle$$

$$= A_c \langle r^2 \rangle_{A_c} + \frac{A_c}{(A_c+2)^2} \langle (\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2)^2 \rangle$$

$$\begin{aligned}
\langle r^2 \rangle_{A_c+2} &= \frac{A_c}{A_c+2} \langle r^2 \rangle_{A_c} \\
&\quad + \frac{1}{(A_c+2)^3} \Big\langle (A_c^2 + 2A_c + 2)(r_1^2 + r_2^2) \\
&\quad - 4(A_c+1)\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2 + A_c(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2)^2 \Big\rangle \\
&= \cdots \\
&= \frac{A_c}{A_c+2} \langle r^2 \rangle_{A_c} + \frac{2A_c}{(A_c+2)^2} \langle R^2 \rangle + \frac{1}{2(A_c+2)} \langle r^2 \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{R} &= (\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2)/2 \\
\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2
\end{aligned}$$

ボロミアン原子核の幾何学

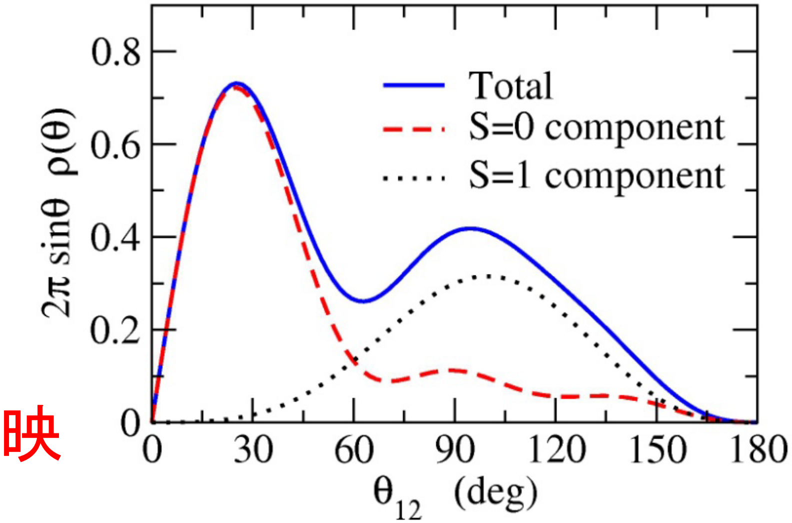


クラスター和則

$$B_{\rm tot}(E1) \sim \frac{3}{\pi}\left(\frac{Z_c e}{A_c+2}\right)^2 \langle R^2\rangle$$

基底状態の相関のみが反映

3体模型計算 (^{11}Li)



$$\langle\theta_{12}\rangle = 65.29 \quad \text{deg.}$$

nn 間角度の「実験値」

$\sqrt{\langle R^2\rangle} \longleftarrow$ $B_{\rm tot}$(E1)

$\sqrt{\langle r_{nn}^2\rangle} \longleftarrow$ matter radius or HBT

$$\langle\theta_{12}\rangle = 65.2 \pm 12.2 \ (^{11}\text{Li})$$
$$= 74.5 \pm 12.1 \ (^{6}\text{He})$$

K.H. and H. Sagawa,PRC76('07)047302

$\langle\theta_{12}\rangle$ が90度より著しく小

↓

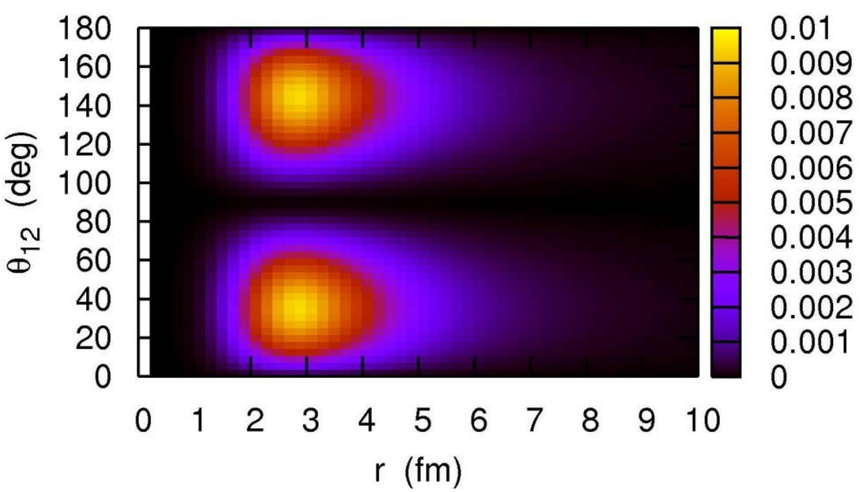
di-neutron 相関を示唆
（ただし、大きい角度の成分が混ざって見えている）

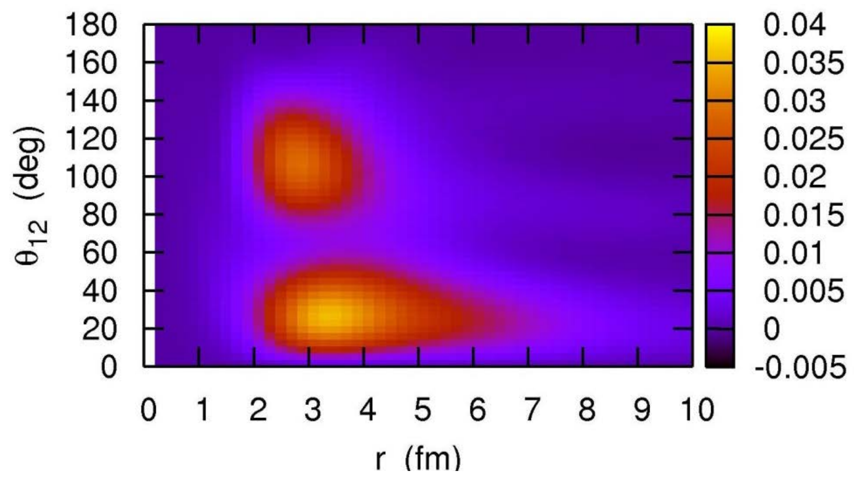
cf. T. Nakamura et al., PRL96('06)252502
C.A. Bertulani and M.S. Hussein, PRC76('07)051602

注意点

nn 間角度の「実験値」

$$\langle\theta_{12}\rangle = 65.2^{+11.4}_{-13.0} \quad (^{11}\mathrm{Li})$$
$$= 74.5^{+11.2}_{-13.1} \quad (^{6}\mathrm{He})$$





相関がなければ $<\theta_{12}> = 90$ 度

⇩

ここからのずれが相関の強さの度合いを反映する

$<\theta_{12}> = 65$ 度は dineutron 相関とは矛盾しない（2つのピークの平均となっているため）

（参考）

Nucleus	Method	$\sqrt{\langle r_{nn}^2 \rangle}$ (fm)	$\sqrt{\langle r_{c-2n}^2 \rangle}$ (fm)	$\langle \theta_{nn} \rangle$ (deg.)
^{6}He	Matter radii	3.75+/-0.93	3.88+/-0.32	$51.6^{+11.2}_{-12.4}$
	HBT	5.9+/-1.2		$74.5^{+11.2}_{-13.1}$
	3body calc.	4.65	3.63	66.33
^{11}Li	Matter radii	5.50+/-2.24	5.15+/-0.33	$56.2^{+17.8}_{-21.3}$
	HBT	6.6+/-1.5		$65.2^{+11.4}_{-13.0}$
	3body calc.	6.43	5.13	65.29

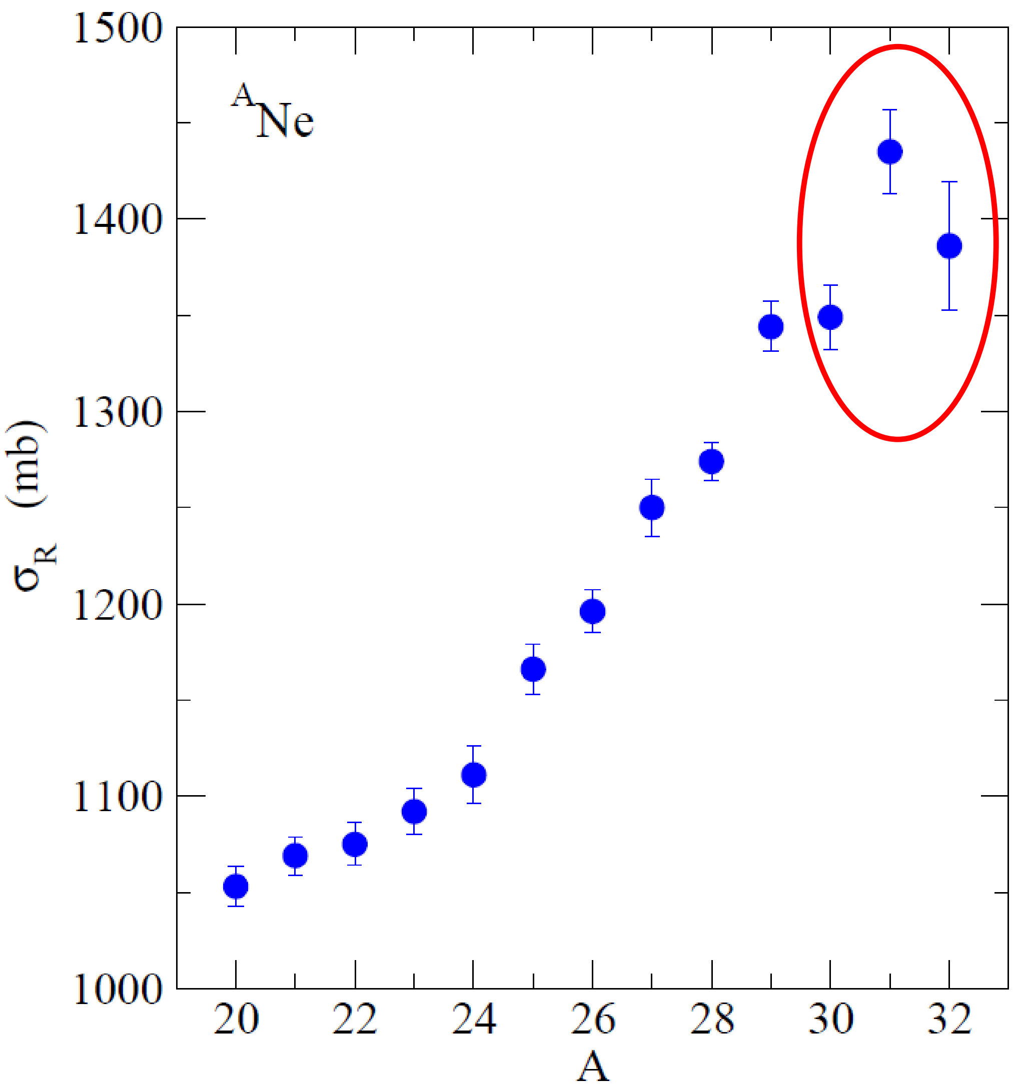
K.H. and H. Sagawa,PRC76('07)047302

Nucleus	Method	$\sqrt{\langle r_{nn}^2 \rangle}$	$\sqrt{\langle r_{c-2n}^2 \rangle}$	$\langle \theta_{nn} \rangle$
^{6}He	HBT	5.9+/-1.2	3.36+/-0.39	83^{+20}_{-10}
^{11}Li	HBT	6.6+/-1.5	5.01+/-0.32	66^{+22}_{-18}

C.A. Bertulani and M.S. Hussein, PRC76('07)051602

反応断面積の偶奇効果と対相関

不安定核の反応断面積:しばしば大きな偶奇効果を示す



典型的な例:

Ne アイソトープの実験データ

M. Takechi et al.,
Phys. Lett. B707 ('12) 357

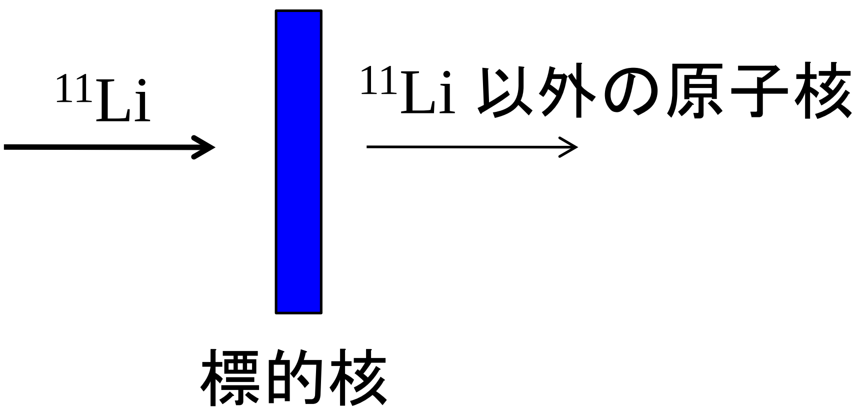
31

30

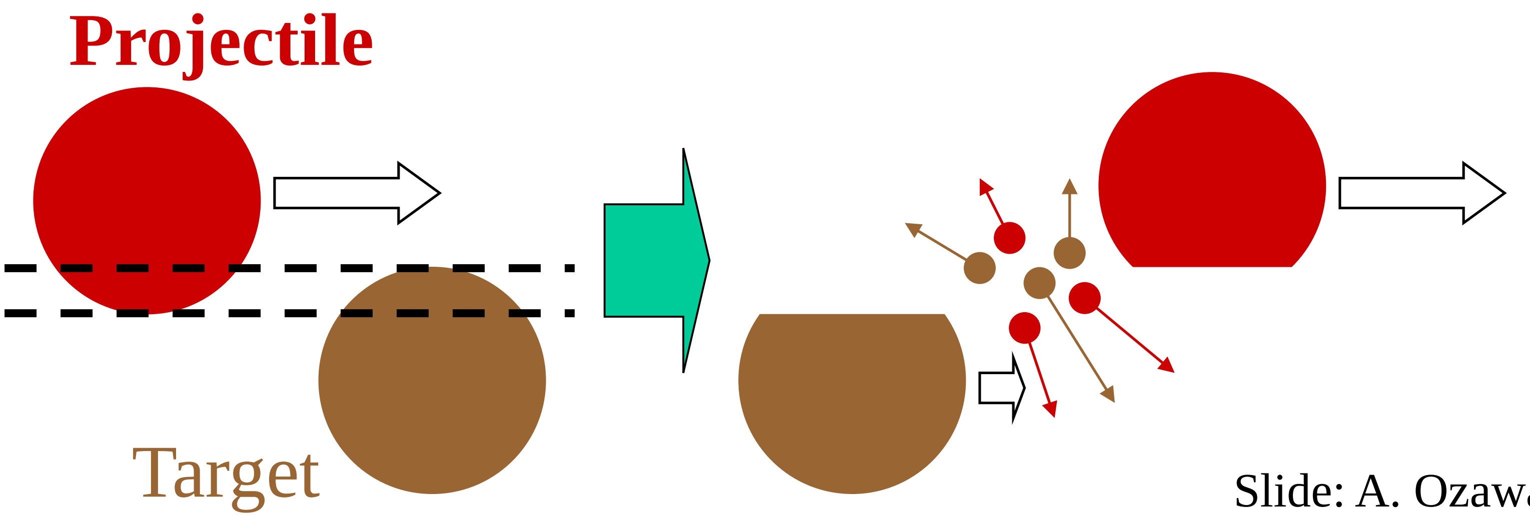
32

clear odd-even effect

相互作用断面積 ～反応断面積



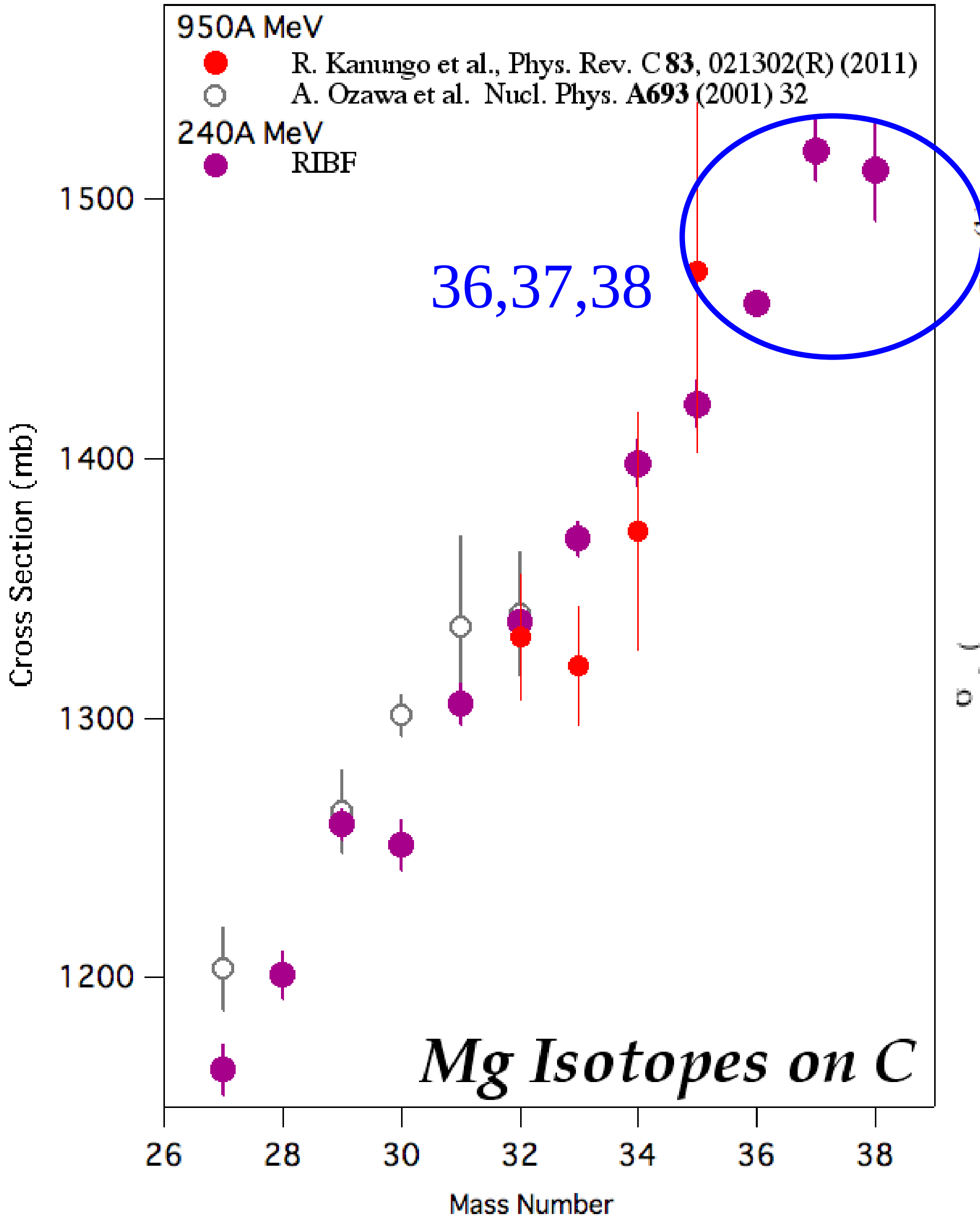
相互作用断面積 σ_I
= 入射核の N ないしは Z が変化する断面積



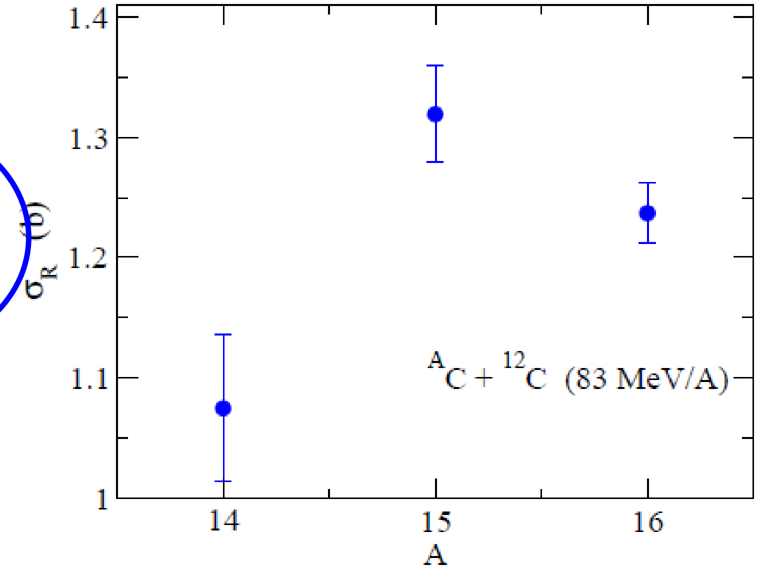
Slide: A. Ozawa

$$\boxed{\sigma_I \sim \pi[R_I(P) + R_I(T)]^2} \longrightarrow R_I(P)$$

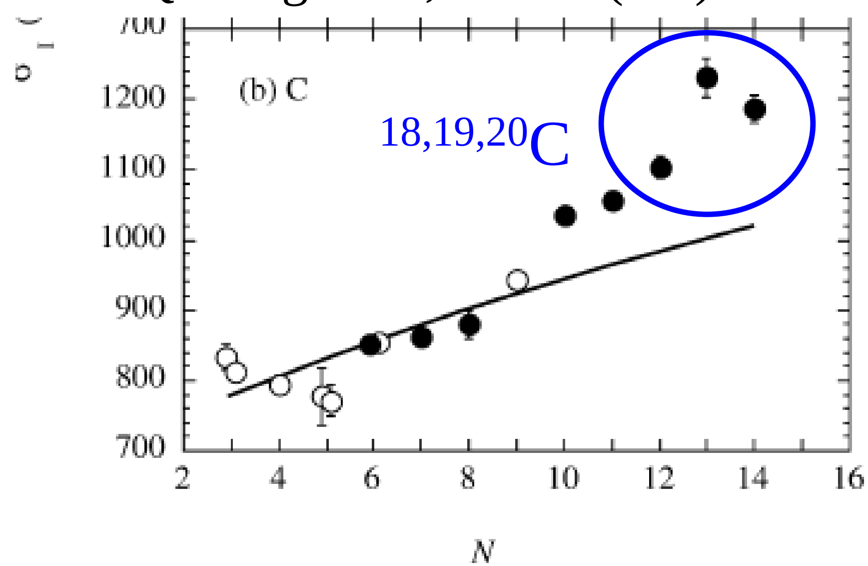
反応断面積の偶奇効果の他の例



M. Takechi et al., PRC90 ('14) 061305(R)



D.Q. Fang et al., PRC69('04)034613



A. Ozawa et al., NPA691('01)599

cf. 荷電半径の偶奇効果とは逆の傾向

➢荷電半径：奇核の方が半径が小さい

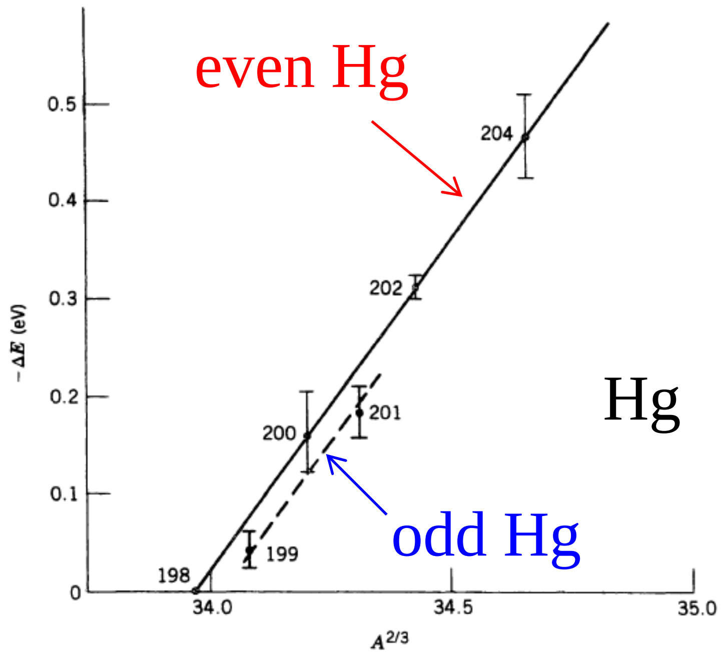
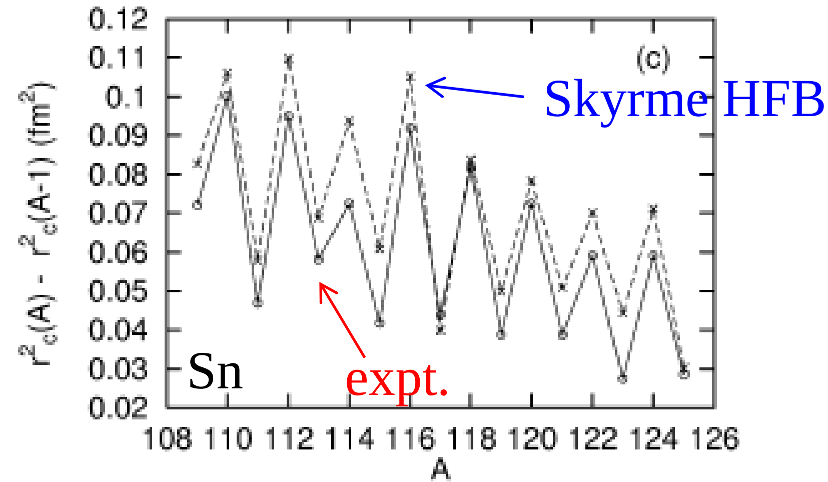


Figure 3.6 K X-ray isotope shifts in Hg. The energy of the K X ray in Hg is about 100 keV, so the relative isotope shift is of the order of 10^{-6}. The data show the

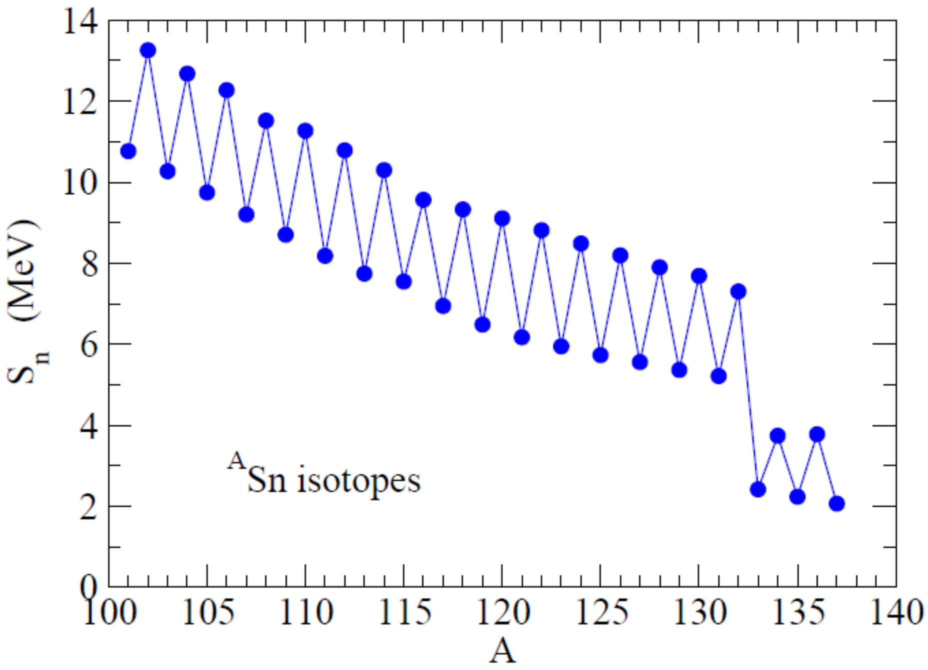
K.S. Krane, “Introductory Nuclear Physics”

$$\Delta E \sim -\frac{2}{5}\frac{Z^4e^2}{a_0^3}\left(\langle r^2\rangle_A - \langle r^2\rangle_{A'}\right)$$



S. Sakakihara and Y. Tanaka, NPA691(‘01)649

➢対相関による分離エネルギーの偶奇性 (odd-even staggering)



➢ペアリング anti-halo 効果

K. Bennaceur, J. Dobaczewski, and M. Ploszajczak, PLB496('00)154

対相関

↓

波動関数の遠方での振る舞いに変化

↓

密度分布の広がりが抑制

28 December 2000

PHYSICS LETTERS B

Physics Letters B 496 (2000) 154–160

www.elsevier.nl/locate/npe

Pairing anti-halo effect

K. Bennaceur [a,b], J. Dobaczewski [c,*], M. Płoszajczak [b]

[a] Centre d'Etudes de Bruyères-le-Châtel, BP 12, F-91680 Bruyères-le-Châtel, France
[b] Grand Accélérateur National d'Ions Lourds (GANIL), CEA/DSM–CNRS/IN2P3, BP 5027, F-14076 Caen cedex 5, France
[c] Institute of Theoretical Physics, Warsaw University, Hoża 69, PL-00681, Warsaw, Poland

Received 28 August 2000; received in revised form 26 September 2000; accepted 28 October 2000
Editor: J.-P. Blaizot

$$\rho(r) \sim e^{-2\kappa r}/r^2, \qquad \kappa = \sqrt{-2m\epsilon/\hbar^2}$$

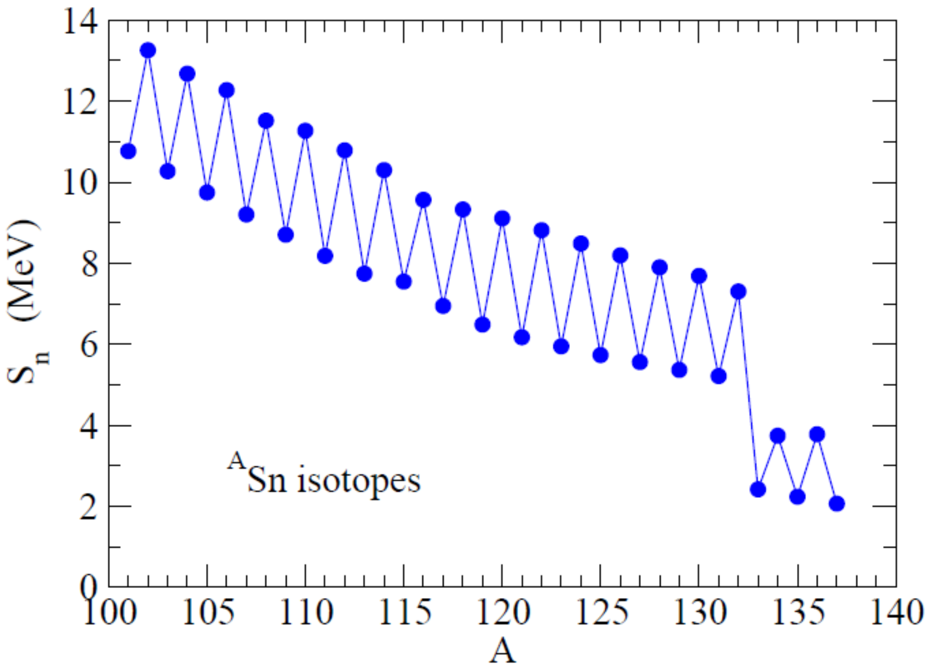
$$\rho(r) \sim e^{-2\kappa r}/r^2, \qquad \kappa = \sqrt{2m(E-\lambda)/\hbar^2}$$

対相関

$$E - \lambda \sim \sqrt{(\epsilon-\lambda)^2 + \Delta^2} - \lambda \sim \Delta$$

for $\varepsilon \sim \lambda \sim 0$

➢対相関による分離エネルギーの偶奇性 (odd-even staggering)



➢ペアリング anti-halo 効果

K. Bennaceur, J. Dobaczewski, and M. Ploszajczak, PLB496('00)154

対相関

⬇

波動関数の遠方での振る舞いに変化

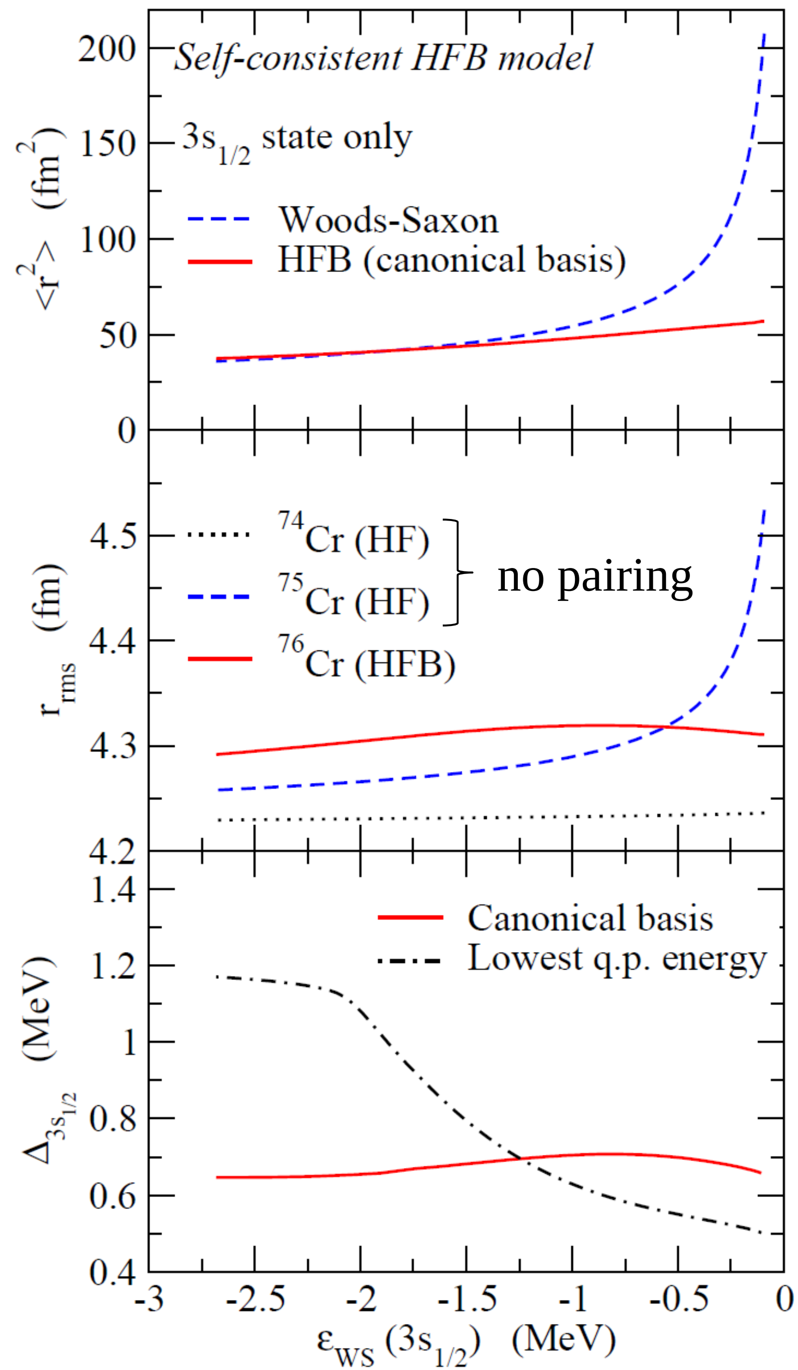
⬇

密度分布の広がりが抑制

反応断面積に見られる偶奇性と対相関(特にペアリング anti-halo 効果)の関係は?

