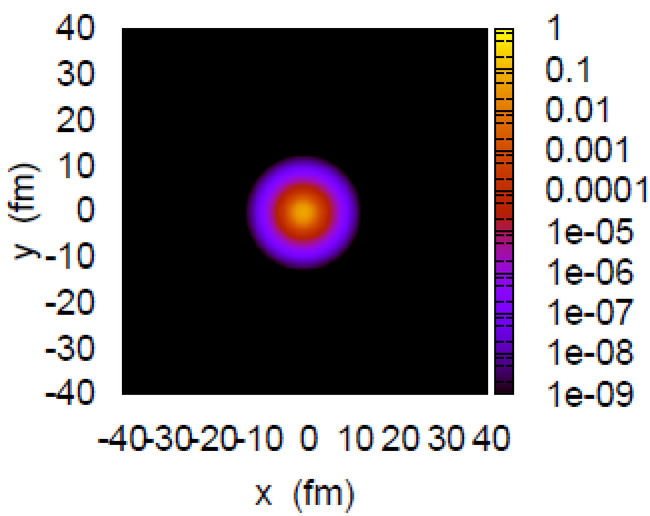
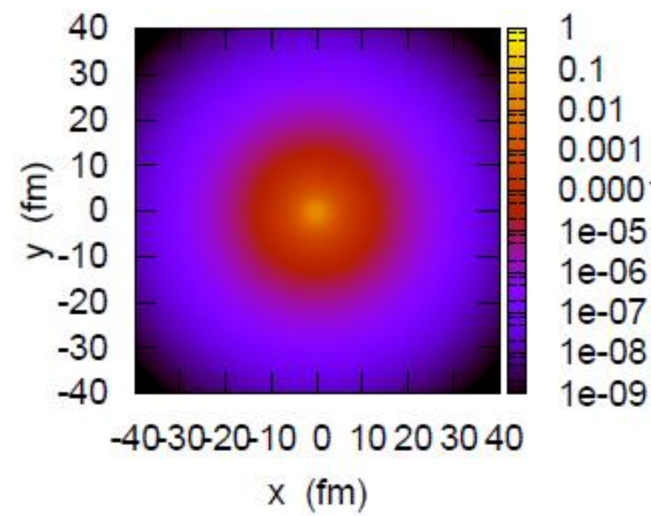
不安定原子核の多体論

萩野浩一
東北大学　理学研究科
物理学専攻

hagino@nucl.phys.tohoku.ac.jp
www.nucl.phys.tohoku.ac.jp/~hagino



→ 弱束縛



井戸型ポテンシャル
(l=0 束縛状態)

自己紹介

•1989年4月～1993年3月　東北大学理学部物理学科（学部）
•1993年4月～1995年3月　東北大学理学研究科（修士）
•1995年4月～1998年3月　東北大学理学研究科（博士）

重イオン核融合反応の研究
原子核の集団励起が核融合に及ぼす影響
D論「重イオン核融合反応における多次元量子トンネル現象」

•1998年10月～2000年11月　ワシントン大　（ポスドク）

重イオン核融合反応の研究は継続
（実験データの解析、不安定核の融合反応）
RPA相関の研究（Bertsch 氏との共同研究）

•2000年11月～2004年4月　京大基研　（助手）
この間 2002年9月～2003年8月はIPNオルセー

不安定核の平均場理論（佐川氏、Giai 氏との共同研究）
陽子過剰核の陽子放出崩壊

•2004年5月～　東北大学理学研究科（助教授→ 准教授）
軽い中性子過剰核の3体模型計算（佐川氏との共同研究）

講義の内容(予定)

1．イントロダクション

中性子過剰核、独立粒子描像

2．1粒子ハロー核の性質

－束縛状態
－角運動量の効果
－クーロン励起
－陽子放出崩壊
－変形

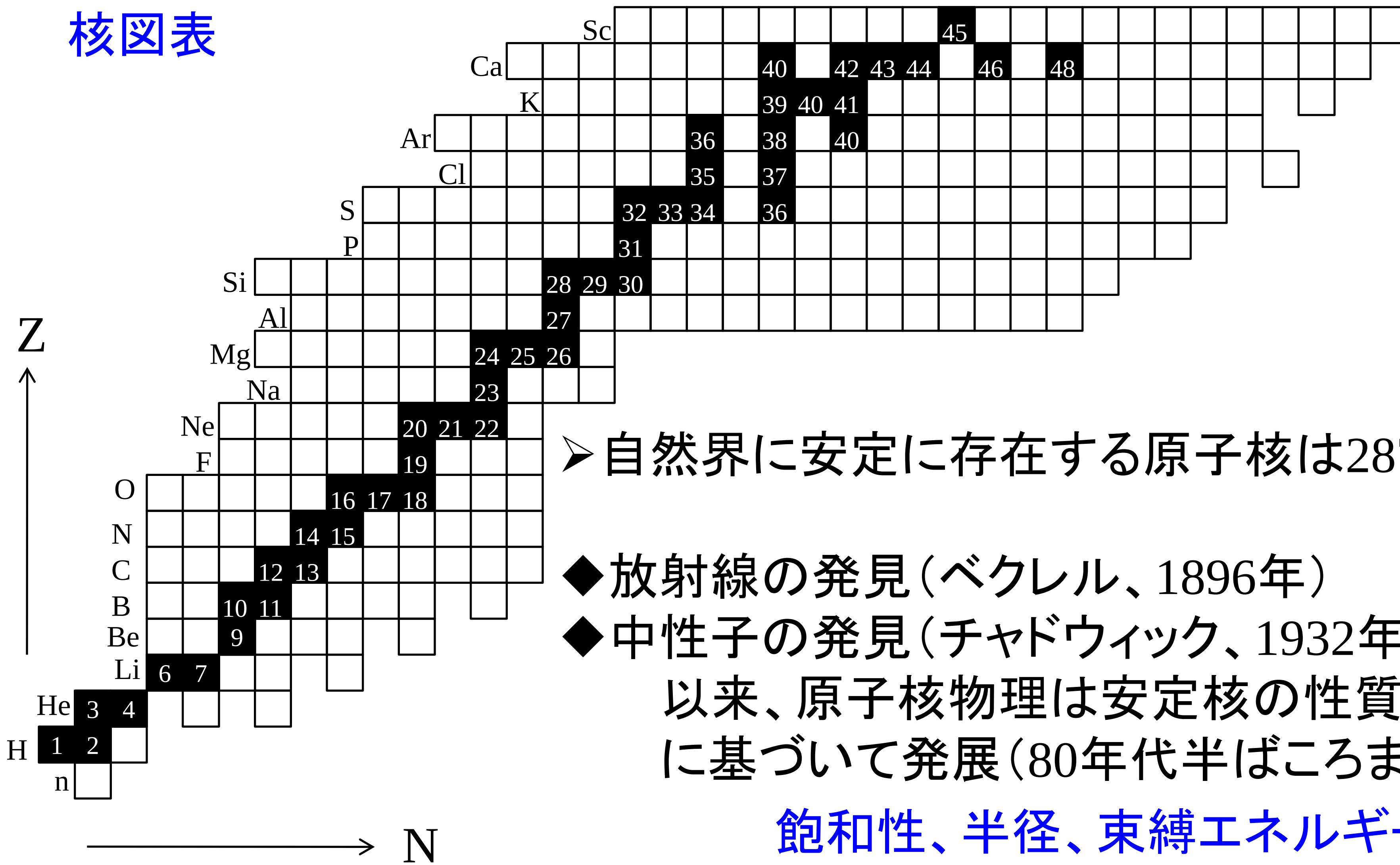
3．2粒子ハロー核の性質

－ペアリング
－ボロミアン原子核
－双中性子相関

4．不安定核の反応(低エネルギー)

イントロダクション

核図表

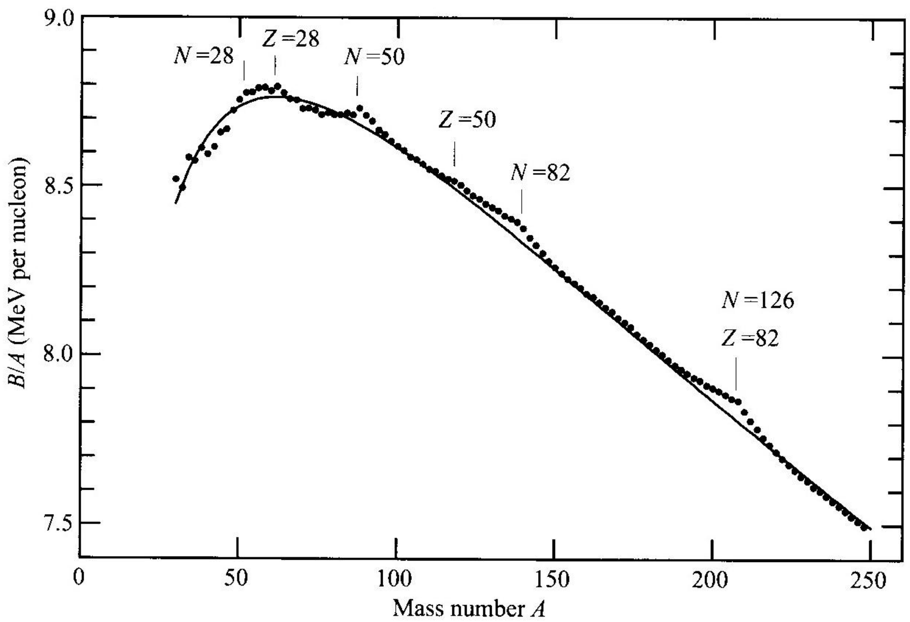


➢自然界に安定に存在する原子核は287種

◆放射線の発見（ベクレル、1896年）
◆中性子の発見（チャドウィック、1932年）
以来、原子核物理は安定核の性質に基づいて発展（80年代半ばころまで）

飽和性、半径、束縛エネルギー
魔法数と独立粒子描像、、、、

魔法数と独立粒子描像



N又はZが2, 8, 20, 28, 50, 82, 126の時、安定化（束縛が大きくなる）

⇩

魔法数

$Z{*}M_p + N{*}M_n$

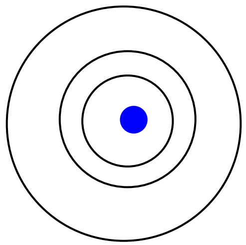
束縛エネルギー

（束縛エネルギーが大きいほど安定）

$M(^{A}Z)$

(note) 原子における魔法数 (貴ガス、不活性ガス)

He (Z=2), Ne (Z=10), Ar (Z=18), Kr (Z=36), Xe (Z=54), Rn (Z=86)



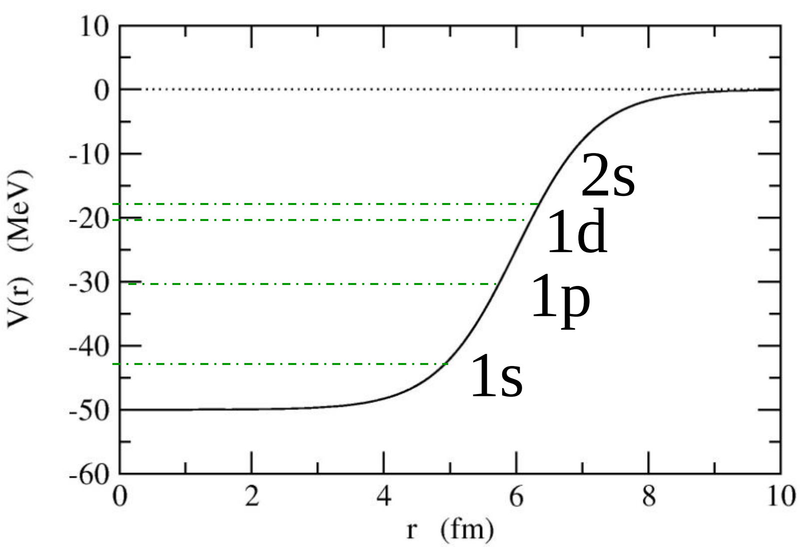
シェル構造
原子核を中心とする軌道が埋まると安定化

原子核物理における同様の試み(1930年代初頭):

ポテンシャル中の独立粒子描像

Woods-Saxon ポテンシャル

$$V(r) = -V_0/[1 + \exp((r - R_0)/a)]$$



- J.H. Bartlett (1932)
- W.M. Elasser (1934)
- H.A. Bethe and R.F. Bacher (1936)

など。

I. Talmi, “Simple Models of Complex Nuclei”, Ch. 2 に詳しい。

Talmiの本には出てないが
日本でも:

彦坂忠義(1902 – 1989)

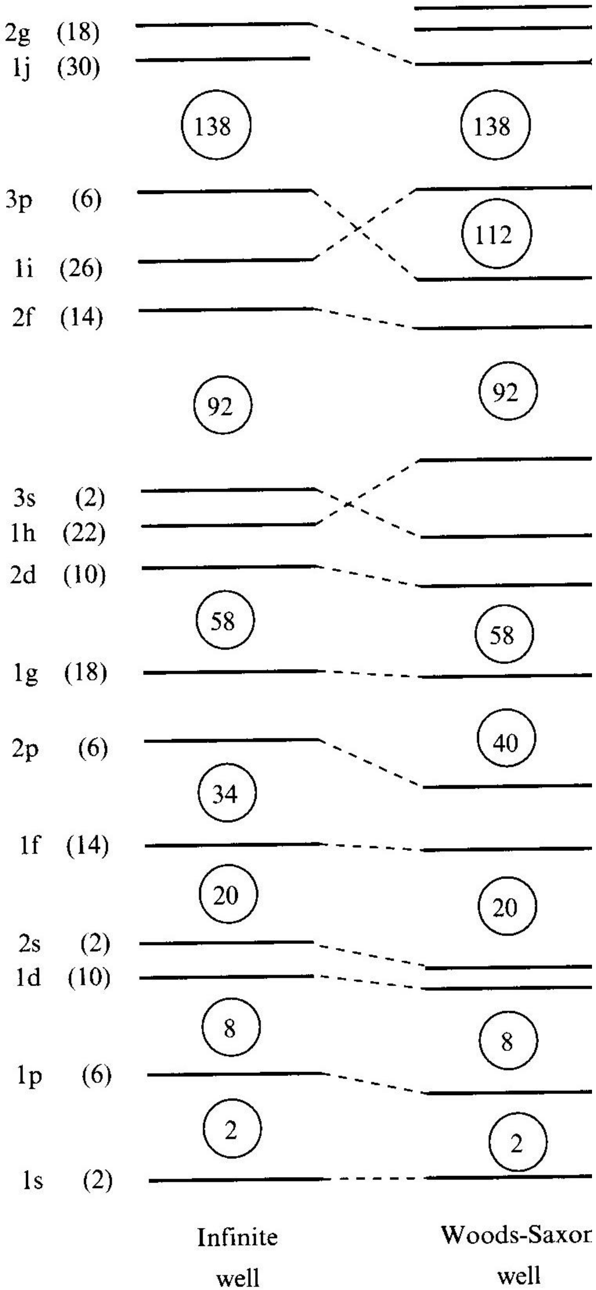
1934 年
殻模型の考えに基づき
計算を行う

⇩

中性子の分離エネルギー、
原子核の安定領域、
磁気モーメント
など当時測定されていた
実験データをきれいに説明

（ただし、当時、殻模型の
考えは受け入れられなか
った。）

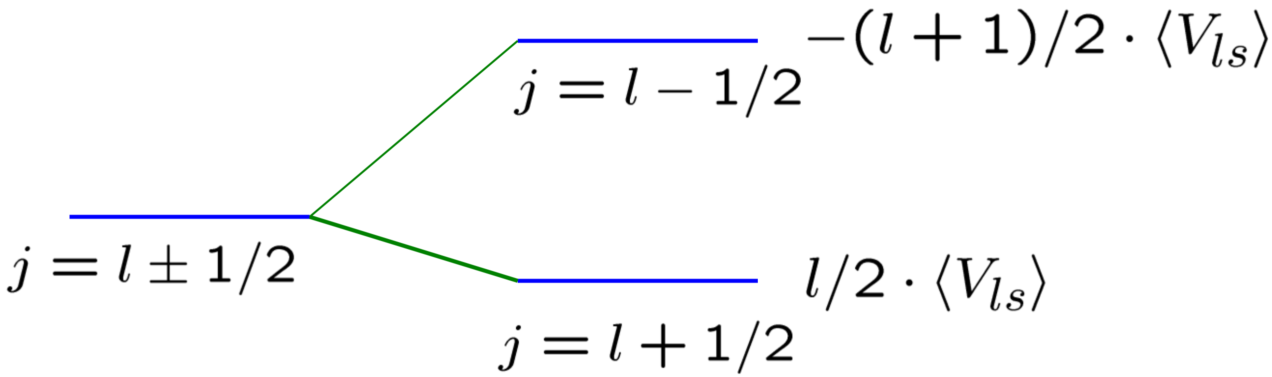
Phys. Rev. に論文を reject をされる。
独語に書き直し、東北大紀要に発
表。

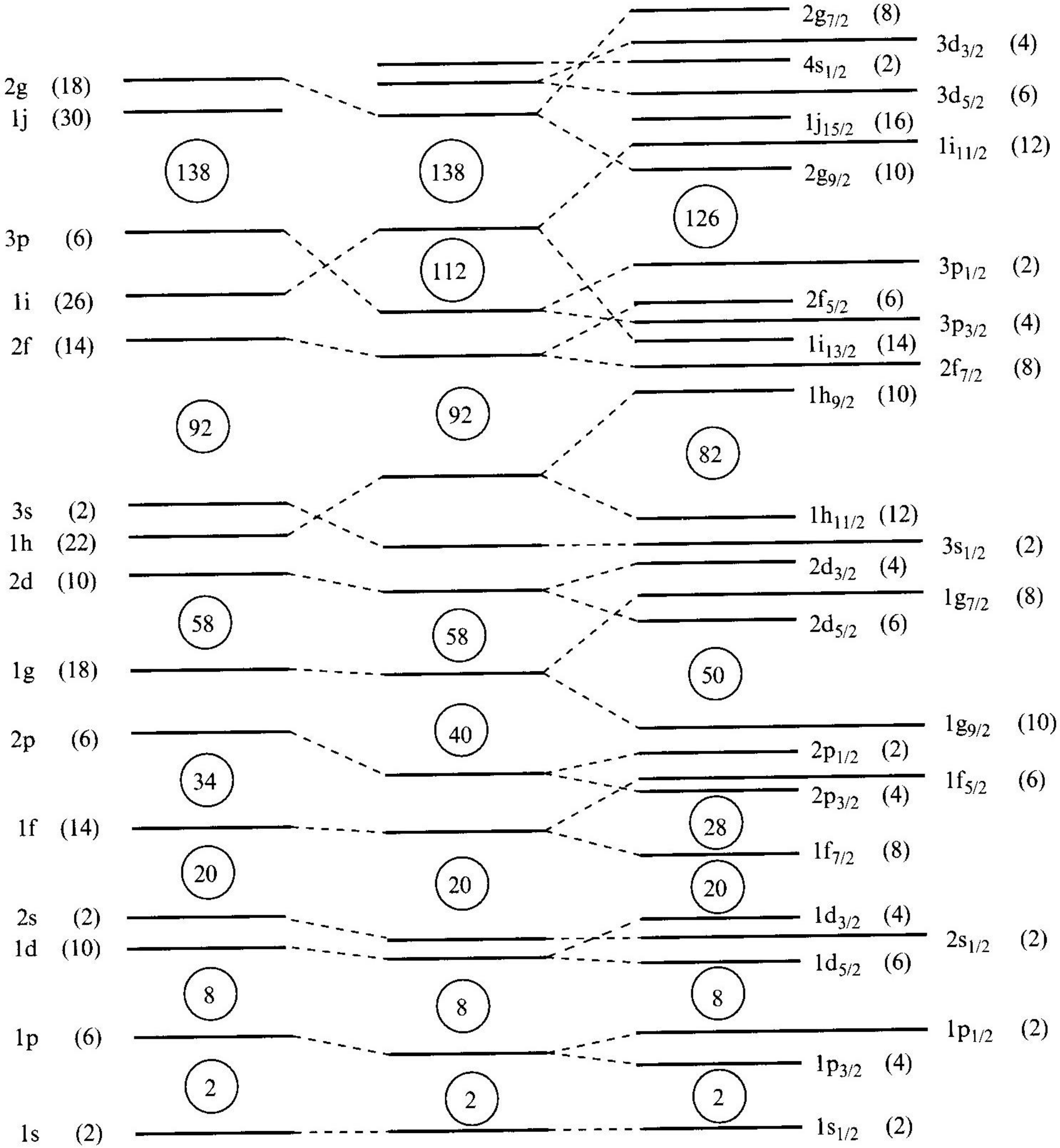


ただし、Woods-Saxon のみでは
魔法数(2,8,20,28,50,82,126)
正しく再現しない

Mayer and Jensen (1949):
強いスピン・軌道力

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(r) + V_{ls}(r)\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{s} - \epsilon\right]\psi(\boldsymbol{r}) = 0$$





Infinite well

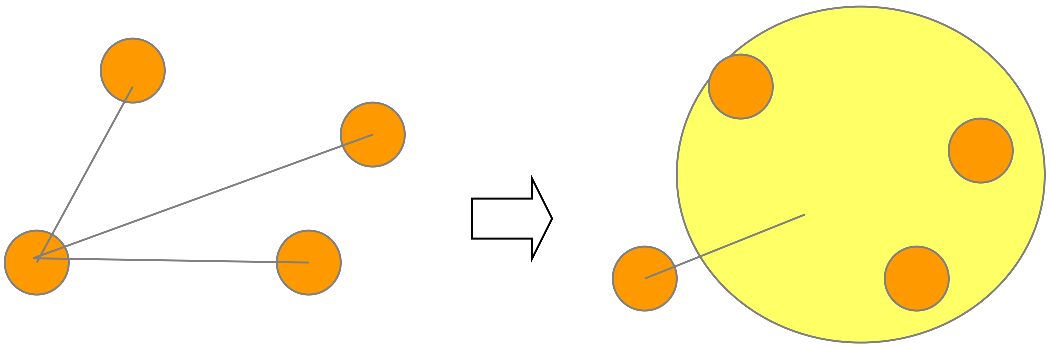
Woods-Saxon well

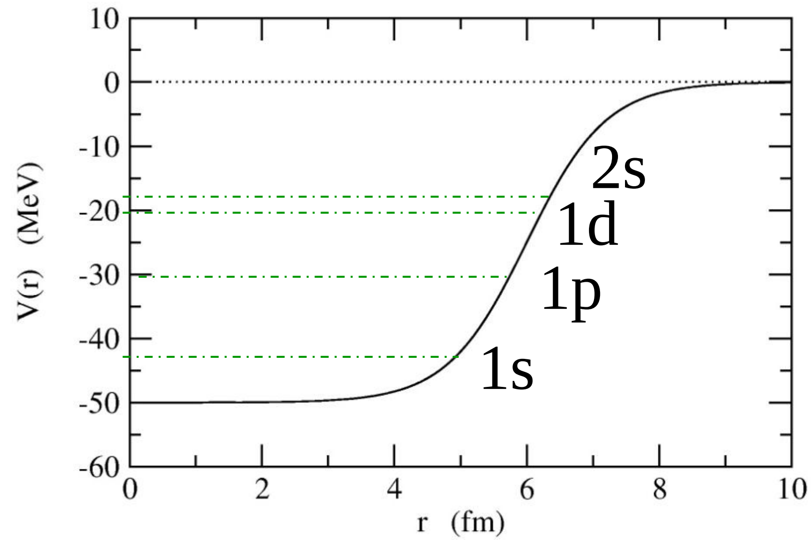
Woods-Saxon plus spin-orbit coupling

微視的意味

平均場理論

Woods-Saxon ポテンシャル





他の核子との相互作用を平均的に取り扱う

⇒ ポテンシャル中の一体問題

$$V(\boldsymbol{r}) \sim \int v(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}'$$