ペアリング anti-halo 効果が実験的に確認された最初の例?

Hartree-Fock-Bogoliubov 法による解析

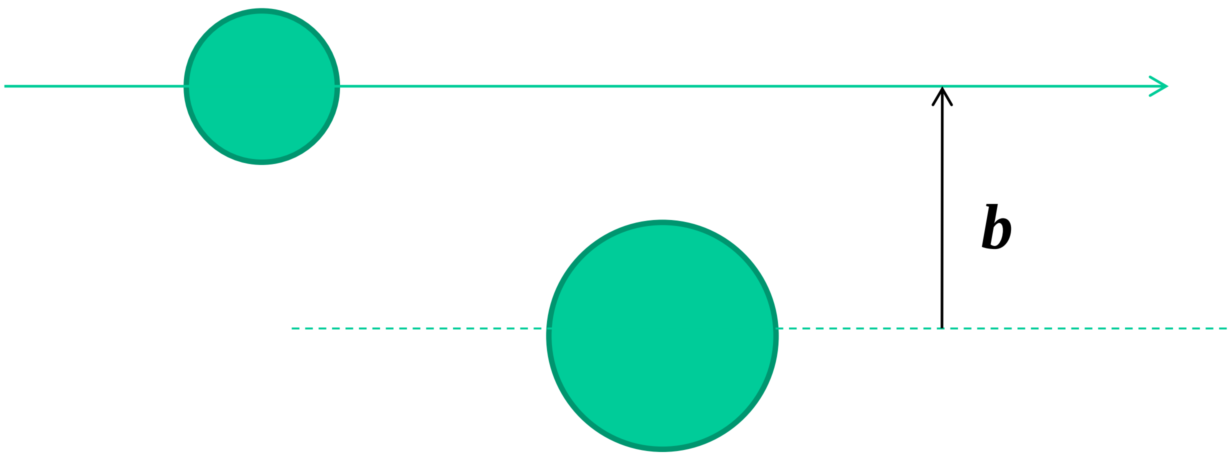


半径の抑制

対ギャップは一粒子エネルギーがゼロでも残る

K. H. and H. Sagawa, PRC85('12)014303

グラウバー理論による反応断面積の計算

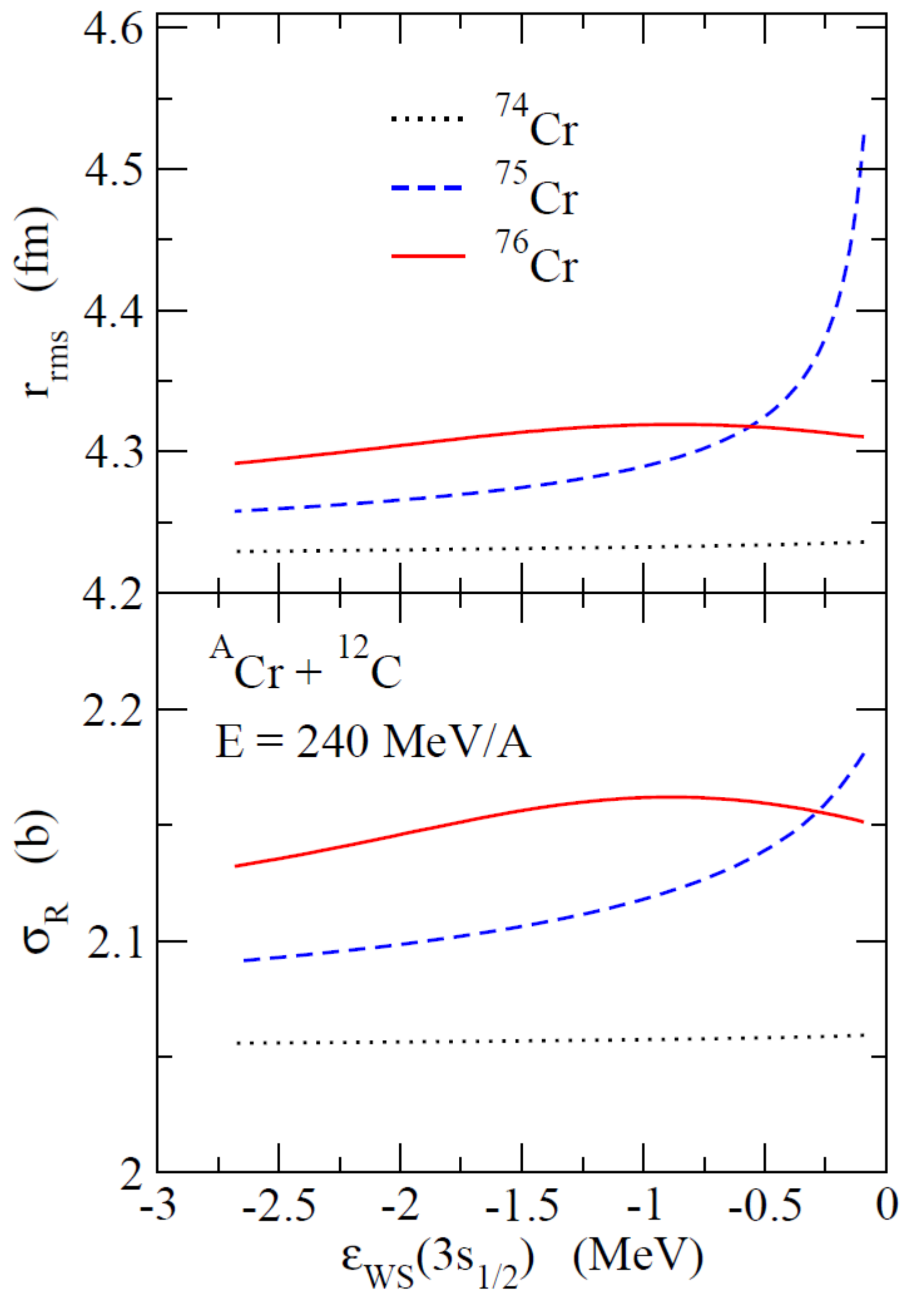


グラウバー理論(中高エネルギーでの核反応理論)

$$\sigma_{\mathrm{R}} = \int d^2b \left(1 - |e^{i\chi(b)}|^2\right)$$

$$\begin{aligned} e^{i\chi(b)} &= \exp\left[-\int d\boldsymbol{r}_P \boldsymbol{r}_T \rho_P(\boldsymbol{r}_P)\rho_T(\boldsymbol{r}_T)\Gamma(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{s}_P-\boldsymbol{s}_T)\right] \\ \Gamma(\boldsymbol{b}) &= \frac{1-i\alpha}{4\pi\beta}\sigma_{NN}^{\mathrm{tot}} \exp\left(-\frac{b^2}{2\beta}\right) \end{aligned}$$

- 直線軌道
- 断熱近似(原子核の状態は変わらない)
- 多重散乱は簡単に取り扱う(光学極限近似): $(1-x)^N \to e^{-Nx}$



^{74,75,76}Cr + ^{12}C reactions
at E=240 MeV/A

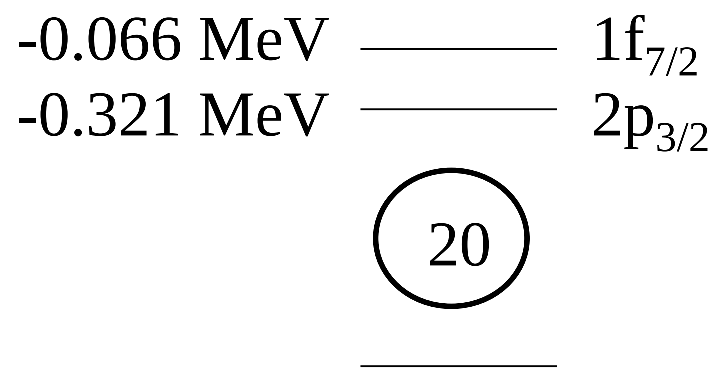
density of ^{74,75,76}Cr : HFB
density of ^{12}C : Gaussian

* 光学極限近似＋補正

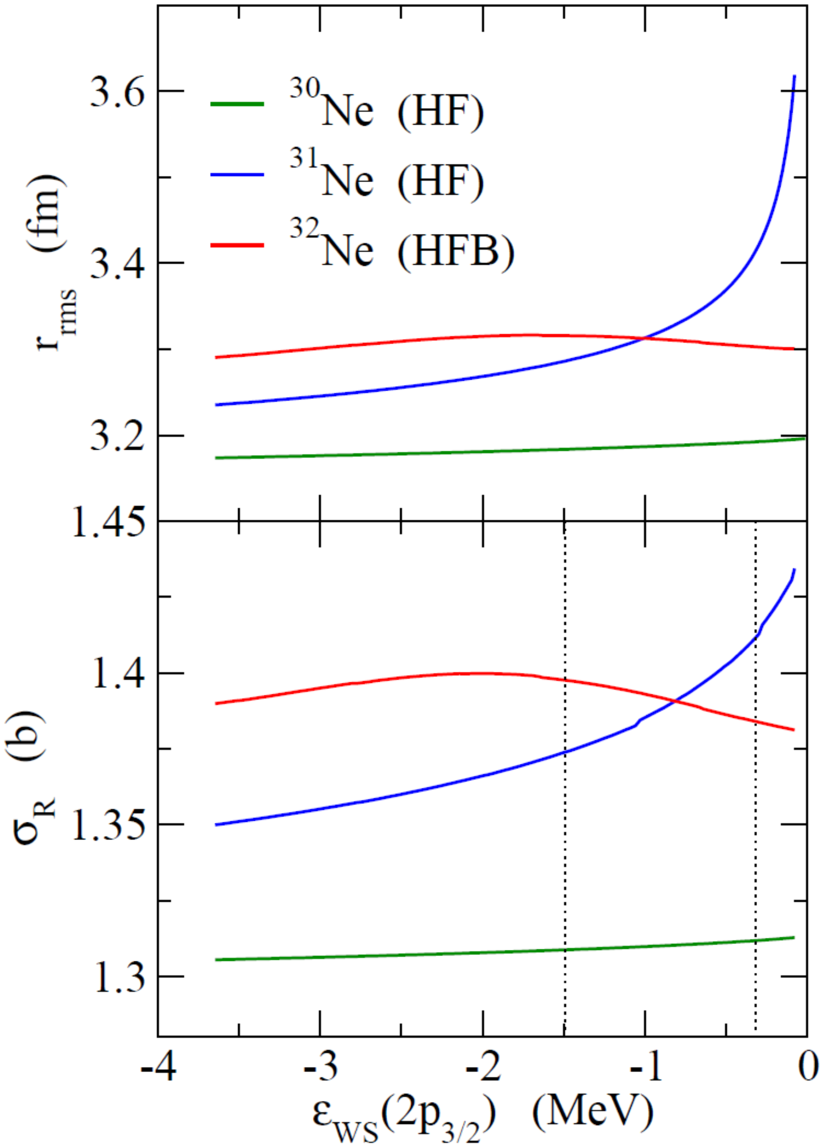
B. Abu-Ibrahim and Y. Suzuki,
PRC61(‘00)051601(R)

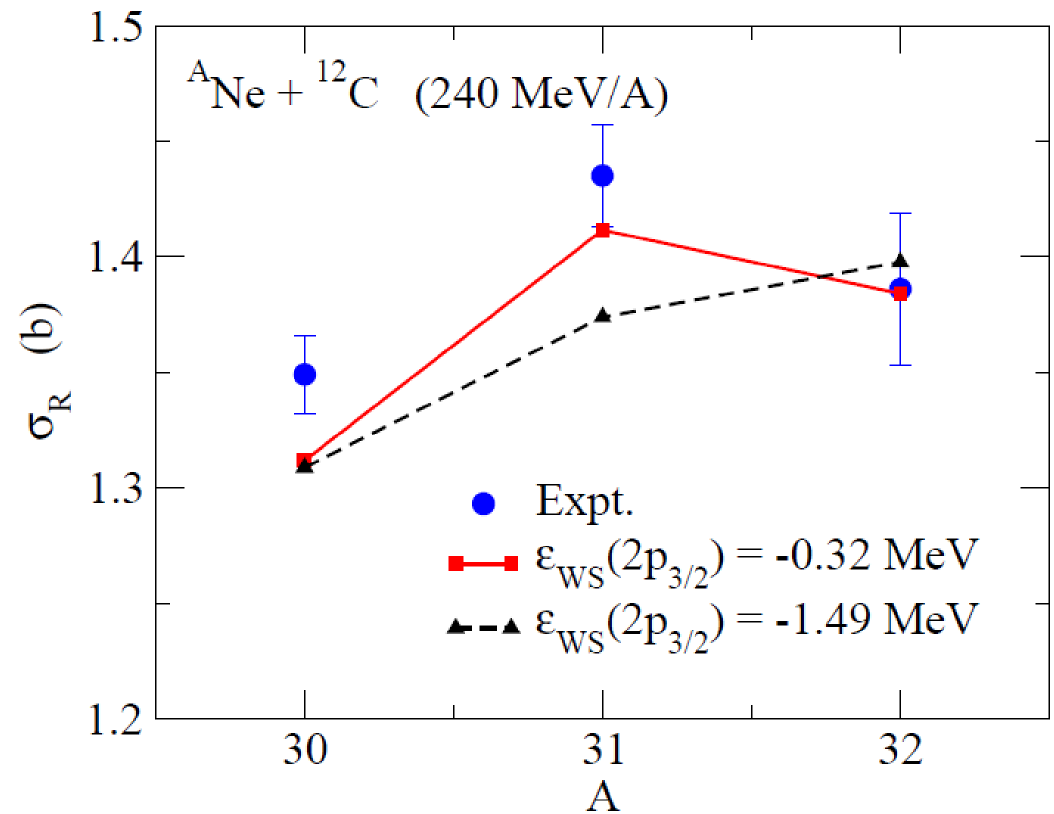
他の系: ^{30,31,32}Ne

HFB with a spherical Woods-Saxon



^{31}Ne (a =0.75 fm)

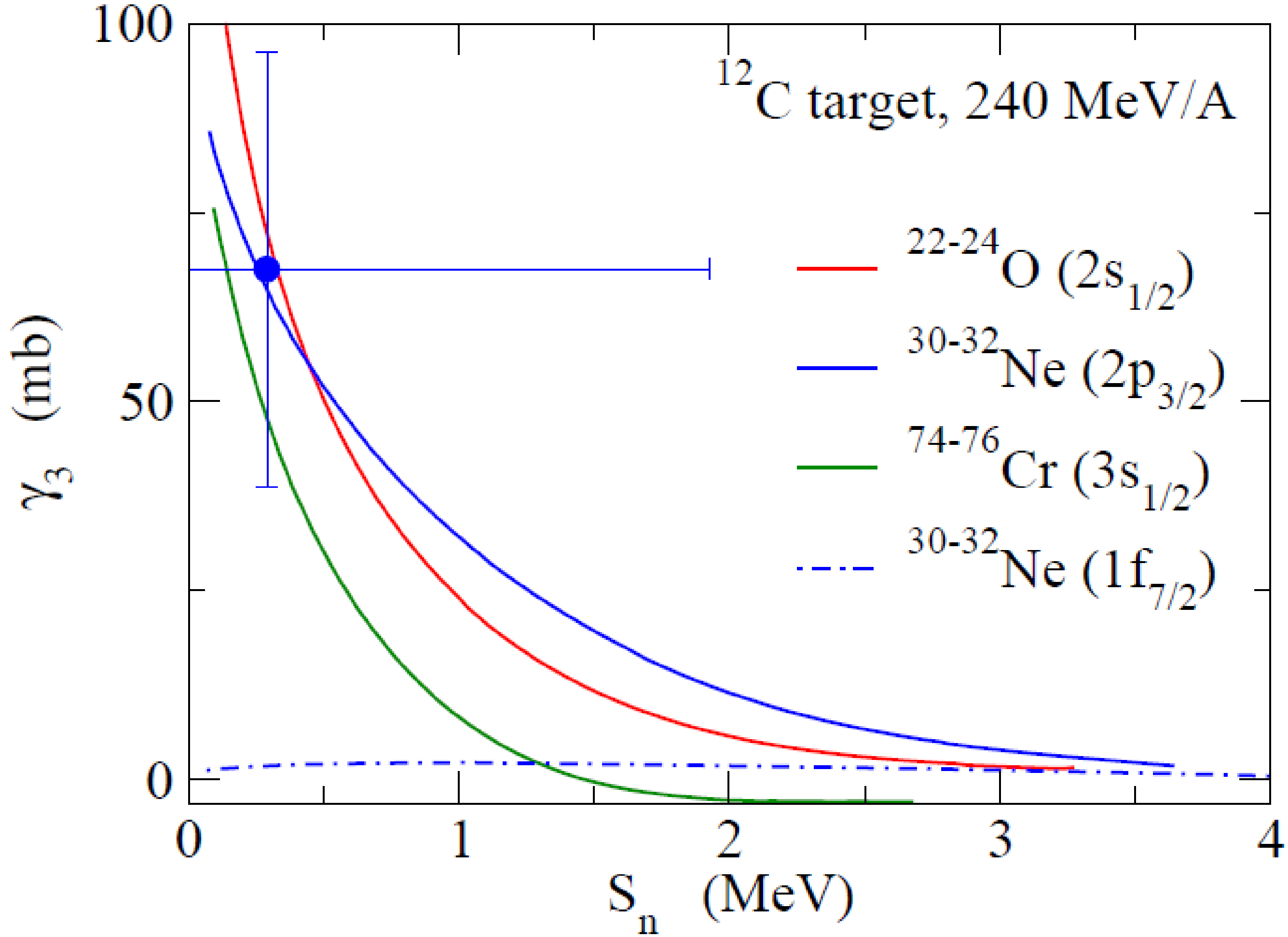




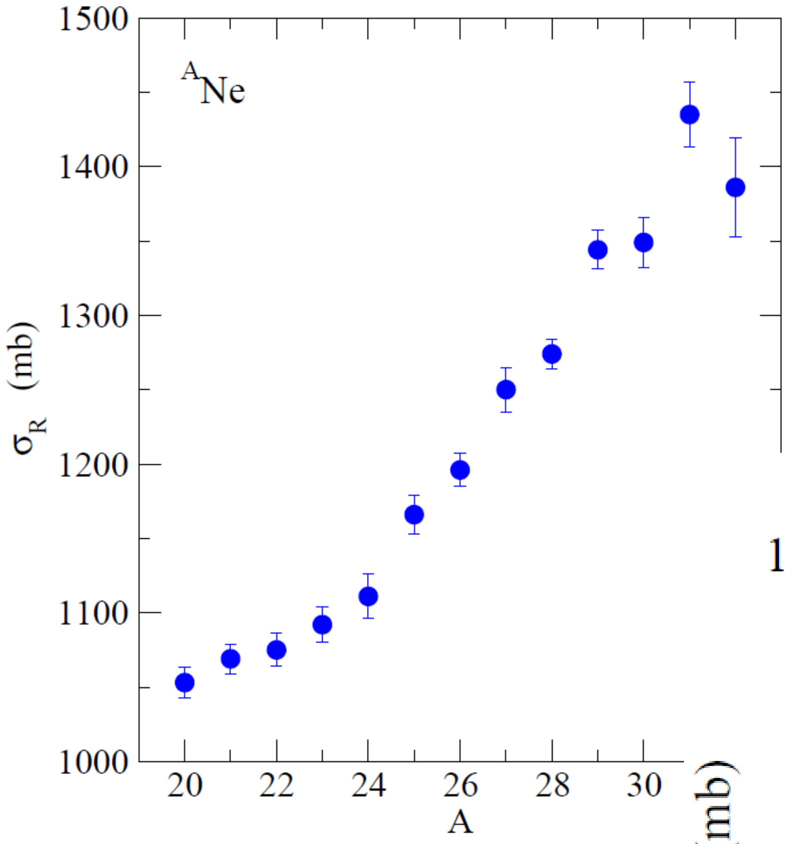
K. H. and H. Sagawa, PRC84('11)011303(R)

反応断面積に対する偶奇効果の系統性

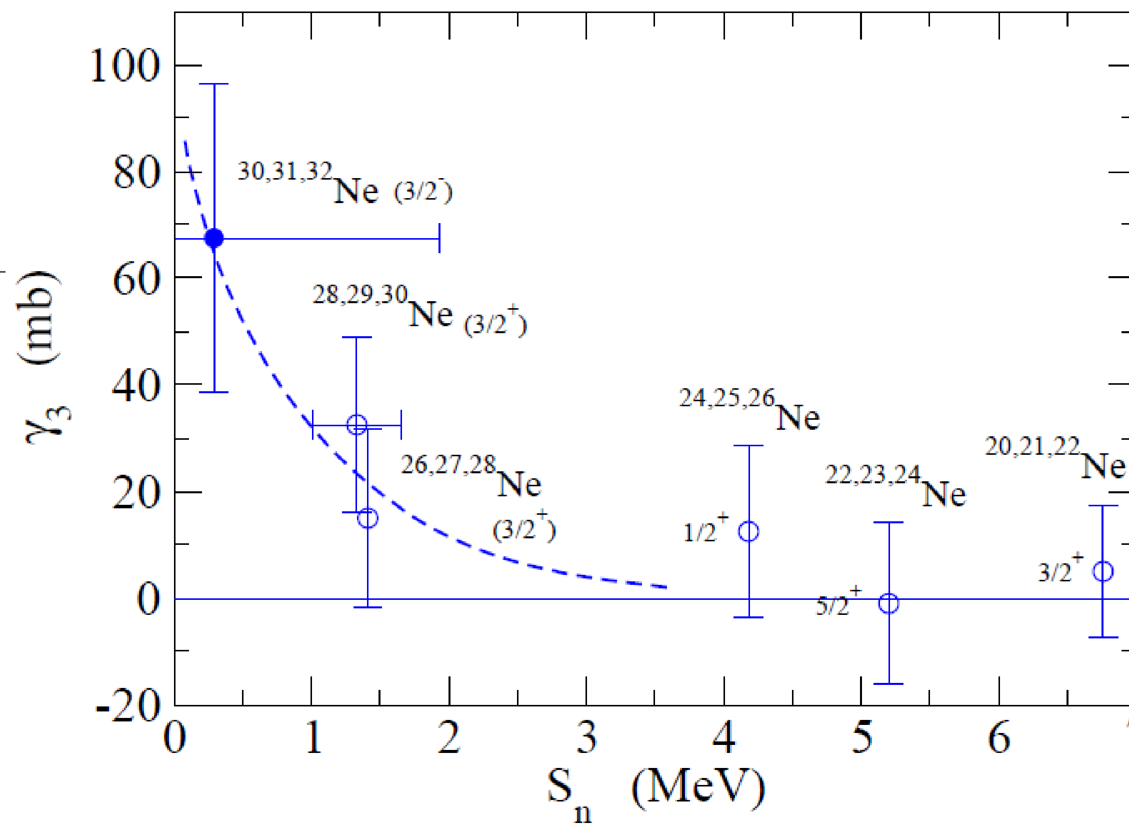
$$\gamma_3 \equiv -\frac{1}{2}[\sigma_R(A+2) - 2\sigma_R(A+1) + \sigma_R(A)]$$