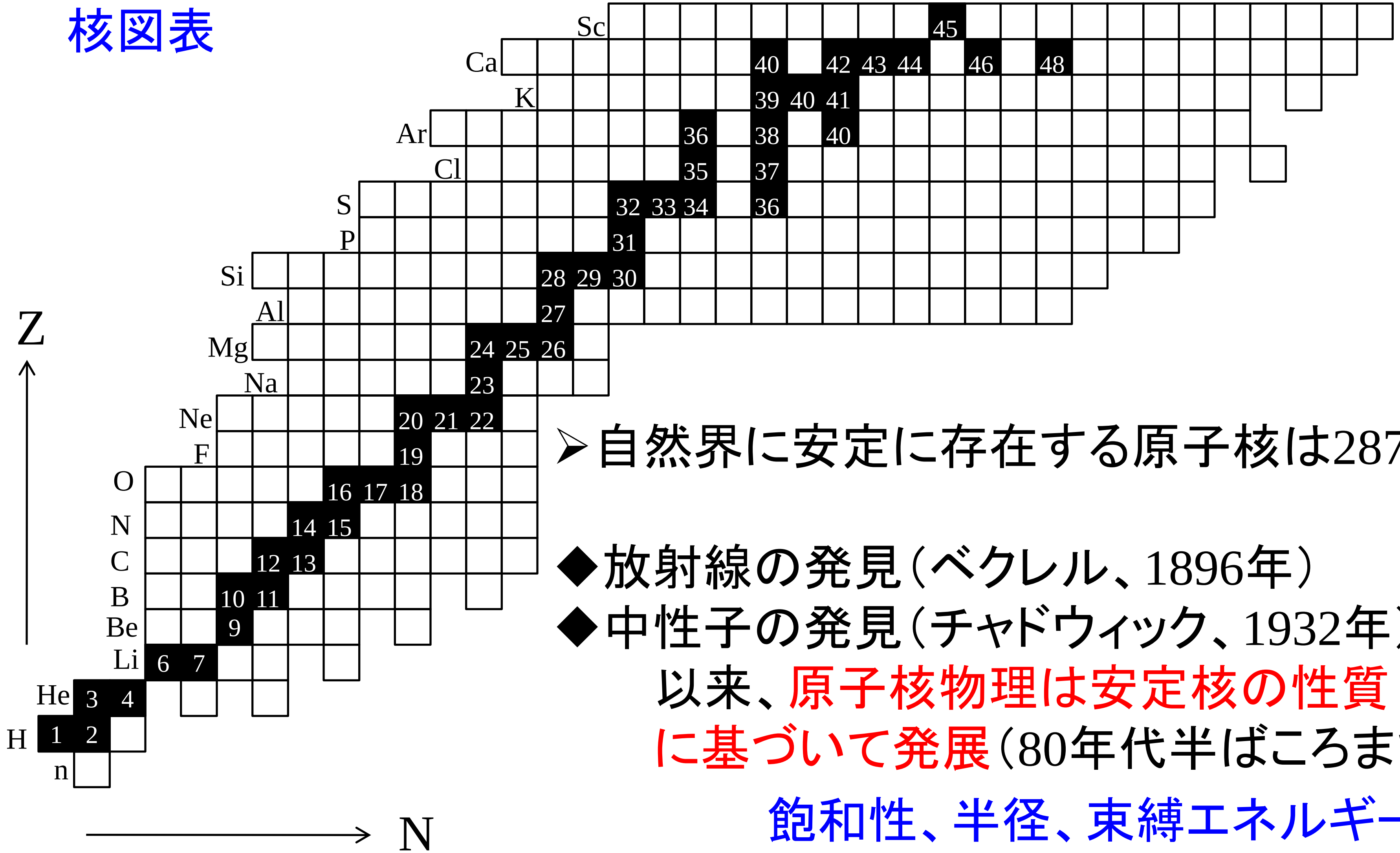
＋反対称化の効果

cf. folding ポテンシャル

核子多体系を理解する上で基本的な考え方

イントロダクション

核図表



➢自然界に安定に存在する原子核は287種

◆放射線の発見（ベクレル、1896年）
◆中性子の発見（チャドウィック、1932年）

以来、原子核物理は安定核の性質に基づいて発展（80年代半ばころまで）

飽和性、半径、束縛エネルギー
魔法数と独立粒子描像、、、、、

原子核物理は安定核の性質に基づいて発展

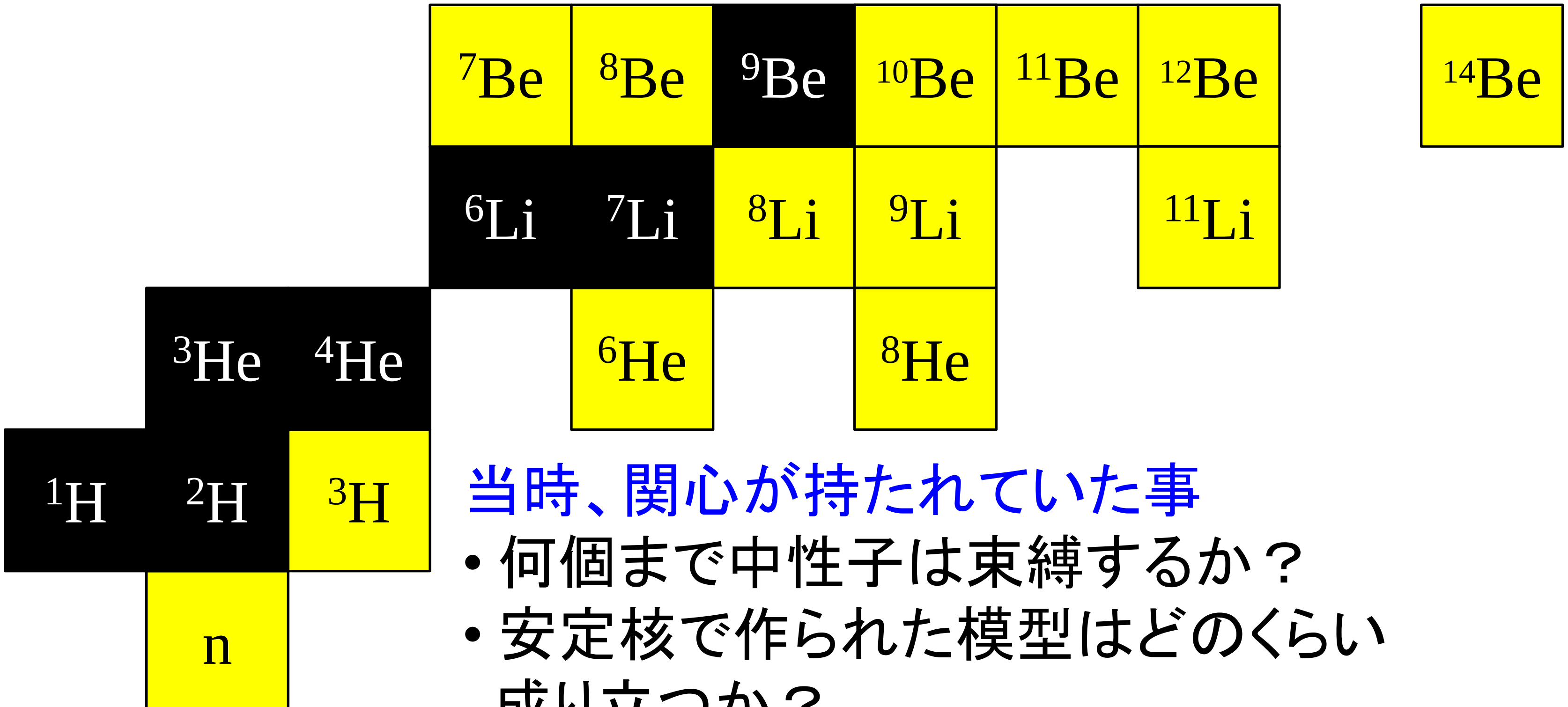
⟶ そうは言っても、自然な疑問として

「陽子数が与えられたときに、中性子は何個まで安定にくっつくのか？」

古くから関心は持たれていた。

- "Light Nuclei with Large Neutron Excess"
  V.V. Volkov, in Proc. Int. Conf. on Nucl. Phys. ('74)
- "Very Neutron Rich Light Nuclei"
  G.T. Garvey, Comments on Nucl. and Part. Phys. 5('72)85.
- "Explorations far from stability"
  O.L. Keller Jr., Comments on Nucl. and Part. Phys. 5('72)98.
- "Int. Symp. on why and how should we investigate nucleides far off the stability line", Lysekil, Sweden (1966).
- "Int. Conf. on the Properties of Nuclei far from the Region of Beta-Stability", CERN (1970).

^{6}He の生成 1948 年：H.S. Sommers Jr. and R. Sherr, PR74(‘48)1192.
^{8}He の生成 1965 年：A.M. Poskanzer et al., PRL15(‘65)1030.
^{11}Li の生成 1969 年：R. Klapisch et al., PRL23(‘69)652.



当時、関心が持たれていた事

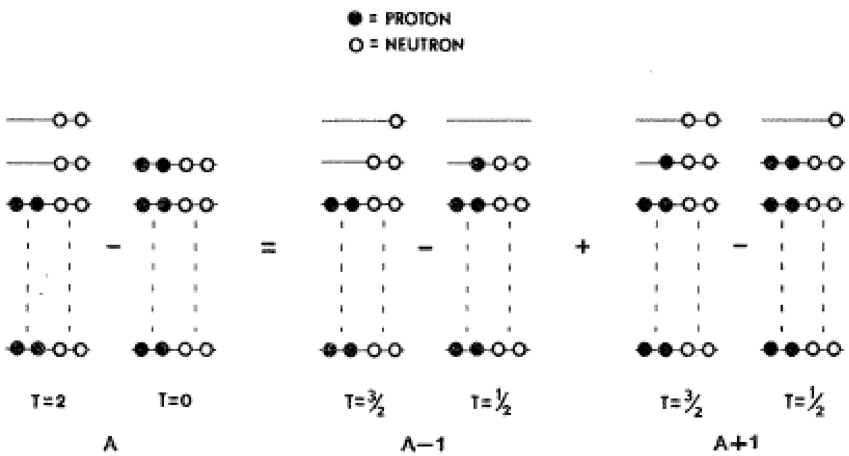
- 何個まで中性子は束縛するか？
- 安定核で作られた模型はどのくらい成り立つか？
- r-プロセス元素合成

今もあまり変わらない（？）

＋弱束縛になることによって見え始める物理はあるか？

（参考）: 当時行われていた計算

G.T. Garvey and I. Kelson, PRL16('66)197



最も単純な殻模型に基づくと

$$M(N+2,Z-2)-M(N,Z)$$
$$=M(N+1,Z-2)-M(N,Z-1)$$
$$+M(N+2,Z-1)-M(N+1,Z)$$

$\downarrow$

既知核の質量から未知核の質量を予測

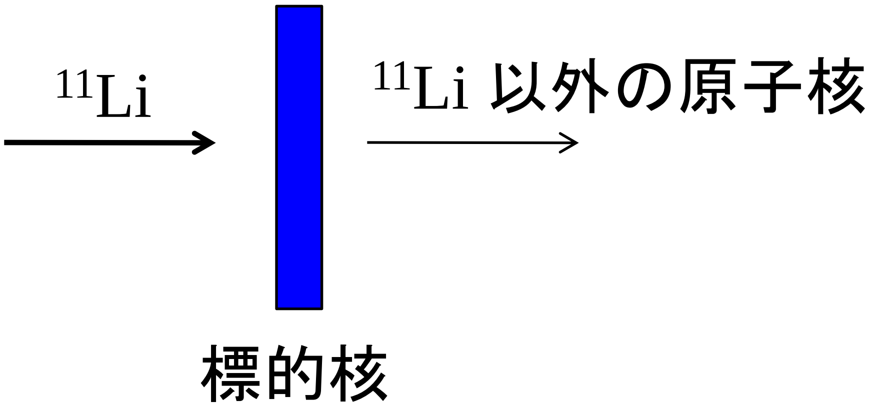
^{8}He: stable to ^{6}He+2n by 10 MeV — stable by 2.14 MeV

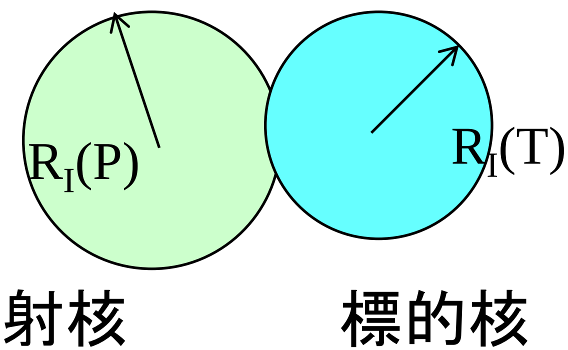
^{11}Li: unstable to ^{9}Li+2n by 0.6 MeV — stable by 0.376 MeV

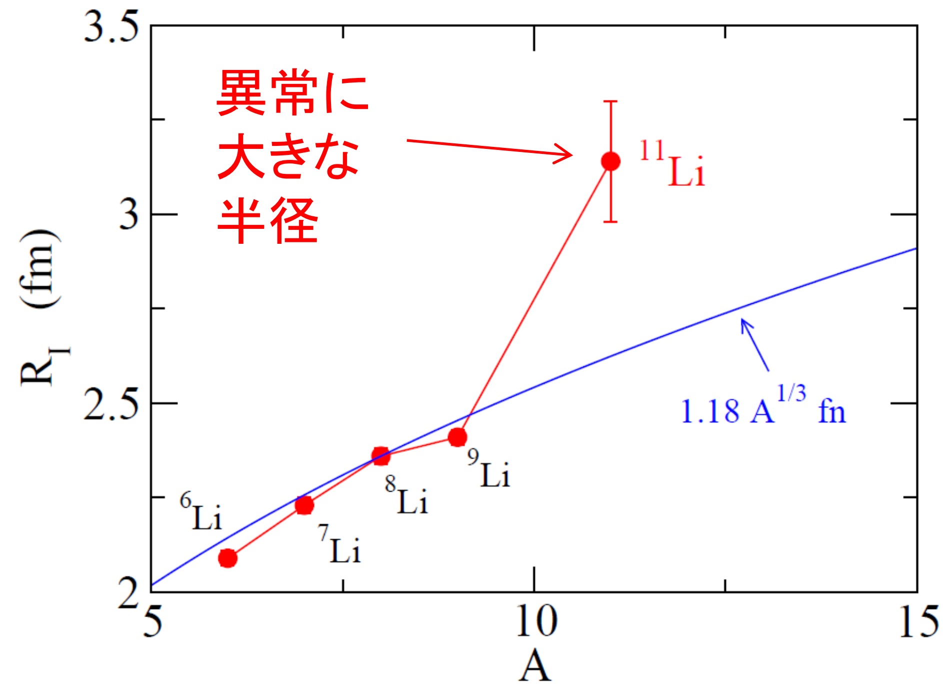
$\uparrow$

実際の測定値

不安定核研究の本格的幕開け：相互作用断面積測定(1985)





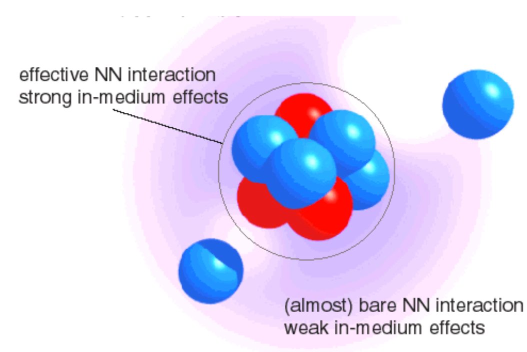


I. Tanihata et al., PRL55('85)2676

2つの原子核が重なった時に
反応が起こるとすると

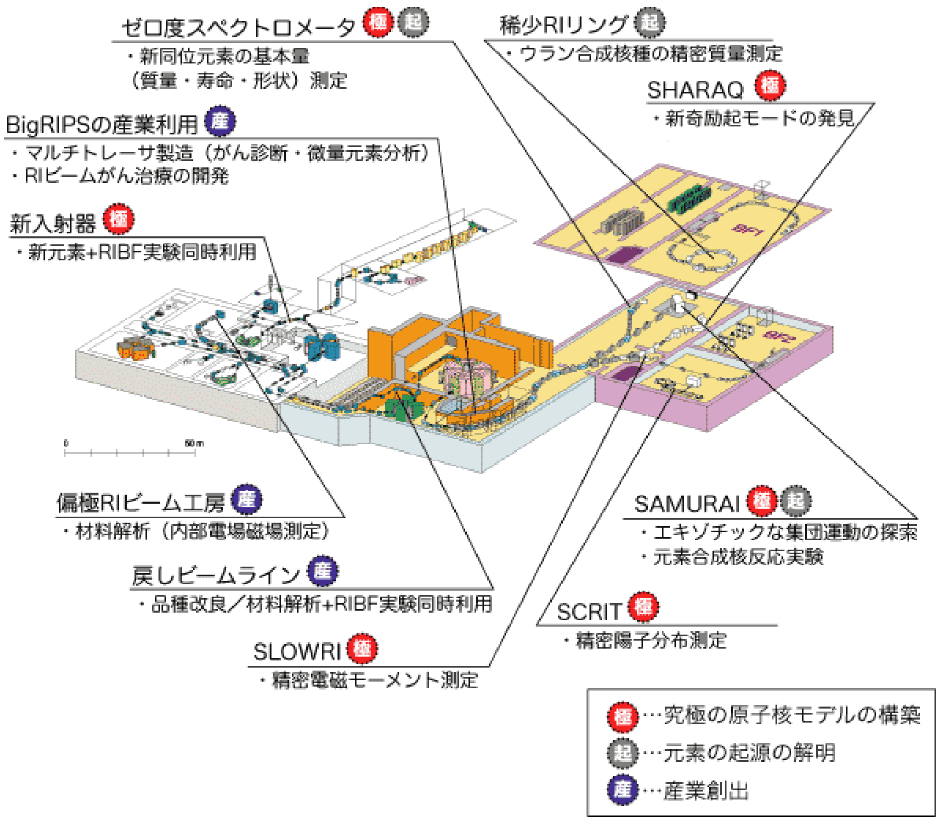
$$\sigma_I \sim \pi[R_I(P) + R_I(T)]^2$$

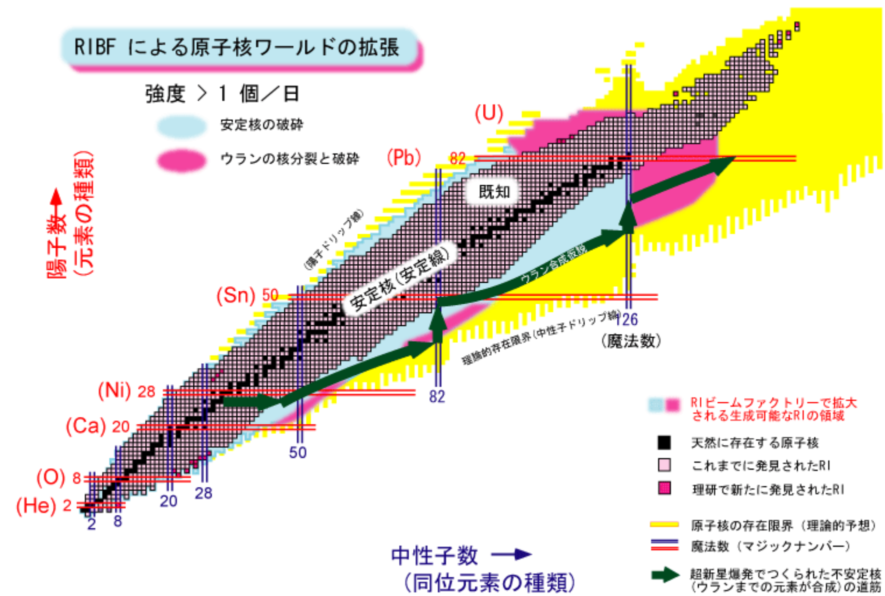
$$\longrightarrow \quad R_I(P)$$



新世代不安定核ビーム施設：理研RIBF

2007年本格的に始動





これまで作ることの難しかった原子核を生成できるようになる

→ 理論の大きな進展が求められている

1粒子ハロー核の性質

－束縛状態

－角運動量の効果

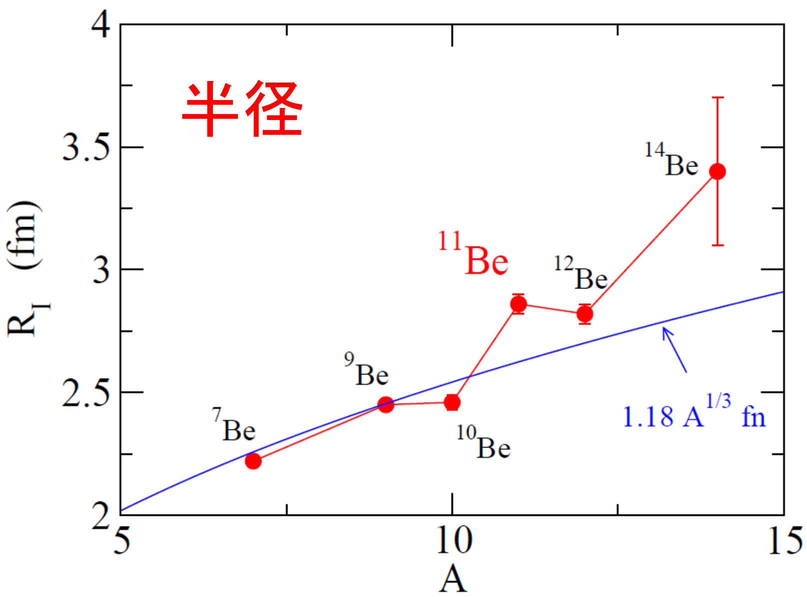
－クーロン励起

－陽子放出崩壊

－変形

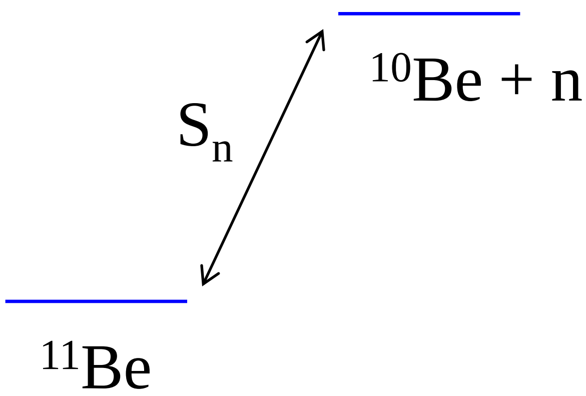
1中性子ハロー核

典型的な例: $^{11}_{4}Be_7$



I. Tanihata et al.,
PRL55('85)2676; PLB206('88)592

1中性子分離エネルギー

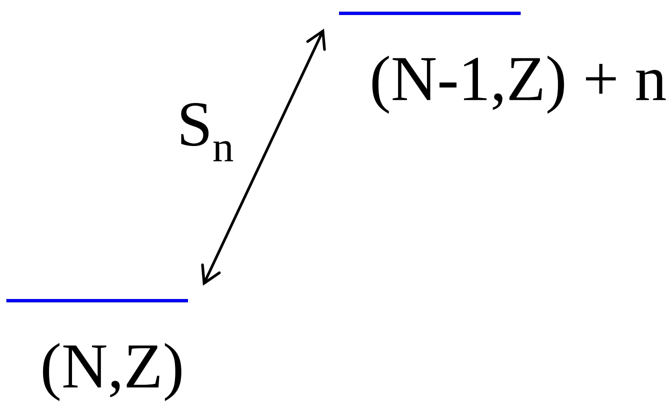


S_n = 504 +/- 6 keV

非常に小さい

ちなみに ^{10}Be では、
S_n = 6.81 MeV

復習:原子核の束縛エネルギーの系統性(安定核)

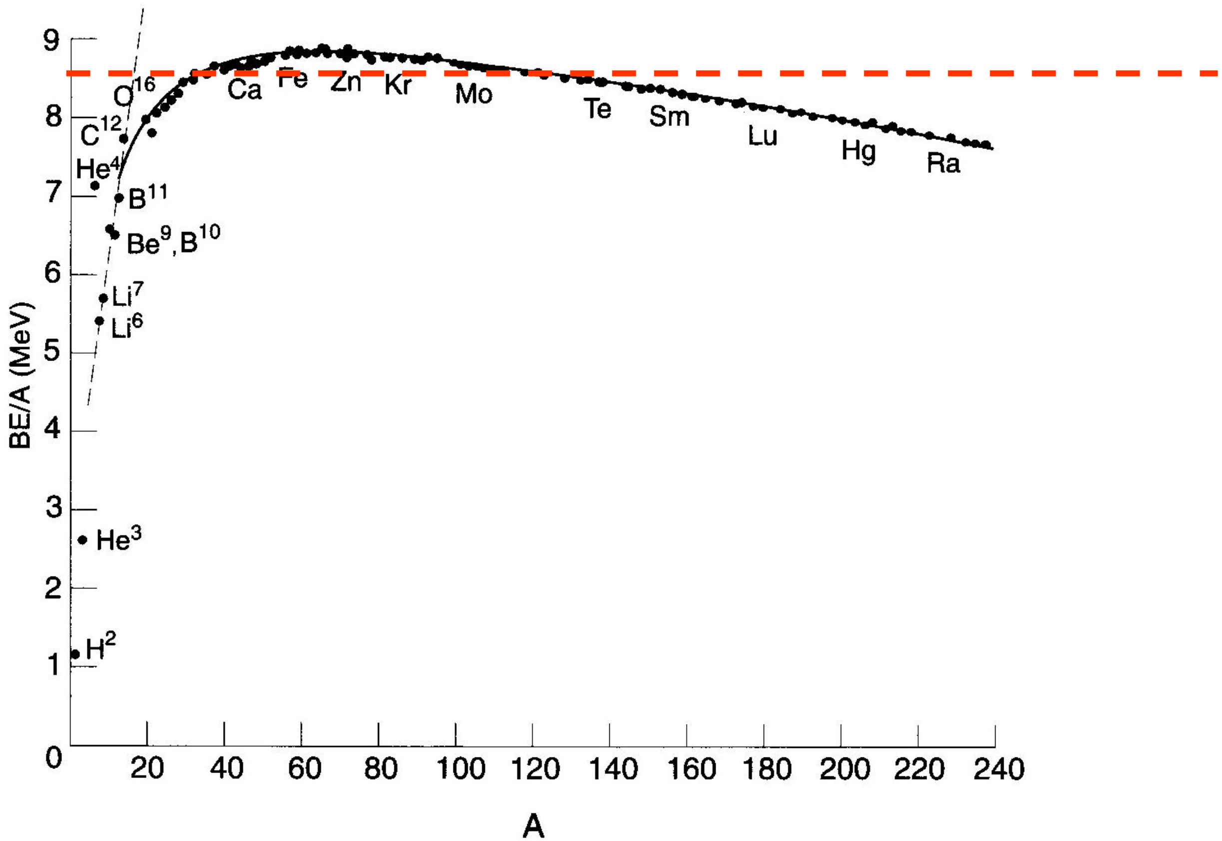


$S_n(N,Z) = B(N,Z) – B(N\text{-}1,Z)$

$B(N,Z) \sim B(N\text{-}1,Z) + B(N,Z)/A$ だとすると

$S_n(N,Z) \sim B(N,Z) / A$

復習:原子核の束縛エネルギーの系統性(安定核)



1. B(N,Z)/A ~ 8.5 MeV (A > 12) ⟺ 短距離力(核子間相互作用)

長距離力: $B \propto A(A-1)/2$ $B/A \propto A$

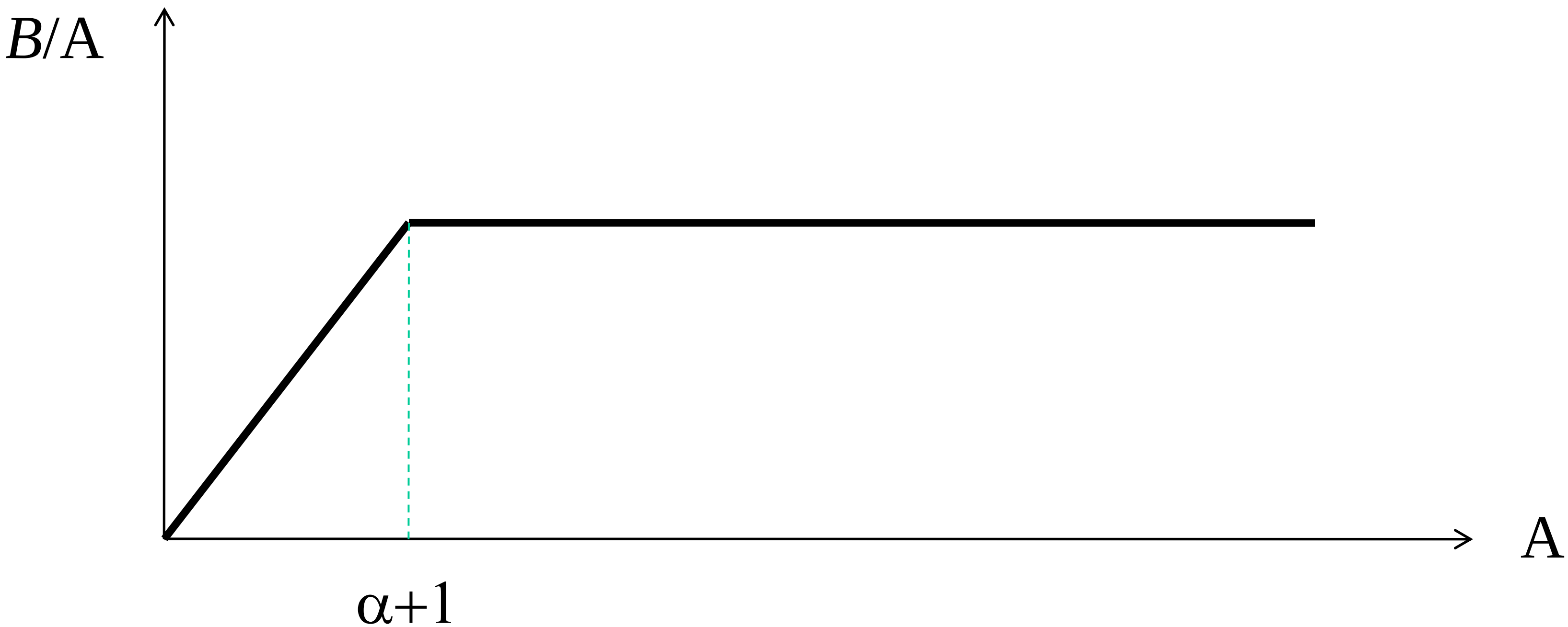
短距離力: saturation(B/A が一定になる)

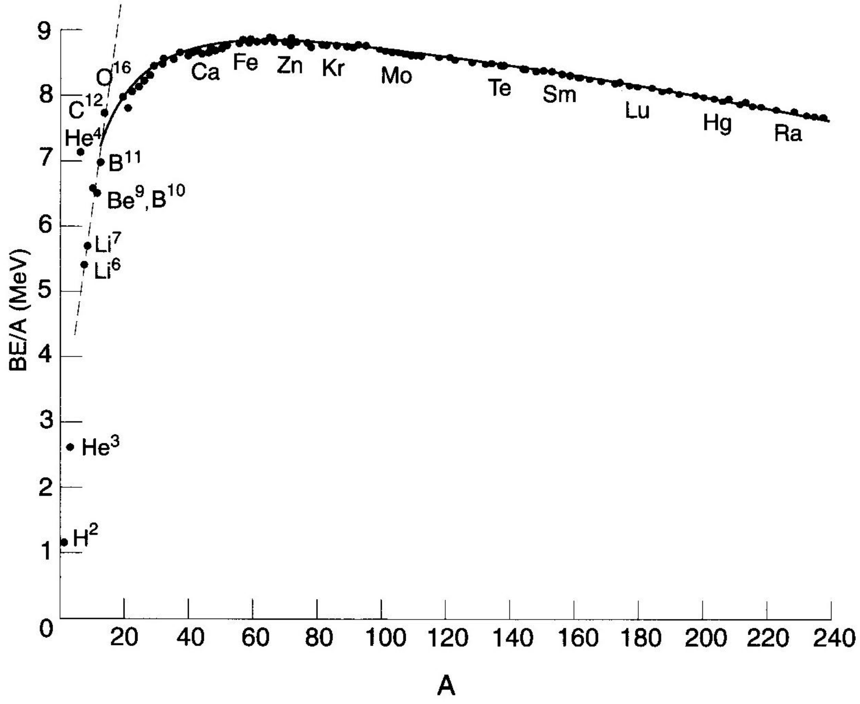
1つの核子が α 個の核子とのみ相互作用するとすると、

$B \sim \alpha\, A/2 \longrightarrow B/A \sim \alpha/2$ (const.)

ただし、$A < \alpha+1$ の時は、すべての核子対が相互作用するので、

$$B/A \propto A$$





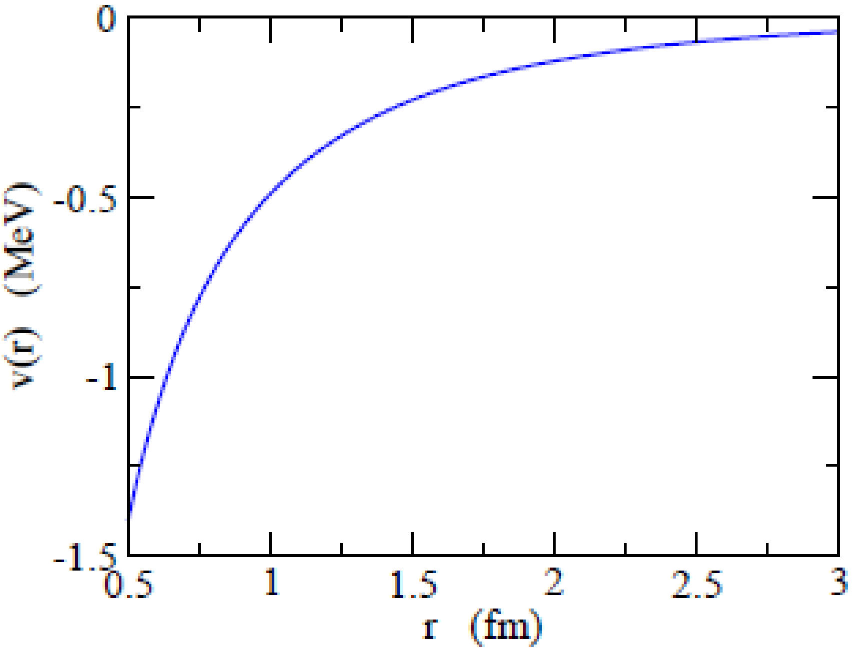
この図から α の値を読み取ると、
α ~ 10 くらい。

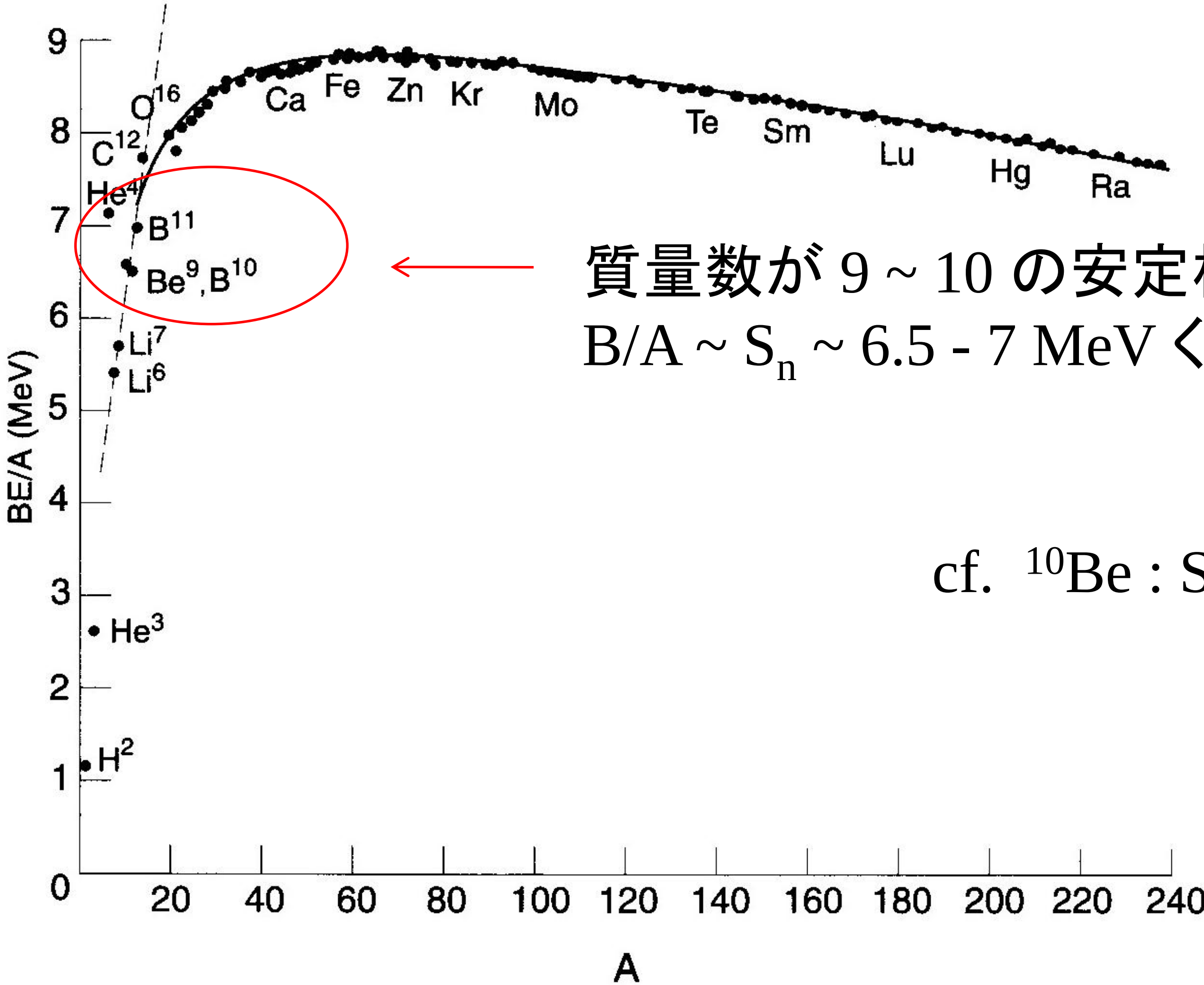
核力の到達距離は、
$1.2 \times 10^{1/3} = 2.58$ fm 程度。

湯川相互作用:

$$v(r) = -g\frac{e^{-\kappa r}}{r}$$

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{\hbar}{m_\pi c} = 1.41 \text{ fm}$$



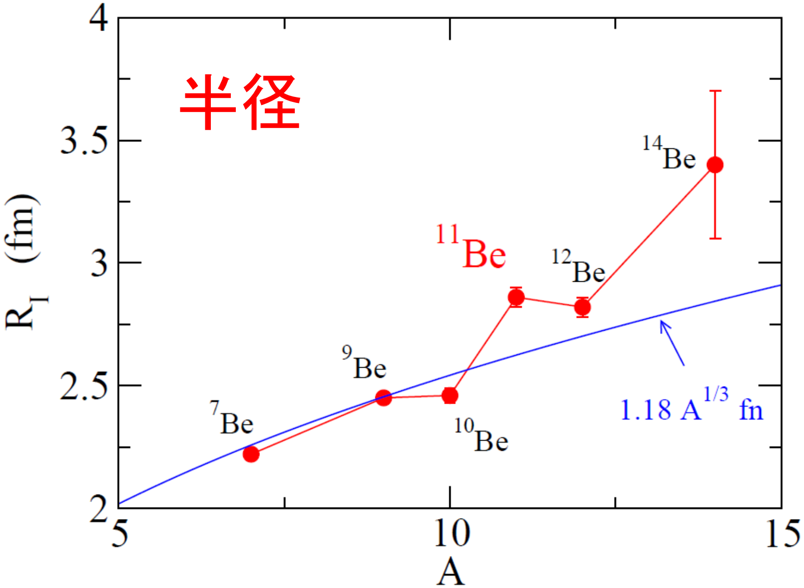


質量数が 9 ~ 10 の安定核では
B/A ~ S_n ~ 6.5 - 7 MeV くらい

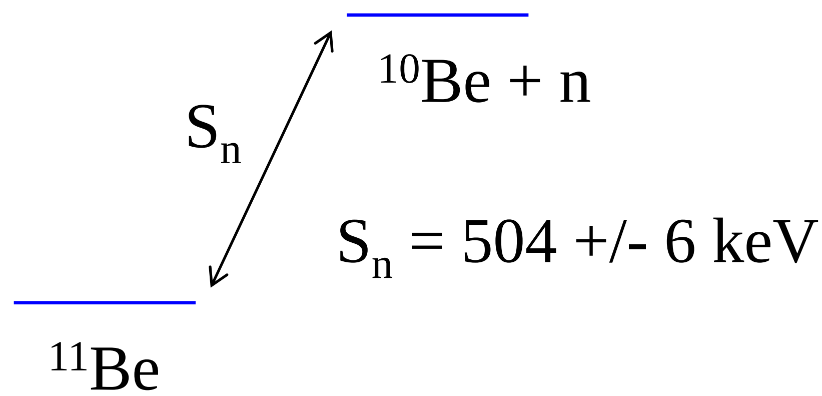
cf. ^{10}Be : S_n = 6.81 MeV

1中性子ハロー核

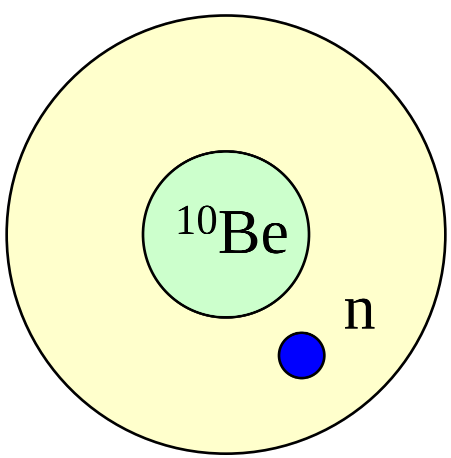
典型的な例：$^{11}_{4}\mathrm{Be}_7$



1中性子分離エネルギー



解釈：^{10}Be のまわりに1つの中性子が弱く束縛され薄く広がっている

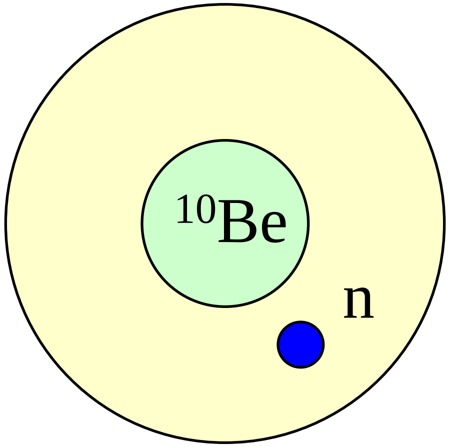


$$\psi(r) \sim \exp(-\kappa r) \qquad \kappa = \sqrt{2m|\epsilon|/\hbar^2}$$

弱く束縛された系

密度分布の空間的広がり（ハロー構造）

解釈: ^{10}Be のまわりに1つの中性子が弱く束縛され薄く広がっている



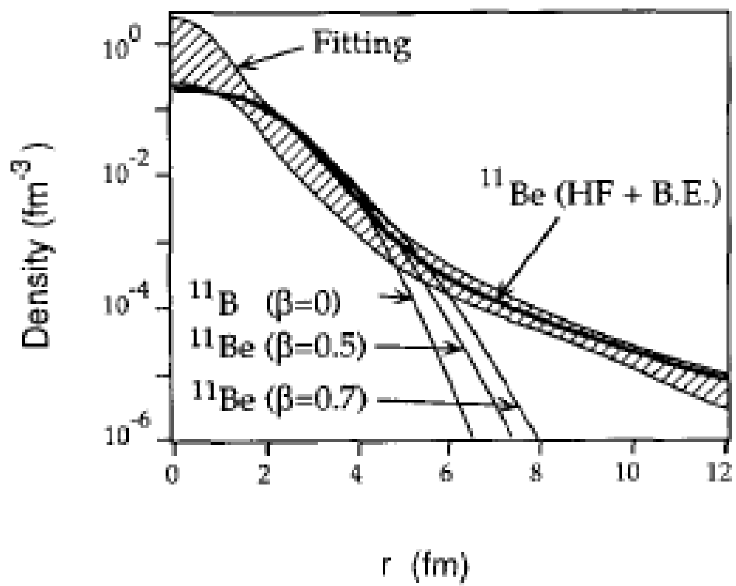
$$\psi(r) \sim \exp(-\kappa r) \qquad \kappa = \sqrt{2m|\epsilon|/\hbar^2}$$