K. H. and H. Sagawa, PRC85('12)014303

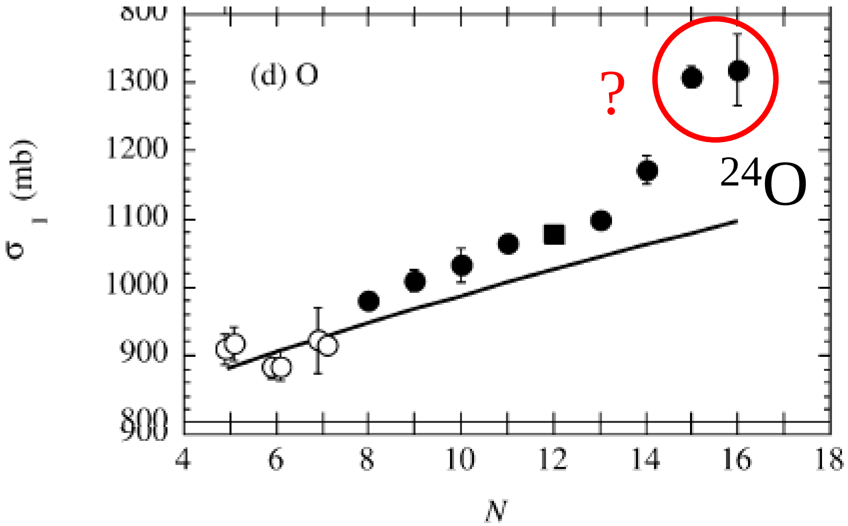


systematics

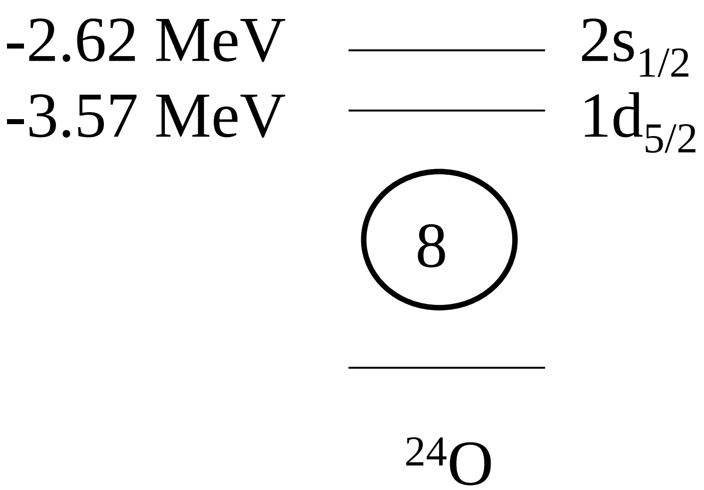


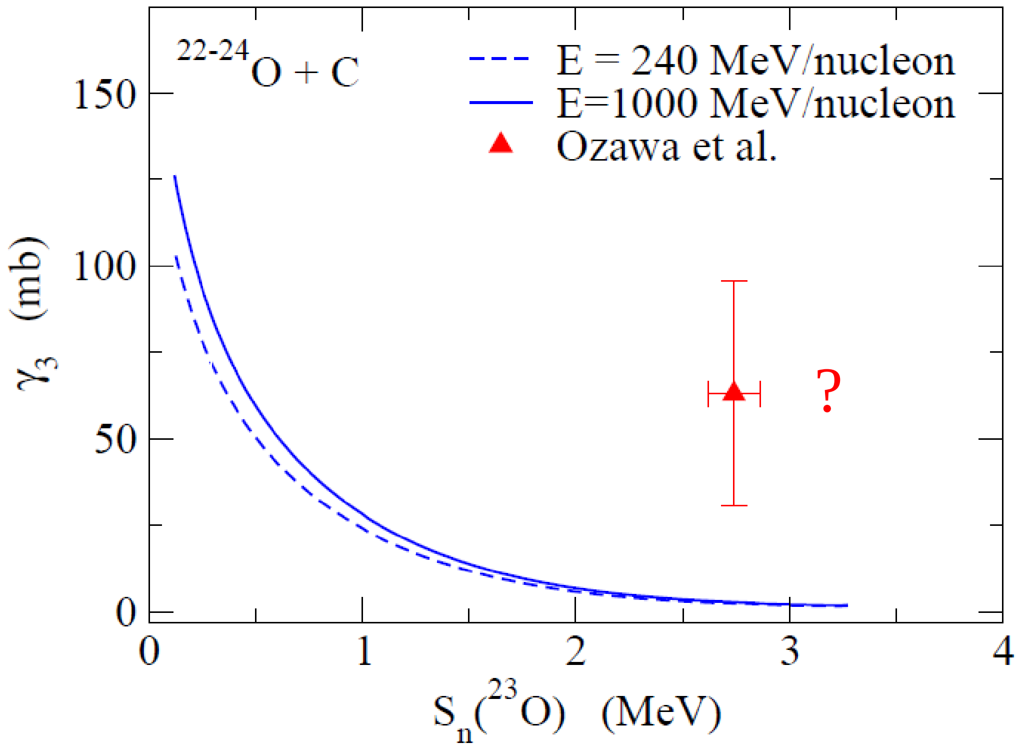
K. H. and H. Sagawa, PRC85(‘12)014303

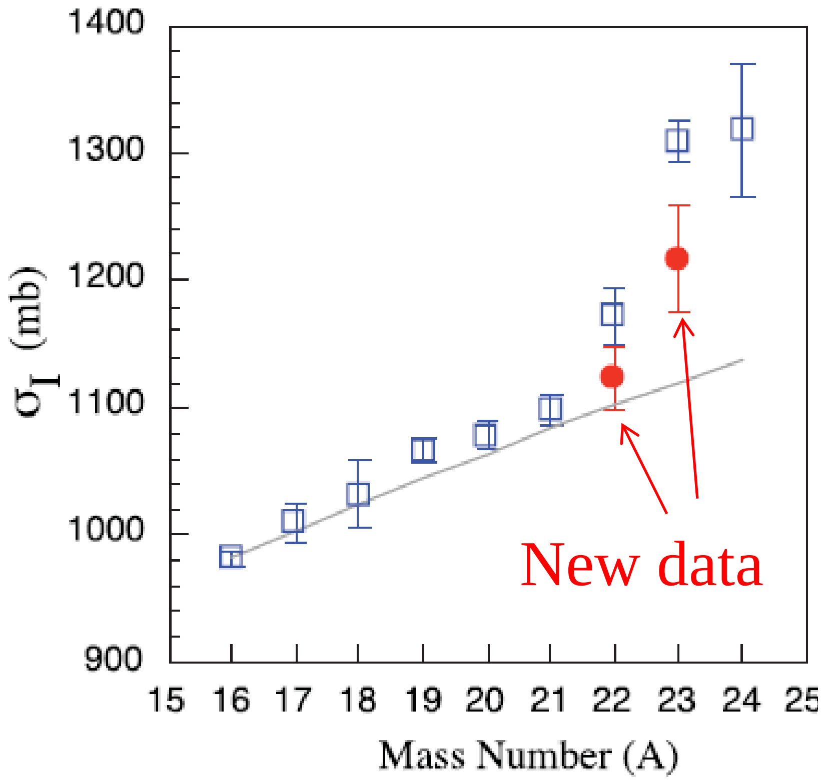
$^{22,23,24}O + ^{12}C$ @ 950 MeV/A

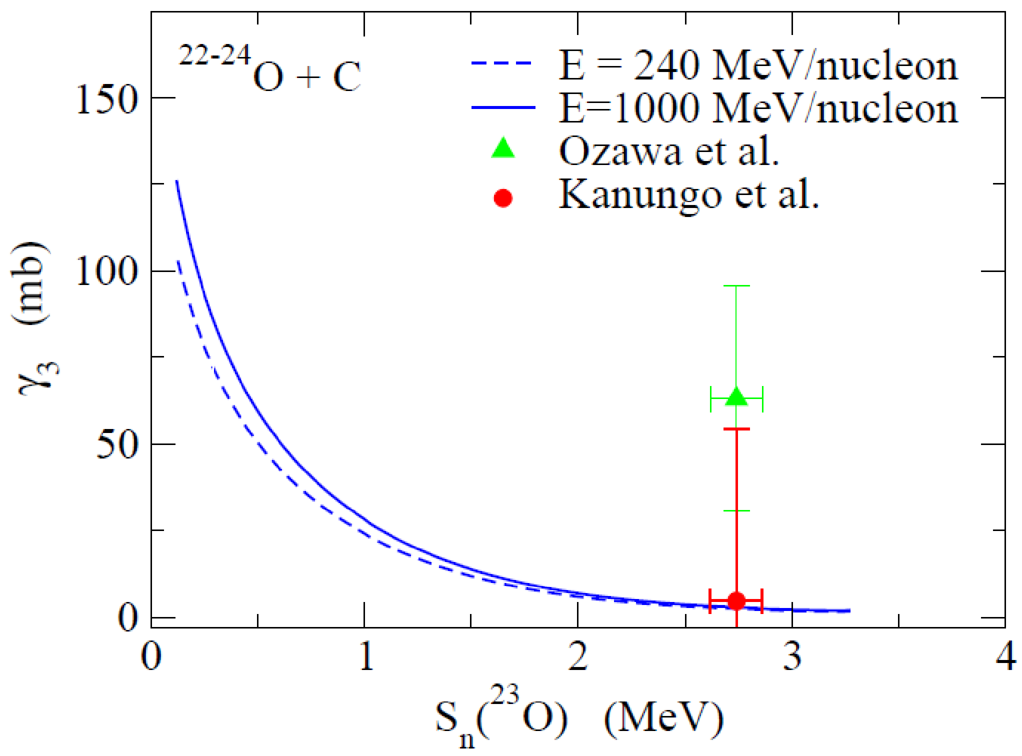


A. Ozawa et al.,NPA691('01)599









R. Kanungo et al.,
PRC84('11)061304(R)

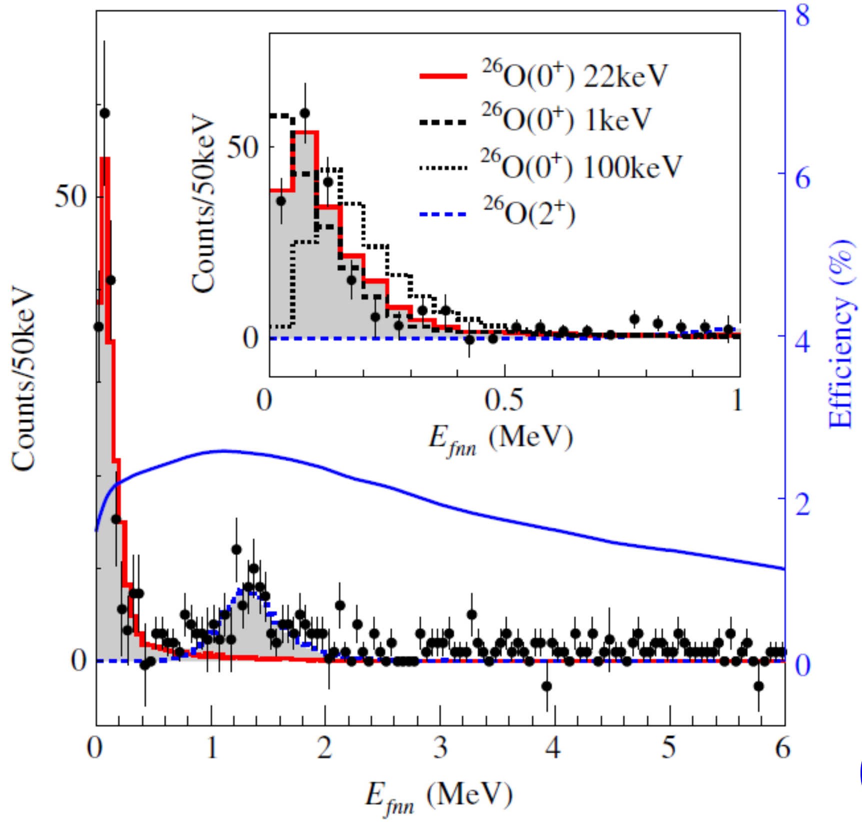
K.H. and H. Sagawa,
PRC85 ('12) 037604

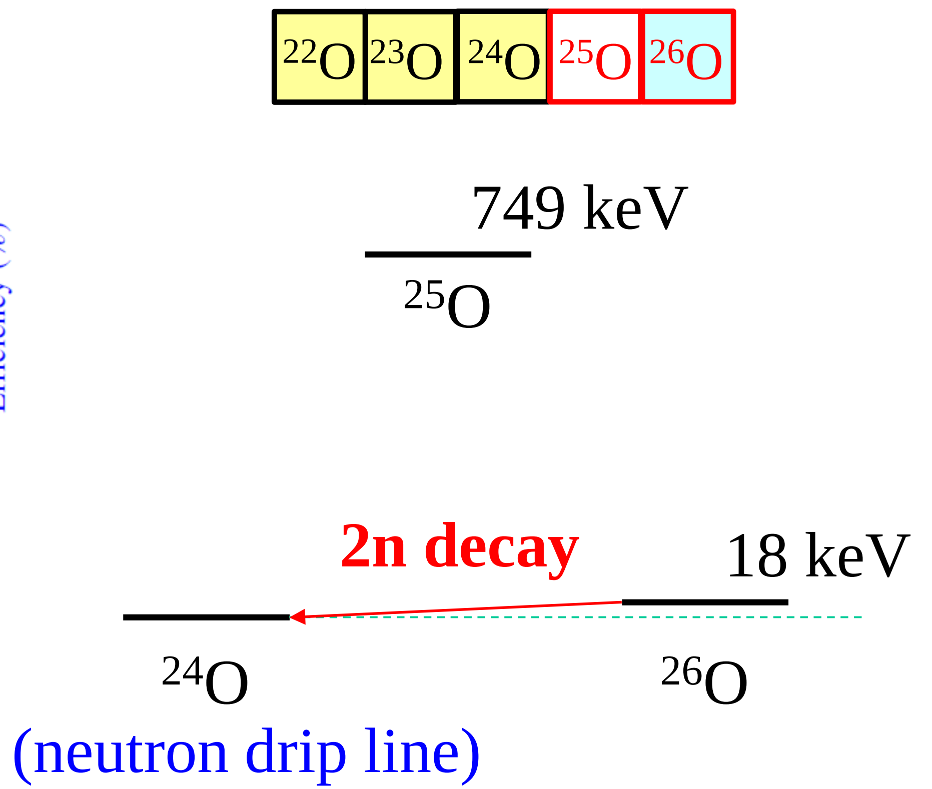
2中性子ハロー核の最新の話題：非束縛核 ^{26}O の2n 崩壊

PRL **116,** 102503 (2016) PHYSICAL REVIEW LETTERS week ending 11 MARCH 2016

Nucleus ^{26}O: A Barely Unbound System beyond the Drip Line

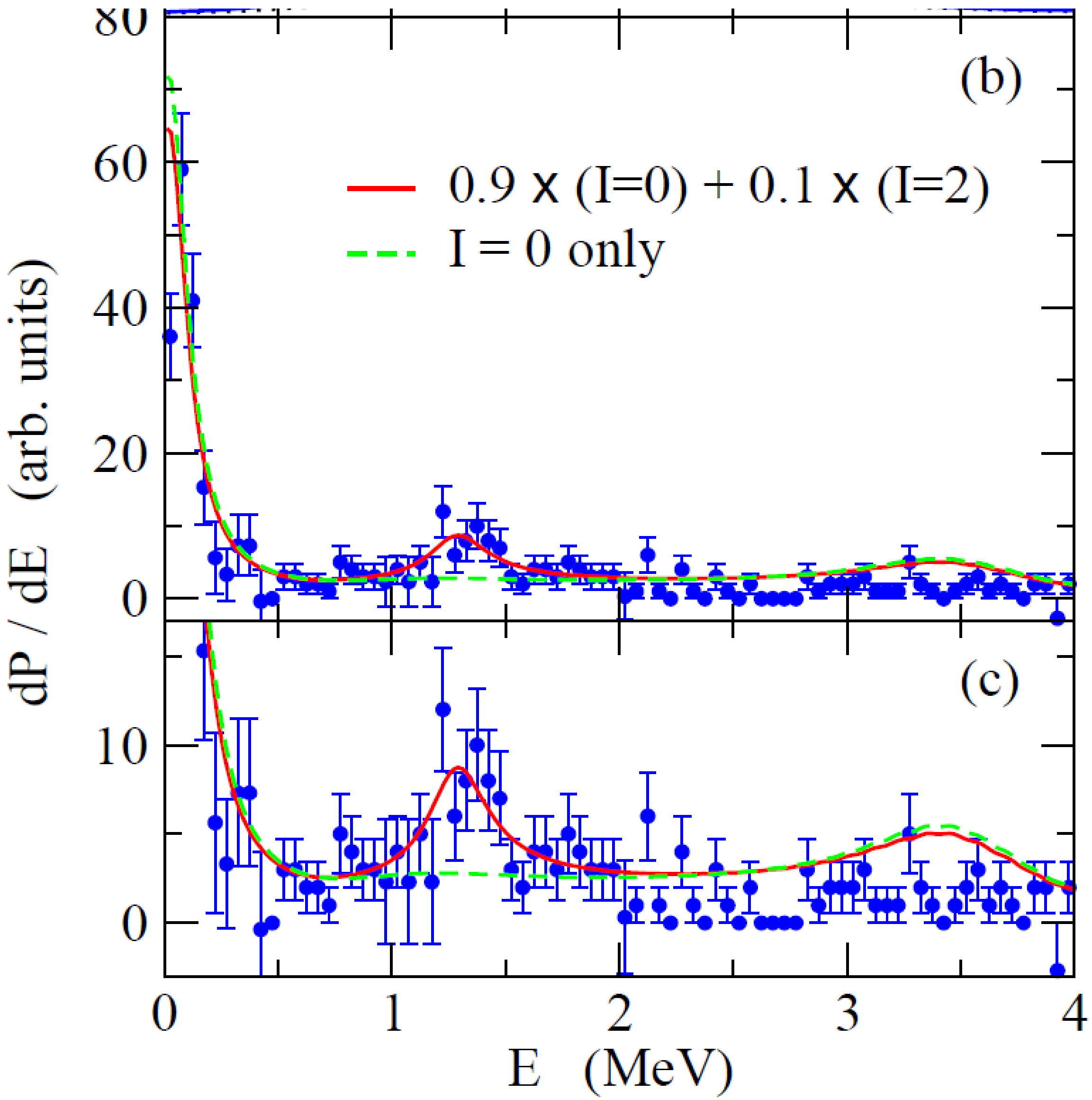
Y. Kondo,[1] T. Nakamura,[1] R. Tanaka,[1] R. Minakata,[1] S. Ogoshi,[1] N. A. Orr,[2] N. L. Achouri,[2] T. Aumann,[3,4] H. Baba,[5] F. Delaunay,[2] P. Doornenbal,[5] N. Fukuda,[5] J. Gibelin,[2] J. W. Hwang,[6] N. Inabe,[5] T. Isobe,[5] D. Kameda,[5] D. Kanno,[1] S. Kim,[6] N. Kobayashi,[1] T. Kobayashi,[7] T. Kubo,[5] S. Leblond,[2] J. Lee,[5] F. M. Marqués,[2] T. Motobayashi,[5] D. Murai,[8] T. Murakami,[9] K. Muto,[7] T. Nakashima,[1] N. Nakatsuka,[9] A. Navin,[10] S. Nishi,[1] H. Otsu,[5] H. Sato,[5] Y. Satou,[6] Y. Shimizu,[5] H. Suzuki,[5] K. Takahashi,[7] H. Takeda,[5] S. Takeuchi,[5] Y. Togano,[4,1] A. G. Tuff,[11] M. Vandebrouck,[12] and K. Yoneda[5]





3体模型 ($^{26}O = {}^{24}O + n + n$) による理論解析

K.H. and H. Sagawa,
- PRC89 (‘14) 014331
- PRC93(‘16)034330



詳しくはセミナーで。

不安定核の反応（低エネルギー）

－核反応基礎論
－核融合反応
－対移行反応
－超重元素

核反応論基礎：基本的概念と量子力学の復習

原子核の形や相互作用、励起状態の性質：衝突実験
cf. ラザフォードの実験（α 散乱）

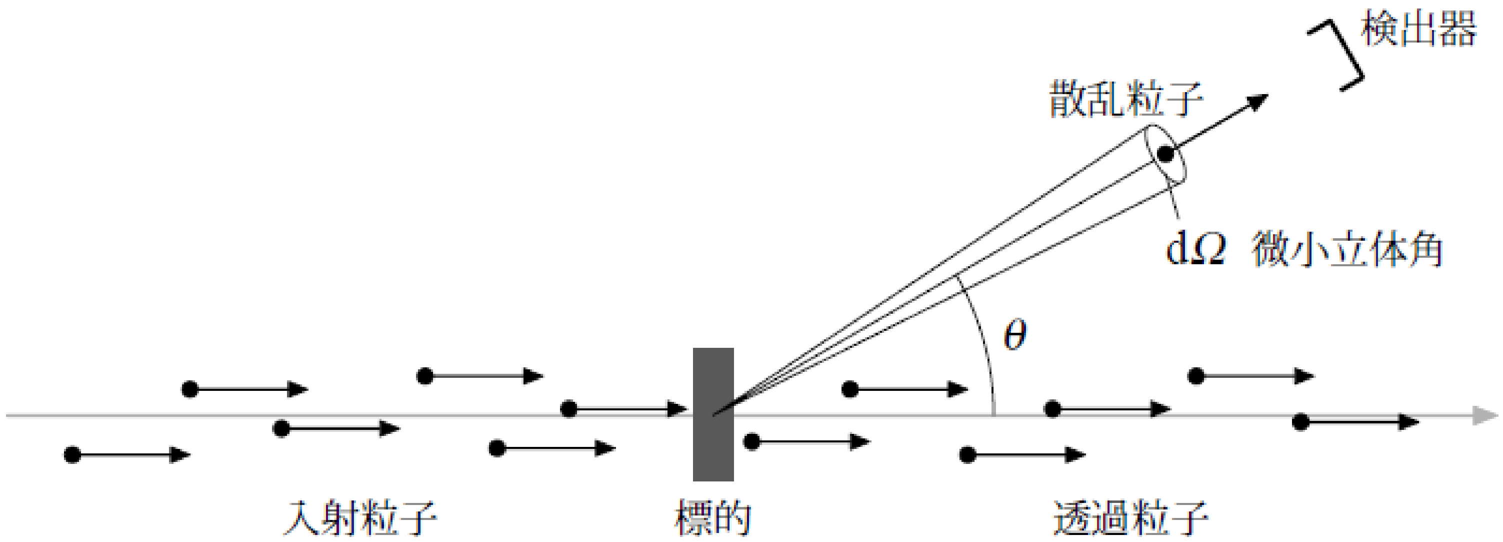


図 21.1: 散乱実験

http://www.th.phys.titech.ac.jp/~muto/lectures/QMII11/QMII11_chap21.pdf

武藤一雄氏（東工大）

核反応論基礎：基本的概念と量子力学の復習

原子核の形や相互作用、励起状態の性質：衝突実験
cf. ラザフォードの実験（α 散乱）

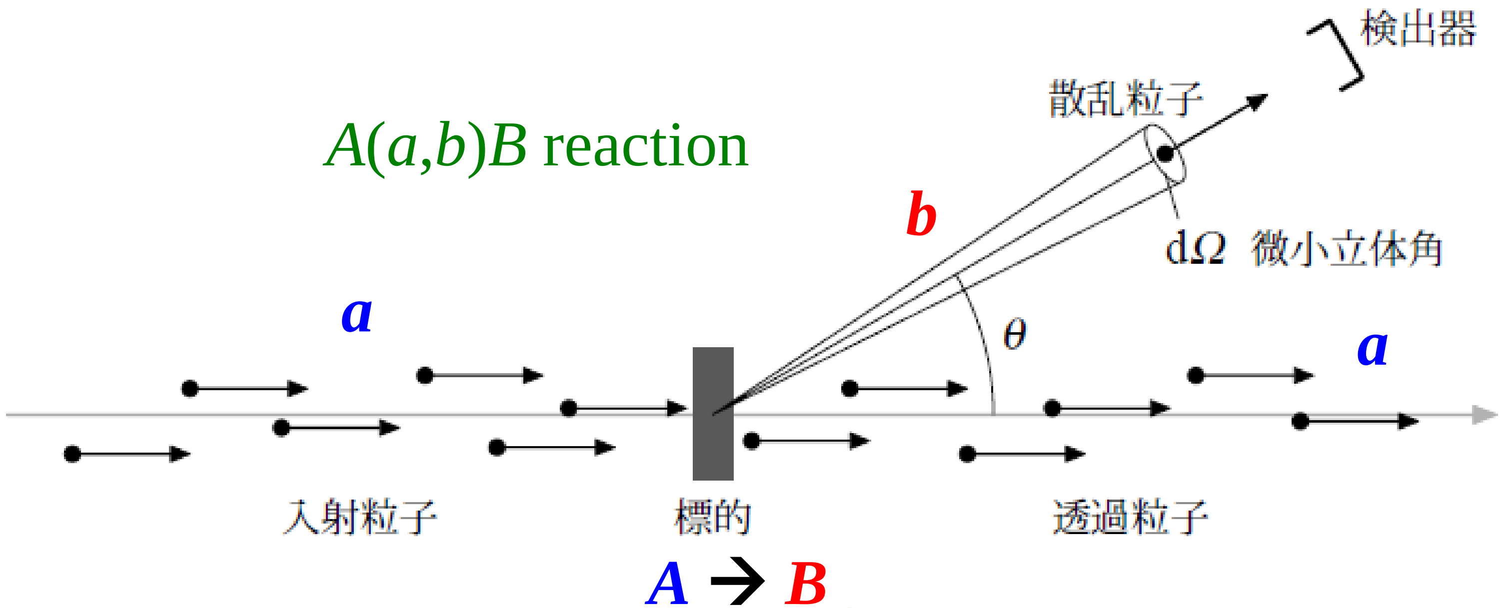
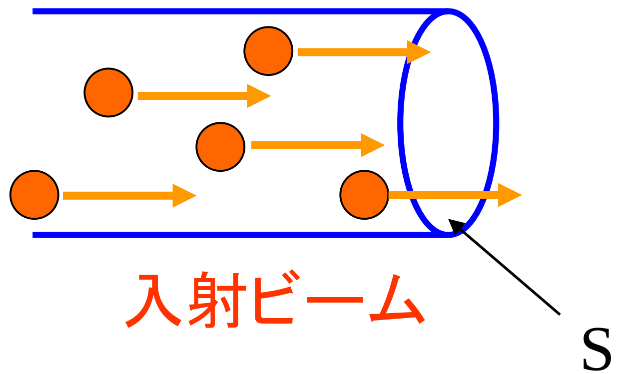


図 21.1: 散乱実験

http://www.th.phys.titech.ac.jp/~muto/lectures/QMII11/QMII11_chap21.pdf

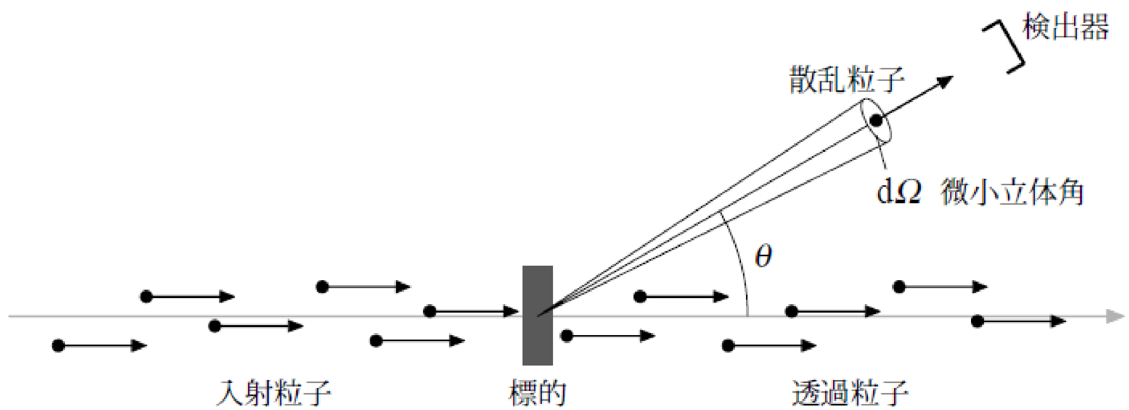
武藤一雄氏（東工大）

散乱断面積



フラックス（流束）
＝単位時間に単位面積を通過する
粒子の数

$$j = \rho_{\mathrm{P}} \cdot v$$

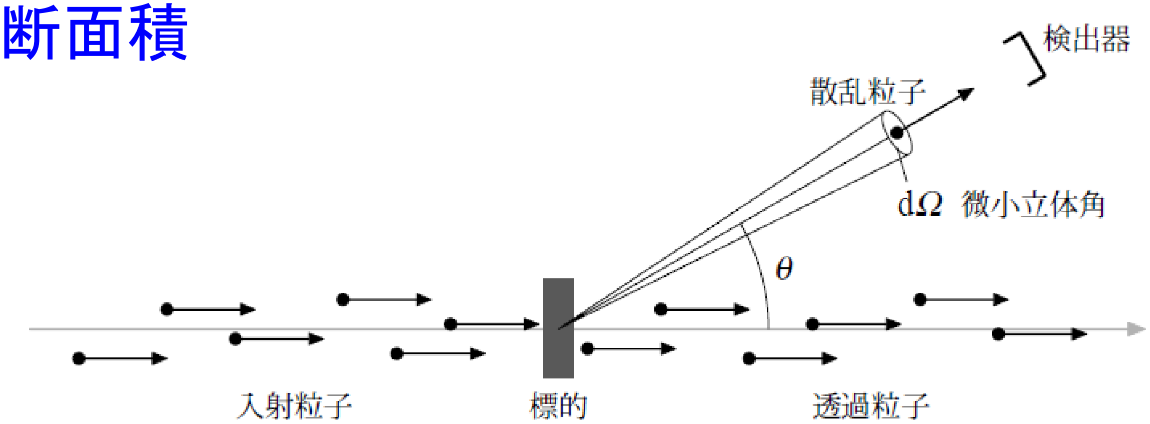


イベント・レート（時間あたりイベントの起こる数）
：入射フラックスと標的核の数に比例

断面積

$$R = N_{\mathrm{T}} \cdot \sigma \cdot j$$

微分散乱断面積



イベント・レート（時間あたりイベントの起こる数）

：入射フラックスと標的核の数に比例

断面積

$$R = N_{\mathrm{T}} \cdot \sigma \cdot j$$

微分散乱断面積（角度分布）

$$dR(\theta,\phi) = N_{\mathrm{T}} \cdot \boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega}} \cdot j \cdot d\Omega, \qquad \sigma = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

単位: 1 barn = 10^{-24} cm^2 = 100 fm^2 (1 mb = 10^{-3} b = 0.1 fm^2)

微分断面積を量子力学で計算する

自由粒子の運動: $$-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2\psi = E\psi = \frac{\boldsymbol{k}^2\hbar^2}{2m}\psi$$

$$\psi(\boldsymbol{r}) = e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\, i^l j_l(kr)P_l(\cos\theta)$$

$$\rightarrow \frac{i}{2kr}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i^l\left[e^{-i(kr-l\pi/2)} - e^{i(kr-l\pi/2)}\right]P_l(\cos\theta)$$

ポテンシャルがある場合: $$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2 + V(\boldsymbol{r}) - E\right]\psi = 0$$

波動関数の漸近形

$$\psi(\boldsymbol{r}) \rightarrow \frac{i}{2kr}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i^l\left[e^{-i(kr-l\pi/2)} - \underline{\underline{S_l}}\, e^{i(kr-l\pi/2)}\right]P_l(\cos\theta)$$

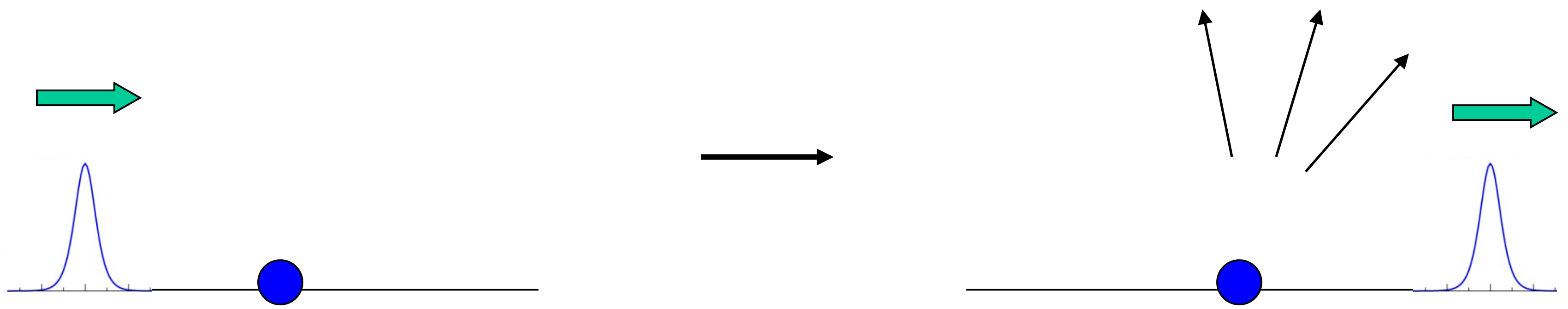
$$= e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + \underbrace{\left[\sum_l(2l+1)\frac{S_l-1}{2ik}P_l(\cos\theta)\right]}_{f(\theta)}\frac{e^{ikr}}{r}$$

$f(\theta)$ （散乱振幅）

$$\psi(\boldsymbol{r}) \;\to\; e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + \left[\sum_l (2l+1)\,\frac{S_l-1}{2ik}P_l(\cos\theta)\right]\frac{e^{ikr}}{r}$$

$$= \; e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r}$$

＝（入射波）＋（散乱波）

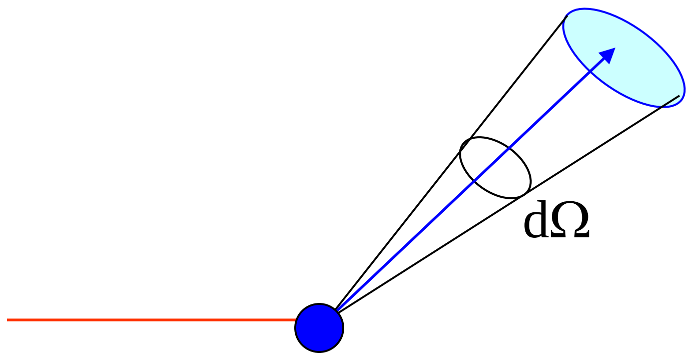


弾性散乱のみが起こる場合：$|S_l| = 1$　（フラックスの保存）

$$\boxed{S_l = e^{2i\delta_l}}$$

δ_l ：位相のずれ（phase shift）

微分散乱断面積



$$r^2 d\Omega$$

$$\psi_{sc}(\boldsymbol{r}) \sim f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r}$$

単位時間に立体角 dΩ に散乱される粒子の数:

$$N_{\mathsf{scatt}} = \boldsymbol{j}_{sc} \cdot \boldsymbol{e}_r \, r^2 d\Omega$$

$$\boldsymbol{j}_{sc} = \frac{\hbar}{2im}\left[\psi_{sc}^* \boldsymbol{\nabla}\psi_{sc} - c.c.\right] \sim \frac{k\hbar}{m}\frac{|f(\theta)|^2}{r^2}\boldsymbol{e}_r$$

（散乱波に対するフラックス）

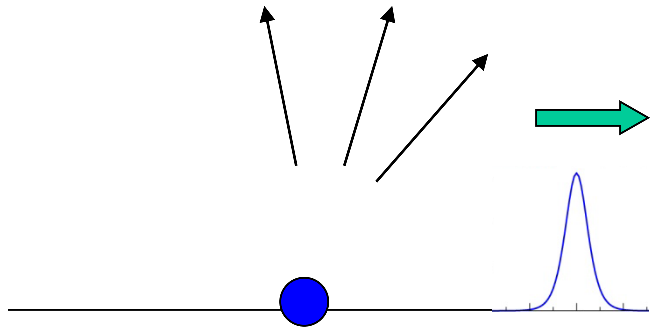
$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2}$$

$$f(\theta) = \sum_l (2l+1)\frac{S_l - 1}{2ik}P_l(\cos\theta)$$

光学ポテンシャルと吸収断面積

反応プロセス

- 弾性散乱
- 非弾性散乱
- 粒子移行
- 複合粒子形成（核融合）



弾性フラックスの減少（吸収）

光学ポテンシャル

$$\boxed{V_{\mathrm{opt}}(\boldsymbol{r}) = V(\boldsymbol{r}) - iW(\boldsymbol{r}) \qquad (W > 0)}$$

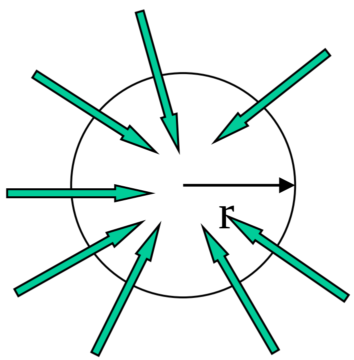
$$\longrightarrow \quad \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j} = \cdots = -\frac{2}{\hbar} W |\psi|^2$$

(note) ガウスの定理

$$\int_S \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \int_V \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j}\, dV$$

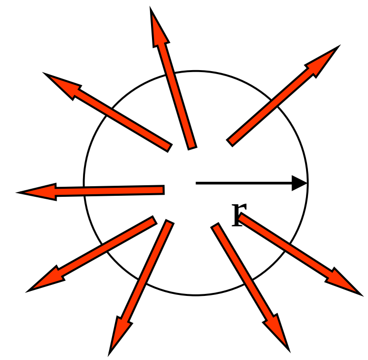
$$\psi(\boldsymbol{r}) \to \frac{i}{2k}\sum_l (2l+1)\, i^l \,\frac{1}{r}\left[\underbrace{e^{-i(kr-l\pi/2)}}_{\psi_{\text{in}}} - \underbrace{S_l e^{i(kr-l\pi/2)}}_{\psi_{\text{out}}}\right] P_l(\cos\theta)$$

全内向フラックス:



$$j_{\text{in}}^{\text{net}} = \frac{k\hbar}{m}\cdot\frac{\pi}{k^2}\sum_l (2l+1)$$

全外向フラックス:



$$j_{\text{out}}^{\text{net}} = \frac{k\hbar}{m}\cdot\frac{\pi}{k^2}\sum_l (2l+1)|S_l|^2$$

減少したフラックス: $j_{\text{in}}^{\text{net}} - j_{\text{out}}^{\text{net}} = \frac{k\hbar}{m}\cdot\frac{\pi}{k^2}\sum_l (2l+1)(1-|S_l|^2)$