弱く束縛された系

密度分布の空間的広がり（ハロー構造）

月暈（月のまわりに広がる
薄い輪。ハロー。）

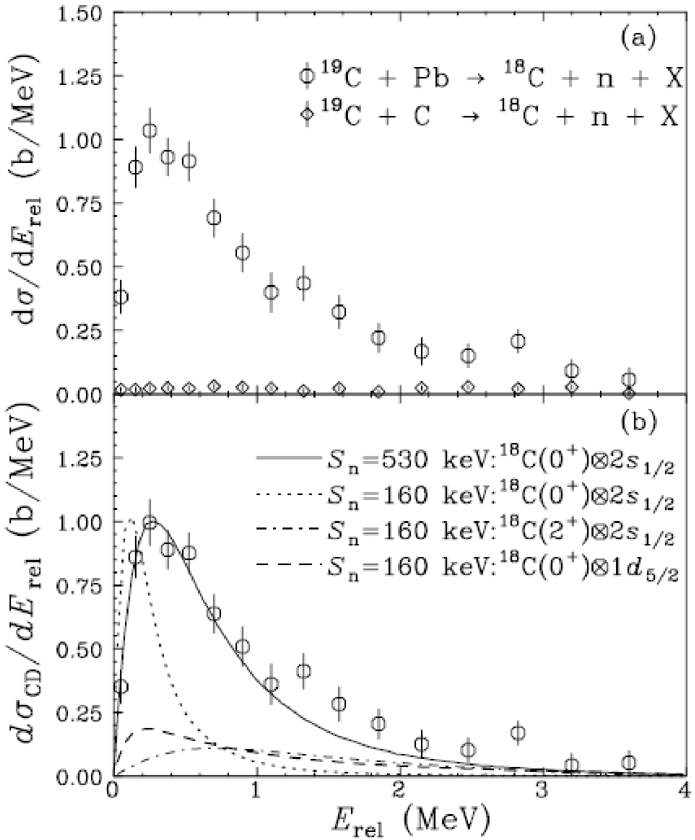
反応断面積の実験値を説明する
密度分布



M. Fukuda et al., PLB268('91)339

1n ハロー核の他の候補

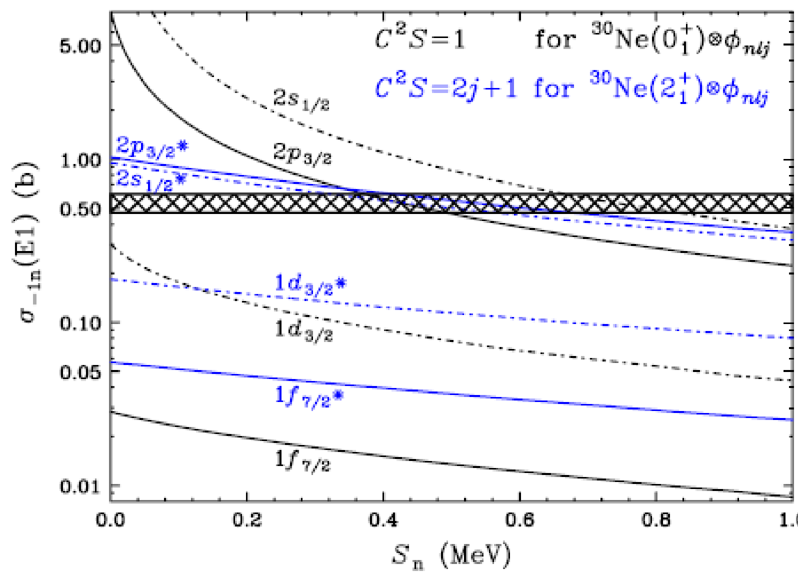
^{19}C: S_n = 0.58(9) MeV



^{19}C のクーロン分解反応

T. Nakamura et al., PRL83(‘99)1112

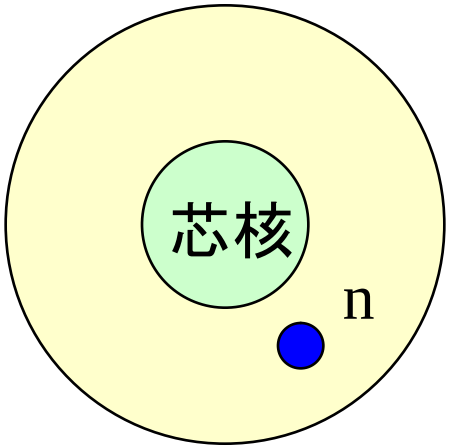
^{31}Ne: S_n = 0.29 +/- 1.64 MeV



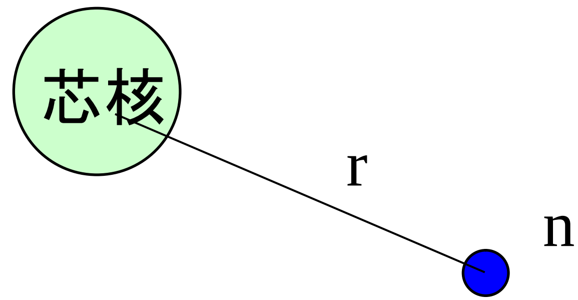
大きなクーロン分解反応の断面積

T. Nakamura et al., PRL103(‘09)262501

一粒子運動の性質：束縛状態



芯核と中性子でできる2体問題と近似



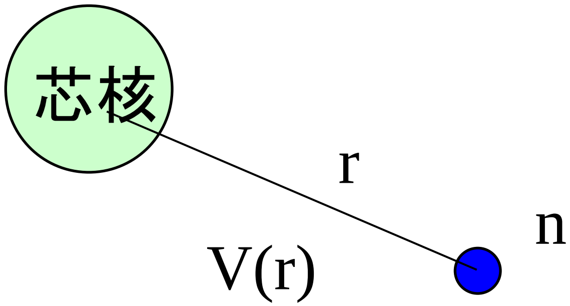
相対距離 r の関数として球対称ポテンシャル V(r) を仮定。

cf. 平均場ポテンシャル：

$$V(\boldsymbol{r}) \sim \int v(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}'$$

相対運動のハミルトニアン

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V(r)$$



相対運動のハミルトニアン

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V(r)$$

簡単のためスピン軌道相互作用はないとすると(ls 力がなくても本質は変わらない)

$$\boxed{\Psi_{lm}(\boldsymbol{r}) = \frac{u_l(r)}{r} Y_{lm}(\hat{\boldsymbol{r}})}$$

$$\boxed{\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} + V(r) - \epsilon_l\right] u_l(r) = 0}$$

境界条件(束縛状態):

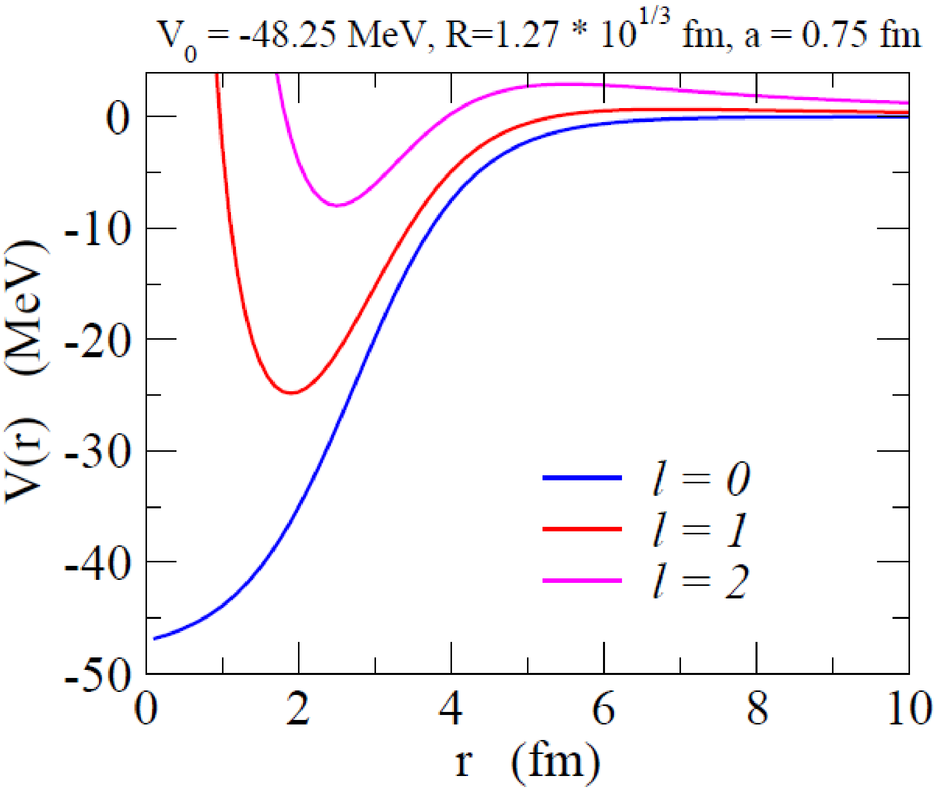
$$\begin{aligned} u_l(r) &\sim r^{l+1} \qquad (r \sim 0) \\ &\to e^{-\kappa r} \qquad (r \to \infty) \end{aligned}$$

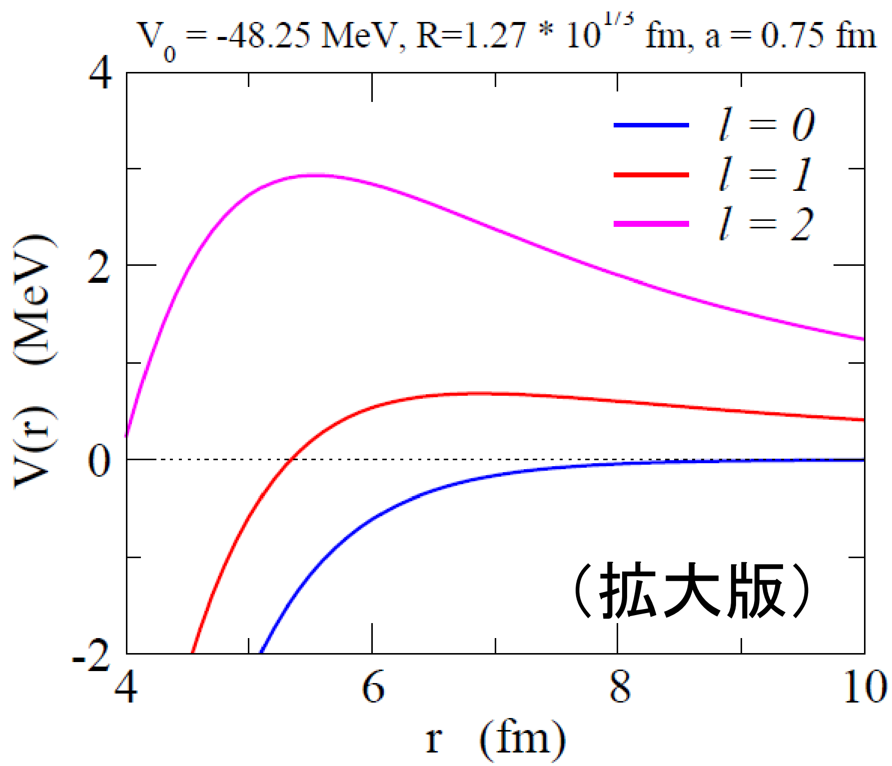
* 正確には modified 球ベッセル関数

角運動量とハロー現象

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2}+\frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2}+V(r)-\epsilon_l\right]u_l(r)=0$$

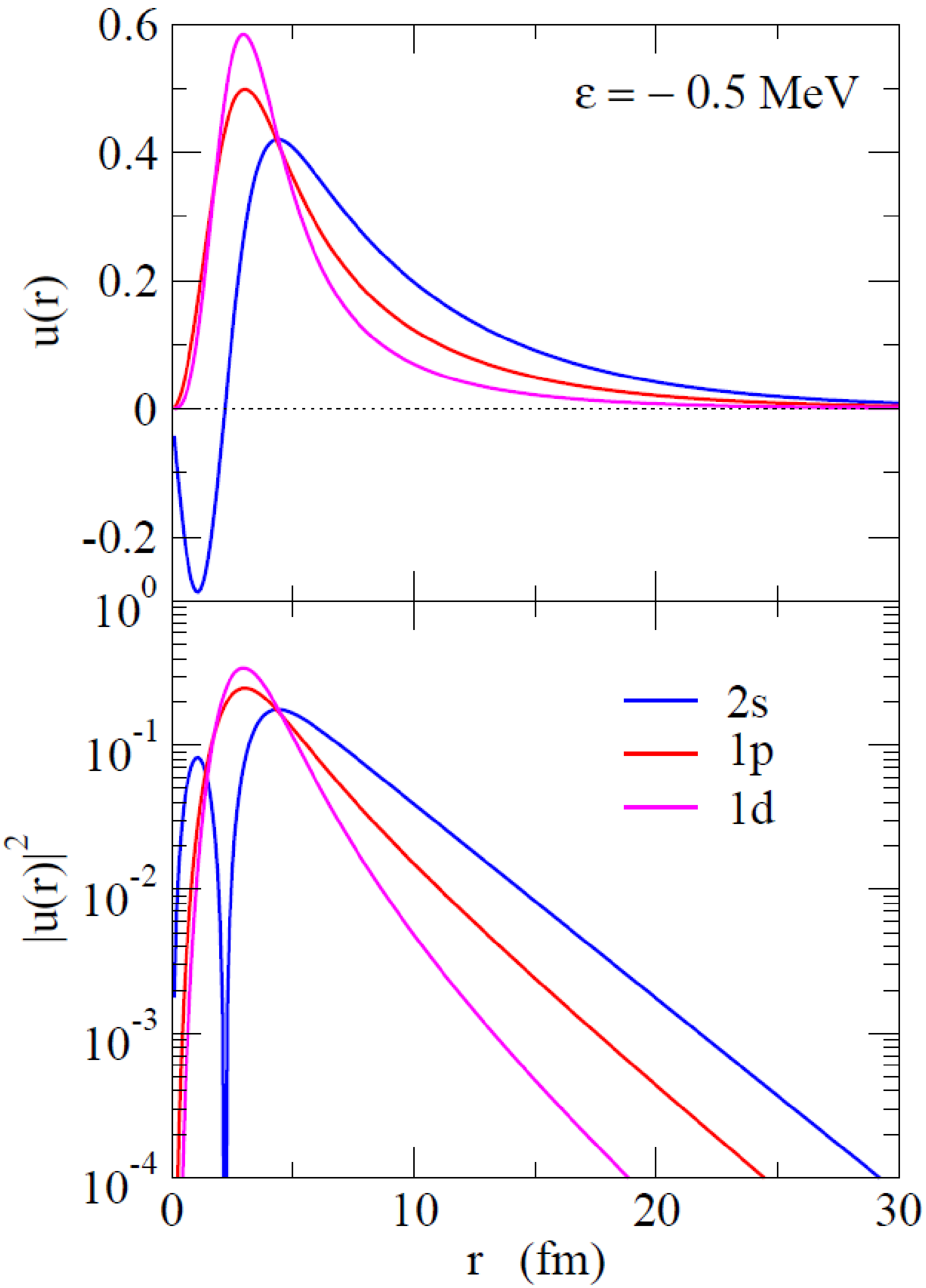
遠心力ポテンシャル





遠心力障壁の高さ: 0 MeV (l = 0), 0.69 MeV (l = 1), 2.94 MeV (l = 2)

波動関数　　ε = -0.5 MeV となるように各 l ごとに V_0 を調整



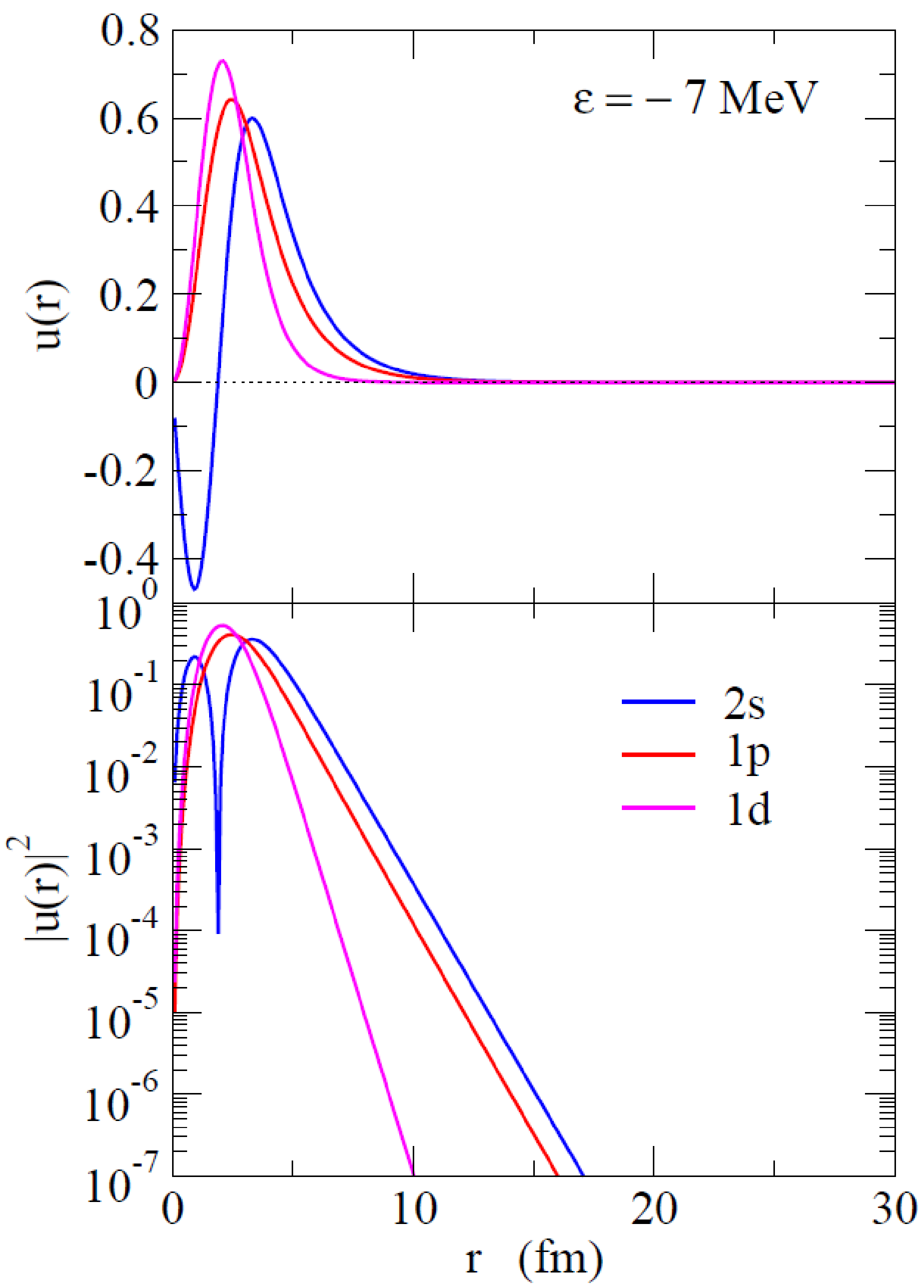
$l = 0$:長いテール
$l = 2$: 局在
$l = 1$: その中間

平均2乗半径:

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} = \sqrt{\int_0^\infty dr\, r^2 u_l(r)^2}$$

7.17 fm ($l = 0$)
5.17 fm ($l = 1$)
4.15 fm ($l = 2$)

波動関数　　　ε = -7 MeV の場合



どの l も波動関数は局在

平均2乗半径:

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} = \sqrt{\int_0^\infty dr\, r^2 u_l(r)^2}$$

3.58 fm (l = 0)
3.05 fm (l = 1)
3.14 fm (l = 2)

平均2乗半径のゼロ･エネルギーにおける振る舞い

$$
\begin{aligned}
I_2 &\equiv \int_0^\infty dr\, r^2 u_l(r)^2 \\
&= \int_0^R dr\, r^2 u_l(r)^2 + \int_R^\infty dr\, r^2 u_l(r)^2
\end{aligned}
$$

積分領域をポテンシャルの内と外に分離

↓

エネルギーが小さくなると外の領域が主に寄与

$$
I_2 \sim \int_R^\infty dr\, r^2 u_l(r)^2
$$

平均2乗半径のゼロ・エネルギーにおける振る舞い

エネルギーが小さくなると外の領域が主に寄与

$$I_2 \sim \int_R^\infty dr\, r^2 u_l(r)^2$$

外の領域では、波動関数は modified 球ベッセル関数に比例

$$u_l(r) = c_l \cdot r\, k_l(\alpha r), \qquad \alpha = \sqrt{2m|\epsilon_l|/\hbar^2}$$

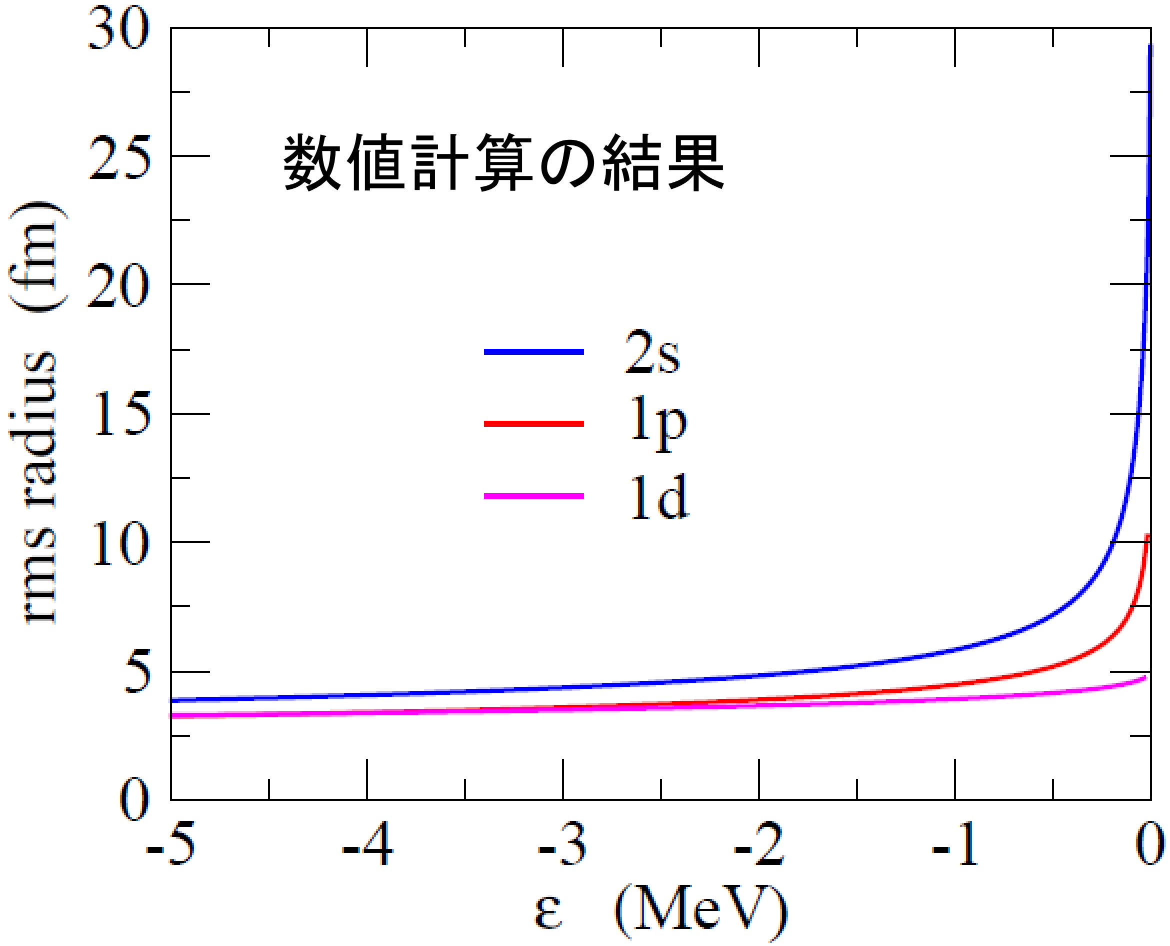
$$\begin{aligned}\langle r^2 \rangle &= I_2/I_0 \\ &\sim c_l^2 \int_R^\infty dr\, r^2 [r k_l(\alpha r)]^2 \Big/ c_l^2 \int_R^\infty dr\, [r k_l(\alpha r)]^2\end{aligned}$$

積分は解析的に実行可能

$$\langle r^2 \rangle \propto \begin{cases} 1/|\epsilon_0| & (l=0) \\ 1/\sqrt{|\epsilon_1|} & (l=1) \\ const. & (l=2) \end{cases}$$

K. Riisager,
A.S. Jensen, and
P. Moller, NPA548('92)393

$$\langle r^2 \rangle \propto \begin{cases} 1/|\epsilon_0| & (l=0) \\ 1/\sqrt{|\epsilon_1|} & (l=1) \\ const. & (l=2) \end{cases}$$



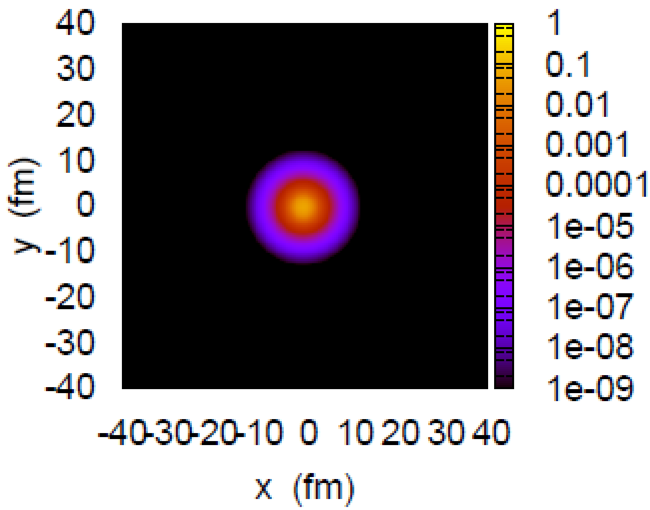
⇩

半径は l=0,1 では発散（ゼロ・エネルギー極限）

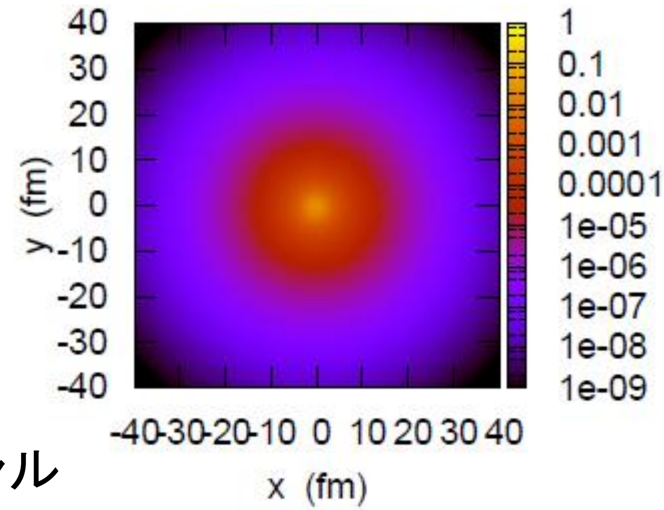
⇩

ハロー（異常に大きい半径）は l= 0 or 1 でのみおこる

表紙に載せておいた図



弱束縛



井戸型ポテンシャル

(l=0 束縛状態)

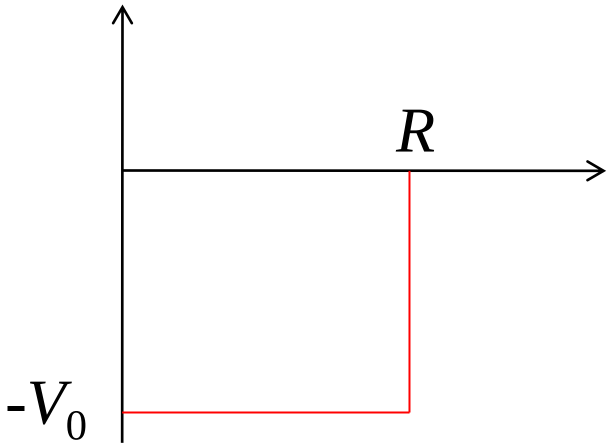
e = -8.07 MeV

e = -0.21 MeV

V_0 = 24 MeV
R = 2.496 fm

V_0 = 10 MeV
R = 2.496 fm

演習問題 1



井戸型ポテンシャルの波動関数 (l = 0) は

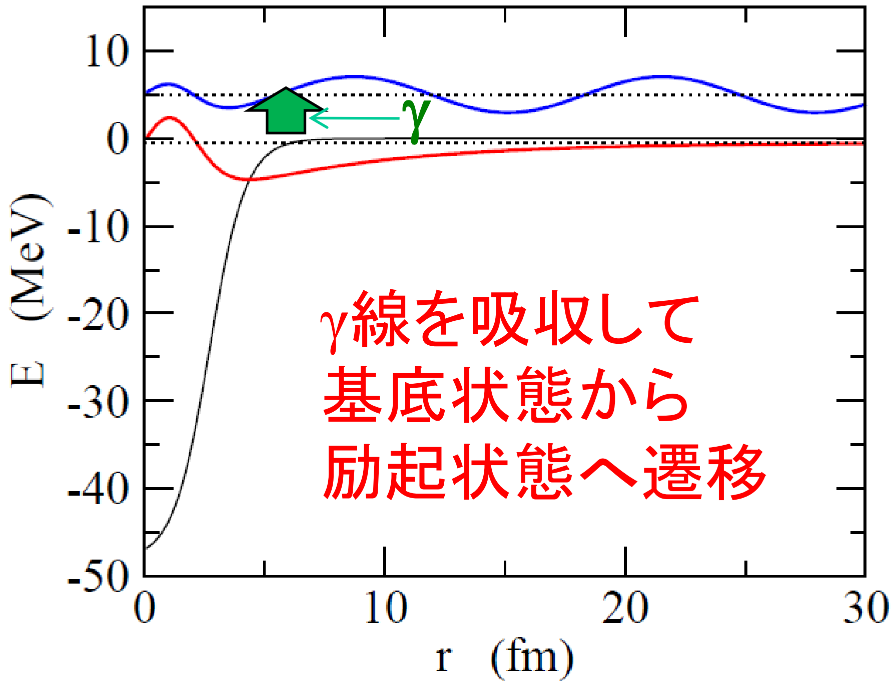
$$
\begin{aligned}
u(r) &= A \sin \tilde{k} r \qquad (r < R) \\
&= B\, e^{-\kappa r} \qquad (r > R)
\end{aligned}
$$

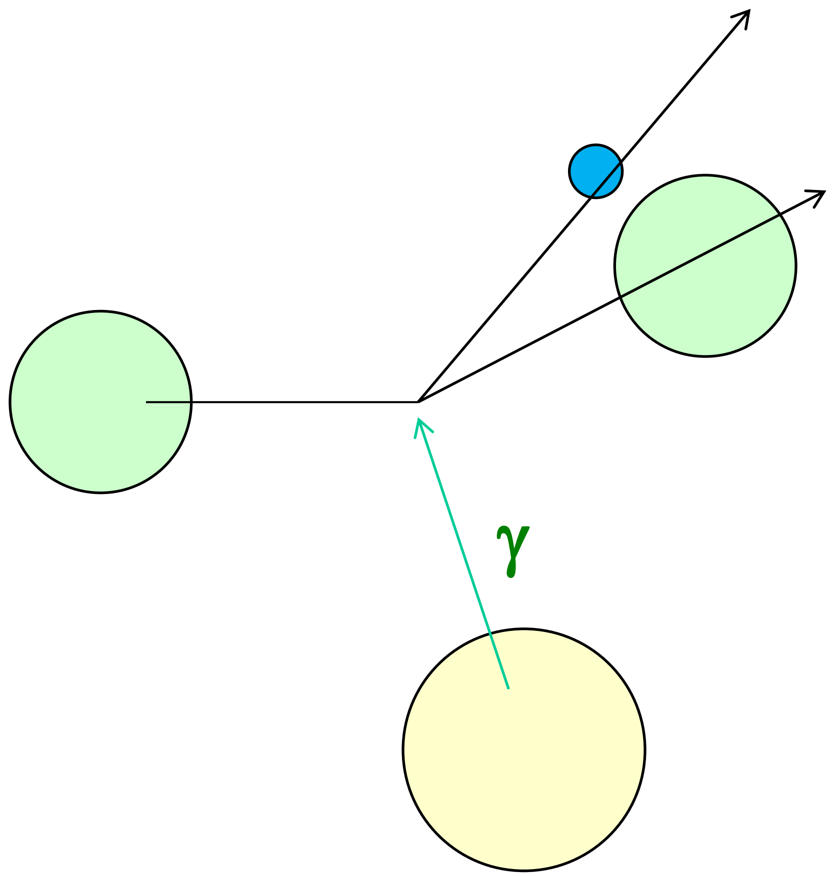
$$
\begin{aligned}
\tilde{k} &= \sqrt{2m(\epsilon + V_0)/\hbar^2} \\
\kappa &= \sqrt{2m|\epsilon|/\hbar^2}
\end{aligned}
$$

係数 A, B は $r = R$ における波動関数の接続及び規格化より求まる。

R = 2.5 fm とし、V_0 の値を変えて波動関数を求め、エネルギー ε の関数として平均2乗半径をプロットせよ。ε がゼロとなる極限で平均2乗半径が発散することを確かめよ。

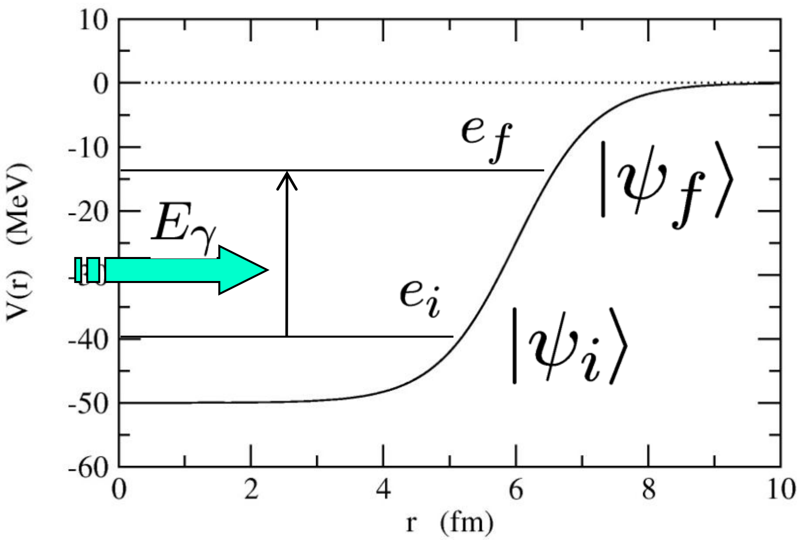
1中性子ハロー核のクーロン励起

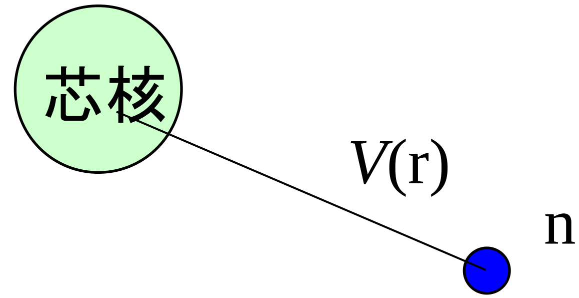




連続状態へ励起されれば分解が起きる ← 標的核の作るクーロン場による励起

電磁遷移



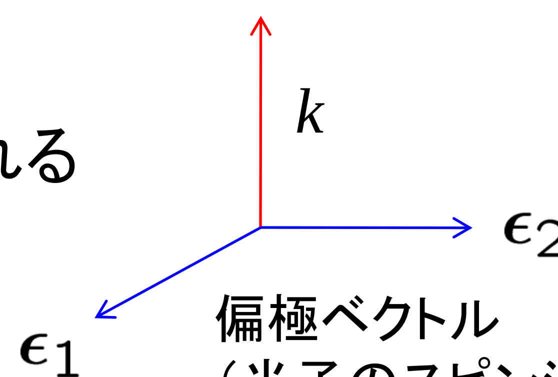


簡単のため、まず、離散的な状態から離散的な状態への遷移を考える。（連続状態への遷移は後ほど）

- ψ_i, ψ_f はハミルトニアンの固有状態:

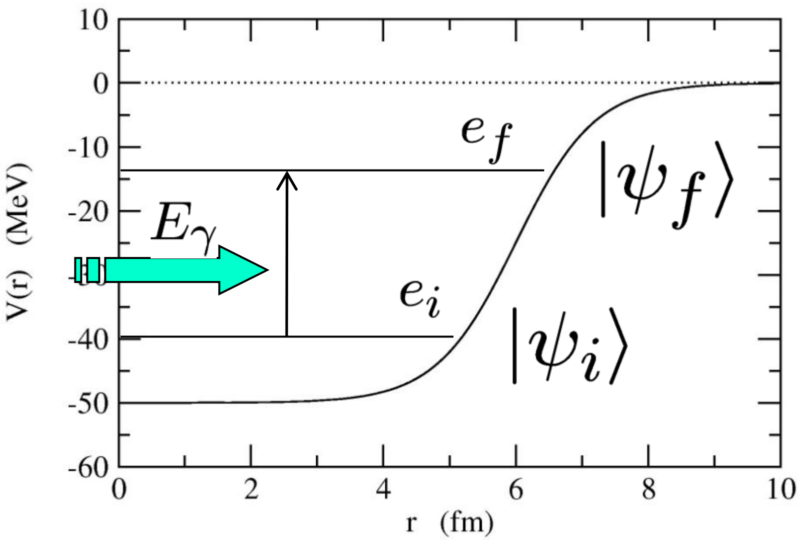
$$
\begin{aligned}
H\Psi_i &= e_i\Psi_i \\
H\Psi_f &= e_i\Psi_f
\end{aligned}
$$

- 光子の状態は運動量と偏極で指定される

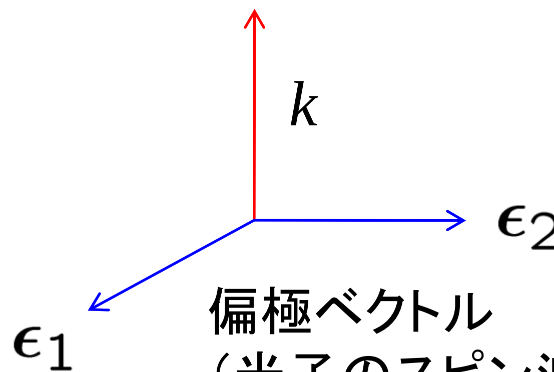


偏極ベクトル
（光子のスピン波動関数）

電磁遷移



光子



偏極ベクトル
（光子のスピン波動関数）

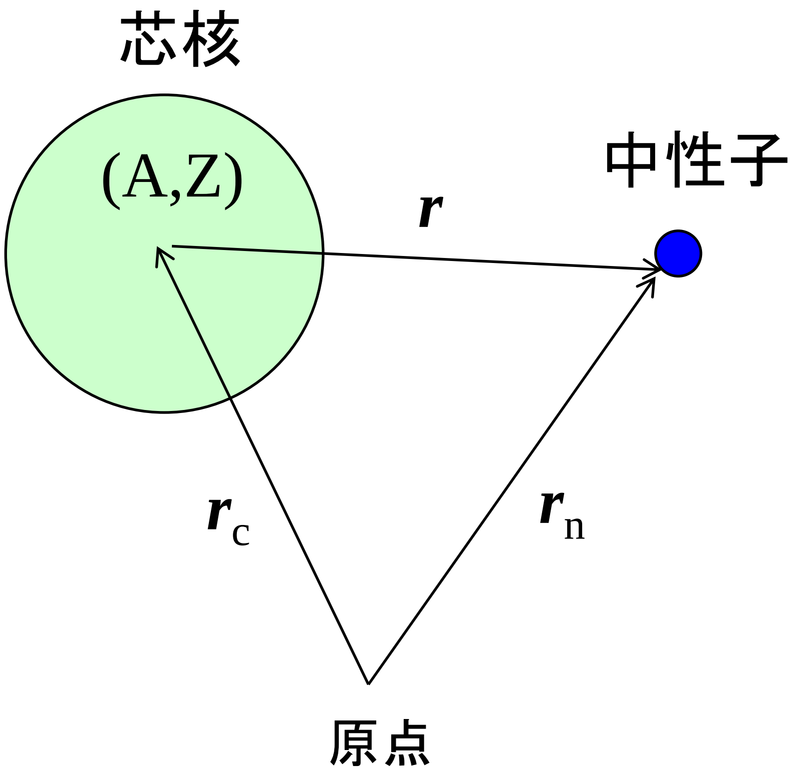
初期状態: $|\psi_i\rangle|n_{k\alpha}=1\rangle$

原子核の状態が Ψ_i,
運動量 k, 偏極 α を持つ
1個のフォトン (α = 1 or 2)

遷移 H_{int}
（原子核と電磁場
の相互作用）

終状態: $|\psi_f\rangle|n_{k\alpha}=0\rangle$

原子核と電磁場の相互作用



$$H = \frac{\boldsymbol{p}_c^2}{2Am} + \frac{\boldsymbol{p}_n^2}{2m} + V(r)$$

電磁場との相互作用:

$$\boldsymbol{p}_c \to \boldsymbol{p}_c - \frac{Ze}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_c, t)$$

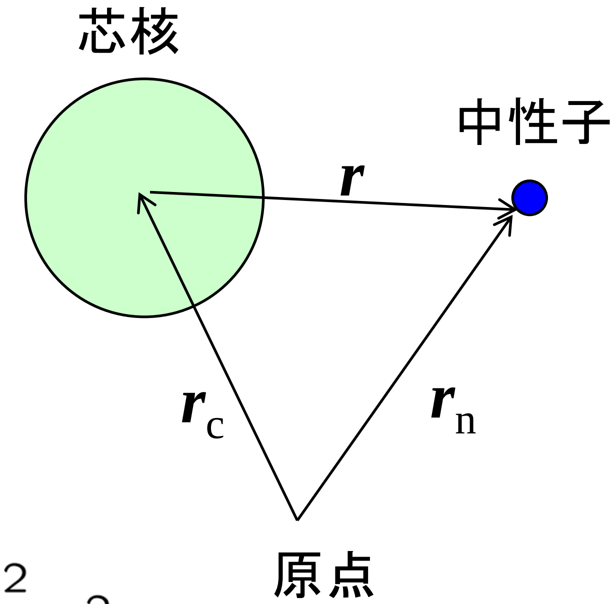
と置き換え。

＊このような変更を行うと古典的な運動方程式

$$mA\ddot{\boldsymbol{r}}_c = Ze\left[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_c, t) + \frac{1}{c}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_c, t)\right]$$

が出てくる（標準的な量子力学の教科書を見よ）。

原子核と電磁場の相互作用

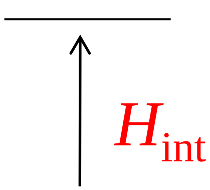


$$
\begin{aligned}
H &= \frac{\left(\boldsymbol{p}_c - \frac{Ze}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_c, t)\right)^2}{2Am} + \frac{\boldsymbol{p}_n^2}{2m} + V(r) \\
&\sim \boxed{\frac{\boldsymbol{p}_c^2}{2Am} + \frac{\boldsymbol{p}_n^2}{2m} + V(r)} \quad {\color{red} = H_0} \\
&\quad \underbrace{- \frac{1}{2Am} \cdot \frac{Ze}{c}(\boldsymbol{p}_c \cdot \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{p}_c) + \frac{1}{2Am}\left(\frac{Ze}{c}\right)^2 \boldsymbol{A}^2}_{= H_{\mathrm{int}}}
\end{aligned}
$$

$$
H_{\mathrm{int}} \sim \boxed{-\frac{1}{Am} \cdot \frac{Ze}{c}\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{p}_c}
$$