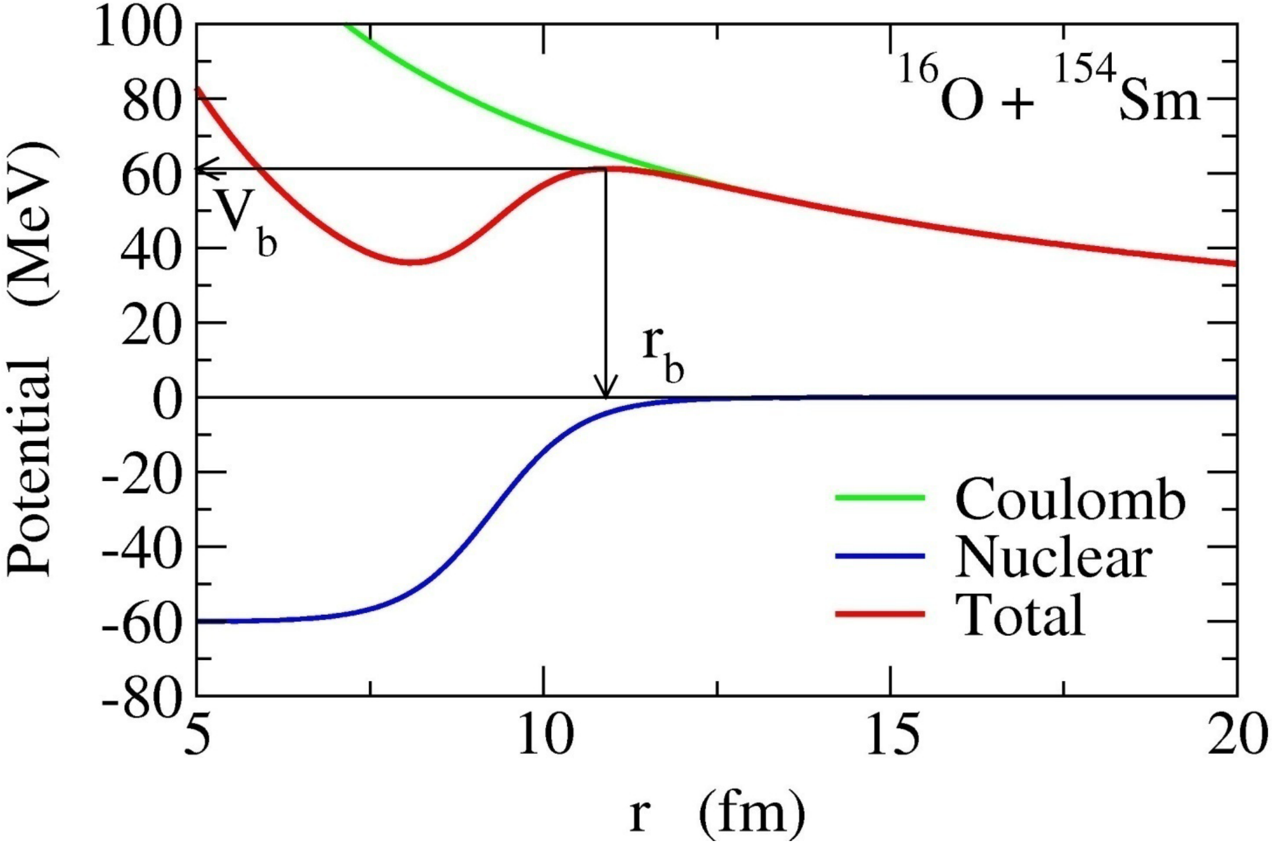
吸収断面積

$$\boxed{\sigma_{\text{abs}} = \frac{\pi}{k^2}\sum_l (2l+1)(1-|S_l|^2)}$$

重イオン核融合反応

重イオン：^{4}He より重い原子核

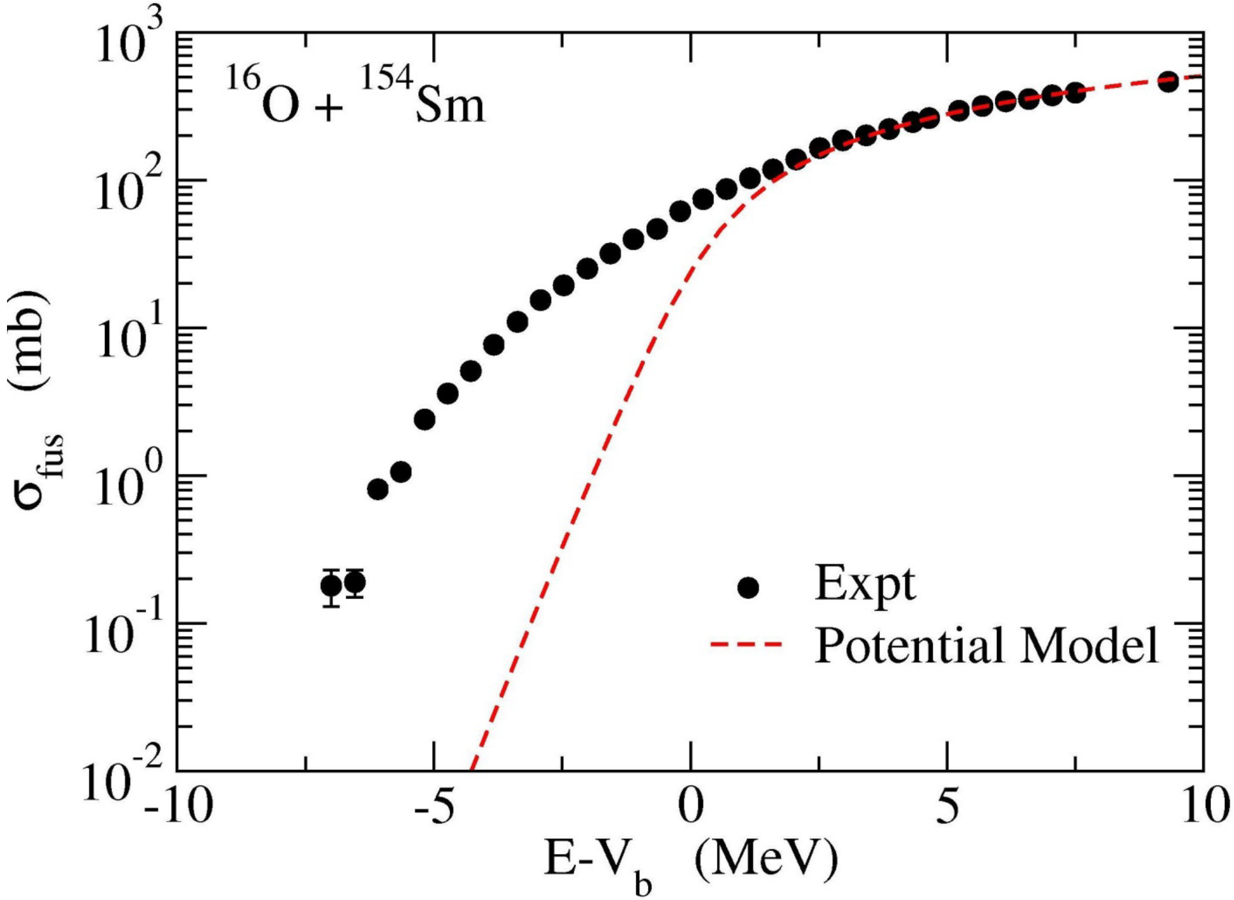
重イオン間ポテンシャル



2つの力：

1. クーロン力
   長距離斥力
2. 核力
   短距離引力

両者の打ち消しあいによりポテンシャル障壁が形成
（クーロン障壁）



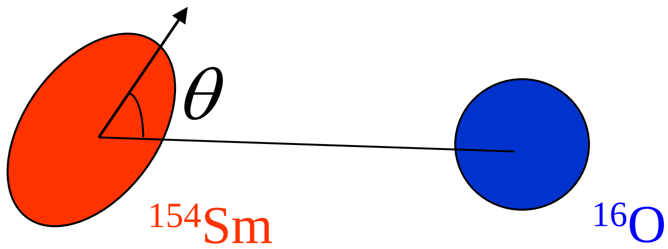
ポテンシャル模型:

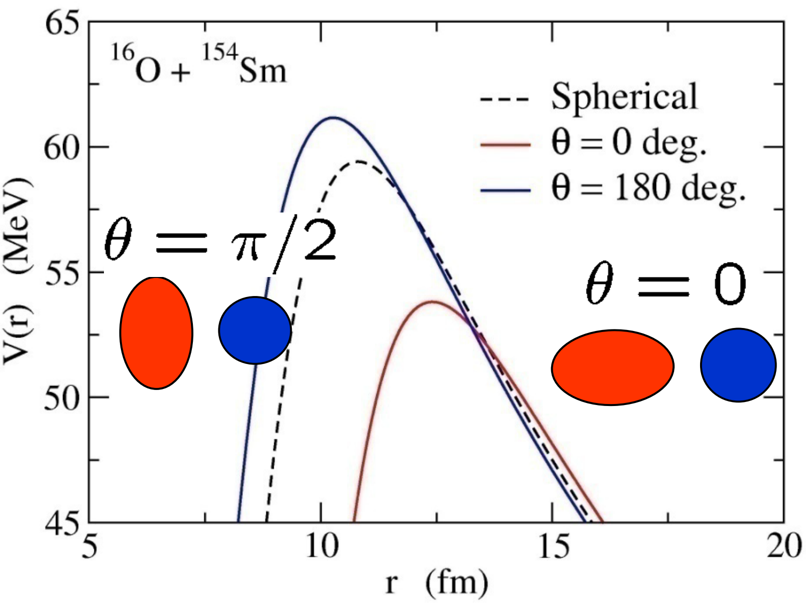
$E > V_b$ では大体データを再現

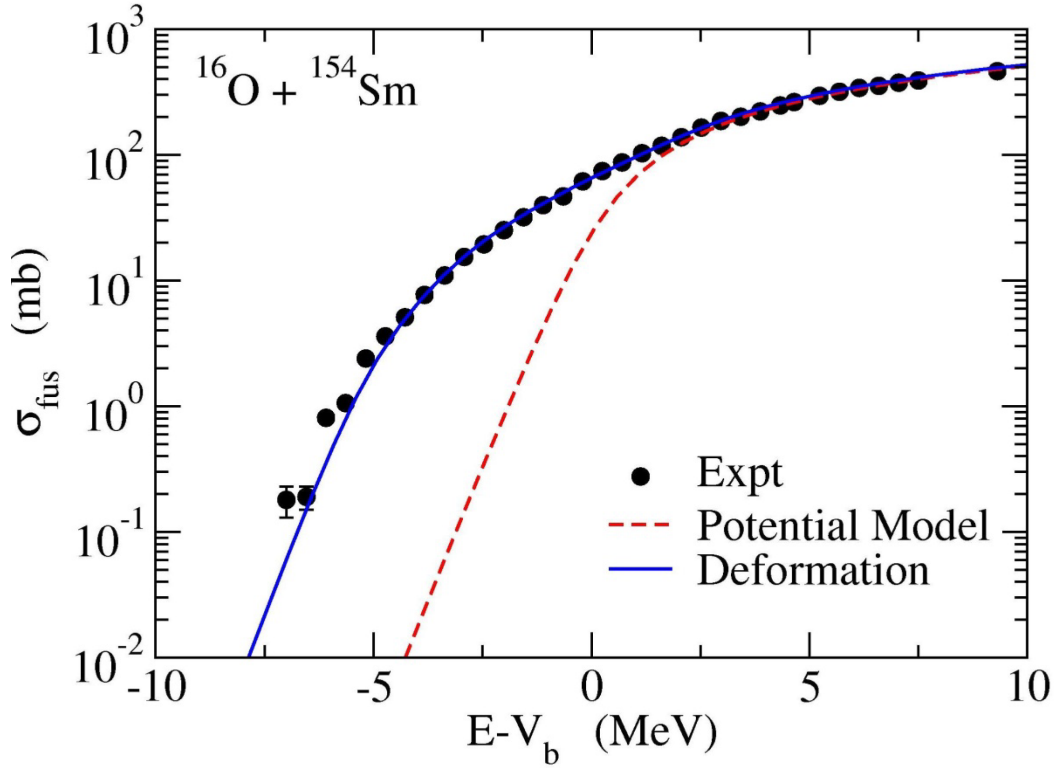
$E < V_b$ では核融合断面積を過小に評価

^{16}O+^{154}Sm 核融合反応に対する ^{154}Sm の変形の効果

$$\boxed{\sigma_{\rm fus}(E) = \int_0^1 d(\cos\theta)\sigma_{\rm fus}(E;\theta)}$$



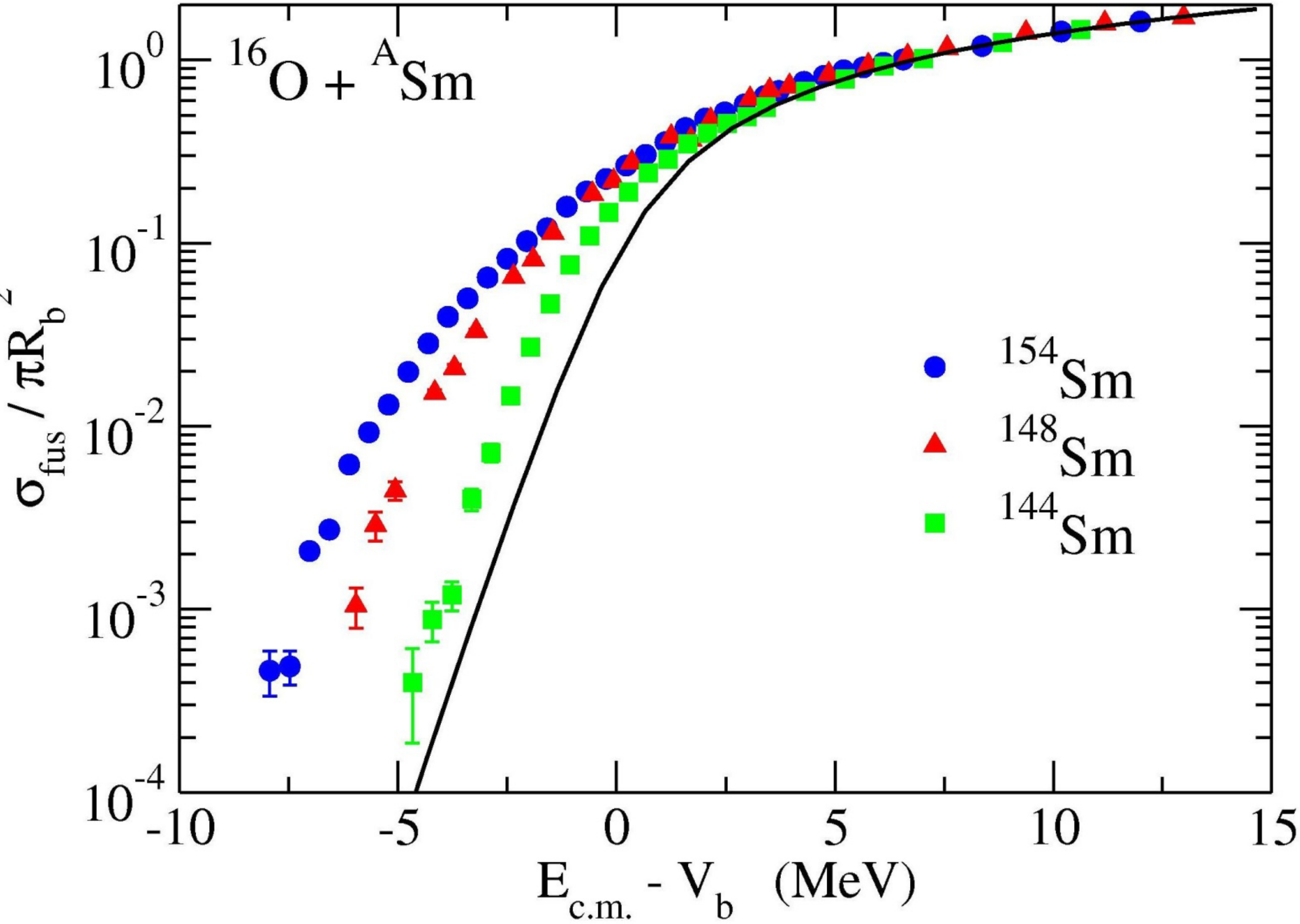




変形の効果：核融合断面積が 10~100 倍増大

トンネル確率は障壁の変化に敏感 ⟹ 核融合反応：核構造に対する興味深いプローブ

核融合断面積の標的核依存性

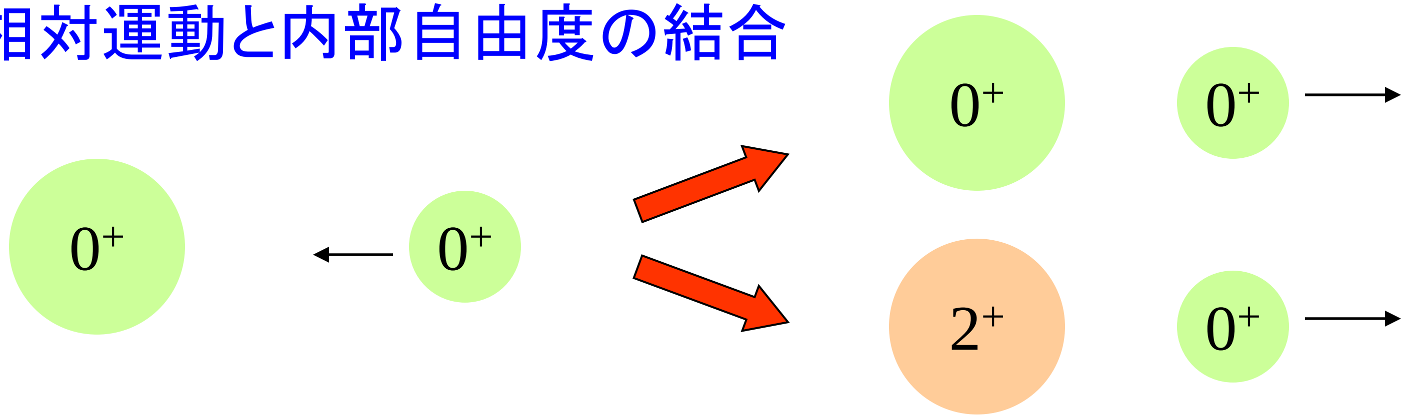


$E < V_b$ において強い標的核依存性

低励起集団運動の影響

（参考）より一般的には結合チャンネル法で説明される

相対運動と内部自由度の結合



エントランス・
チャンネル

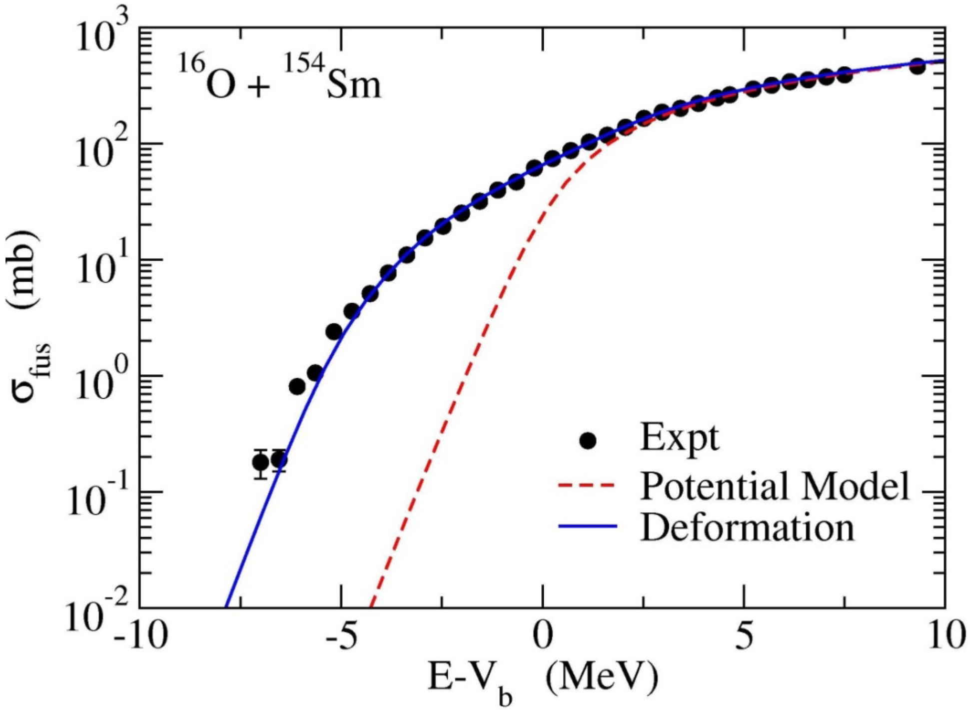
励起
チャンネル

結合チャンネル方程式

$$\boxed{\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2+V_0(r)+\epsilon_k-E\right]\psi_k(\boldsymbol{r})+\sum_{k'}\langle\phi_k|V_{\mathrm{coup}}|\phi_{k'}\rangle\psi_{k'}(\boldsymbol{r})=0}$$

励起エネルギー　　　励起オペレーター

不安定核を用いた核融合反応

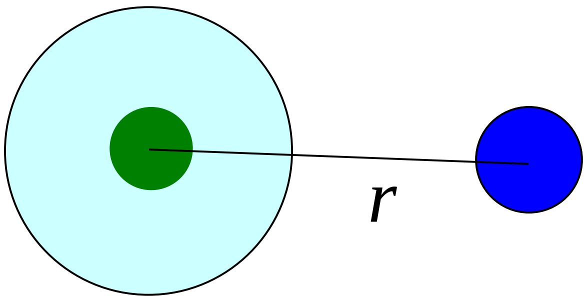


安定核の核融合反応では、原子核間相対運動と散乱核の内部自由度(内部励起)が結合することで、核融合反応断面積が増大(トンネル領域)

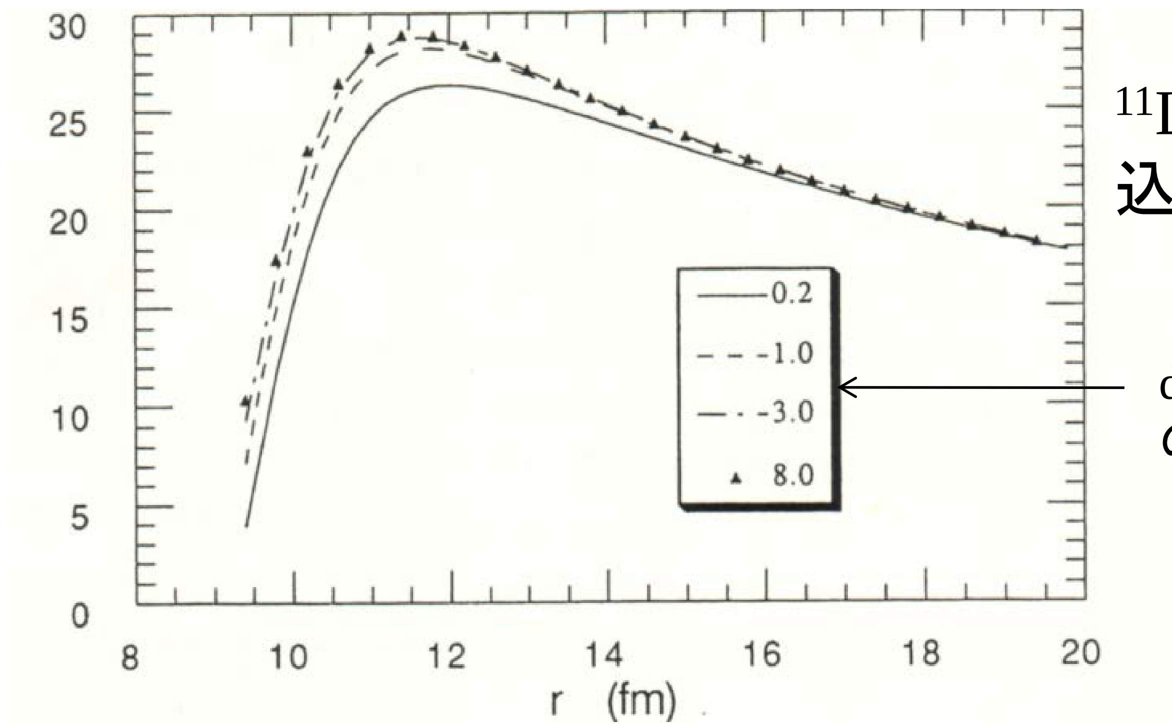
不安定核(弱束縛核)を用いるとどうなるか?
核融合反応断面積は増大? 変化なし? 減少?

2つの効果

1. ハロー構造による重イオン間ポテンシャルの低下 ➡ 核融合反応断面積の増大



ハロー → 広がった密度分布
→ 遠方から核力(引力)がはたらく



^{11}Li+^{208}Pb に対する2重畳み込みポテンシャル

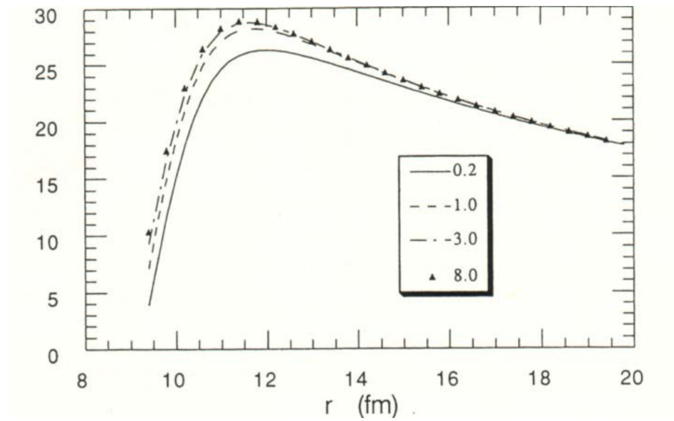
dineutron クラスターの分離エネルギー

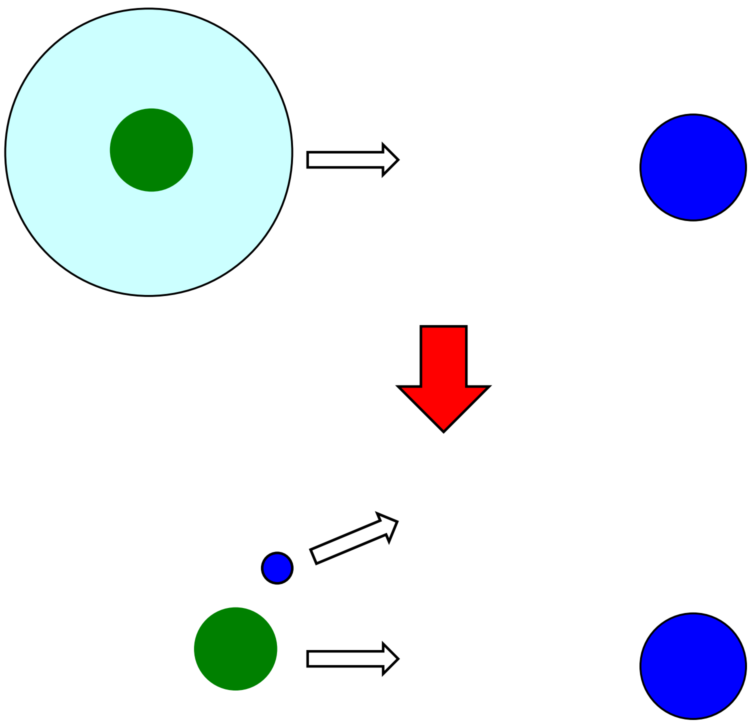
N. Takigawa and H. Sagawa, PLB265('91)23

2つの効果

1. ハロー構造による重イオン間ポテンシャルの低下
2. 分解 (breakup) の効果

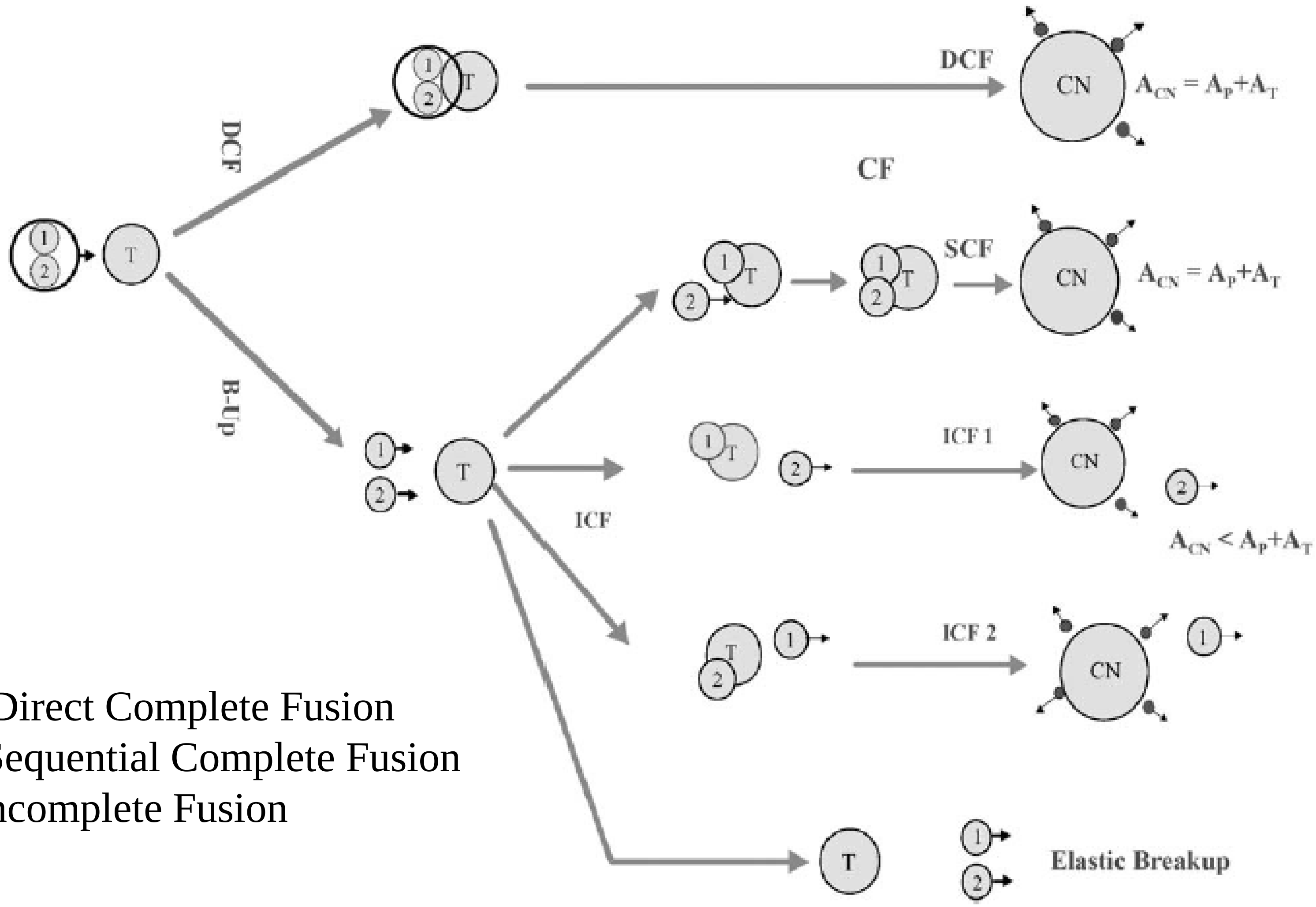
これはあまり自明ではない





- 分解すると障壁の低下がなくなるので核融合反応断面積は減少?
- 安定核と同様、結合チャンネル効果により断面積は増大?
- もっと複雑な分解の動的な効果?