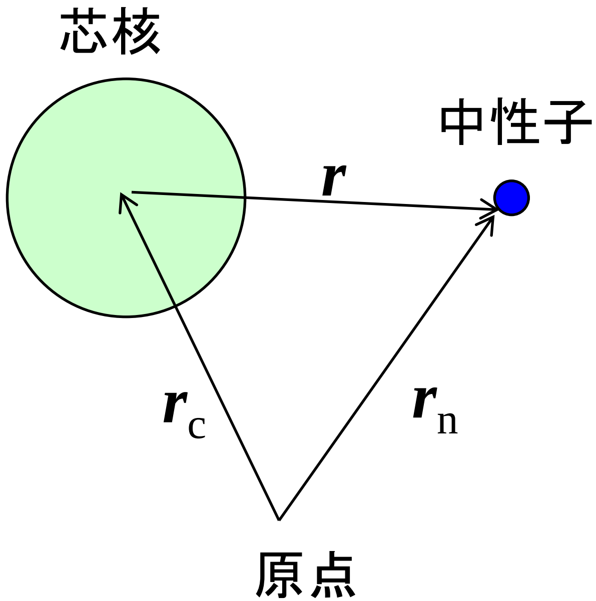
$\longleftarrow$ クーロン・ゲージ

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} = 0$$



H_{int} により状態間の遷移が起きる

原子核と電磁場の相互作用



座標系の変換：相対座標と重心座標

相対座標

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{r}_n - \boldsymbol{r}_c \\
\boldsymbol{p} &= \frac{1}{A+1}(A\boldsymbol{p}_n - \boldsymbol{p}_c)
\end{aligned}
$$

重心座標

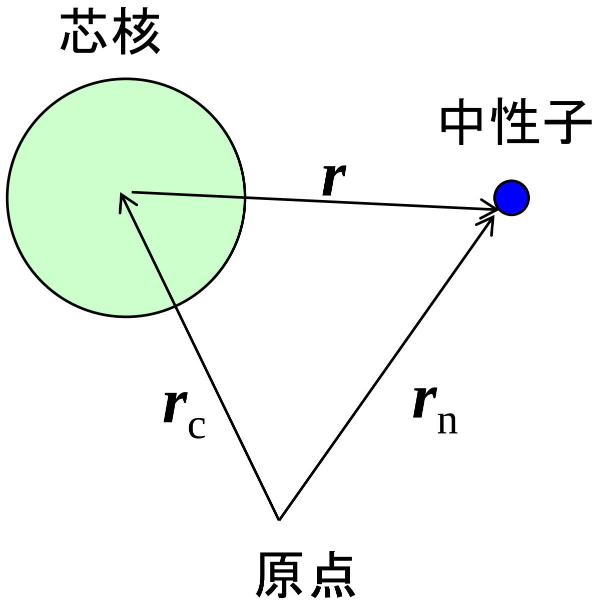
$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{R} &= \frac{1}{A+1}(A\boldsymbol{r}_c + \boldsymbol{r}_n) \\
\boldsymbol{P} &= \boldsymbol{p}_n + \boldsymbol{p}_c
\end{aligned}
$$

$$
H_{\mathrm{int}} = -\frac{1}{Am}\cdot\frac{Ze}{c}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{p}_c = -\frac{1}{Am}\cdot\frac{Ze}{c}\boldsymbol{A}\cdot\left(\frac{A}{A+1}\boldsymbol{P} - \boldsymbol{p}\right)
$$

重心固定系 ($\boldsymbol{P} = 0$) で考えると

$$
\boxed{H_{\mathrm{int}} = \frac{1}{Am}\cdot\frac{Ze}{c}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{p}}
$$

（復習）座標系の変換：相対座標と重心座標



相対座標

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{r}_n - \boldsymbol{r}_c \\
\boldsymbol{p} &= \mu\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{Am}{A+1}(\dot{\boldsymbol{r}}_c - \dot{\boldsymbol{r}}_c) \\
&= \frac{1}{A+1}(A\boldsymbol{p}_n - \boldsymbol{p}_c)
\end{aligned}
$$

重心座標

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{R} &= \frac{1}{A+1}(A\boldsymbol{r}_c + \boldsymbol{r}_n) \\
\boldsymbol{P} &= (A+1)m\dot{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{p}_n + \boldsymbol{p}_c
\end{aligned}
$$

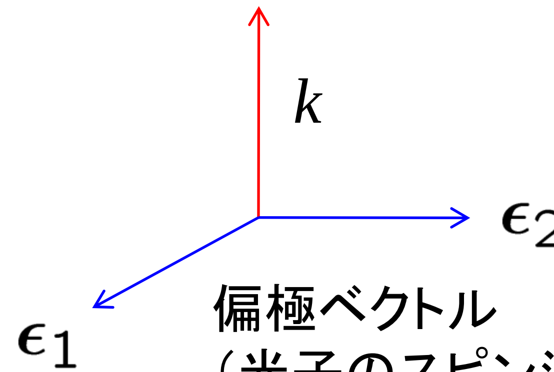
$$
\begin{aligned}
H &= \frac{\boldsymbol{p}_c^2}{2Am} + \frac{\boldsymbol{p}_n^2}{2m} + V(r) \\
&= \frac{\boldsymbol{P}^2}{2M} + \frac{\boldsymbol{p}^2}{2\mu} + V(r)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M &= (A+1)m \\
\mu &= \left(\frac{1}{Am} + \frac{1}{m}\right)^{-1}
\end{aligned}
$$

原子核と電磁場の相互作用

$$\boxed{H_{\text{int}} = \frac{1}{Am} \cdot \frac{Ze}{c} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{p}}$$

光子



偏極ベクトル
（光子のスピン波動関数）

ベクトルポテンシャルをフーリエ
展開して第二量子化：

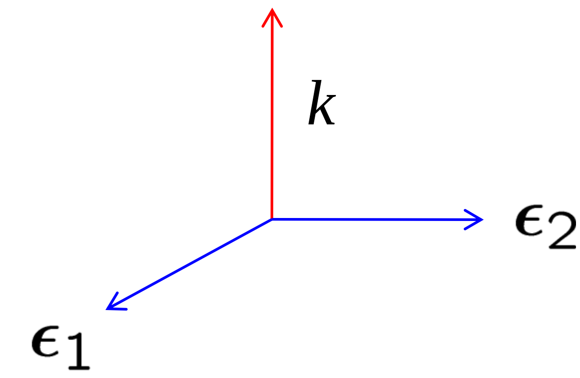
$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = \sum_{\alpha} \int \frac{d\boldsymbol{k}}{2\pi} \frac{\hbar c}{\sqrt{\hbar \omega}} \Big[a_{\boldsymbol{k}\alpha} \boldsymbol{\epsilon}_{\alpha} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - i\omega t} + a^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\alpha} \boldsymbol{\epsilon}_{\alpha} e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} + i\omega t} \Big]$$

$$\omega = kc$$

$a_{\boldsymbol{k}\alpha},\ a^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\alpha}$ ：フォノンの生成・消滅演算子

$$[a_{\boldsymbol{k}\alpha}, a^{\dagger}_{\boldsymbol{k}'\alpha'}] = \delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}')\, \delta_{\alpha,\alpha'}$$

原子核と電磁場の相互作用



$$\boxed{H_{\text{int}} = \frac{1}{Am}\cdot\frac{Ze}{c}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{p}}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \sum_\alpha \int \frac{d\boldsymbol{k}}{2\pi}\frac{\hbar c}{\sqrt{\hbar\omega}}\left[a_{\boldsymbol{k}\alpha}\epsilon_\alpha e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-i\omega t} + a^\dagger_{\boldsymbol{k}\alpha}\epsilon_\alpha e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+i\omega t}\right]$$

$$\omega = kc$$

E1近似　(E1フォトンの吸収)

$$\boxed{e^{\pm i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \sim 1}$$

＊一般の多重極は Ring-Schuckの Appendix B　を見よ

$$E_\gamma = 1\ \text{MeV} \to k = \hbar\omega/\hbar c \sim 1/200\ \text{fm}^{-1}$$

$$\boxed{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \sum_\alpha \int \frac{d\boldsymbol{k}}{2\pi}\frac{\hbar c}{\sqrt{\hbar\omega}}\left[a_{\boldsymbol{k}\alpha}\epsilon_\alpha e^{-i\omega t} + a^\dagger_{\boldsymbol{k}\alpha}\epsilon_\alpha e^{i\omega t}\right] = \boldsymbol{A}(t)}$$

(r に依存しないオペレーター)

（復習）時間に依存する摂動論

$$\boxed{H_{\mathrm{int}} = \frac{1}{Am} \cdot \frac{Ze}{c} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{p}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) \;=\; \sum_{\alpha} \int \frac{d\boldsymbol{k}}{2\pi} \frac{\hbar c}{\sqrt{\hbar\omega}} \left[a_{\boldsymbol{k}\alpha} \epsilon_{\alpha} e^{-i\omega t} + a^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\alpha} \epsilon_{\alpha} e^{i\omega t} \right] = \boldsymbol{A}(t)}$$

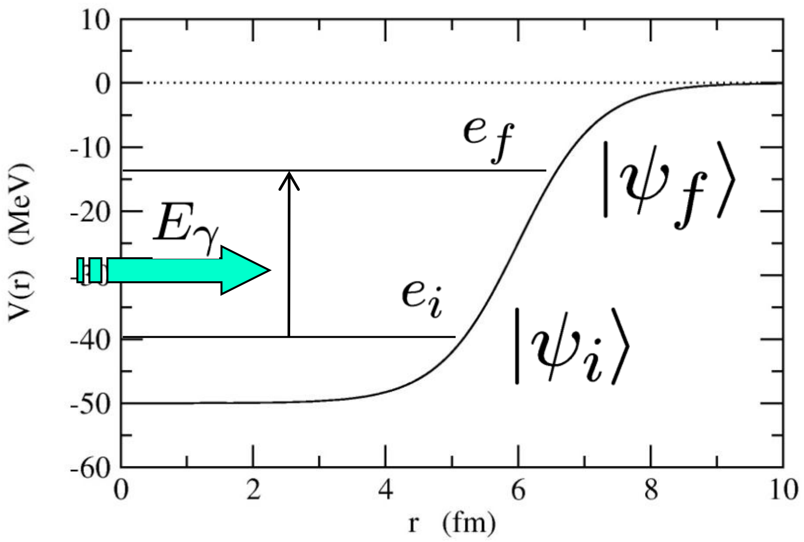
$$V(\boldsymbol{r}, t) = F(\boldsymbol{r}) e^{\pm i\omega t}$$

による単位時間あたりの遷移確率：
（単一の状態への遷移の場合）

$$\boxed{\Gamma_{i \to f} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f|F|i\rangle|^2 \, \delta(e_f - e_i \pm \hbar\omega)}$$

Fermi の Golden Rule

電磁遷移



$$H_{\rm int} = \frac{1}{Am}\cdot\frac{Ze}{c}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \sum_\alpha\int\frac{d\boldsymbol{k}}{2\pi}\frac{\hbar c}{\sqrt{\hbar\omega}}a_{\boldsymbol{k}\alpha}\boldsymbol{\epsilon}_\alpha e^{-i\omega t}$$

+h.c.

初期状態: $|\psi_i\rangle|n_{k\alpha}=1\rangle = |\psi_i\rangle a^\dagger_{k\alpha}|0\rangle$

遷移 $\downarrow$ H$_{\rm int}$

終状態: $|\psi_f\rangle|n_{k\alpha}=0\rangle = |\psi_f\rangle|0\rangle$

電磁遷移

$$H_{\mathrm{int}} = \frac{1}{Am} \cdot \frac{Ze}{c} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{p} \qquad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = \sum_{\alpha} \int \frac{d\boldsymbol{k}}{2\pi} \frac{\hbar c}{\sqrt{\hbar\omega}} a_{\boldsymbol{k}\alpha} \boldsymbol{\epsilon}_{\alpha} e^{-i\omega t} \text{ +h.c.}$$

初期状態: $|\psi_i\rangle|n_{k\alpha} = 1\rangle = |\psi_i\rangle a^{\dagger}_{k\alpha}|0\rangle$

終状態: $|\psi_f\rangle|n_{k\alpha} = 0\rangle = |\psi_f\rangle|0\rangle$

フォトンの偏極の向きを z 軸に取ると、

$$\langle f|H_{\mathrm{int}}|i\rangle = \frac{Ze}{Am} \cdot \frac{1}{2\pi} \frac{\hbar}{\sqrt{\hbar\omega}} \cdot \langle\psi_f|p_z|\psi_i\rangle\, e^{-i\omega t}$$

(note) $\langle 0|a_{\boldsymbol{k}\alpha}(a^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\alpha}|0\rangle) = 1$

$$\boxed{\Gamma_{i\to f} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{Ze}{A}\right)^2 \frac{1}{m^2\omega} \left|\langle\psi_f|p_z|\psi_i\rangle\right|^2 \delta(e_f - e_i - \hbar\omega)}$$

(note) $[\boldsymbol{p}^2, \boldsymbol{r}] = -2i\hbar \boldsymbol{p}$

$$
\begin{aligned}
\langle \psi_f | p_z | \psi_i \rangle &= \left\langle \psi_f \left| \frac{1}{-2i\hbar} \cdot 2\mu \left[\overset{H_0}{\frac{\boldsymbol{p}^2}{2\mu} + V(r)}, z \right] \right| \psi_i \right\rangle \\
&= \frac{i\mu}{\hbar} \langle \psi_f | H_0 z - z H_0 | \psi_i \rangle \\
&= \frac{i\mu}{\hbar} (e_f - e_i) \langle \psi_f | z | \psi_i \rangle \\
&= i\mu\omega \langle \psi_f | z | \psi_i \rangle = i\omega \cdot \frac{Am}{A+1} \langle \psi_f | z | \psi_i \rangle
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\Gamma_{i\to f} = \frac{1}{2\pi\hbar} \left(\frac{Ze}{A+1} \right)^2 (e_f - e_i) \left| \langle \psi_f | z | \psi_i \rangle \right|^2 \delta(e_f - e_i - \hbar\omega)}
$$

（参考）これをフォトンのフラックス $c/(2\pi)^3$で割れば、光吸収断面積：

$$
\sigma_\gamma = \frac{4\pi^2}{\hbar c} \left(\frac{Ze}{A+1} \right)^2 (e_f - e_i) \left| \langle \psi_f | z | \psi_i \rangle \right|^2 \delta(e_f - e_i - \hbar\omega)
$$

（参考）$[\boldsymbol{p}^2, \boldsymbol{r}] = -2i\hbar\boldsymbol{p} \quad \longrightarrow \quad \langle\psi_f|p_z|\psi_i\rangle = i\mu\omega\langle\psi_f|z|\psi_i\rangle$

別の変換も可能

$$[H_0, \boldsymbol{p}] = [V(r), \boldsymbol{p}] = i\hbar\boldsymbol{\nabla}V$$

$$\begin{aligned}
\langle\psi_f|\boldsymbol{p}|\psi_i\rangle &= \frac{1}{e_f - e_i}\langle\psi_f|e_f\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}e_i|\psi_i\rangle \\
&= \frac{1}{e_f - e_i}\langle\psi_f|[H_0, \boldsymbol{p}]|\psi_i\rangle \\
&= \frac{i\hbar}{e_f - e_i}\langle\psi_f|\boldsymbol{\nabla}V|\psi_i\rangle
\end{aligned}$$

$$\wr$$

$$-\mu\ddot{\boldsymbol{r}}$$

加速度運動する荷電粒子はフォトンを放出する
（制動輻射：Bremsstrahlung）

E1 effective charge

$$\sigma_\gamma = \frac{4\pi^2}{\hbar c}\left(\frac{Ze}{A+1}\right)^2 (e_f - e_i)\left|\langle\psi_f|z|\psi_i\rangle\right|^2 \delta(e_f - e_i - \hbar\omega)$$

$$z = r\cos\theta = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\, rY_{10}(\theta)$$ を用いて書き直すと

$$\boxed{\sigma_\gamma = \frac{16\pi^3}{3\hbar c}\left(\frac{Ze}{A+1}\right)^2 (e_f - e_i)\left|\langle\psi_f|rY_{10}|\psi_i\rangle\right|^2 \delta(e_f - e_i - \hbar\omega)}$$

dipole operator: $\boxed{\hat{D}_\mu = e_{\rm E1}\cdot rY_{1\mu}(\theta,\phi)}$

E1 effective charge: $\boxed{e_{\rm E1} = \frac{Z}{A+1}e}$

E1 effective charge

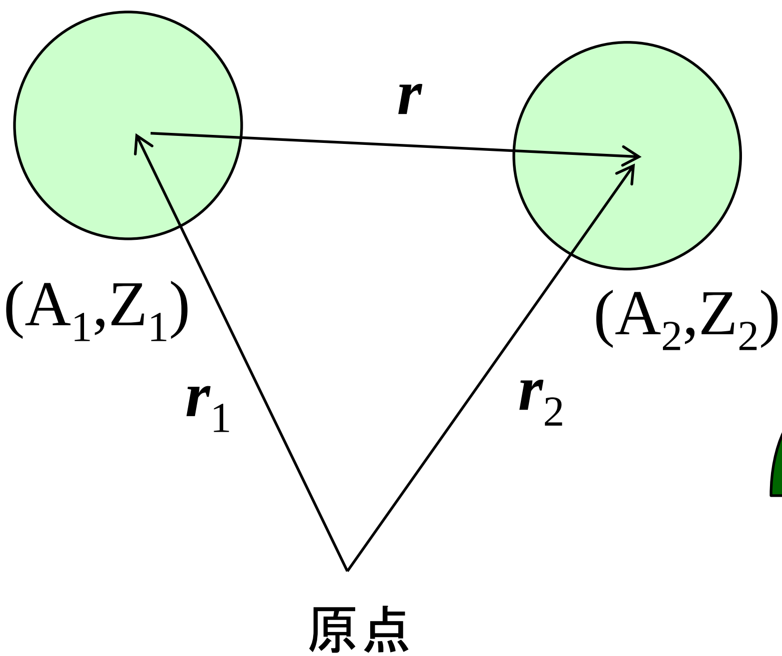
$$\sigma_\gamma = \frac{16\pi^3}{3\hbar c}\left(\frac{Ze}{A+1}\right)^2 (e_f - e_i)\left|\langle\psi_f|rY_{10}|\psi_i\rangle\right|^2 \delta(e_f - e_i - \hbar\omega)$$

dipole operator: $$\hat{D}_\mu = e_{\mathrm{E1}} \cdot rY_{1\mu}(\theta,\phi)$$

$$e_{\mathrm{E1}} = \frac{Z}{A+1}e$$

重心から測った電荷の分布 $\quad Z_1(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{R}) + Z_2(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{R})$

$$\boldsymbol{R} = \frac{A_1\boldsymbol{r}_1 + A_2\boldsymbol{r}_2}{A_1 + A_2}$$



$$\begin{aligned} &= \cdots \\ &= \frac{Z_1A_2 - Z_2A_1}{A_1 + A_2}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) \\ &= \frac{Z_1A_2 - Z_2A_1}{A_1 + A_2}\boldsymbol{r} \end{aligned}$$

$$e_{\mathrm{E1}} = \frac{Z_1A_2 - Z_2A_1}{A_1 + A_2}e$$

（2体の場合の一般的な式）

Wigner-Eckart の定理と換算遷移確率

$$\boxed{\sigma_\gamma = \frac{16\pi^3}{3\hbar c}\left(\frac{Ze}{A+1}\right)^2 E_\gamma \left|\langle\psi_f|rY_{10}|\psi_i\rangle\right|^2 \delta(e_f - e_i - E_\gamma)}$$

$$E_\gamma = e_f - e_i = \hbar\omega$$

実際には

$$\begin{cases} \psi_i(\boldsymbol{r}) = \psi_{lm}(\boldsymbol{r}) = \dfrac{u_l(r)}{r} Y_{lm}(\hat{\boldsymbol{r}}) \\ \psi_f(\boldsymbol{r}) = \psi_{l'm'}(\boldsymbol{r}) = \dfrac{u_{l'}(r)}{r} Y_{l'm'}(\hat{\boldsymbol{r}}) \end{cases}$$

角運動量の固有状態

$$\left|\langle\psi_f|rY_{10}|\psi_i\rangle\right|^2 \to \frac{1}{2l+1}\sum_{m,m'} |\langle\psi_{l'm'}|rY_{10}|\psi_{lm}\rangle|^2$$

Wigner-Eckart の定理

$$\begin{aligned} \langle\psi_{l'm'}|rY_{10}|\psi_{lm}\rangle &= (-1)^{l'-m'}\begin{pmatrix} l' & 1 & l \\ -m' & 0 & m \end{pmatrix}\langle\psi_{l'}||rY_1||\psi_l\rangle \\ &= \underbrace{\frac{(-1)^{l-m}}{\sqrt{3}}\langle l'm'l-m|10\rangle}_{m,\, m' \text{ の依存性は単純な Clebsch}}\underbrace{\langle\psi_{l'}||rY_1||\psi_l\rangle}_{m,\, m' \text{ に依存しない量}} \end{aligned}$$

Wigner-Eckart の定理と換算遷移確率

$$\boxed{\sigma_\gamma = \frac{16\pi^3}{3\hbar c}\left(\frac{Ze}{A+1}\right)^2 E_\gamma \left|\langle\psi_f|rY_{10}|\psi_i\rangle\right|^2 \delta(e_f - e_i - E_\gamma)}$$

$$E_\gamma = e_f - e_i = \hbar\omega$$

Wigner-Eckart の定理

$$\langle\psi_{l'm'}|rY_{10}|\psi_{lm}\rangle = \frac{(-1)^{l-m}}{\sqrt{3}}\langle l'm'l-m|10\rangle\langle\psi_{l'}||rY_1||\psi_l\rangle$$

$$\begin{aligned}
\left|\langle\psi_f|rY_{10}|\psi_i\rangle\right|^2 \to\ & \frac{1}{2l+1}\sum_{m,m'}|\langle\psi_{l'm'}|rY_{10}|\psi_{lm}\rangle|^2 \\
=\ & \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2l+1}|\langle\psi_{l'}||rY_1||\psi_l\rangle|^2 \\
& \times \sum_{m,m'}\langle l'm'l-m|10\rangle^2 \quad = 1 \\
=\ & \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2l+1}|\langle\psi_{l'}||rY_1||\psi_l\rangle|^2
\end{aligned}$$