複雑な反応プロセス

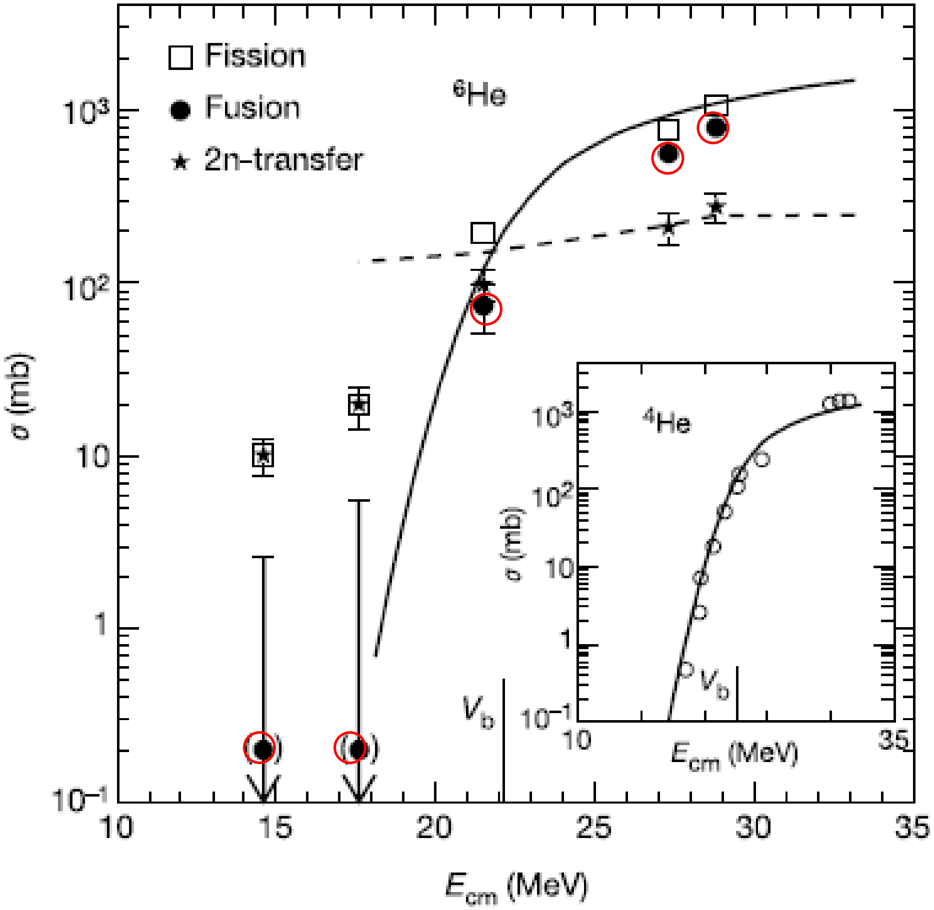


DCF=Direct Complete Fusion
SCF=Sequential Complete Fusion
ICF=Incomplete Fusion

L.F. Canto, P.R.S. Gomes, R. Donangelo, and M.S. Hussein, Phys. Rep. 424(‘06)1

実際の実験データ

^{6}He + ^{238}U



R. Raabe et al., Nature 431 ('04)823

- 核融合反応断面積は、ポテンシャル模型の予測と矛盾していない（ように見える）

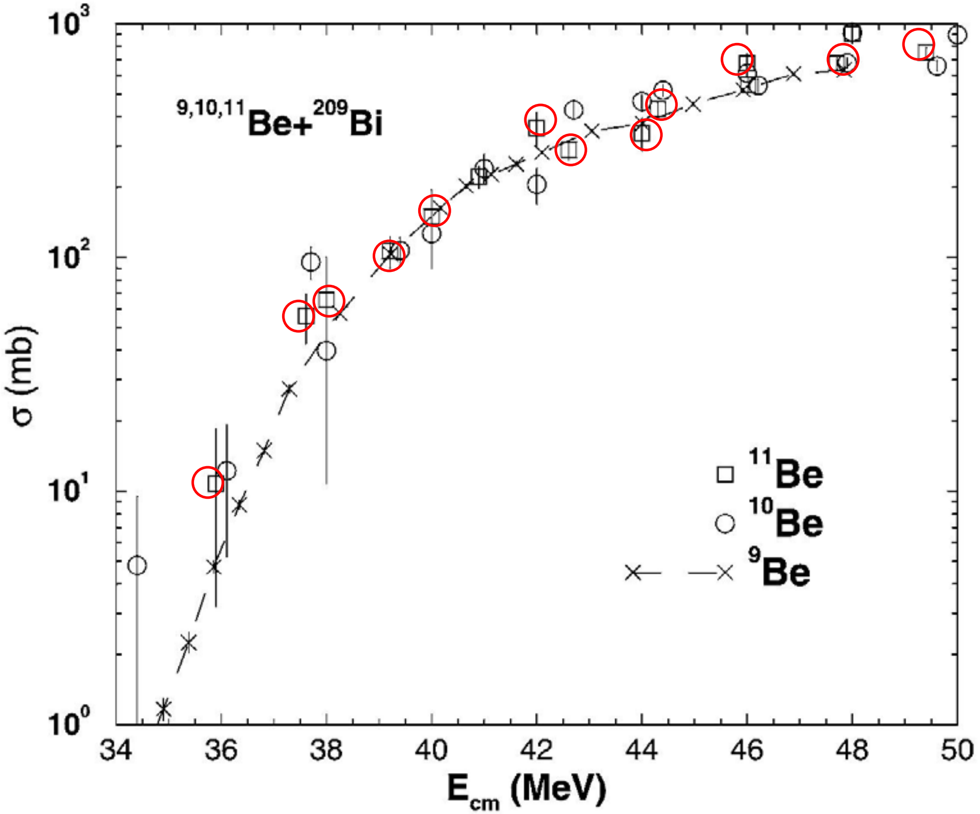
⇩

ポテンシャルの低下による増幅と分解の効果による減少が打ち消しあい?

- 大きな2中性子移行反応の断面積

実際の実験データ

^{9,10,11}Be + 209Bi

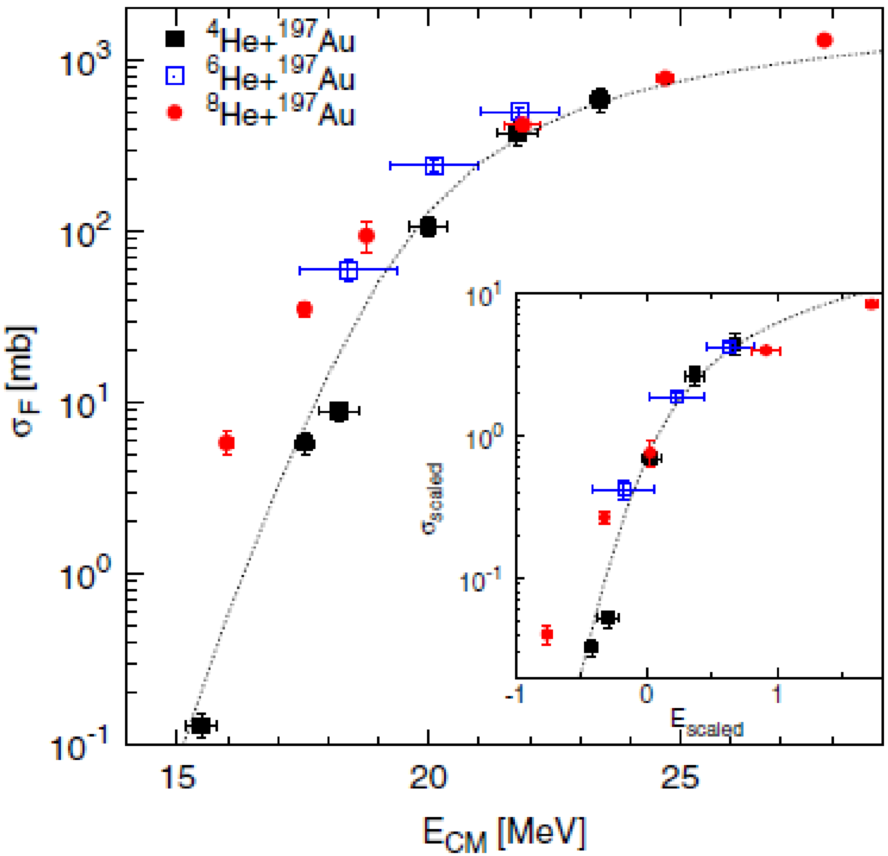


^{11}Be は特に変わった振る舞いをしない

C. Signorini et al., NPA735 ('04) 329

実際の実験データ

^{4,6,8}He + ^{197}Au



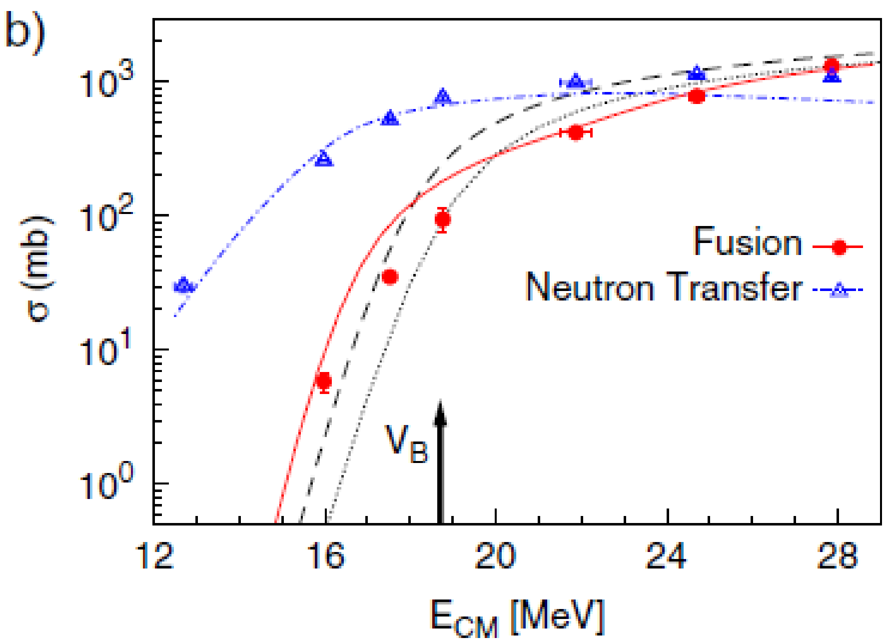
- ➢^{4}Heに比べて ^{6,8}He 核の入射では核融合断面積がやや増大
- ➢^{6}He と ^{8}Heで同じような断面積（何故かはよくわかっていない）

- ➢分解や核子移行の効果はそれほど大きくない?

A. Lemasson et al., PRL103(‘09)232701

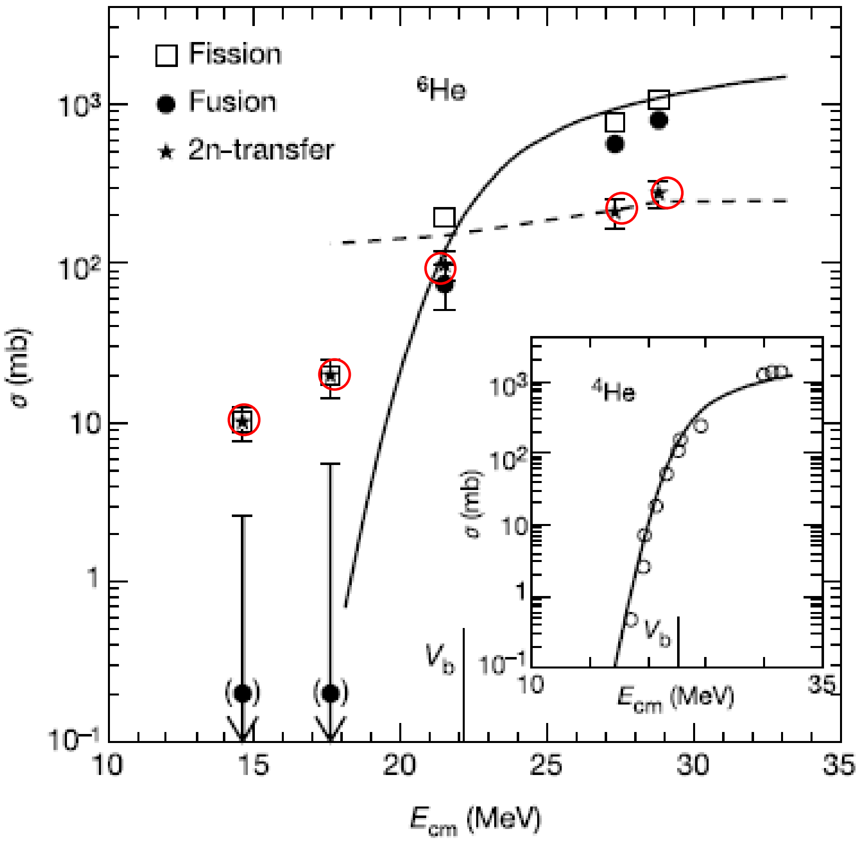
➢ただし、ここでも大きな核子移行断面積

$^{8}He + ^{197}Au$



A. Lemasson et al.,
PRL103('09)232701

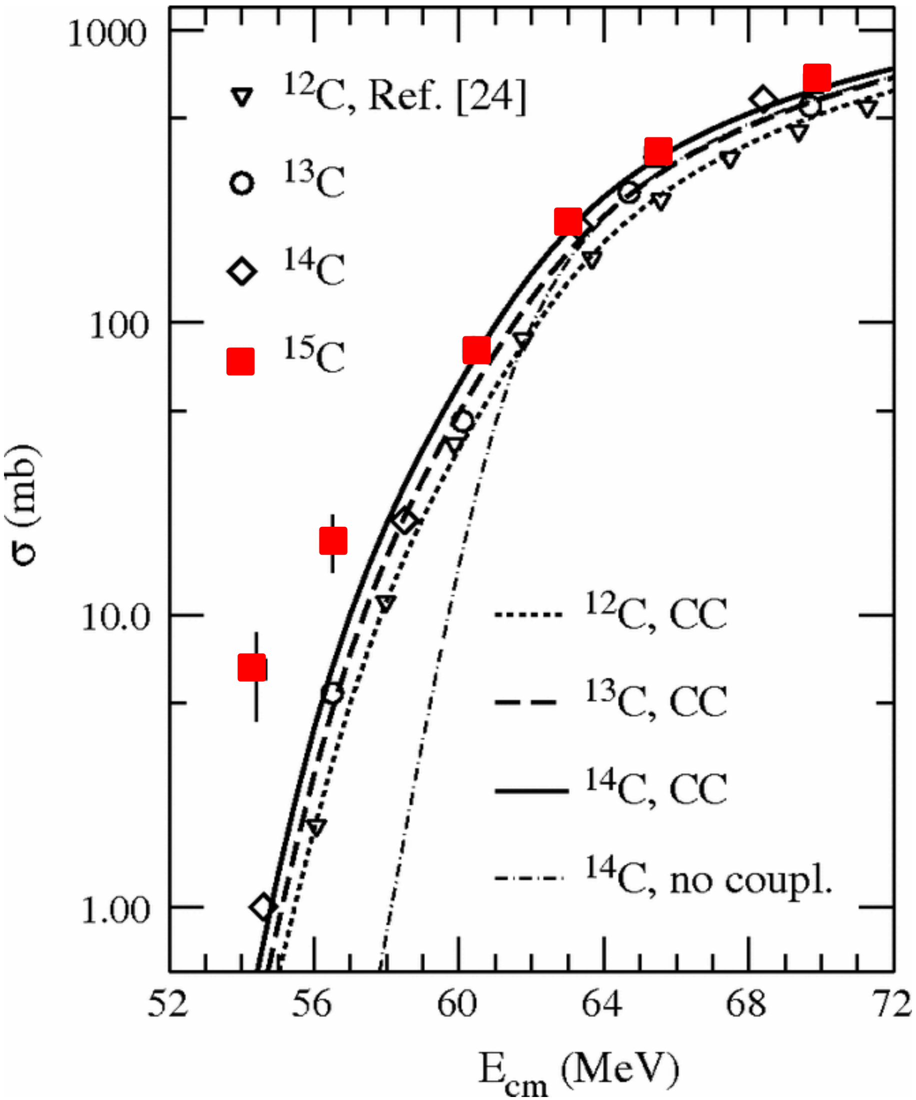
$^{6}He + ^{238}U$



R. Raabe et al.,
Nature 431 ('04)823

実際の実験データ

$^{12,13,14,15}C + ^{232}Th$



M. Alcorta et al., PRL106('11)

$^{12,13,14,15}C + ^{232}Th$

M. Alcorta et al.,
PRL106('11)172701

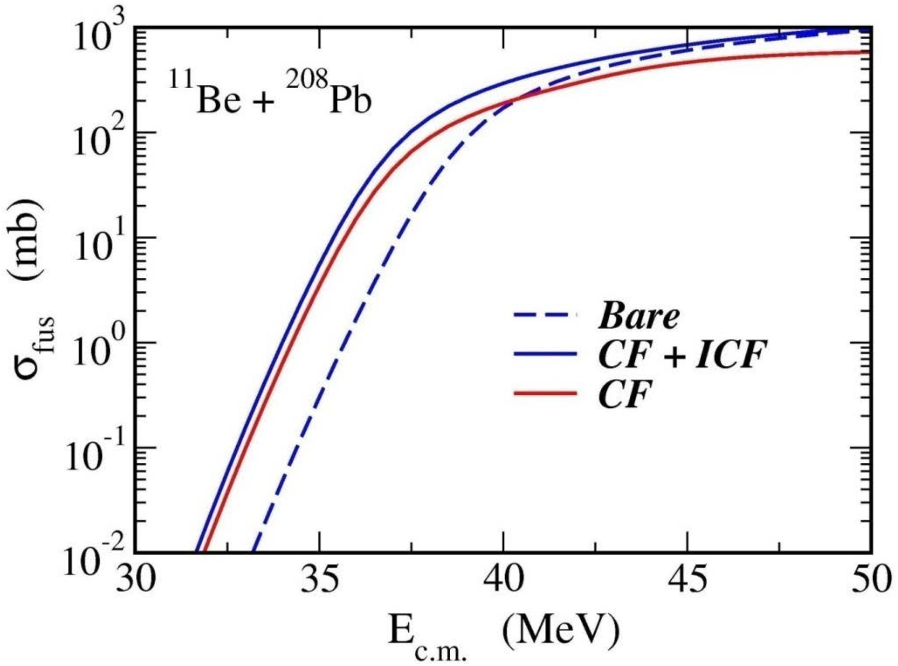
^{15}C: 1n ハロー原子核

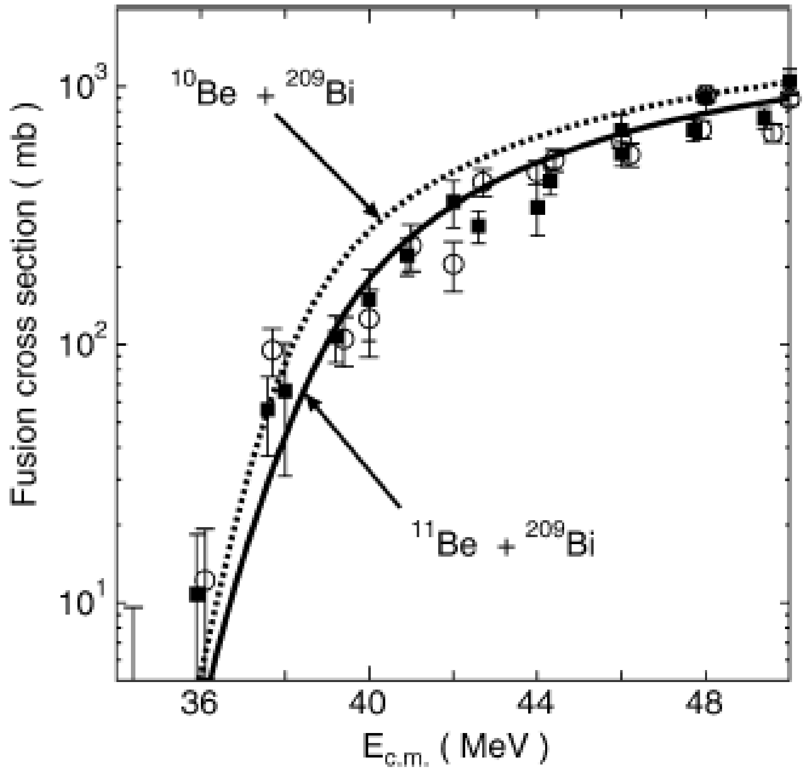
⟶ 核融合反応断面積
の増大

核子移行過程の効果?

理論計算の現状

理論計算では、連続状態の効果と移行反応の効果をきちんと取り入れる必要がある。(中々大変。)



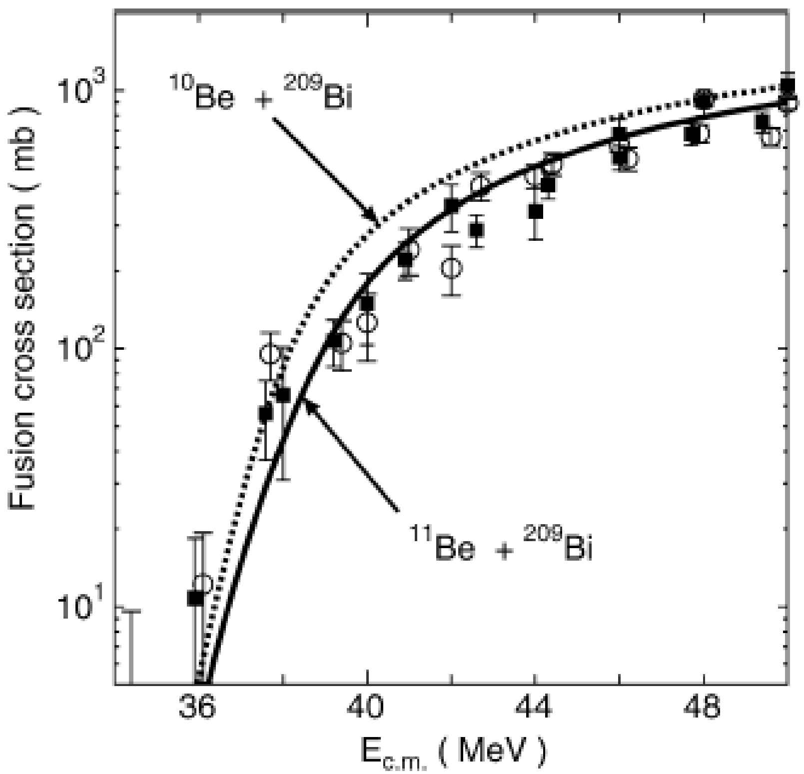


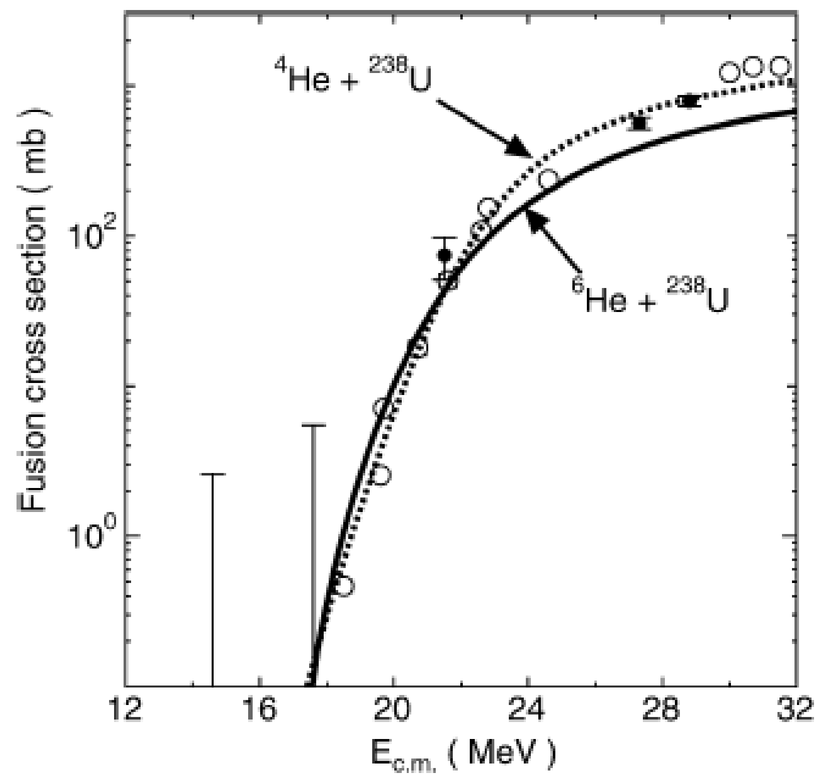
CDCC的な計算
ただし連続状態間の結合なし

時間依存アプローチ
分解、移行の効果は
自動的に入る

K. Hagino, A. Vitturi, C.H. Dasso, and S.M. Lenzi, Phys. Rev. C61 ('00) 037602

M. Ito, K. Yabana, T. Nakatsukasa, and M. Ueda, PLB637('06)53





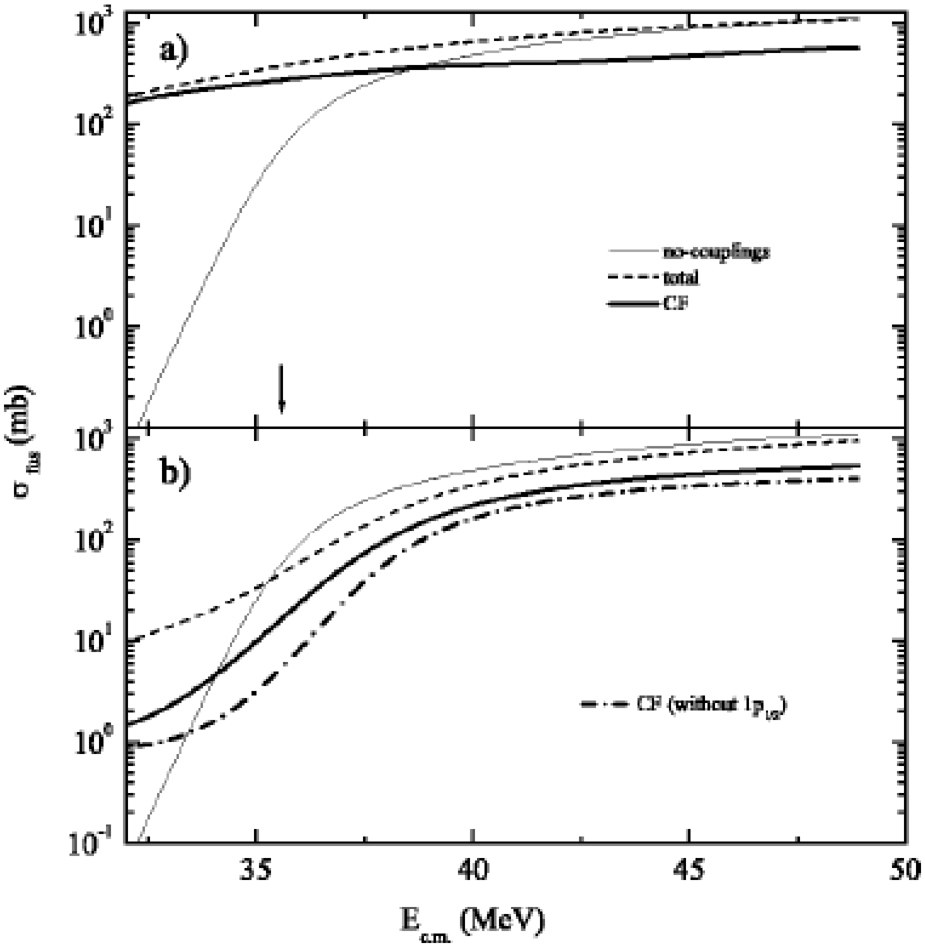
時間依存アプローチ
分解、移行の効果は
自動的に入る

（dineutron クラスター模型）

M. Ito, K. Yabana, T. Nakatsukasa, and M. Ueda, PLB637(‘06)53

（参考）連続状態間結合の効果

^{11}Be + ^{208}Pb



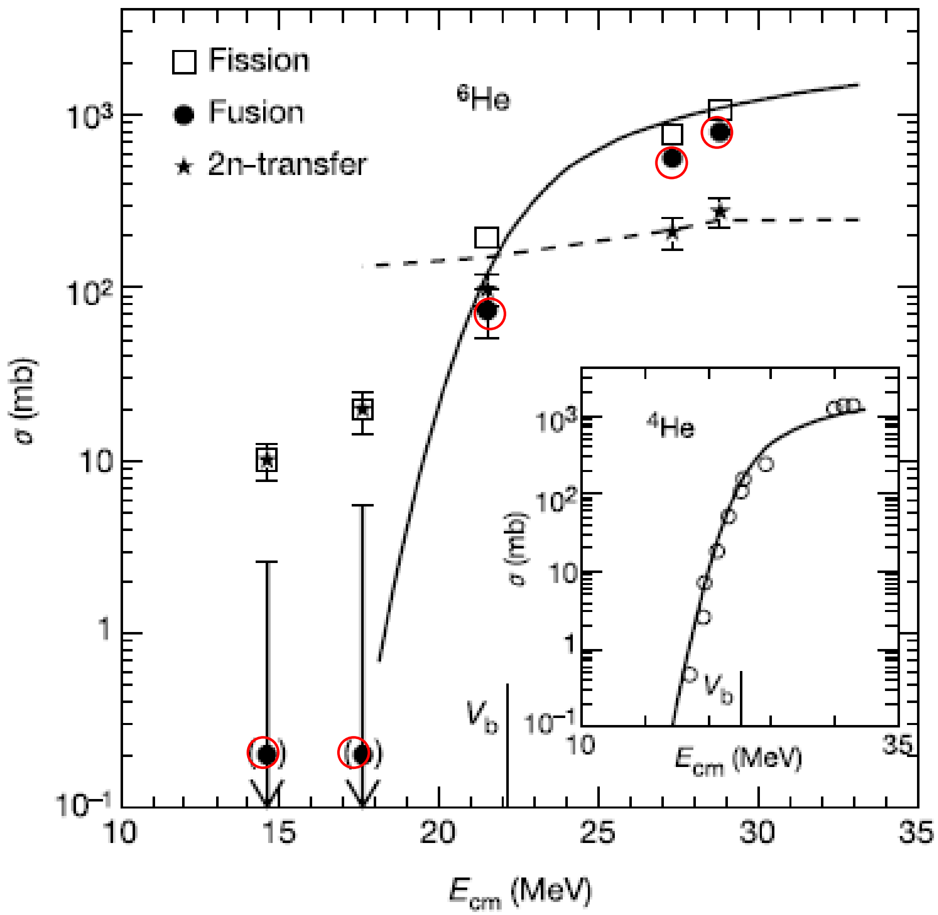
連続状態間結合なし

連続状態間結合あり

A. Diaz-Torres and I.J. Thompson, PRC65('02)024606

（補足）

^{6}He + ^{238}U



R. Raabe et al., Nature 431 (‘04)823

➢核融合反応断面積は、ポテンシャル模型の予測と矛盾していない（ように見える）

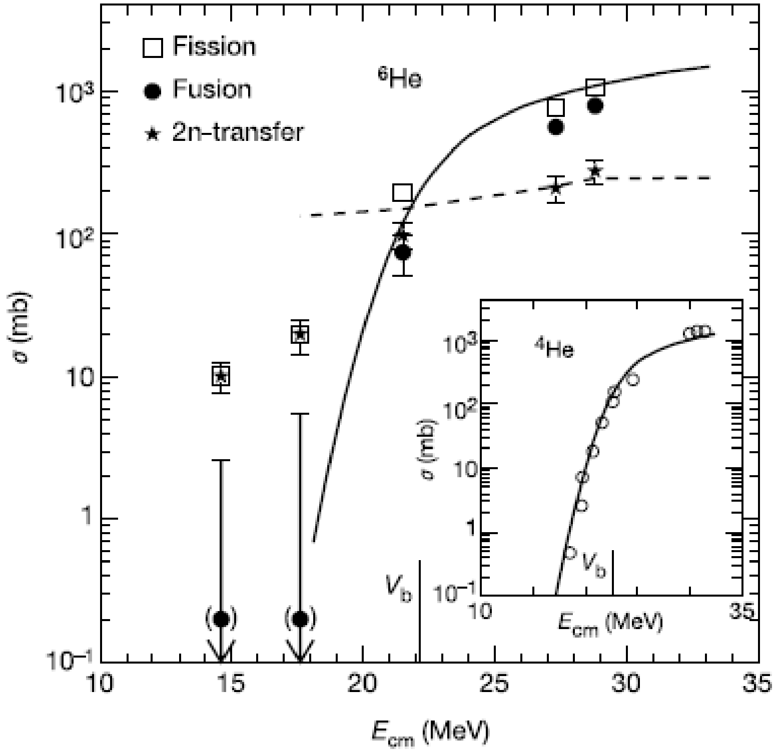
ポテンシャルの低下による増幅と分解の効果による減少が打ち消しあい?