Wigner-Eckart の定理と換算遷移確率

$$\boxed{\sigma_\gamma = \frac{16\pi^3}{3\hbar c}\left(\frac{Ze}{A+1}\right)^2 E_\gamma \left|\langle\psi_f|rY_{10}|\psi_i\rangle\right|^2 \delta(e_f - e_i - E_\gamma)}$$

$$E_\gamma = e_f - e_i = \hbar\omega$$

$$\left|\langle\psi_f|rY_{10}|\psi_i\rangle\right|^2 \rightarrow \frac{1}{2l+1}\sum_{m,m'}|\langle\psi_{l'm'}|rY_{10}|\psi_{lm}\rangle|^2$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2l+1}|\langle\psi_{l'}||rY_1||\psi_l\rangle|^2$$

$$\boxed{\begin{aligned}\sigma_\gamma &= \frac{16\pi^3}{9\hbar c}E_\gamma\cdot\frac{1}{2l+1}\left|\langle\psi_f||e_{\mathrm{E1}}rY_1||\psi_i\rangle\right|^2\delta(e_f - e_i - E_\gamma)\\ &= \frac{16\pi^3}{9\hbar c}E_\gamma\cdot\frac{dB(E1)}{dE_\gamma}\end{aligned}}$$

換算遷移確率

$$\boxed{\frac{dB(E1)}{dE_\gamma} = \frac{1}{2l+1}\left|\langle\psi_f||e_{\mathrm{E1}}rY_1||\psi_i\rangle\right|^2\delta(e_f - e_i - E_\gamma)}$$

（参考）

$$\sum_{m_i,m_f,\mu} \frac{1}{2l_i+1} |\langle\psi_{l_f m_f}|\hat{T}_{\lambda\mu}|\psi_{l_i m_i}\rangle|^2$$

$$= \sum_{m_i,m_f,\mu} \frac{1}{2l_i+1} \underbrace{\begin{pmatrix} l_f & \lambda & l_i \\ -m_f & \mu & m_i \end{pmatrix}^2}_{=\frac{1}{2l_i+1}} |\langle\psi_{l_f}||\hat{T}_{\lambda}||\psi_{l_i}\rangle|^2$$

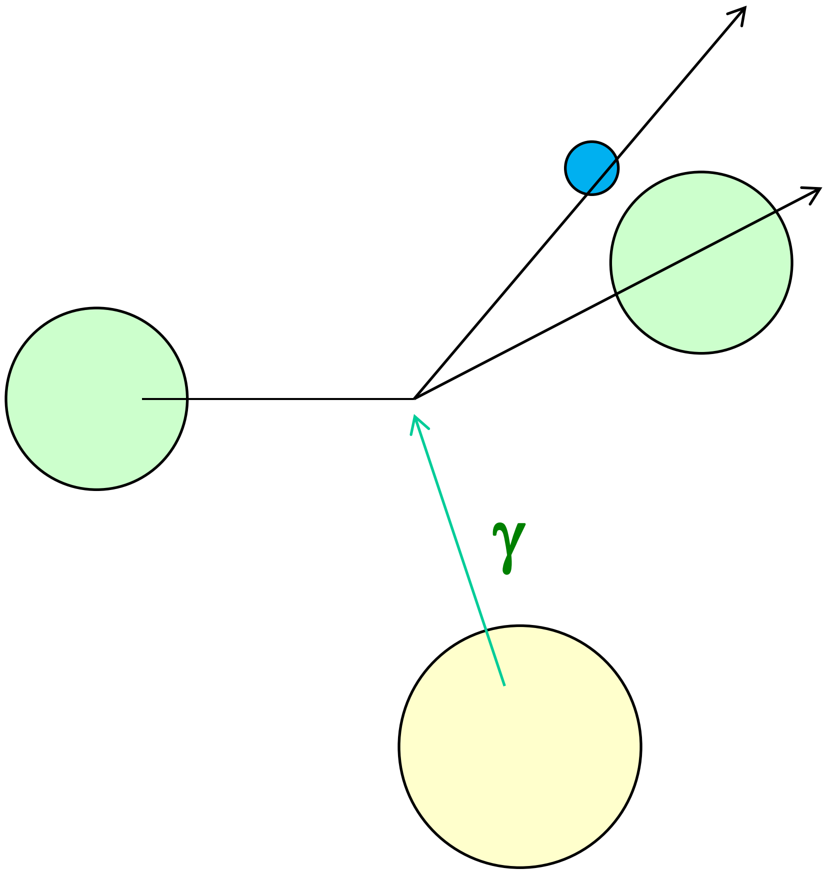
$$= \sum_{m_i} \frac{1}{(2l_i+1)^2} |\langle\psi_{l_f}||\hat{T}_{\lambda}||\psi_{l_i}\rangle|^2$$

$$= \frac{1}{2l_i+1} |\langle\psi_{l_f}||\hat{T}_{\lambda}||\psi_{l_i}\rangle|^2$$

クーロン励起の断面積

$$\sigma_\gamma = \frac{16\pi^3}{9\hbar c} E_\gamma \cdot \frac{dB(E1)}{dE_\gamma}$$

$$\frac{d\sigma_\gamma}{dE_\gamma} \sim \frac{16\pi^3}{9\hbar c} \cdot \frac{dB(E1)}{dE_\gamma}$$



実際の原子核反応では、
実フォトンではなく
ヴァーチャル・フォトンを吸収
する。

$$\frac{d\sigma}{dE_{\mathrm{ex}}} \sim \frac{16\pi^3}{9\hbar c} \cdot N_{\mathrm{E1}}(E_{\mathrm{ex}}) \cdot \frac{dB(E1)}{dE_{\mathrm{ex}}}$$

virtual photon の数

＊詳しくは、
C.A. Bertulani and P. Danielwicz,
"Introduction to Nuclear Reactions"

換算行列要素の計算

$$\psi_i(\boldsymbol{r}) = \psi_{lm}(\boldsymbol{r}) = \frac{u_l(r)}{r} Y_{lm}(\hat{\boldsymbol{r}})$$

$$\psi_f(\boldsymbol{r}) = \psi_{l'm'}(\boldsymbol{r}) = \frac{u_{l'}(r)}{r} Y_{l'm'}(\hat{\boldsymbol{r}})$$

(note)
$$\langle Y_{l'}||Y_\lambda||Y_l\rangle = (-1)^{l'} \frac{\hat{l}\hat{\lambda}\hat{l'}}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} l' & \lambda & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hat{l}\hat{\lambda}}{\sqrt{4\pi}} \langle l0\lambda 0|l'0\rangle$$

$$\hat{\lambda} \equiv \sqrt{2\lambda+1}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dB(E1)}{dE} &= \frac{1}{2l+1} \left|\langle\psi_f||e_{\mathrm{E1}} r Y_1||\psi_i\rangle\right|^2 \delta(e_f - e_i - E) \\ &= \frac{3}{4\pi} e_{\mathrm{E1}}^2 \langle l010|l'0\rangle^2 \left|\int_0^\infty r^2 dr\, r \cdot \frac{u_l(r)}{r} \cdot \frac{u_{l'}(r)}{r}\right|^2 \\ &\quad \times \delta(e_f - e_i - E) \end{aligned}}$$

(note) $s \longrightarrow p$ 遷移であれば $\langle l010|l'0\rangle = \langle 0010|10\rangle = 1$

換算行列要素の計算

(参考)スピンを考慮した場合

$$\psi_i(\boldsymbol{r}) = \psi_{jlm}(\boldsymbol{r}) = \frac{u_{jl}(r)}{r}\mathcal{Y}_{jlm}(\hat{\boldsymbol{r}})$$

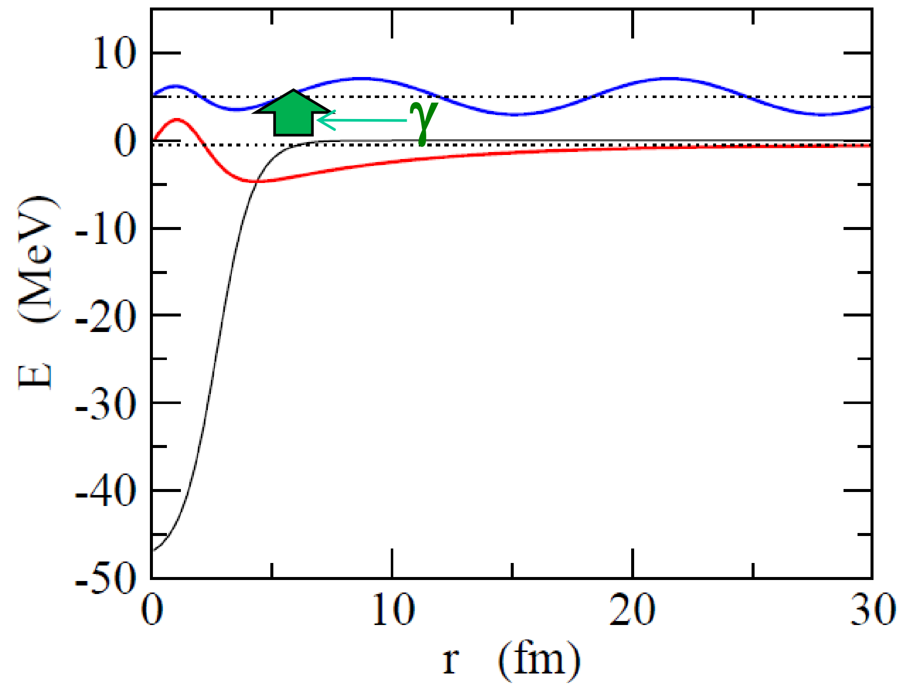
$$\psi_f(\boldsymbol{r}) = \psi_{j'l'm'}(\boldsymbol{r}) = \frac{u_{j'l'}(r)}{r}\mathcal{Y}_{j'l'm'}(\hat{\boldsymbol{r}})$$

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{dB(E1)}{dE} &= \frac{1}{2j+1}\left|\langle\psi_f||e_{\mathrm{E1}}rY_1||\psi_i\rangle\right|^2\delta(e_f-e_i-E)\\ &= \frac{3}{4\pi}e_{\mathrm{E1}}^2\langle j\,1/2\,10|j'1/2\rangle^2\left|\int_0^\infty r^2dr\,r\cdot\frac{u_{jl}(r)}{r}\cdot\frac{u_{j'l'}(r)}{r}\right|^2\\ &\quad\times\delta(e_f-e_i-E)\end{aligned}}$$

$$\langle\mathcal{Y}_{j'l'}||Y_\lambda||\mathcal{Y}_{jl}\rangle = (-1)^{1/2+j'}\cdot\frac{\hat{j}\,\hat{\lambda}\,\hat{j}'}{\sqrt{4\pi}}\begin{pmatrix} j' & \lambda & j \\ 1/2 & 0 & -1/2\end{pmatrix}\delta_{l+l'+\lambda,even}$$

連続状態への励起

$$\Psi_{lm}(\boldsymbol{r}) = \frac{u_l(r)}{r} Y_{lm}(\hat{\boldsymbol{r}})$$



境界条件(束縛状態):

$$\begin{aligned} u_l(r) &\sim r^{l+1} & (r \sim 0) \\ &\to e^{-\kappa r} & (r \to \infty) \end{aligned}$$

境界条件(連続状態):

$$\begin{aligned} u_{E,l}(r) &\sim r^{l+1} & (r \sim 0) \\ &\to \sqrt{\frac{2\mu}{\pi k \hbar^2}} \sin(kr - l\pi/2 + \delta_l) \end{aligned}$$

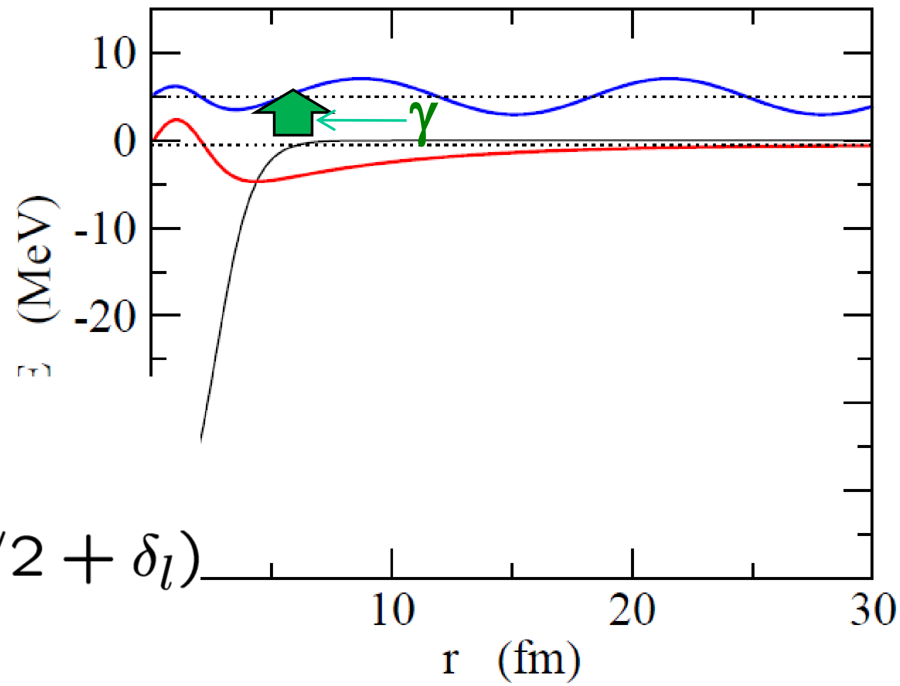
$k = \sqrt{\frac{2\mu E}{\hbar^2}}$, δ_l は位相のずれ (phase shift)
（後でまた）

とすると、

$$\boxed{\int_0^\infty dr\, u_{E,l}(r)\, u^*_{E',l}(r) = \delta(E - E')}$$

連続状態への励起

$$\Psi_{lm}(\boldsymbol{r}) = \frac{u_l(r)}{r} Y_{lm}(\hat{\boldsymbol{r}})$$



境界条件(連続状態):

$$\begin{aligned} u_{E,l}(r) &\sim r^{l+1} \qquad (r \sim 0) \\ &\to \sqrt{\frac{2\mu}{\pi k \hbar^2}} \sin(kr - l\pi/2 + \delta_l) \end{aligned}$$

とすると、

$$\boxed{\int_0^\infty dr\, u_{E,l}(r)\, u^*_{E',l}(r) = \delta(E - E')}$$

このような波動関数を ψ_f に使えば

$$\boxed{\frac{dB(E1)}{dE} = \frac{1}{2l+1} \left| \langle \psi_f || e_{\mathrm{E1}} r Y_1 || \psi_i \rangle \right|^2}$$

(参考)規格化因子のチェック

$$u_{E,l}(r) \;\to\; \sqrt{\frac{2\mu}{\pi k\hbar^2}}\,\sin(kr - l\pi/2 + \delta_l)$$

$u_{E,l}$ の従う方程式:

$$\left\{\begin{array}{lll} \left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} + V(r) - E\right] u_{E,l}(r) & = & 0 \qquad (1) \\ \left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} + V(r) - E'\right] u^*_{E',l}(r) & = & 0 \qquad (2) \end{array}\right.$$

$$(1) \times u^*_{E',l} - (2) \times u_{E,l}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\underbrace{\left[u^*_{E',l}\frac{d^2 u_{E,l}}{dr^2} - u_{E,l}\frac{d^2 u^*_{E',l}}{dr^2}\right]}_{\frac{d}{dr}\left[u^*_{E',l}\frac{du_{E,l}}{dr} - u_{E,l}\frac{du^*_{E',l}}{dr}\right]} + (-E + E')u_{E,l}\,u^*_{E',l} = 0$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dr\, u_{E,l}(r)\, u^*_{E',l}(r) &= -\frac{\hbar^2}{2\mu}\cdot\frac{1}{E-E'}\cdot\int_0^\infty dr\,\frac{d}{dr}\left[u^*_{E',l}\frac{du_{E,l}}{dr} - u_{E,l}\frac{du^*_{E',l}}{dr}\right] \\ &= -\frac{\hbar^2}{2\mu}\cdot\frac{1}{E-E'}\cdot\left[u^*_{E',l}\frac{du_{E,l}}{dr} - u_{E,l}\frac{du^*_{E',l}}{dr}\right]_{r\to\infty} \end{aligned}$$

(波動関数は原点で正則)

(参考)規格化因子のチェック

$$u_{E,l}(r) \;\to\; \sqrt{\frac{2\mu}{\pi k\hbar^2}}\,\sin(kr - l\pi/2 + \delta_l)$$

$$\int_0^\infty dr\, u_{E,l}(r)\, u^*_{E',l}(r) = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\cdot\frac{1}{E-E'}\cdot\left[u^*_{E',l}\frac{du_{E,l}}{dr} - u_{E,l}\frac{du^*_{E',l}}{dr}\right]_{r\to\infty}$$

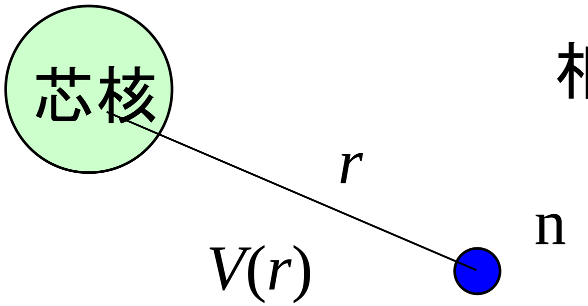
簡単のため、l =0, δ_l = 0 の場合に、この式が $\delta(E\text{-}E')$ になっているか確かめる:

$$\begin{aligned}
\text{rhs} &= -\frac{1}{\pi\sqrt{kk'}}\cdot\frac{1}{E-E'}\cdot\left[k\sin k'r\cos kr - k'\sin kr\cos k'r\right] \\
&= \cdots \\
&= -\frac{1}{2\pi\sqrt{kk'}}\cdot\frac{1}{E-E'}\cdot\left[(k-k')\sin((k+k')r) + (k+k')\sin((k'-k)r)\right] \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{kk'}}\cdot\frac{(k-k')(k+k')}{E-E'}\cdot\left[\frac{\sin((k+k')r)}{(k+k')\pi} - \frac{\sin((k'-k)r)}{(k'-k)\pi}\right]
\end{aligned}$$

(note) $$\begin{aligned}
\lim_{r\to\infty}\frac{\sin((k'-k)r)}{(k'-k)\pi} &= \delta(k'-k) \\
&= \frac{dE}{dk}\delta(E'-E) = \frac{k\hbar^2}{\mu}\delta(E'-E)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2\sqrt{kk'}}\cdot\frac{\frac{2\mu}{\hbar^2}\cdot\frac{\hbar^2}{2\mu}(k^2-k'^2)}{E-E'}\cdot\frac{k\hbar^2}{\mu}\left[\cancel{\delta(E+E')} - \delta(E-E')\right] \\
&= \delta(E-E')
\end{aligned}$$

1中性子ハロー核の電磁双極子遷移(数値計算)



相対運動のハミルトニアン

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V(r)$$

$$\boxed{\Psi_{lm}(\boldsymbol{r}) = \frac{u_l(r)}{r} Y_{lm}(\hat{\boldsymbol{r}})}$$

$$\boxed{\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} + V(r) - \epsilon_l\right] u_l(r) = 0}$$

境界条件(束縛状態):

$$\begin{aligned} u_{l_b}(r) &\sim r^{l_b+1} \qquad (r \sim 0) \\ &\to e^{-\kappa r} \qquad (r \to \infty) \end{aligned}$$

境界条件(連続状態):

$$\begin{aligned} u_{E,l_c}(r) &\sim r^{l_c+1} \qquad (r \sim 0) \\ &\to \sqrt{\frac{2\mu}{\pi k \hbar^2}} \sin(kr - l_c\pi/2 + \delta_{l_c}) \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{dB(E1)}{dE} = \frac{3}{4\pi} e_{\mathrm{E1}}^2 \langle l_b 010 | l_c 0\rangle^2 \left| \int_0^\infty r^2 dr\, r \cdot \frac{u_{l_b}(r)}{r} \cdot \frac{u_{E,l_c}(r)}{r} \right|^2}$$

E1 電磁遷移強度分布の簡単な見積もり（解析的な模型）

l=0 状態から l=1 状態への遷移：

初期状態の波動関数： $\Psi_i(\boldsymbol{r}) = \sqrt{2\kappa}\,\frac{e^{-\kappa r}}{r} Y_{00}(\hat{\boldsymbol{r}})$ $\qquad \kappa = \sqrt{\frac{2\mu|E_b|}{\hbar^2}}$

終状態の波動関数： $\Psi_f(\boldsymbol{r}) = \sqrt{\frac{2\mu k}{\pi\hbar^2}}\, j_1(kr) Y_{1m}(\hat{\boldsymbol{r}})$ $\qquad$ $j_1(kr)$ は球ベッセル関数

$$k = \sqrt{\frac{2\mu E_c}{\hbar^2}}$$

とすると、

$$\frac{dB(E1)}{dE} = \frac{3}{4\pi} e_{\rm E1}^2 \left| \int_0^\infty r^2 dr\, r \cdot \frac{\sqrt{2\kappa} e^{-\kappa r}}{r} \cdot \sqrt{\frac{2\mu k}{\pi\hbar^2}}\, j_1(kr) \right|^2$$

積分は解析的に実行可能

$$\boxed{\frac{dB(E1)}{dE} = \frac{3\hbar^2}{\pi^2\mu} e_{\rm E1}^2 \frac{\sqrt{|E_b|}\, E_c^{3/2}}{(|E_b| + E_c)^4}}$$

Refs.（一般的な $l_{\rm i}$, $l_{\rm f}$ の場合の式も）

• M.A. Nagarajan, S.M. Lenzi, A. Vitturi, Eur. Phys. J. A24(‘05)63
• S. Typel and G. Baur, NPA759(‘05)247

$$\boxed{\frac{dB(E1)}{dE} = \frac{3\hbar^2}{\pi^2\mu} e_{E1}^2 \frac{\sqrt{|E_b|}\, E_c^{3/2}}{(|E_b|+E_c)^4}}$$

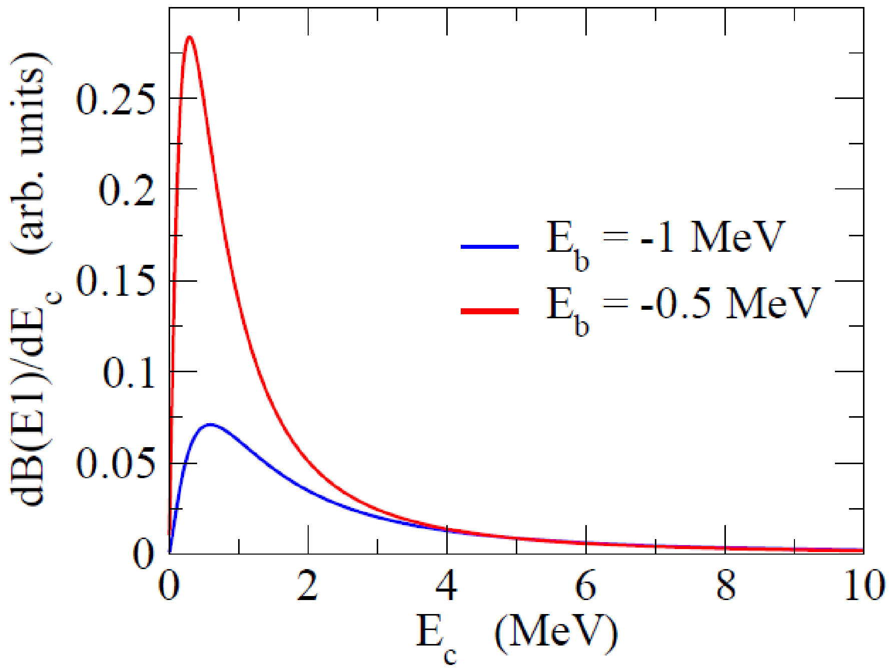
ピークの位置: $E_c = \frac{3}{5}|E_b|$

$$\left(E_x = E_c - E_b = \frac{8}{5}|E_b|\right)$$

ピークの高さ: $\propto 1/|E_b|^2$

全遷移確率:

$$B(E1) = S_0 = \frac{3\hbar^2 e_{E1}^2}{16\pi^2\mu|E_b|}$$



➢東縛状態のエネルギーが小さくなると鋭くて高いピーク

➢東縛状態のエネルギーが小さくなるとピークのエネルギーが小さくなる

E_{peak} = 0.28 MeV (E_b=-0.5 MeV)