もっとエネルギーが低くなるとどうなるか?
（まだ解決していない）

cf. P.R.S. Gomes, L.F. Canto, J. Lubian, and M.S. Hussein, arXiv: 1009.0573

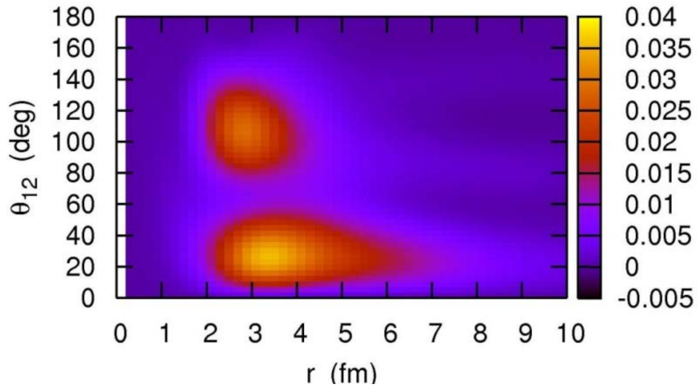
対移行反応

$^6He + ^{238}U$



大きな 2n 移行断面積

中性子過剰核の反応では
（分解に加えて）
核子移行がキーワードの一つ



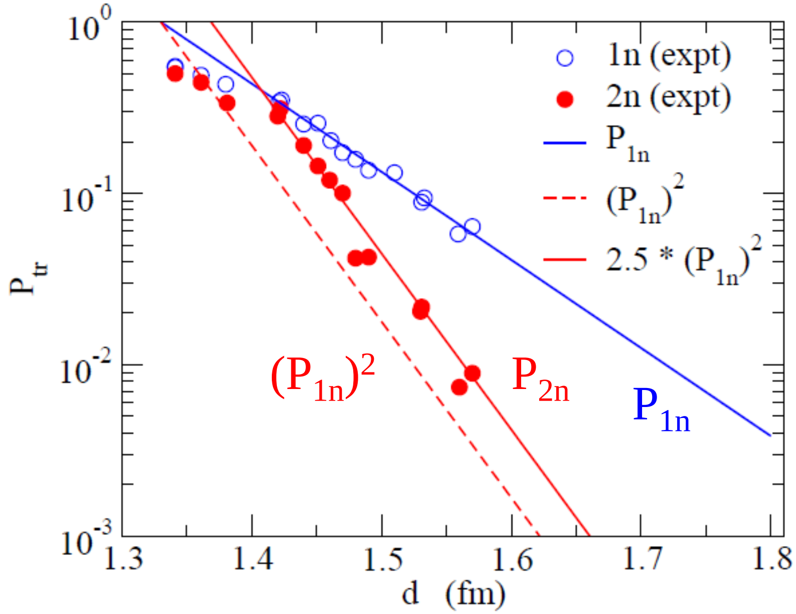
特にダイ・ニュートロン相関との
関係で対移行反応は今後ますます
重要な研究課題

対相関と対移行反応

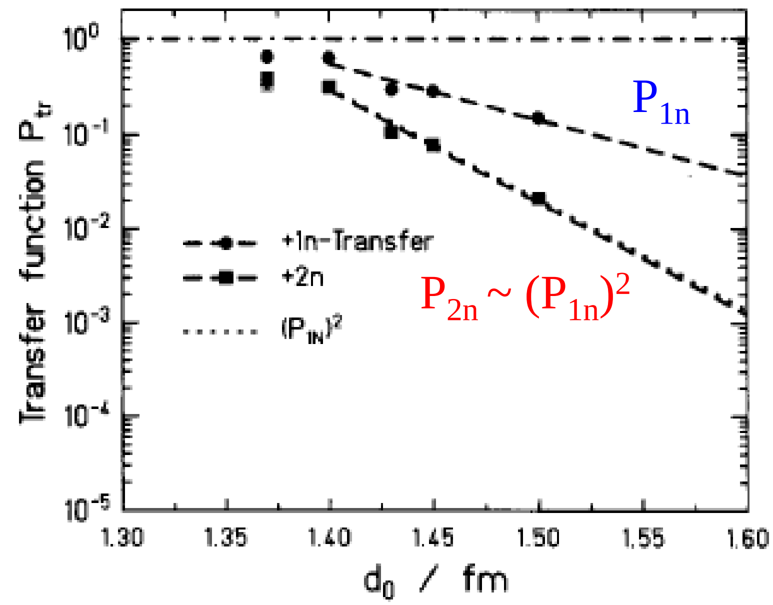
対移行反応の確率は対相関を強く反映する

対移行の確率:　$P_{\mathrm{tr}} \sim \dfrac{d\sigma_{\mathrm{tr}}}{d\sigma_R}$

^{112}Sn + ^{120}Sn



^{144}Sm + ^{208}Pb

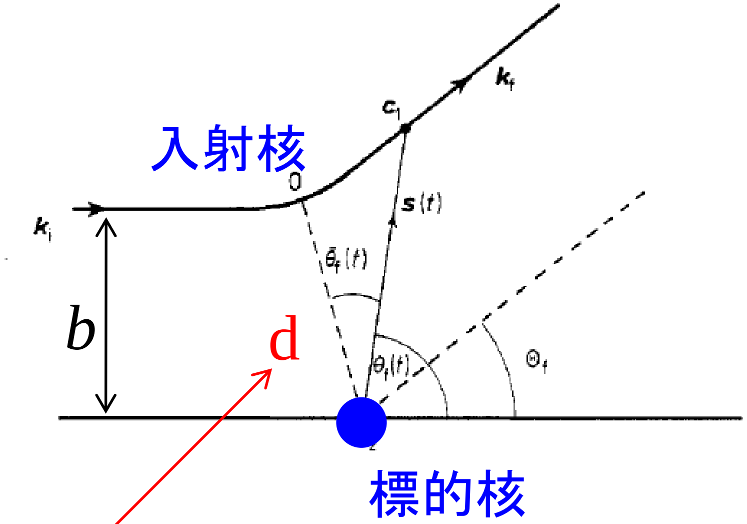


W. von Oertzen et al., Z. Phys. A326(‘87)463　　J. Speer et al., PLB259(‘91)422

$R_{\mathrm{min}} = d\,(A_P^{1/3} + A_T^{1/3})$　はラザフォード軌道の最近接距離

（補足）ラザフォード軌道

＊高田健次郎先生
「インターネットセミナー」
2-5-A章が分かりやすい



最近接距離 (the distance of closest approach)

クーロン力

$$V_c(r) = \frac{Z_P Z_T e^2}{r}$$

による古典的な軌道

$$d = \frac{Z_P Z_T e^2}{2E}\left[1 + \sqrt{1 + \cot^2\frac{\theta}{2}}\right]$$

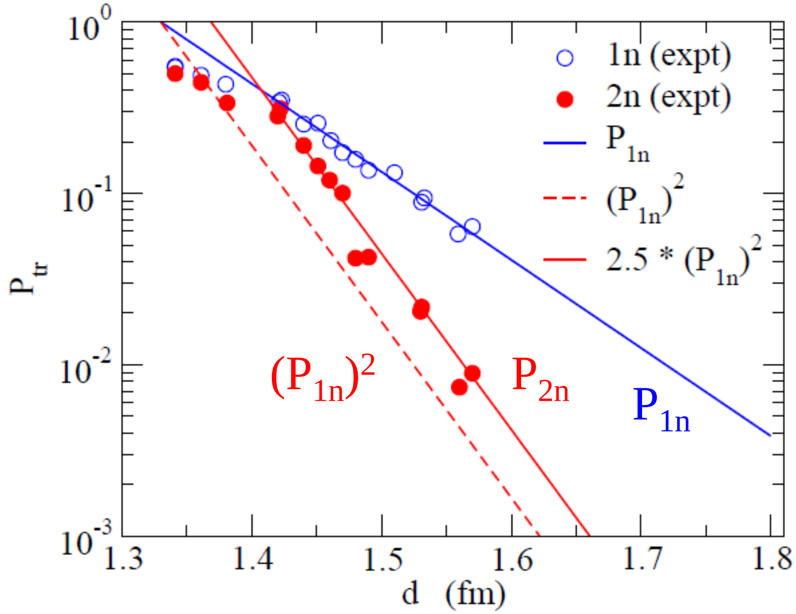
θ は散乱角

最近接距離は入射エネルギー E と散乱角 θ の関数

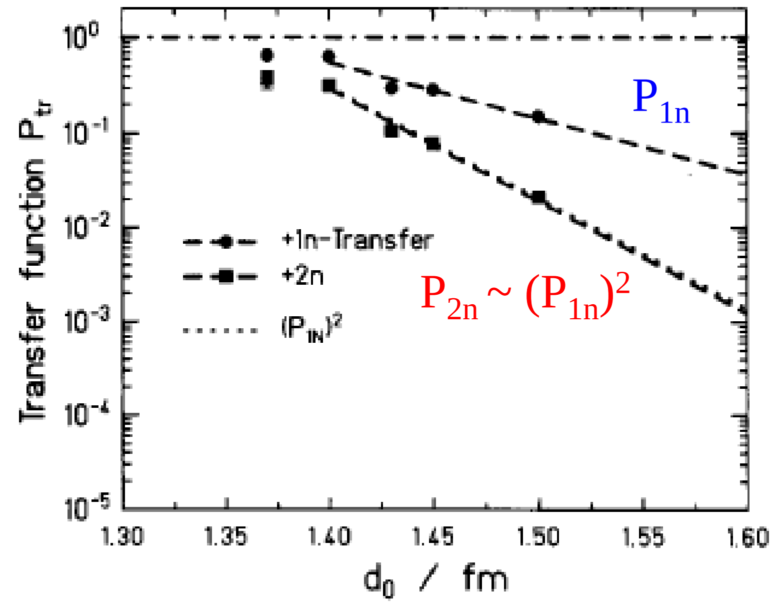
対相関と対移行反応

対移行反応の確率は対相関を強く反映する

^{112}Sn + ^{120}Sn



^{144}Sm + ^{208}Pb



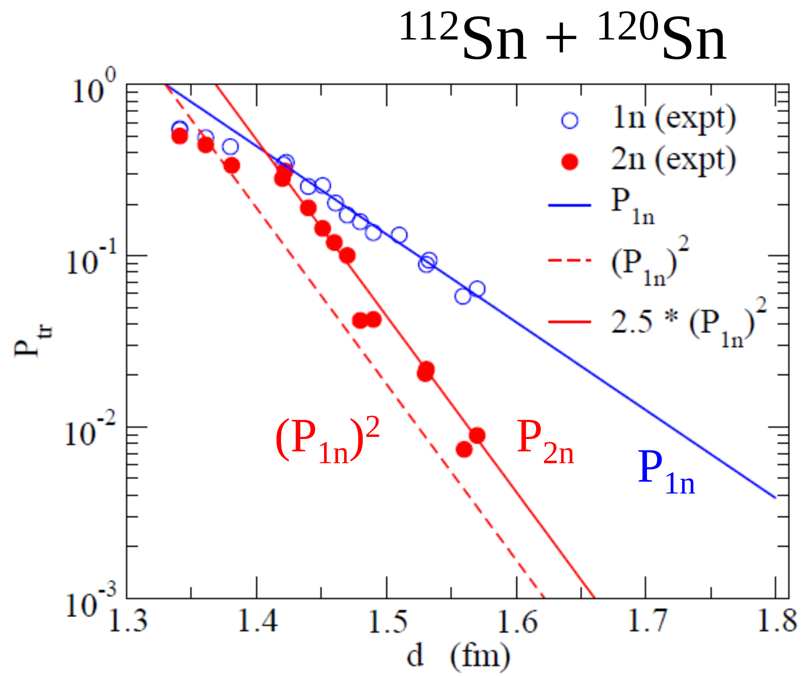
➢ ^{112}Sn + ^{120}Sn 反応では、単純な $(P_{1n})^2$ に比べて2中性子移行確率が増大

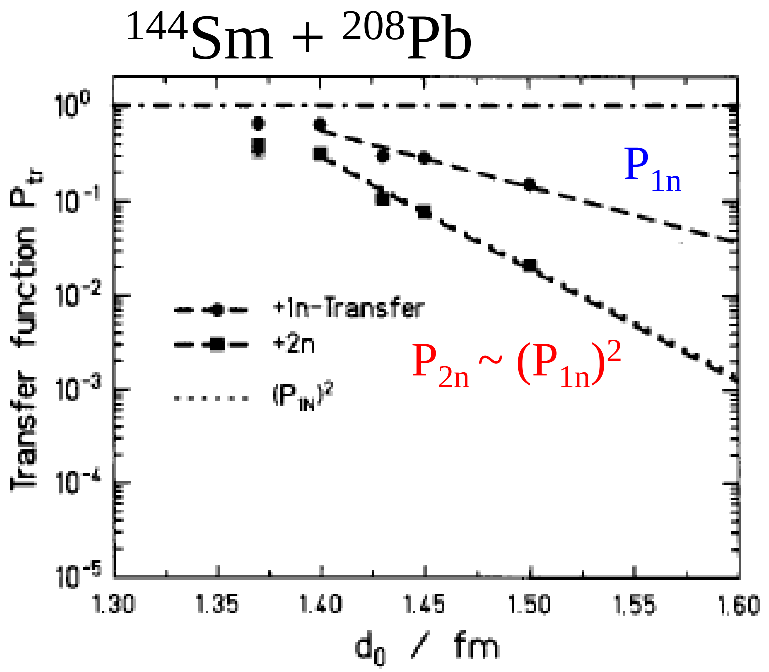
➢ 対相関が働かない（セミ）魔法数の原子核は2中性子移行確率の増大は見られない

2中性子移行確率は対相関に敏感

対相関と対移行反応

対移行反応の確率は対相関を強く反映する





（注）ペアリングの強い系でも 1n 移行の方が 2n 移行に比べて
とても多い

^{62}Ni + ^{206}Pb 多中性子移行反応

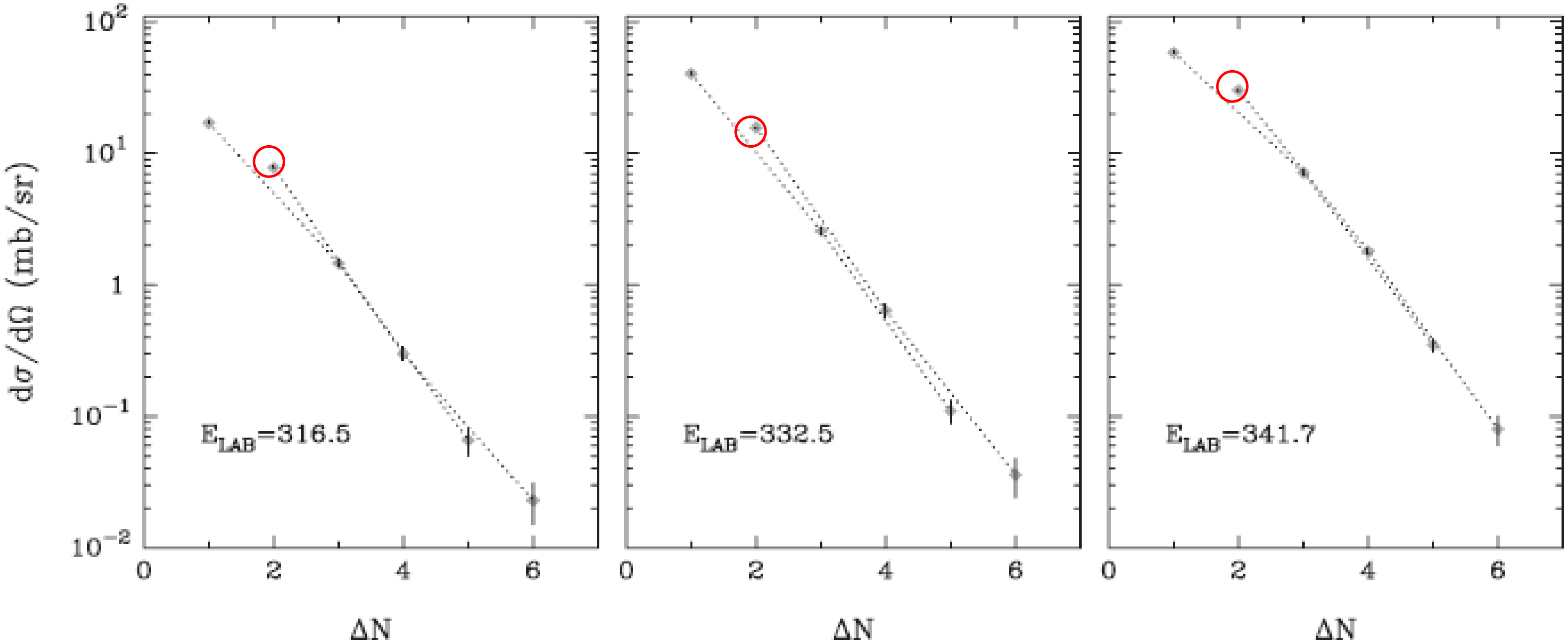


Figure 38. Results for the one- to six-neutron transfers from the reaction ^{62}Ni + ^{206}Pb at different energies covering overlap parameters up to $d_0 = 1.4$ fm. The small enhancement of the two-neutron transfer can be seen. The deviation of the higher-order transfers from the exponential fall-off defined by the 1n transfer defines here the enhancement factor EF (see also figures 23 and 46).

W. von Oertzen and A. Vitturi,
Rep. Prog. Phys. 64('01)1247

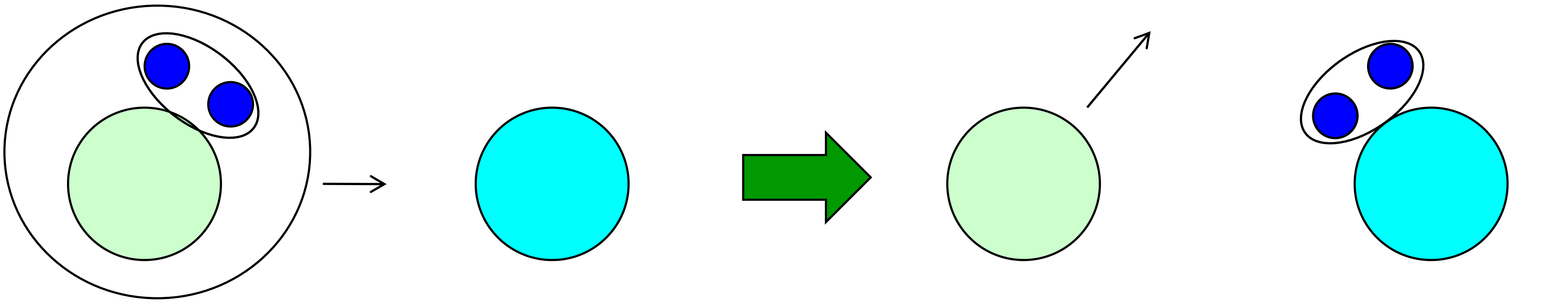
2n 移行確率の増大

⇔ di-neutron 相関との関係は?

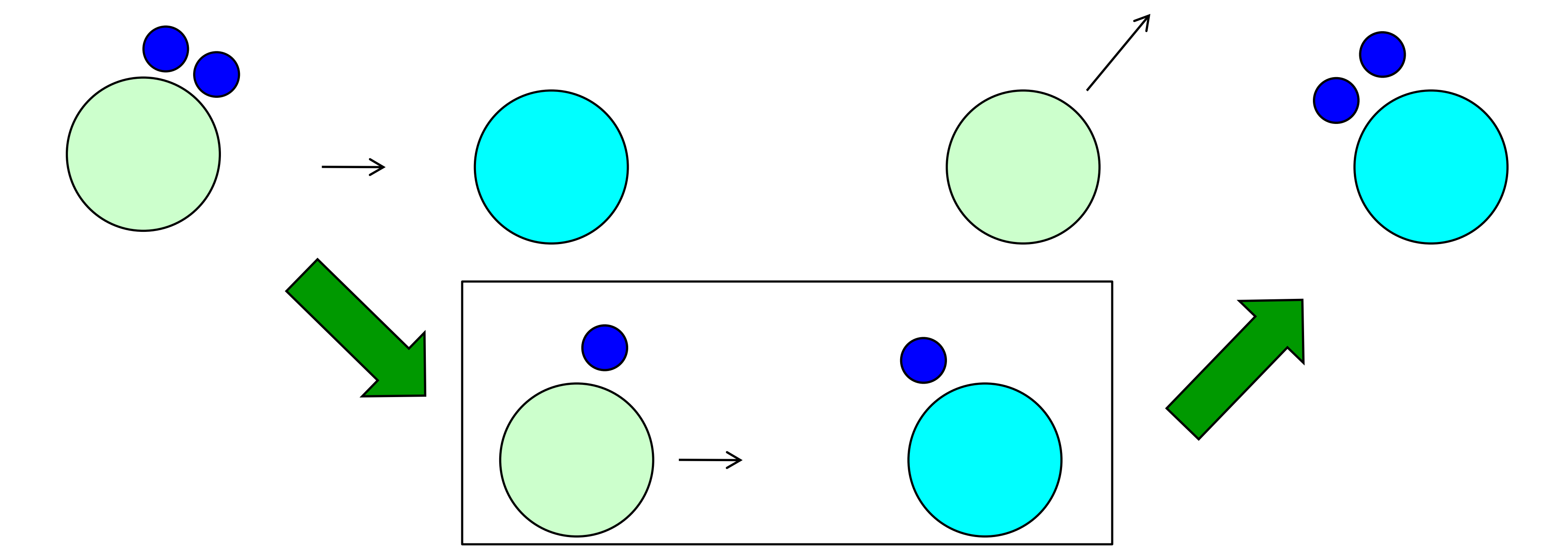
→ これからの課題

1ステップか2ステップか?

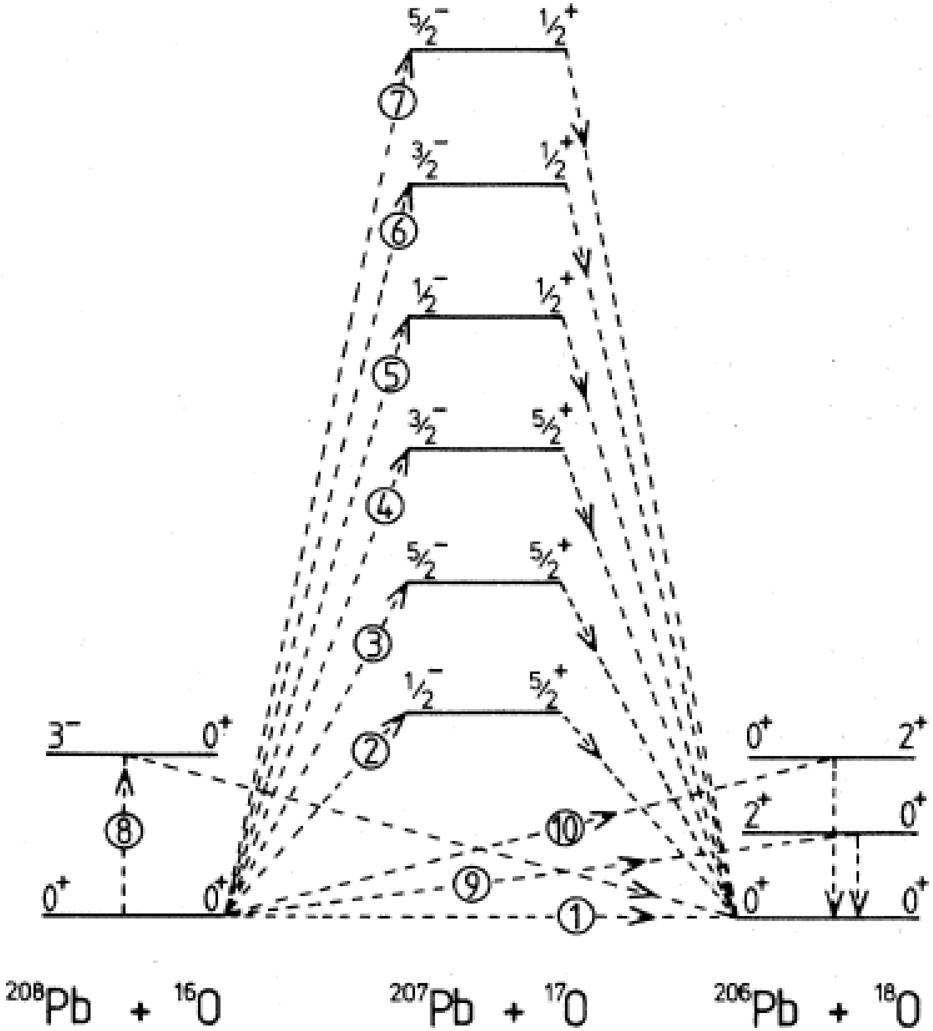
1ステップ(simultaneous/direct)

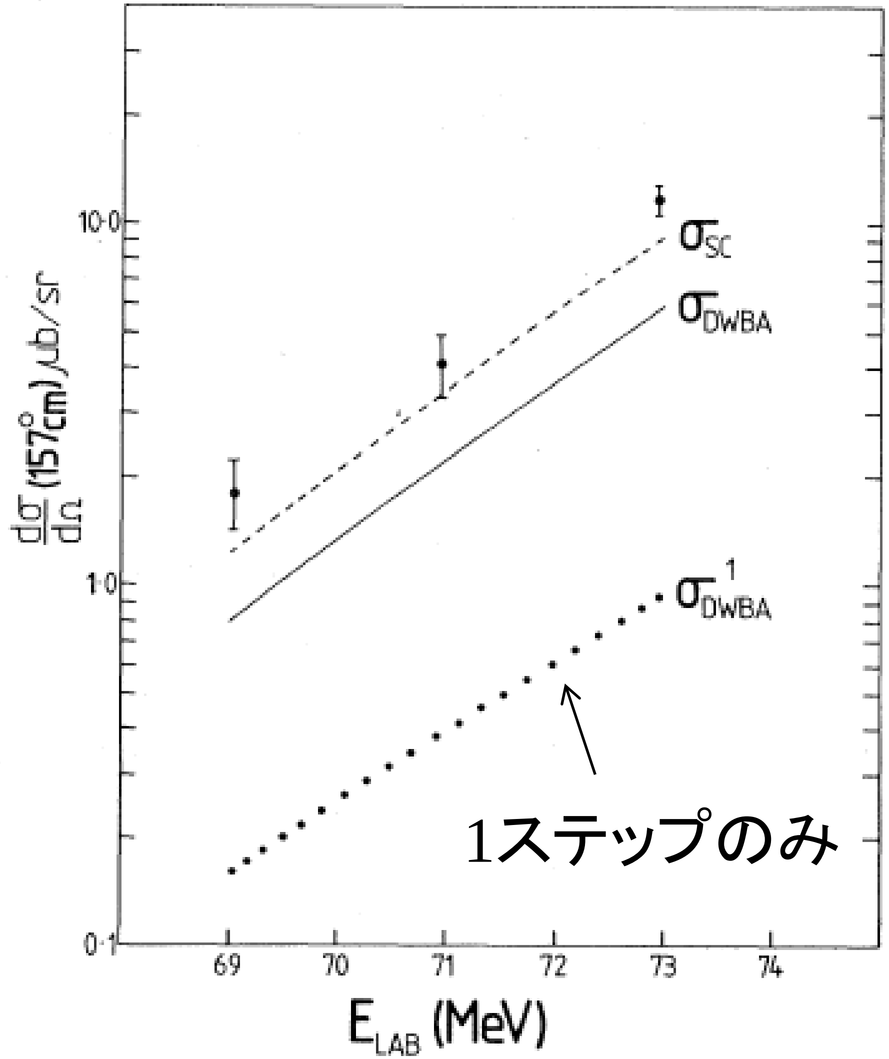


2ステップ(sequential):



1ステップか2ステップか?





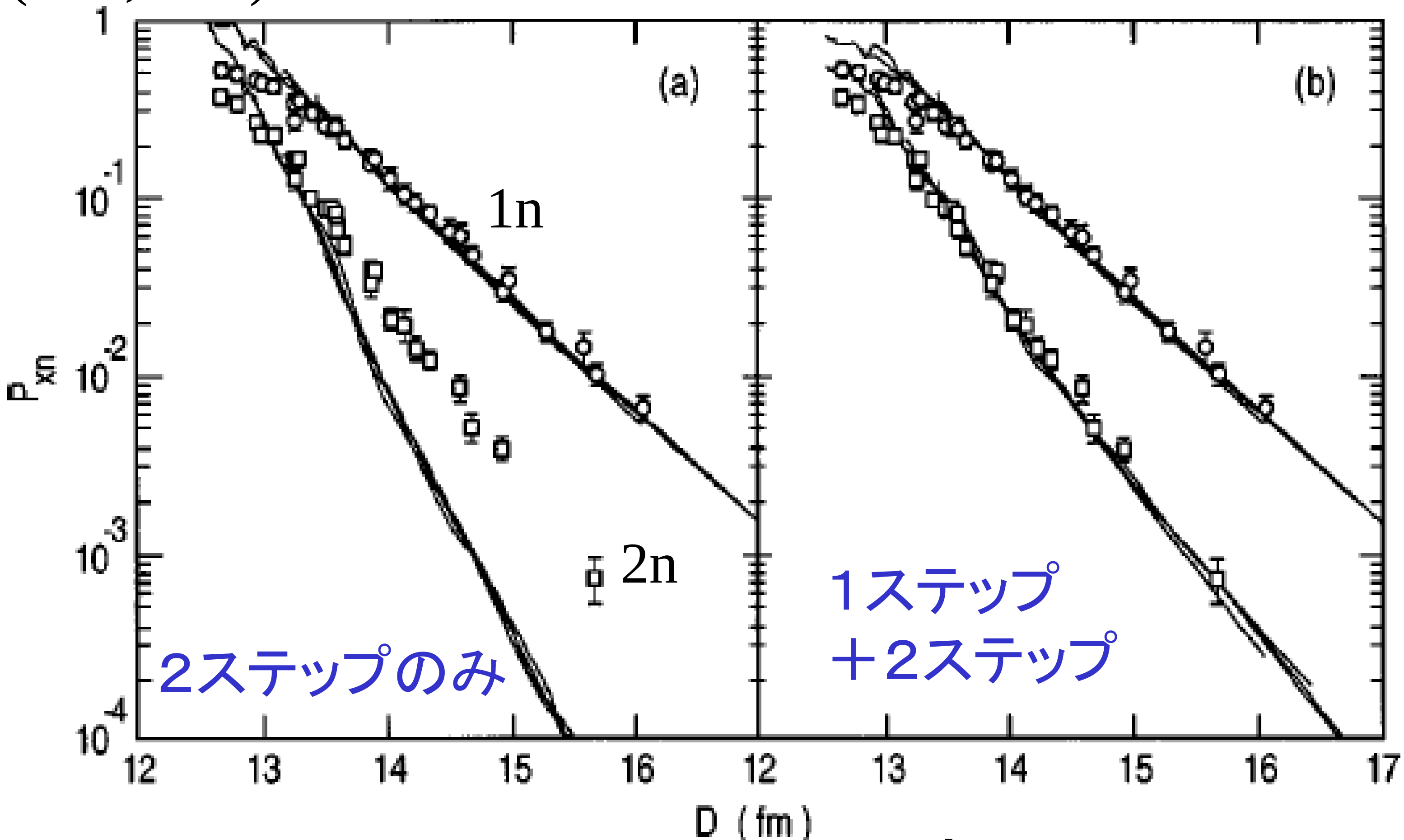
M.A. Franey et al., PRL41('78)837

1ステップのみの計算はデータを全く再現しない

⟶ 2ステップ過程の重要性

1ステップか2ステップか?

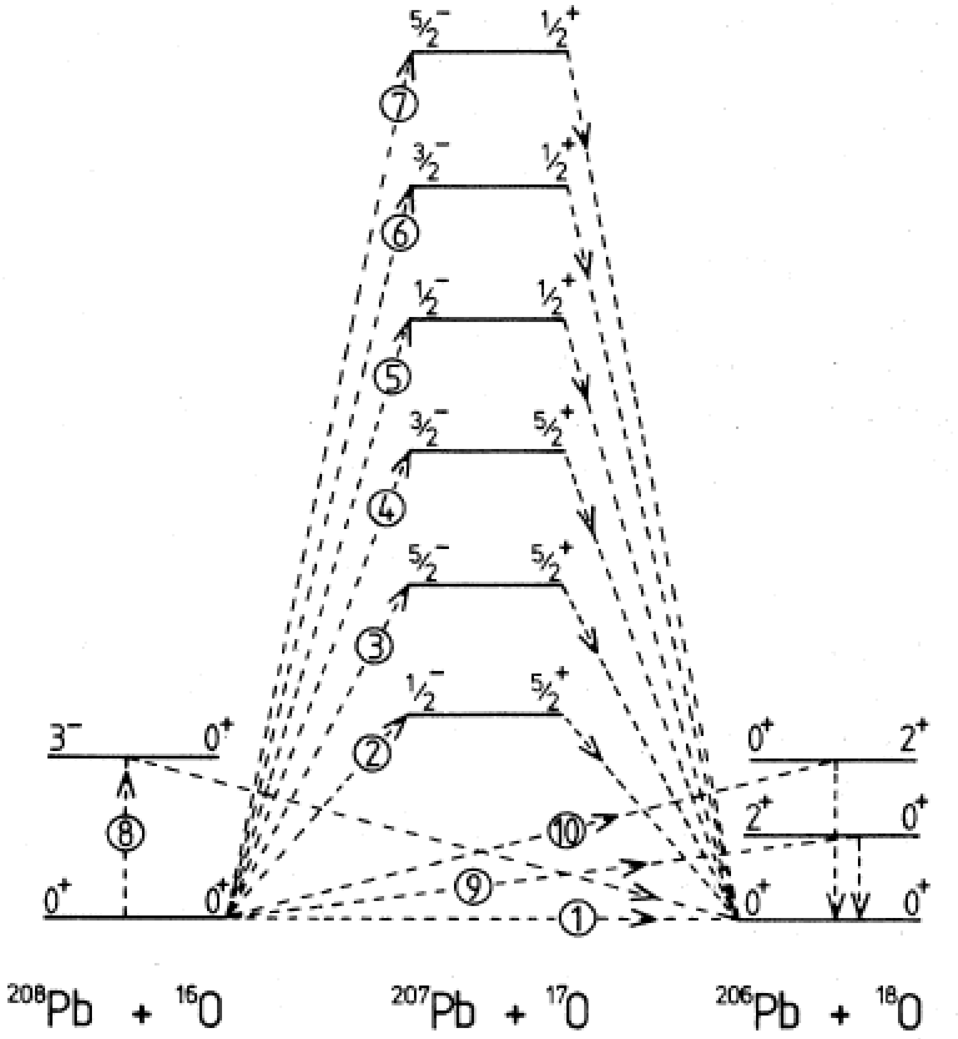
^{124}Sn(^{58}Ni, ^{60}Ni)^{122}Sn 反応



H. Esbensen, C.L. Jiang, K.E. Rehm, PRC57(‘98)2401

1ステップと2ステップの両方が重要

中性子過剰核を用いた対移行反応



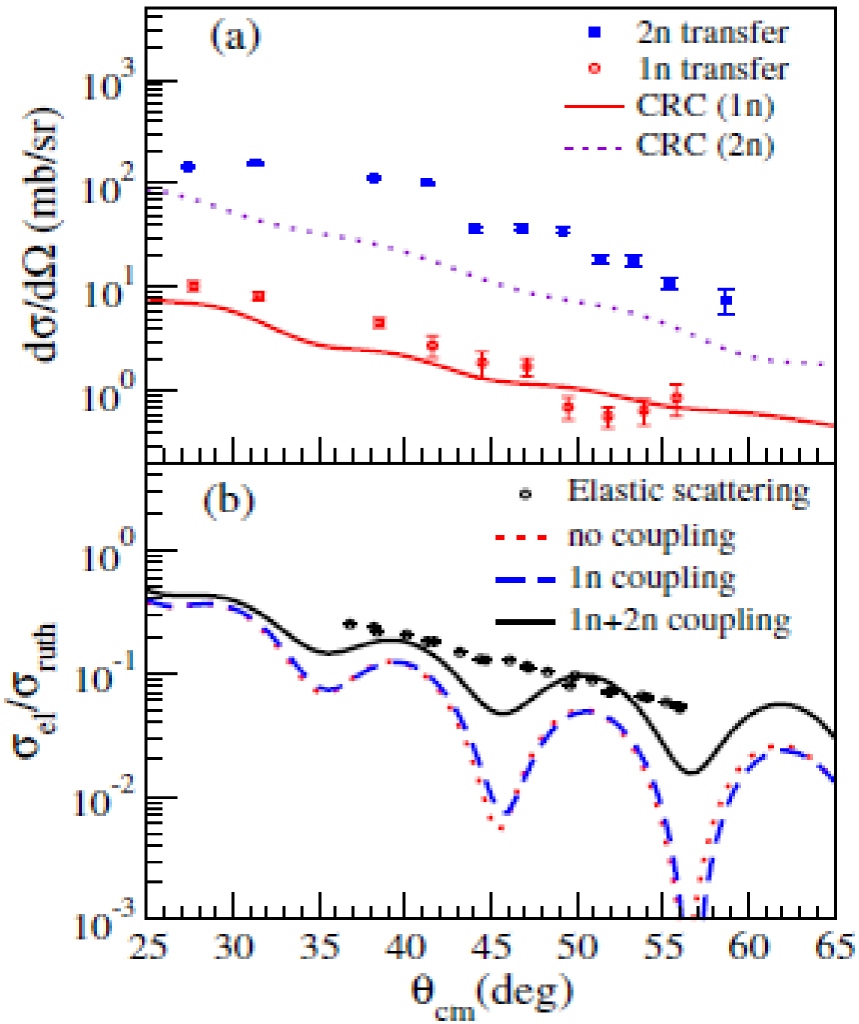
中性子過剰核を用いると、
中間状態(の多くが)非束縛

反応機構はどう変わる?

これからの課題

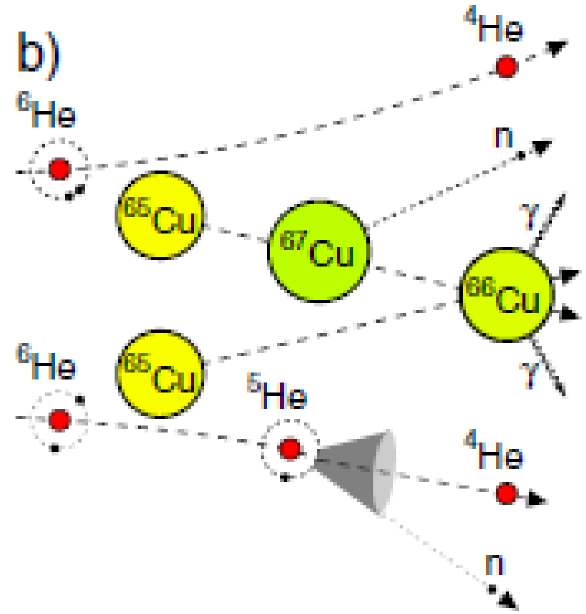
ボロミアン核の対移行反応：実験データ (i)

^{6}He + ^{65}Cu (GANIL)



E_{lab} = 22.6 MeV

A. Chatterjee et al., PRL101('08)032701

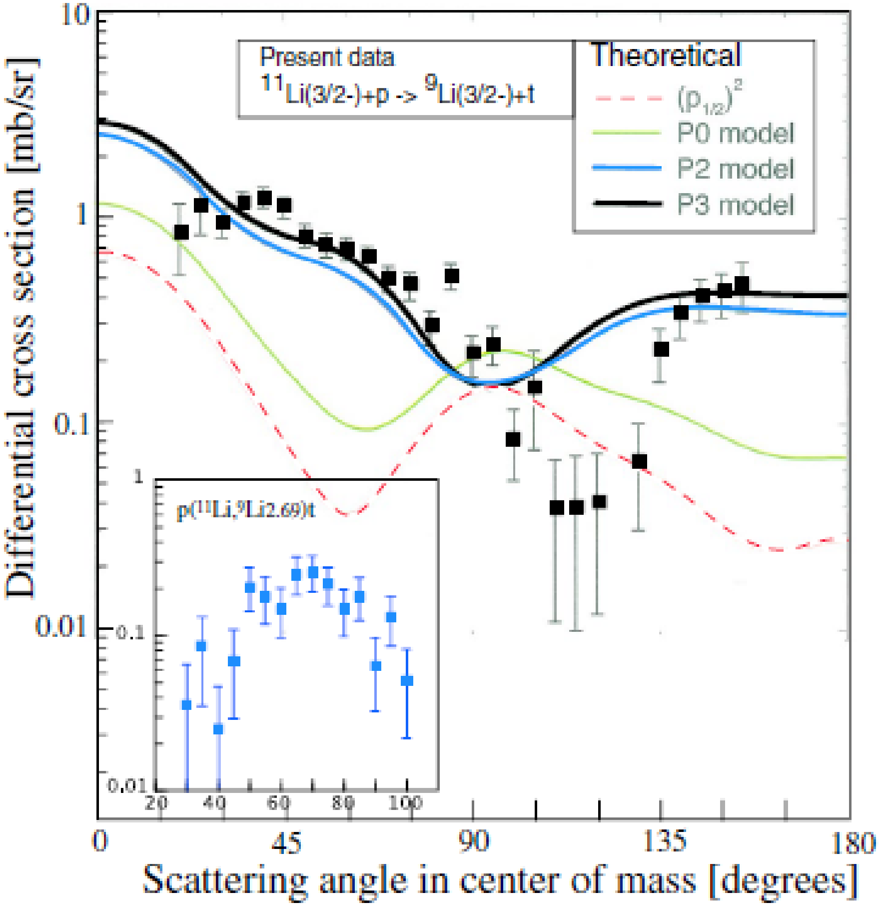


n と α の角度相関を見ることによって 1n 移行と 2n 移行を分離
（1n 移行は ^{5}He の分解から n が出るので n と α が強く相関）

- ➢1n 移行に比べて 2n 移行が主
- ➢これはボロミアン核の特徴
  （安定核では 1n 移行が主）

ボロミアン核の対移行反応：実験データ (ii)

$^{1}H(^{11}Li,^{9}Li)^{3}H$ (TRIUMF)



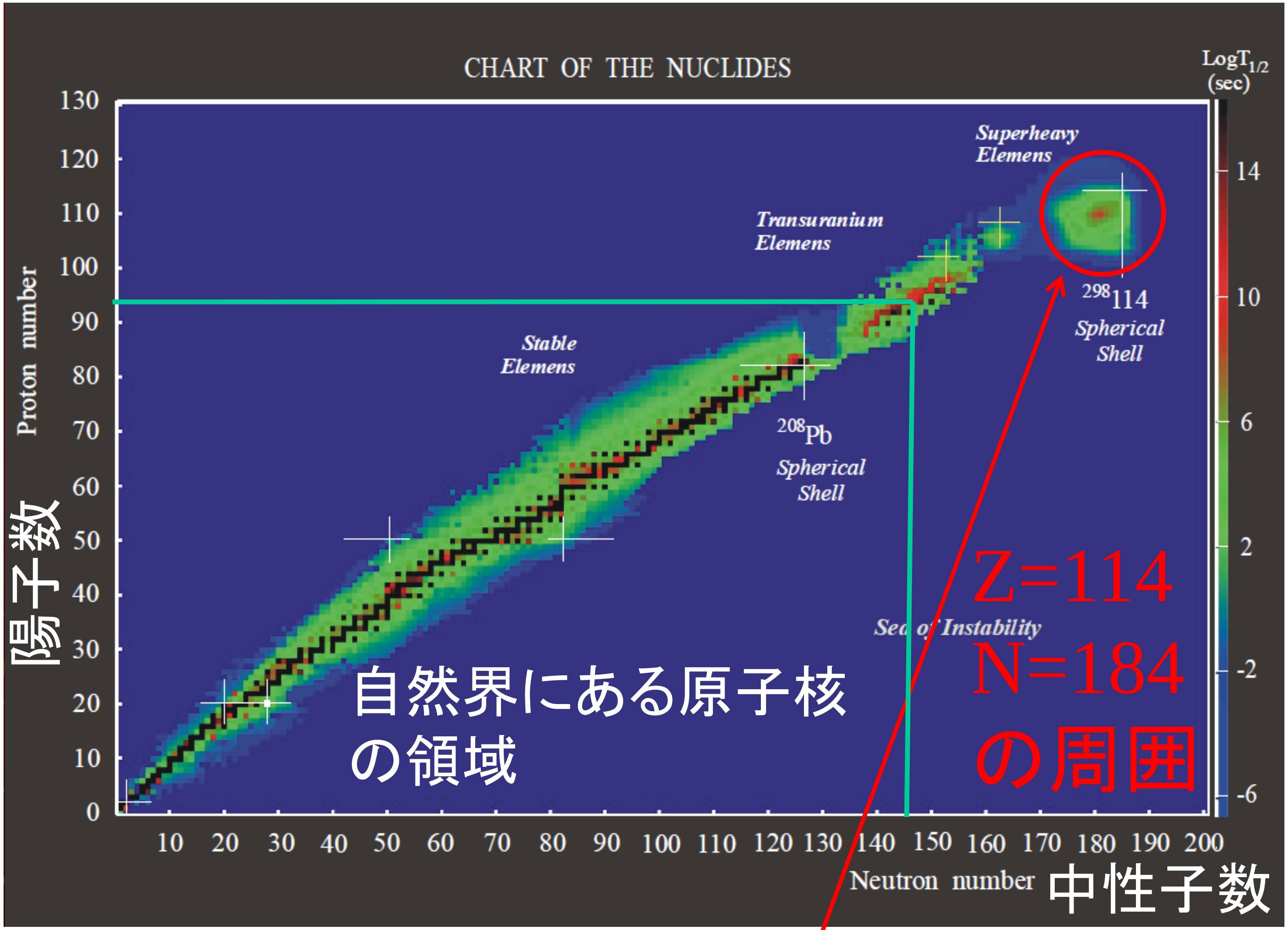
- 相関なしの計算は実験データを再現せず
- $(s_{1/2})^2$ の割合が 31% (P2 model), 45% (P3 model) のモデルでは前方領域をよく再現。
- ただし、後方の合いはいまいち。（光学ポテンシャル?中間状態?）

中間状態として ^{10}Li の 1/2+ 状態と 1/2- 状態

$E_{\rm lab}$ = 3 MeV/A

I. Tanihata et al., PRL100('08)192502

超重元素（超重原子核）

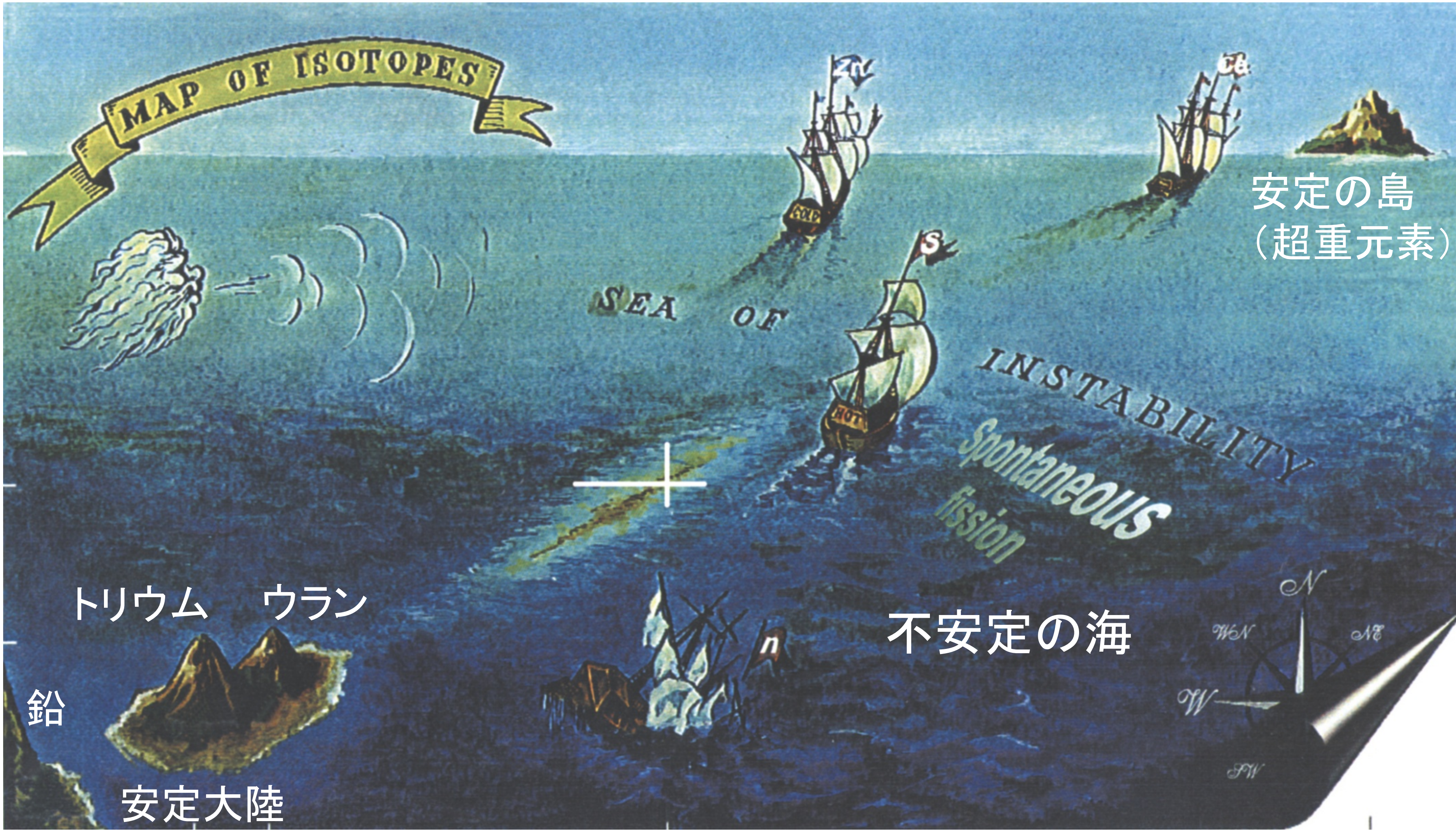


Yuri Oganessian

原子核の安定領域（安定の島）の理論的予言

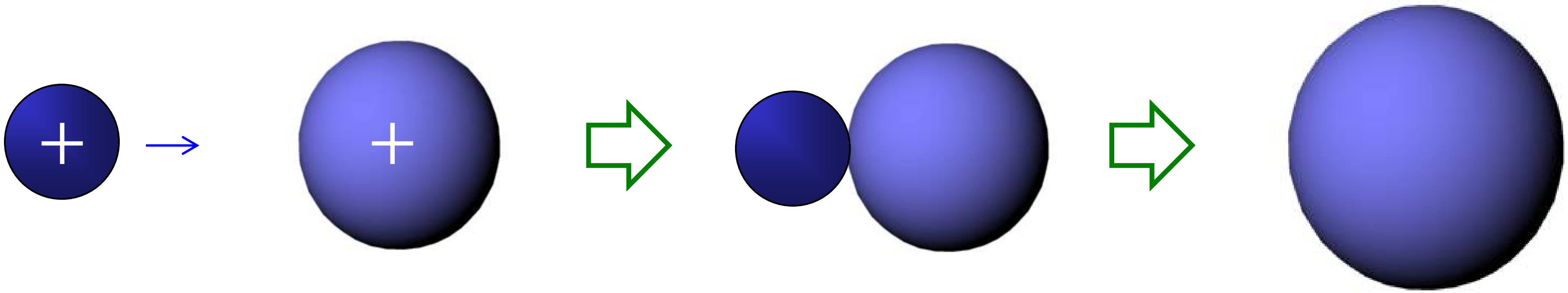
（1966年：スピアテッキら） ⟶ 実験的探索が今も続いている

安定の島(超重元素)を目指して



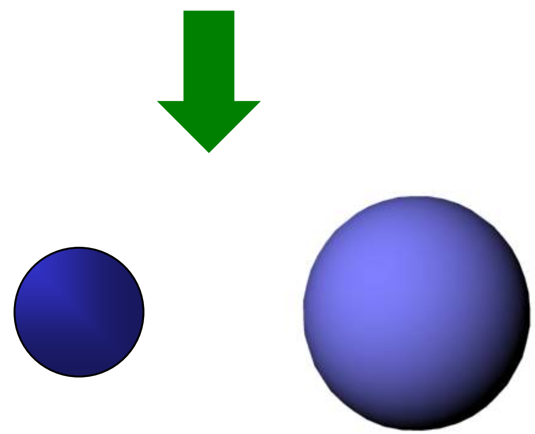
Yuri Oganessian

核融合反応で大きな原子核を作る



加速器を
使って勢いよくぶつける

大きな
原子核



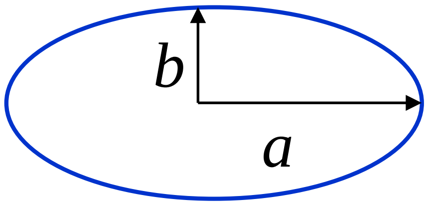
でも、ほとんどはくっつけても
すぐ離れてしまう
（大きな原子核ができない）

（復習）

$$B(N,Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\rm sym} \frac{(N-Z)^2}{A}$$

原子核を体積一定のまま変形してみる

例）回転楕円体



$$\begin{aligned} a &= R \cdot (1+\epsilon) \\ b &= R \cdot (1+\epsilon)^{-1/2} \end{aligned}$$

$ab^2 = R^3 =$ 一定

変形したときのエネルギー変化：

- 体積項、対称エネルギー項：変化せず
- クーロン項
- 表面項

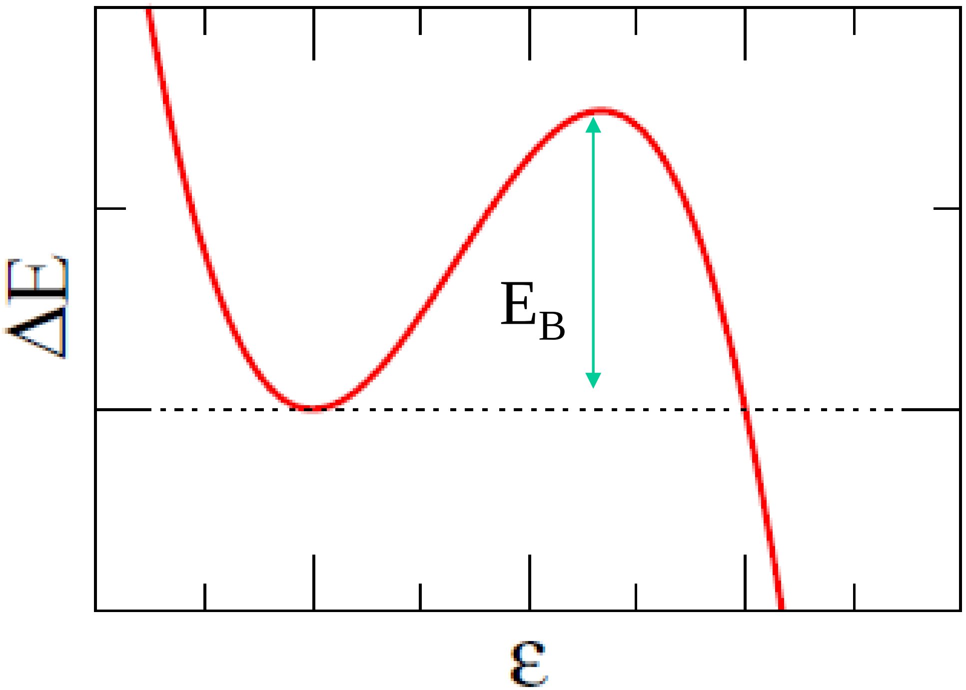
（クーロン項・表面項）→ 変化

表面項 → 球形になる傾向
クーロン項 → 変形になる傾向

→ 2つの力の競合

（復習）

$$\Delta E = E_S^{(0)} \left\{ \frac{2}{5}(1-x)\epsilon^2 - \frac{4}{105}(1+2x)\epsilon^3 + \cdots \right\}$$



$$x \equiv \frac{E_C^{(0)}}{2E_S^{(0)}} = \frac{a_C}{2a_S} \cdot \frac{Z^2}{A} \sim \frac{1}{53.3} \cdot \frac{Z^2}{A}$$

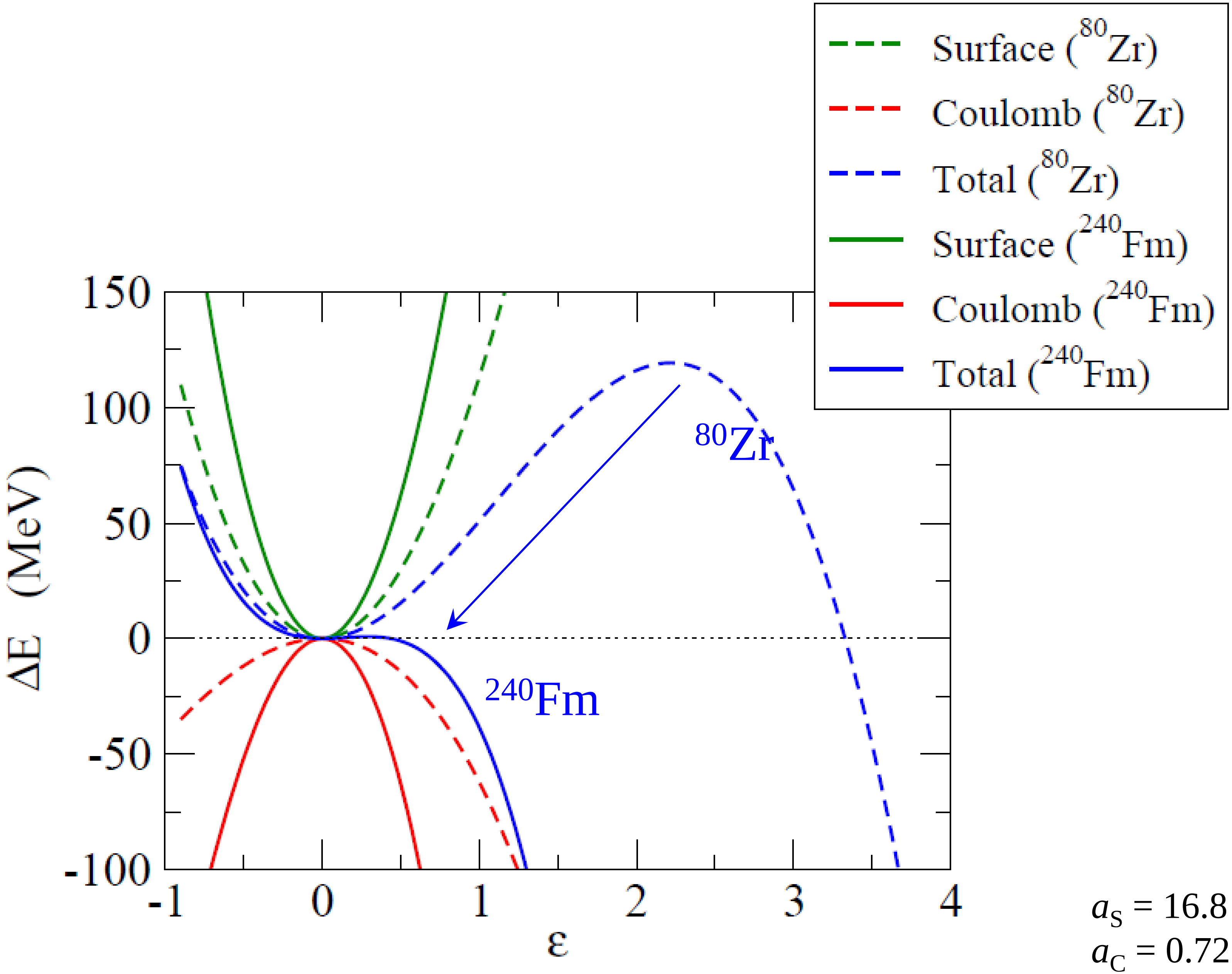
$$E_B = \frac{98}{15} \cdot \frac{(1-x)^3}{(1+2x)^2} \cdot E_S^{(0)}$$

$$\epsilon_B = 7 \cdot \frac{(1-x)}{(1+2x)}$$

重い核ほど障壁は低くなる

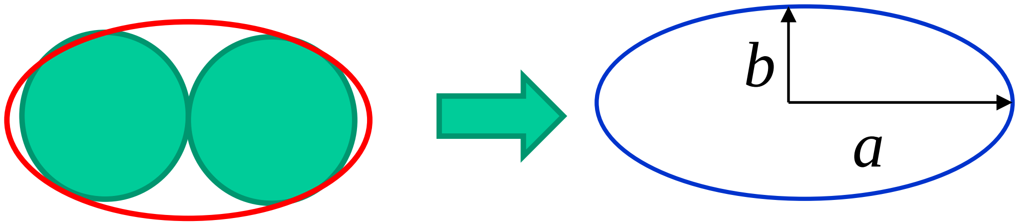
重い核ほど障壁での変形度は小さくなる

$^{80}_{40}Zr$ と $^{240}_{100}Fm$ の比較



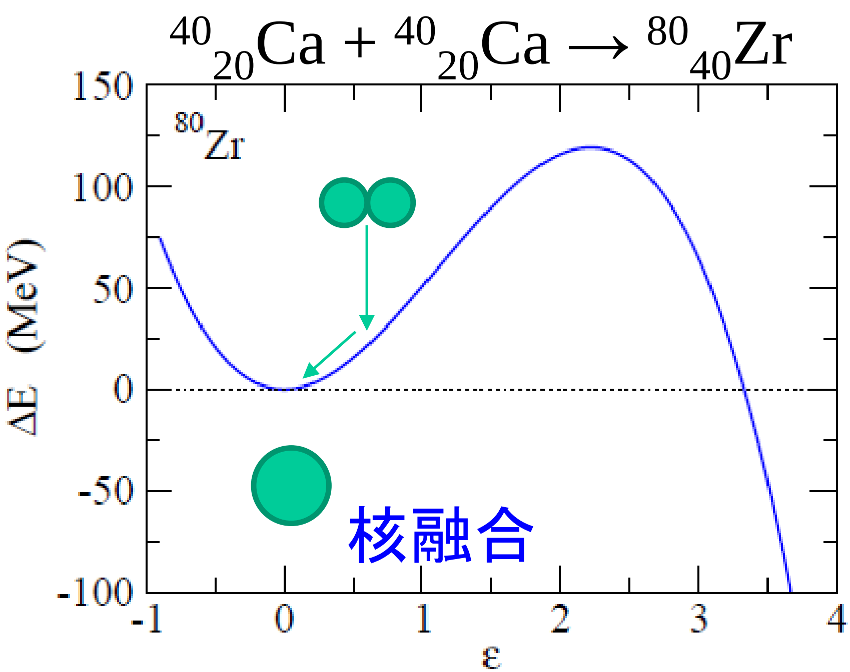
a_S = 16.8 MeV
a_C = 0.72 MeV

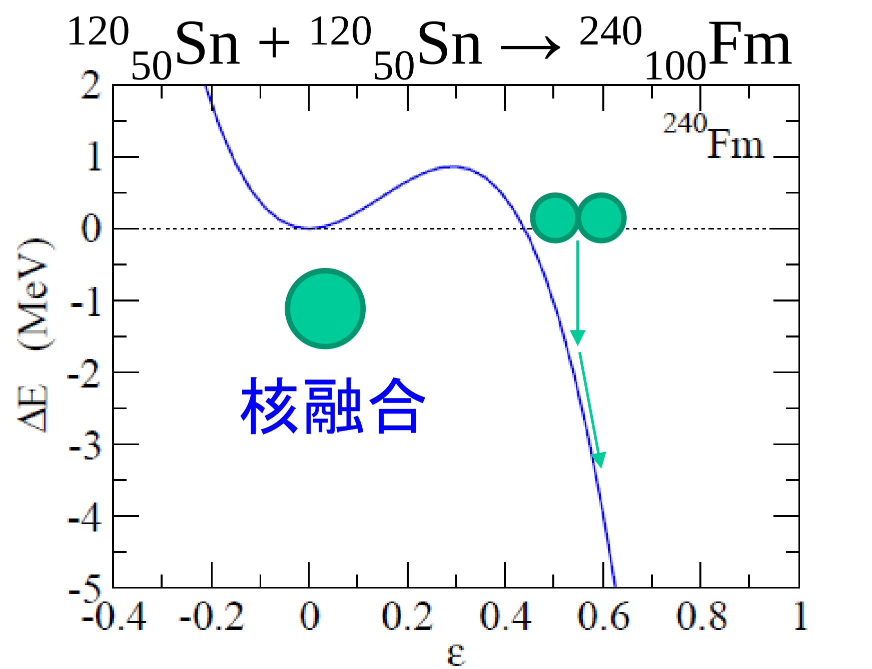
同じ原子核が接触すると:

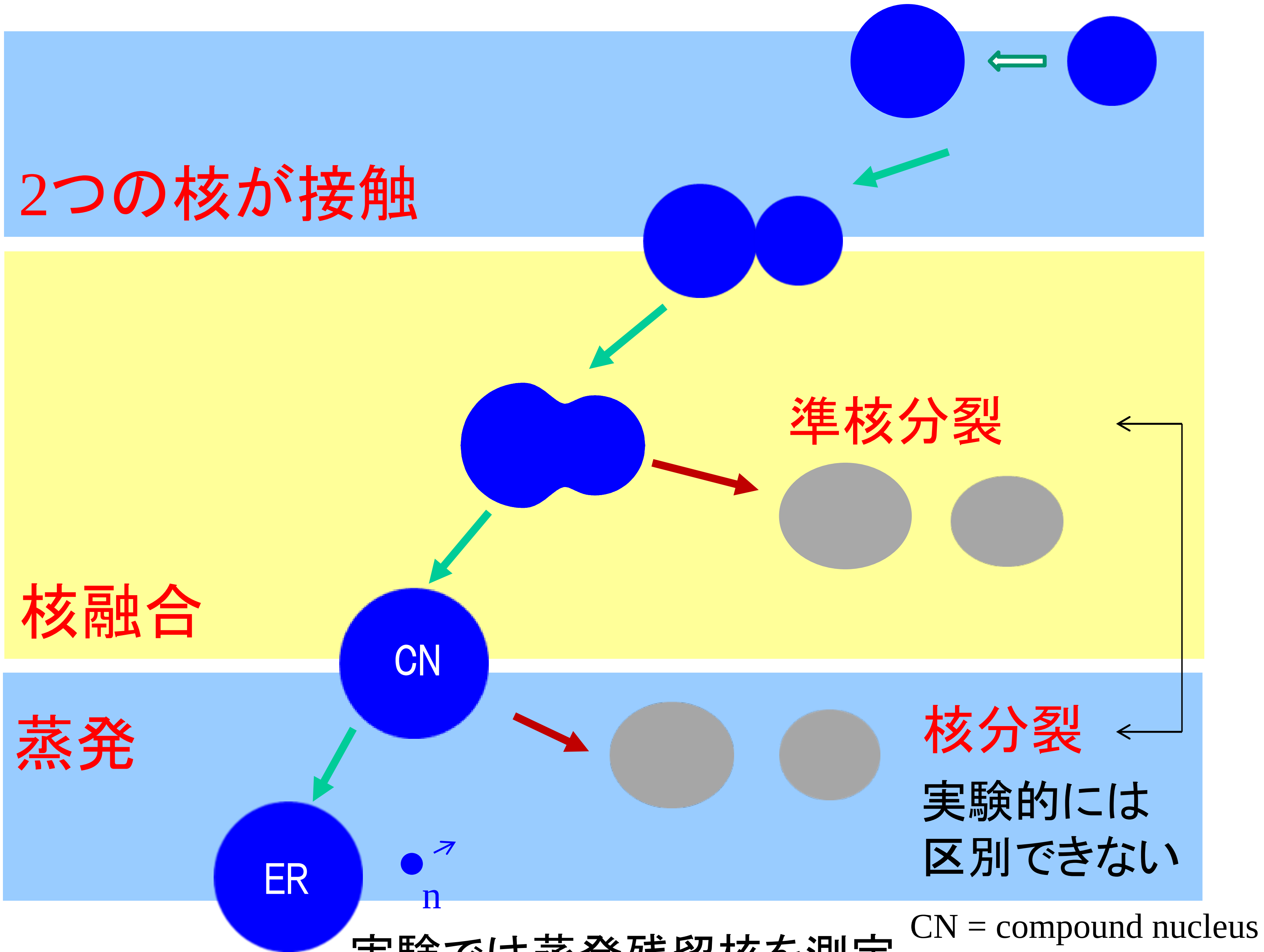


$$a = R_0 \cdot (1+\epsilon)$$
$$b = R_0 \cdot (1+\epsilon)^{-1/2}$$

$a/b \sim 2R/R = 2 \rightarrow \varepsilon \sim 0.587$



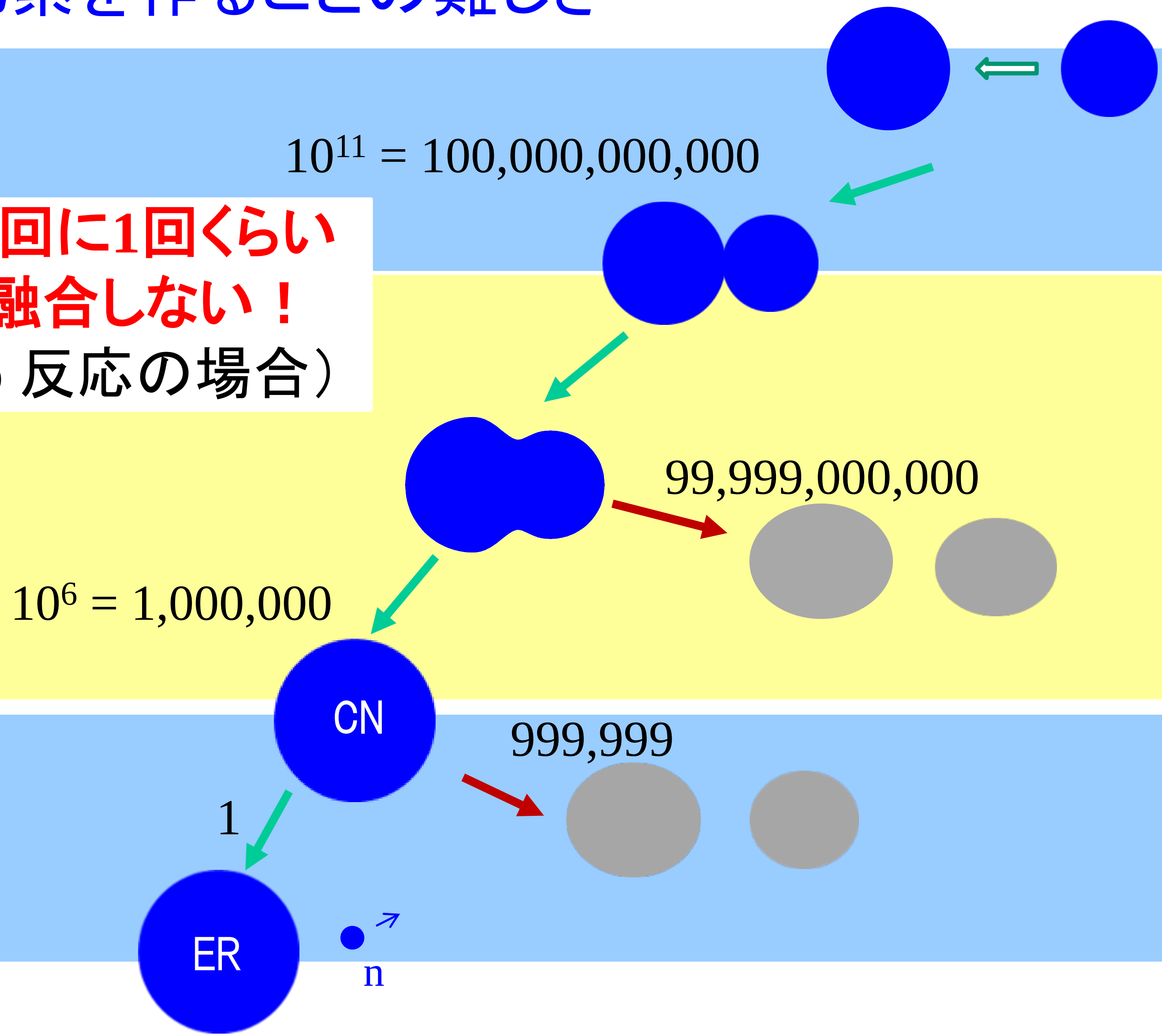




2つの核が接触
準核分裂
核融合
CN
蒸発
核分裂
実験的には
区別できない
ER
n
実験では蒸発残留核を測定
CN = compound nucleus
ER = evaporation residue

超重元素を作ることの難しさ

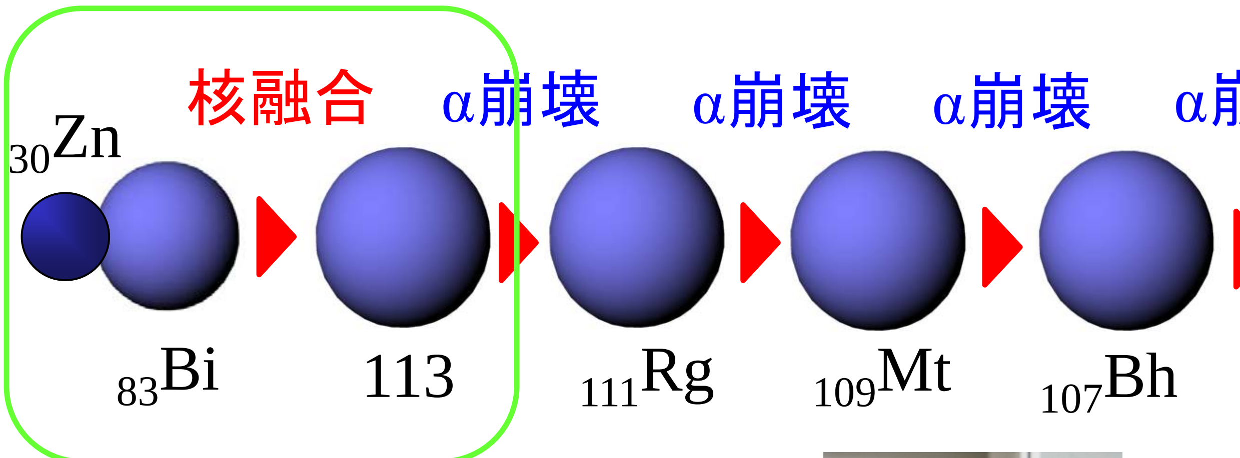
1000億回に1回くらいしか核融合しない！
（Ni+Pb 反応の場合）

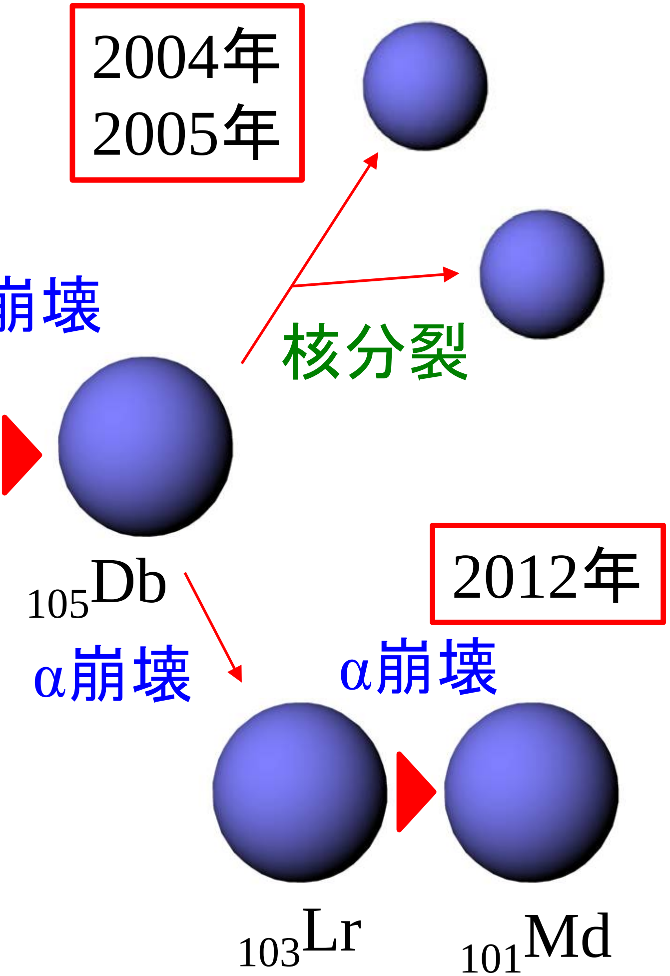


新元素113番：ニホニウム Nh

$^{70}\mathrm{Zn}\ (Z=30)\ +\ ^{209}\mathrm{Bi}\ (Z=83) \longrightarrow\ ^{278}113\ (\mathrm{Nh}) + n$

光速の約10パーセント
まで加速





553 日間の実験で
たったの3例の発見

⟶ 日本に命名権
ニホニウム　Nh

幻の元素、ニッポニウム（Np）

1908 年:「43番目の元素」として新元素を発見し
ニッポニウム（Np）と命名したと発表。
⟶ その後疑問視され、周期表からは落とされる
（実は75番元素レニウム（当時未発見）だった）

ニホニウム Nh は
この時以来の悲願
達成！

小川正孝
(1865－1930)

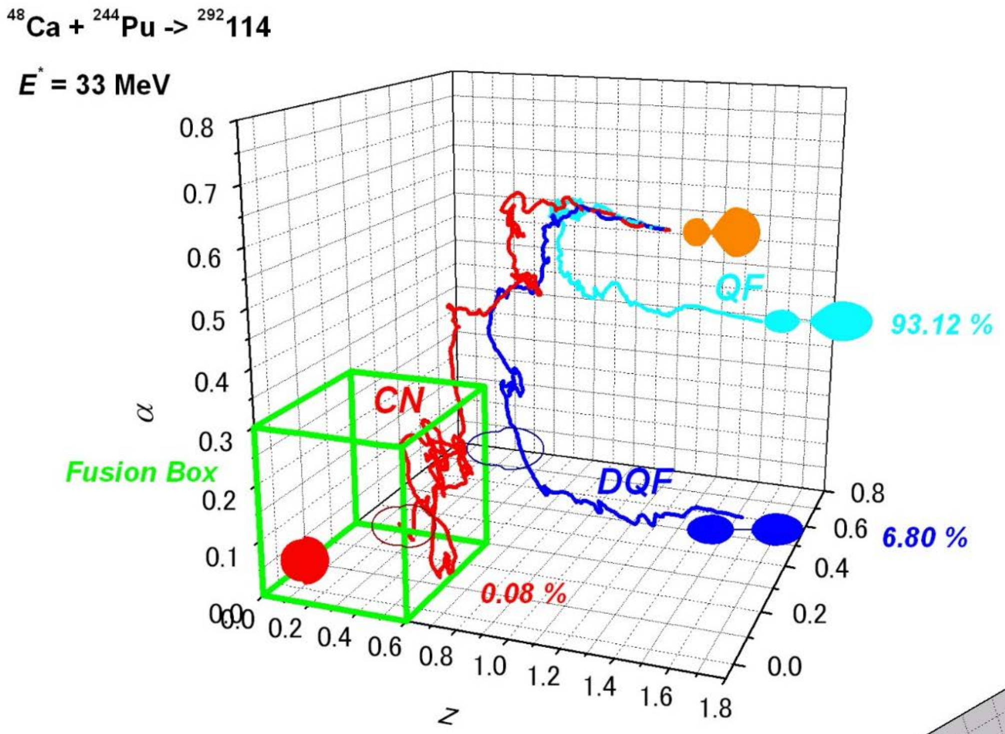
東北大学第4代総長
（1919－1928）

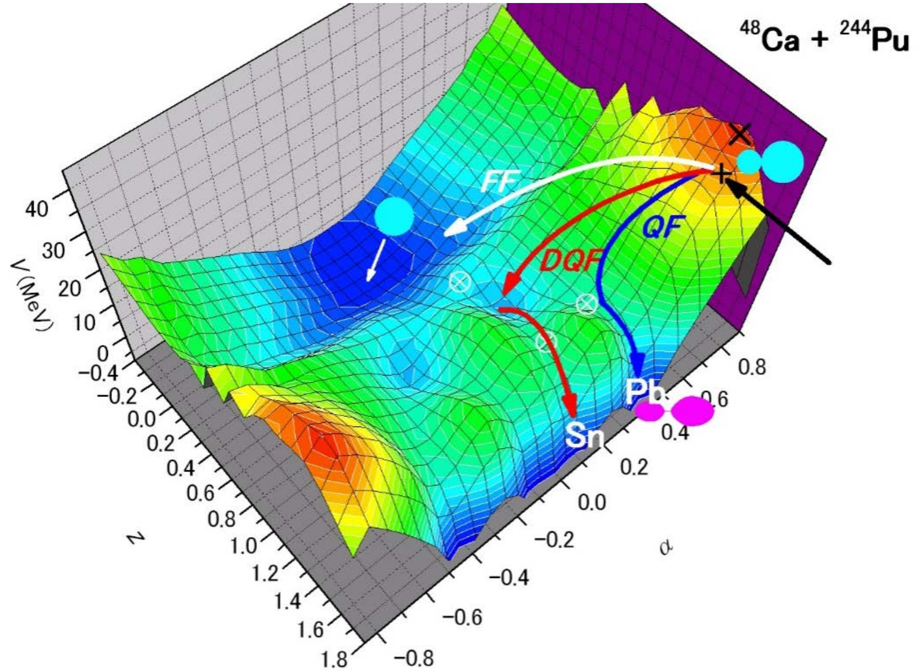
理論:ランジュバン法

$$m\frac{d^2q}{dt^2} = -\frac{dV(q)}{dq} - \gamma\frac{dq}{dt} + R(t)$$

γ: 摩擦係数
$R(t)$: 乱雑力

を多次元に拡張したもの
(ブラウン運動の理論)

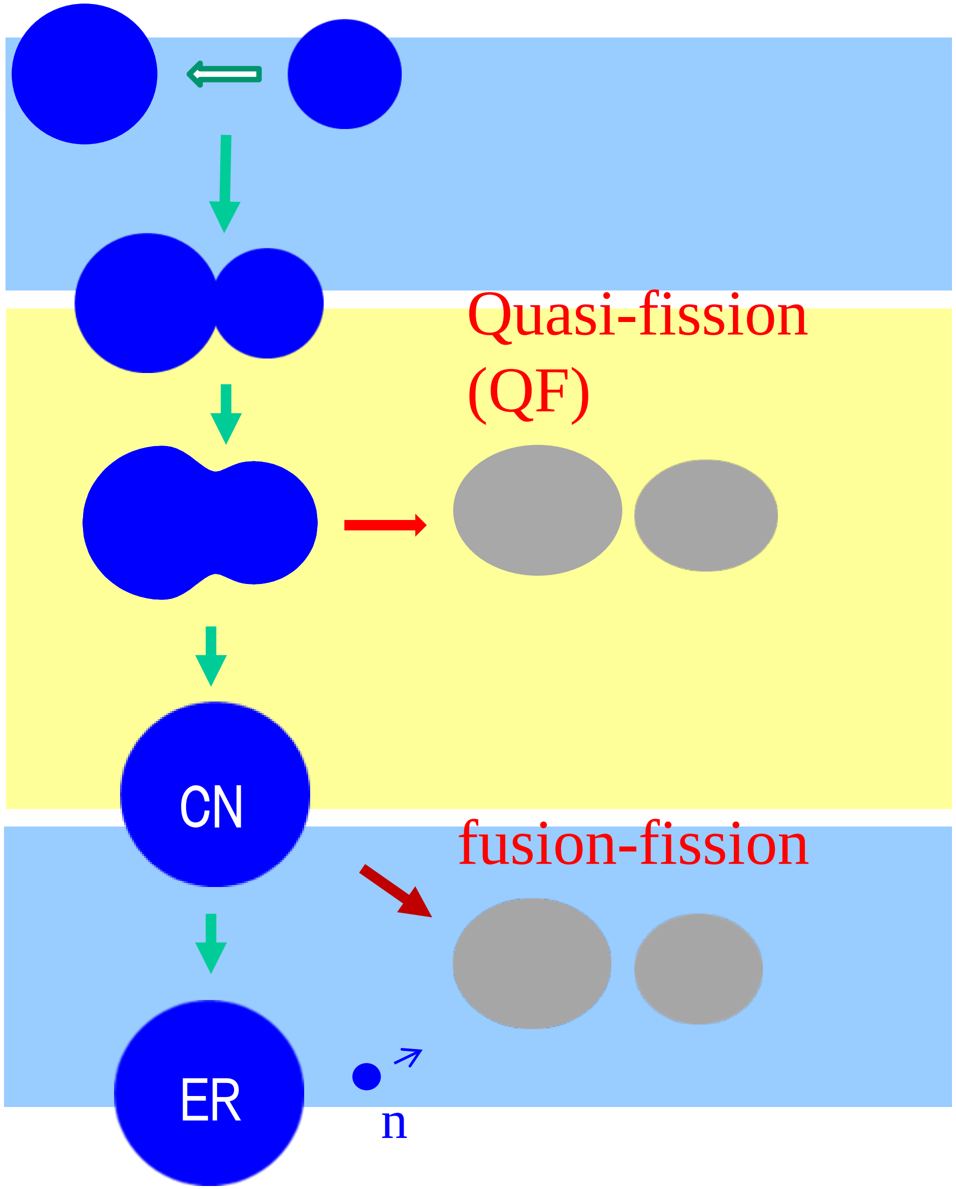


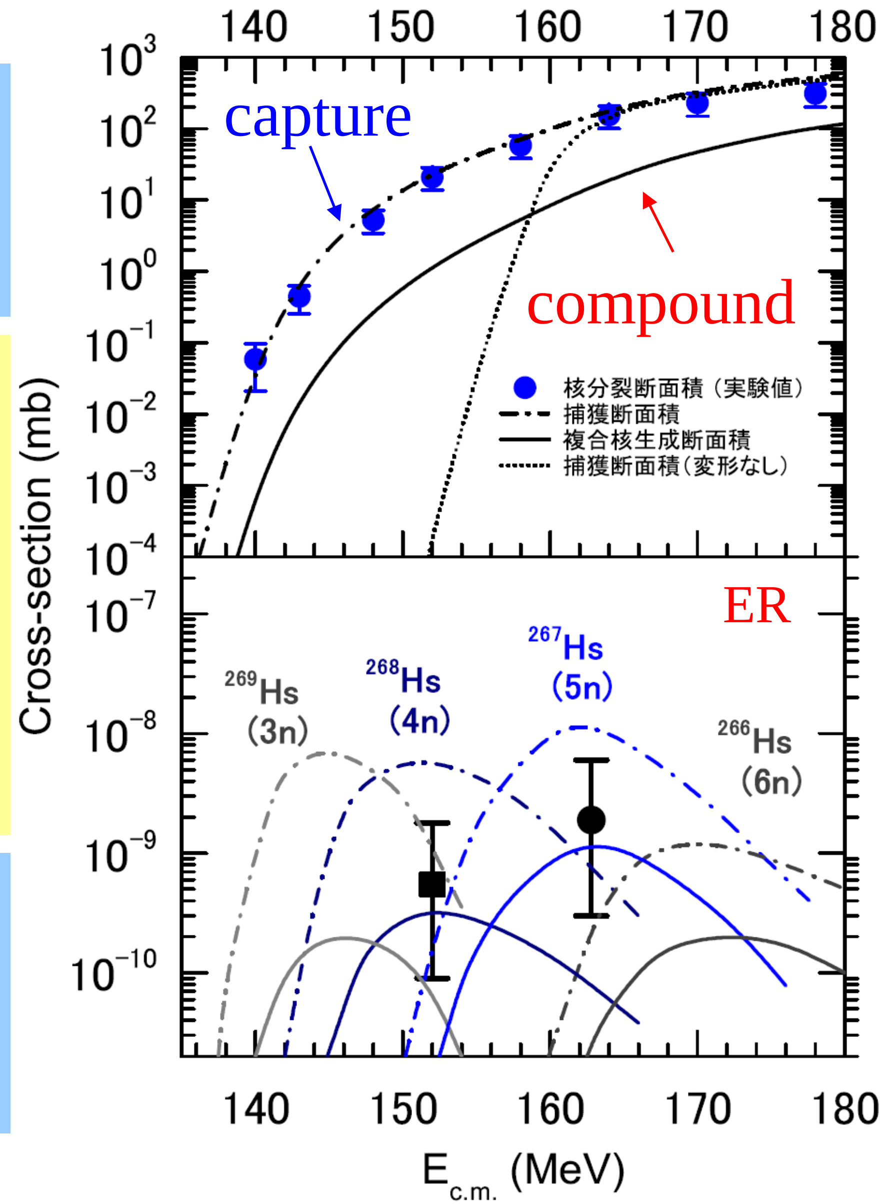


q として

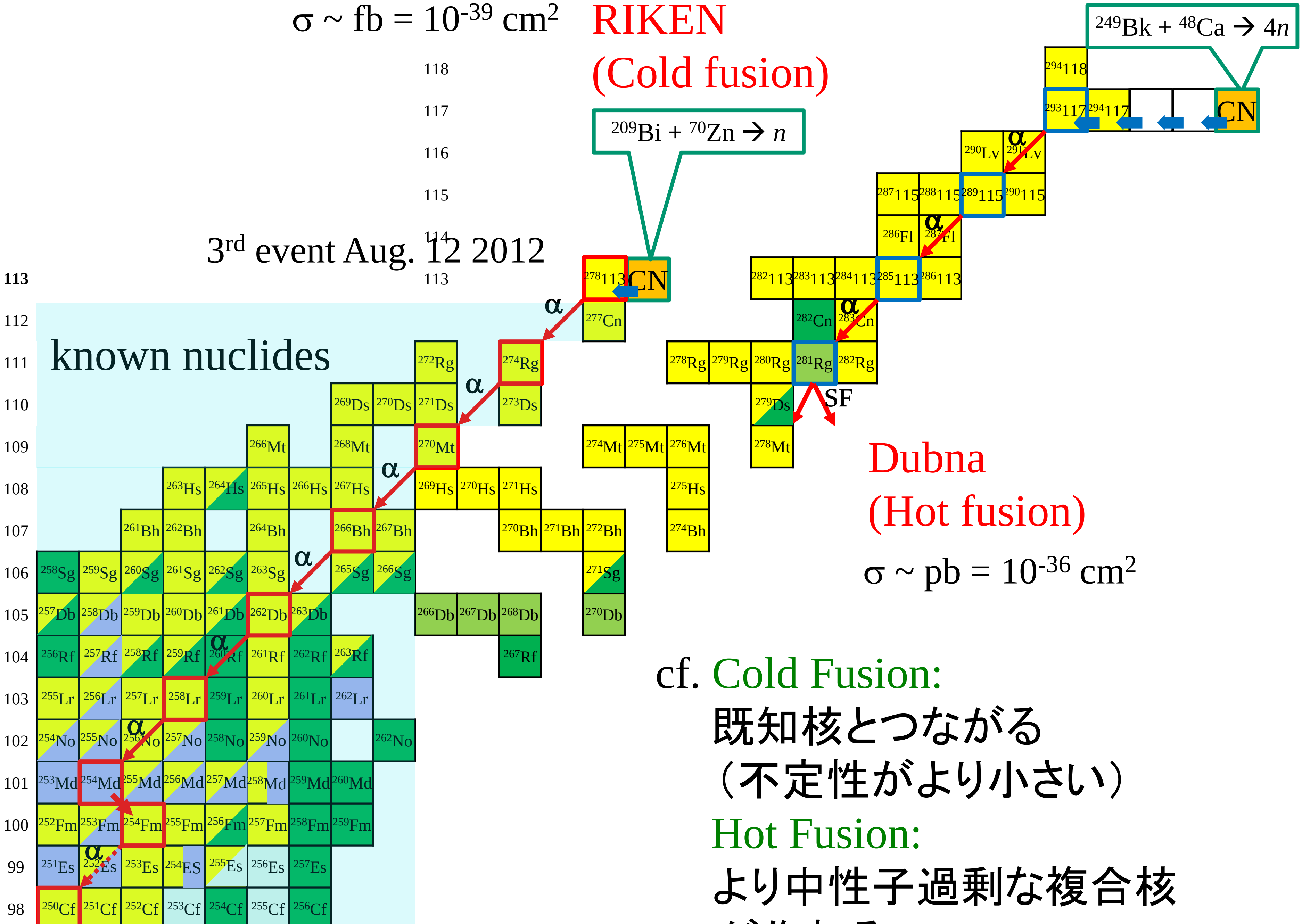
・核間距離 (z)
・原子核の変形 (δ)
・フラグメントの非対称度 (α)

$^{34}S + ^{238}U$





Y. Aritomo, K.H., K. Nishio, S. Chiba, PRC85('12)044614



cf. Cold Fusion:

既知核とつながる

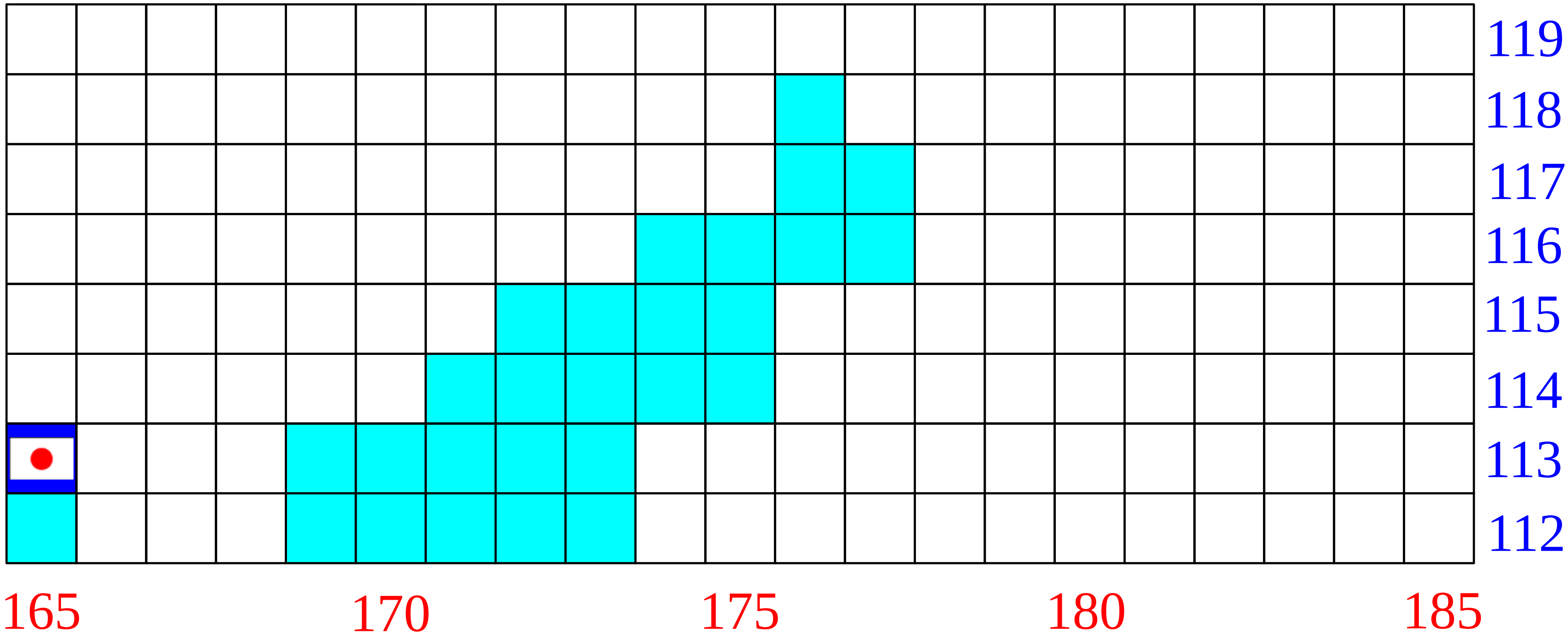
（不定性がより小さい）

Hot Fusion:

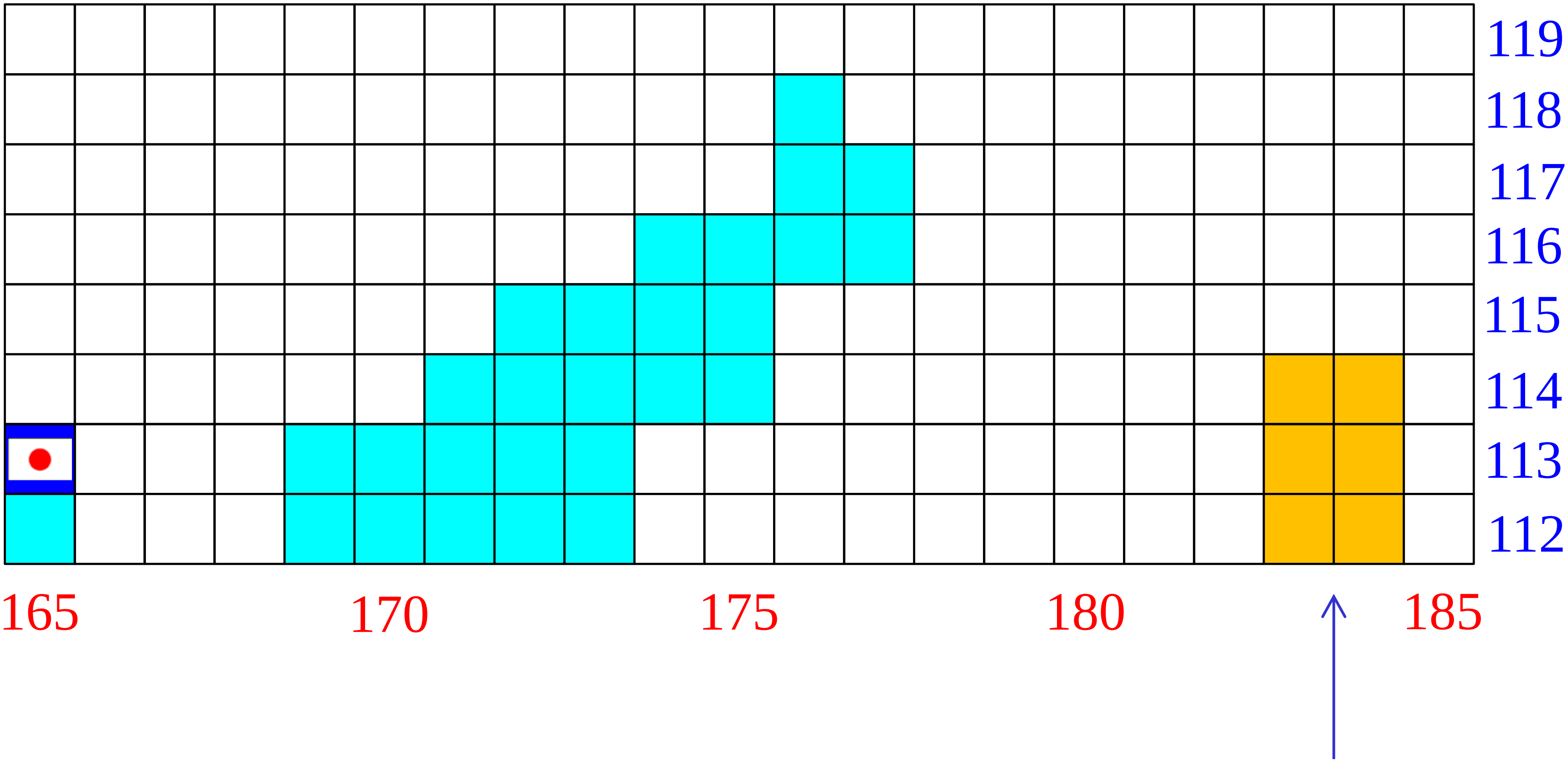
より中性子過剰な複合核

が作れる。

これまでに作られた超重核



これまでに作られた超重核



安定の島はこの辺り(?)

島にたどり着くためには中性子過剰核ビームが必要不可欠

将来の重要課題(反応系、ビームのエネルギー、断面積の見積もり)