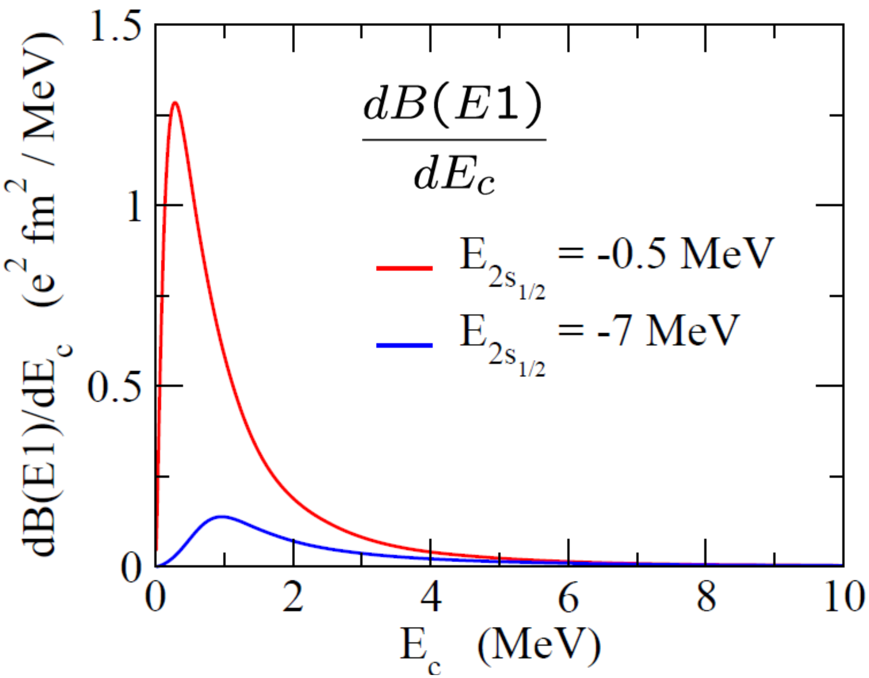
cf. $\frac{3}{5}|E_b| = 0.3$ MeV

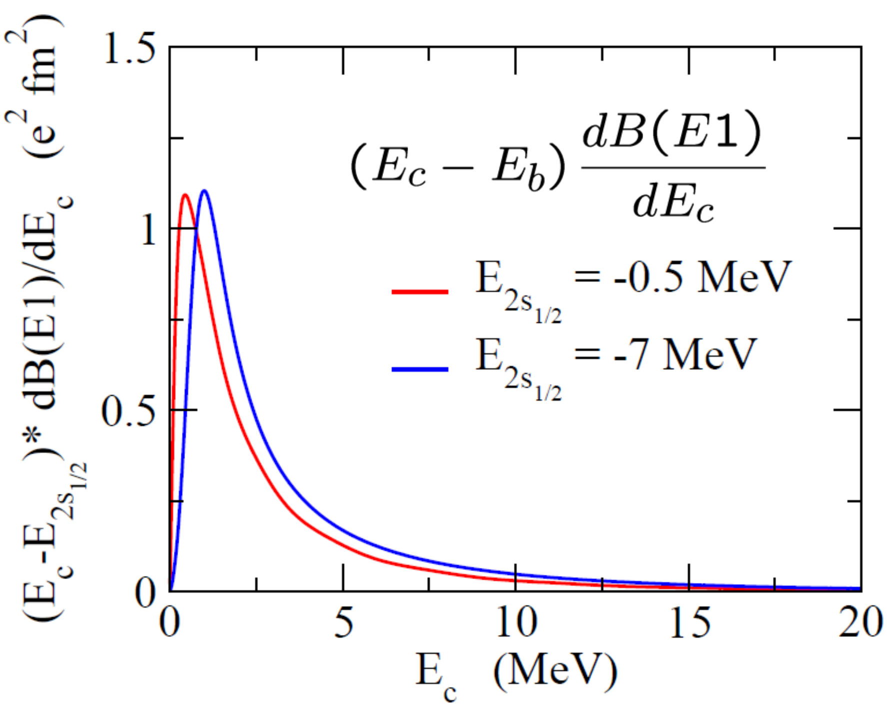
Woods-Saxon ポテンシャルを用いた実際の数値計算

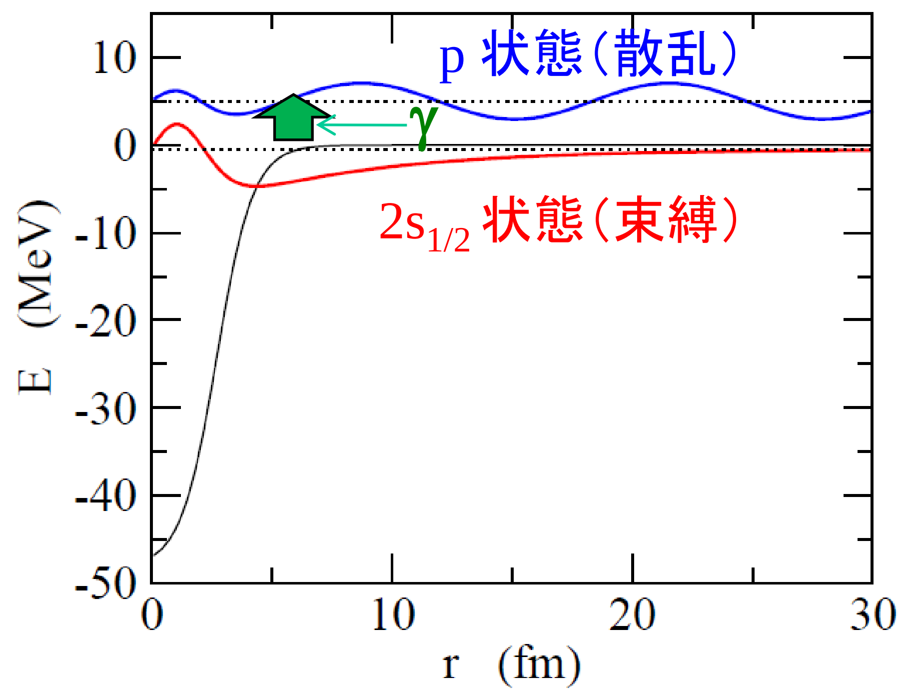
$^{11}\mathrm{Be} = {}^{10}\mathrm{Be} + n$

$2s_{1/2}$ 状態（束縛）から p 状態 ($l = 1$) への遷移強度

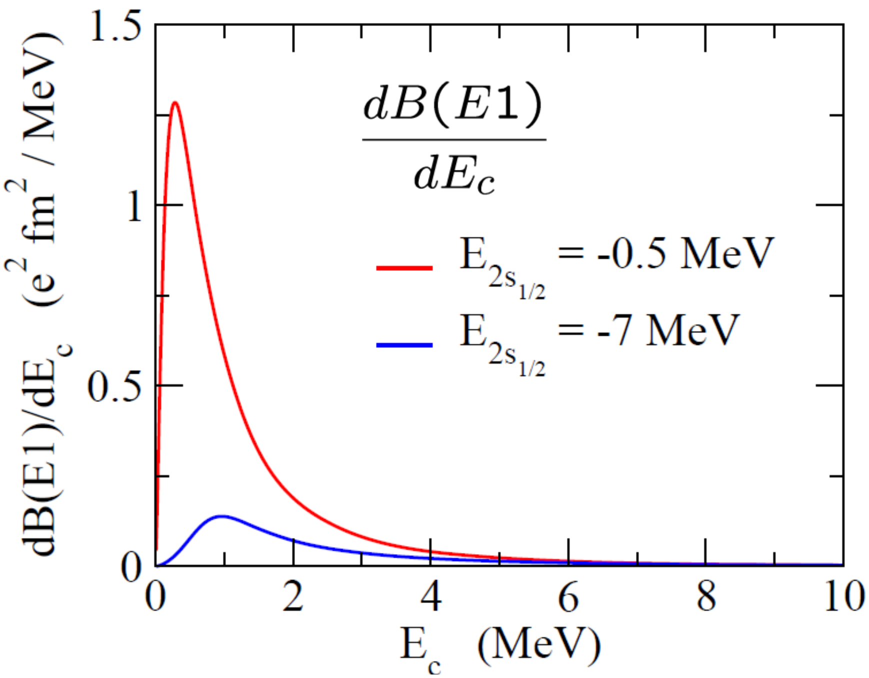
弱く束縛されている場合と強く束縛されている場合の比較







$^{11}Be = {}^{10}Be + n$ $2s_{1/2} \longrightarrow$ p 状態



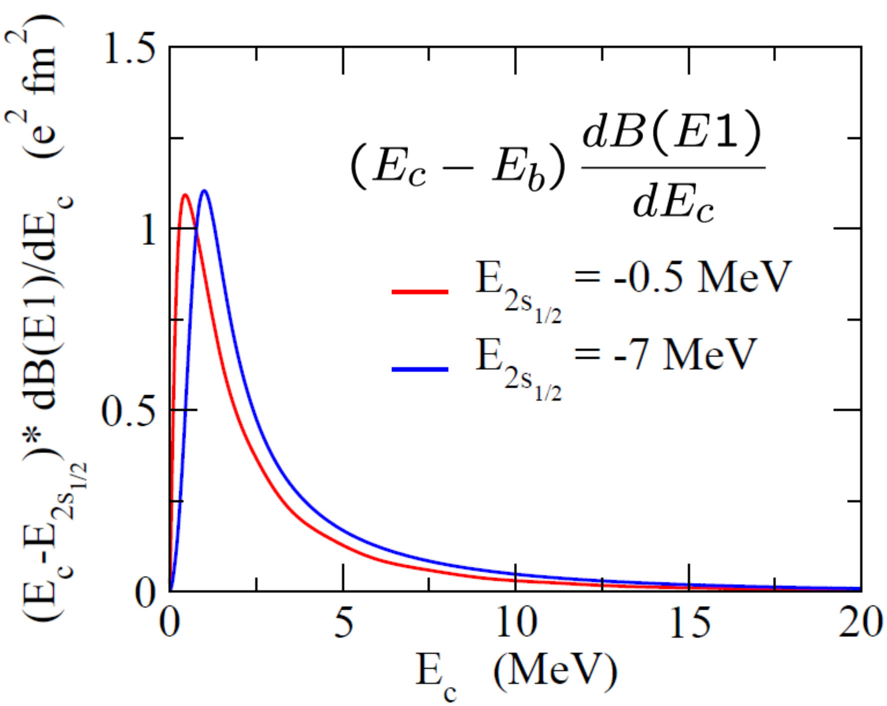
➢東縛状態のエネルギーが小さくなると鋭くて高いピーク

$$S_0 = \int_0^\infty dE_c \frac{dB(E1)}{dE_c}$$

=1.53 e^2fm^2 (E_b = -0.5 MeV)
0.32 e^2fm^2 (E_b = -7 MeV)

➢東縛状態のエネルギーが小さくなるとピークのエネルギーが小さくなる

E_{peak} = 0.28 MeV (E_b=-0.5 MeV)
0.96 MeV (E_b = -7MeV)

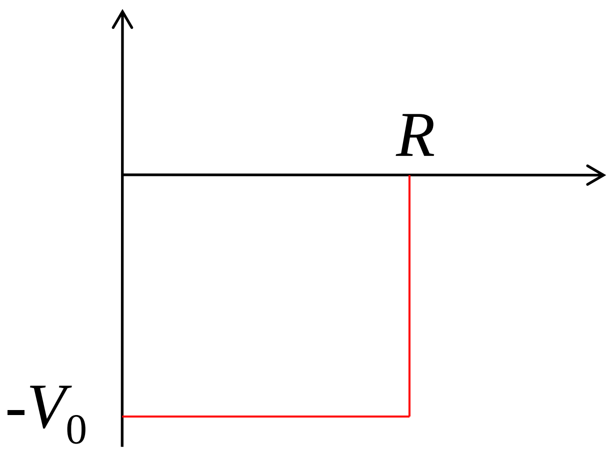


➢遷移強度に $(E_c - E_b)$ を掛けたものはあまり E_b に依らない

$$S_1 = \int_0^\infty dE_c (E_c - E_b) \frac{dB(E1)}{dE_c}$$

=2.79 e^2fm^2 MeV (E_b = -0.5 MeV)
3.18 e^2fm^2 MeV (E_b = -7 MeV)

演習問題 2



井戸型ポテンシャルの波動関数
(l = 1散乱状態) は

$$
\begin{aligned}
u(r) &= A\tilde{j}_1(\tilde{k}r) \qquad (r < R) \\
&= \sqrt{\frac{2\mu}{\pi k \hbar^2}}\left[\tilde{j}_1(kr)\cos\delta \right. \\
&\quad \left. -\tilde{n}_1(kr)\sin\delta\right] \qquad (r > R)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{k} &= \sqrt{2m(\epsilon + V_0)/\hbar^2} \\
k &= \sqrt{2m\epsilon/\hbar^2}
\end{aligned}
$$

$$\tilde{j}_1(x) = xj_1(x) = (\sin x - x\cos x)/x$$

$$\tilde{n}_1(x) = xn_1(x) = -(\cos x - x\sin x)/x$$

係数 A, 位相のずれ δ は $r = R$ における波動関数の接続より求まる。

R = 2.5 fm, V_0 = 50 MeV としたときの、^{11}Be における 2s 状態から p 状態へのE1電磁遷移の強度を数値的に求めよ。

和則（わそく）: Sum Rule

$$\begin{cases} S_0 = \int_0^\infty dE_c \dfrac{dB(E1)}{dE_c} \\ S_1 = \int_0^\infty dE_c\,(E_c - E_b) \dfrac{dB(E1)}{dE_c} \end{cases}$$

は簡単な式で表わすことができる。

和則(わそく):Sum Rule

まず $S_0 = \int_0^\infty dE_c \frac{dB(E1)}{dE_c}$ から:

$$\boxed{\text{基本的な考え方:}\quad \begin{aligned}\sum_f |\langle f|\hat{F}|\psi_i\rangle|^2 &= \sum_f \langle\psi_i|F|f\rangle\langle f|\hat{F}|\psi_i\rangle \\ &= \langle\psi_i|\hat{F}^2|\psi_i\rangle\end{aligned}}$$

$\uparrow$

(完全系) $\sum_f |f\rangle\langle f| = 1$

和則（わそく）: Sum Rule

$$\boxed{\begin{aligned}\sum_f |\langle f|\hat{F}|\psi_i\rangle|^2 &= \sum_f \langle\psi_i|F|f\rangle\langle f|\hat{F}|\psi_i\rangle \\ &= \langle\psi_i|\hat{F}^2|\psi_i\rangle\end{aligned}}$$

$$\begin{aligned}S_0 = \int_0^\infty dE_c \frac{dB(E1)}{dE_c} &\sim \sum_f \frac{1}{2l_i+1}|\langle\psi_f||\hat{D}||\psi_i\rangle|^2 \\ &= \sum_{n_f,l_f}\sum_{m_f,m_i,\mu}\frac{1}{2l_i+1}\left|\langle\psi_{n_f l_f m_f}|\hat{D}_\mu|\psi_{l_i m_i}\rangle\right|^2\end{aligned}$$

$$\hat{D}_\mu = e_{\mathrm{E1}} r Y_{1\mu}(\hat{\boldsymbol{r}})$$

$$= \sum_{m_i,\mu}\frac{1}{2l_i+1}\langle\psi_{l_i m_i}|\hat{D}^\dagger_\mu \hat{D}_\mu|\psi_{l_i m_i}\rangle$$

$$Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta,\ \ Y_{1\pm1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{\pm i\phi}$$

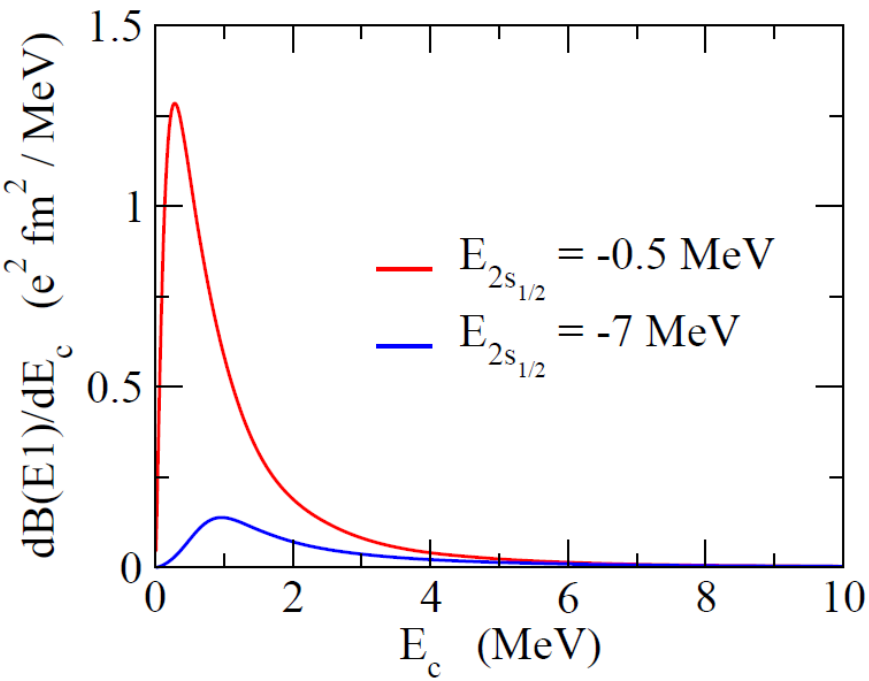
$$\longrightarrow \sum_\mu \hat{D}^\dagger_\mu \hat{D}_\mu = \frac{3}{4\pi}e^2_{\mathrm{E1}} r^2$$

$$\boxed{= \frac{3}{4\pi}e^2_{\mathrm{E1}}\langle r^2\rangle_i}$$

和則(わそく): Sum Rule

$$S_0 = \int_0^\infty dE_c \frac{dB(E1)}{dE_c} = \frac{3}{4\pi} e_{E1}^2 \langle r^2 \rangle_i$$

全E1遷移確率は r^2 の(基底状態)期待値に比例



$$S_0 = \int_0^\infty dE_c \frac{dB(E1)}{dE_c}$$

=1.53 e^2fm^2 (E_b = -0.5 MeV)
0.32 e^2fm^2 (E_b = -7 MeV)

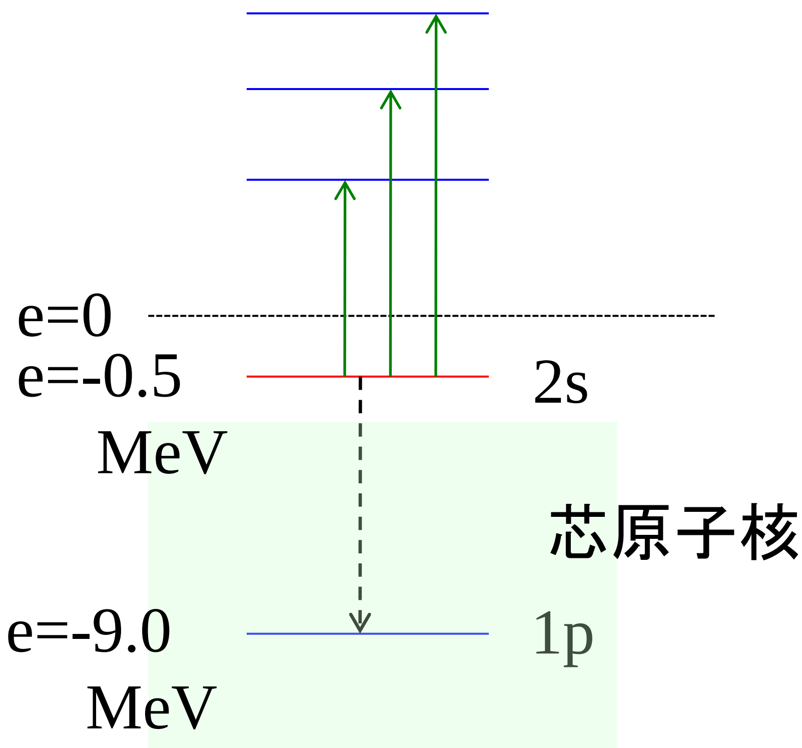
$$\frac{3}{4\pi} e_{E1}^2 \langle r^2 \rangle_i$$

=1.62 e^2fm^2 (E_b = -0.5 MeV)
0.41 e^2fm^2 (E_b = -7 MeV)

＊ほぼ一致。
少しずれているのはパウリ禁止遷移 (2sから1pへの遷移) のため

(補足)パウリ禁止遷移

$$S_0 = \int_0^\infty dE_c \frac{dB(E1)}{dE_c} = \frac{3}{4\pi} e_{E1}^2 \langle r^2 \rangle_i$$



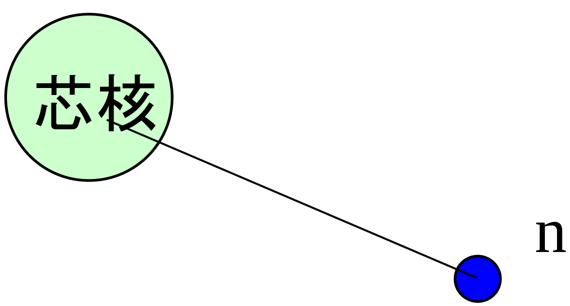
$$S_0 = \int_0^\infty dE_c \frac{dB(E1)}{dE_c}$$

$=1.5275\ e^2\mathrm{fm}^2$

B(E1: 2s → 1p) = 0.0967 $e^2\mathrm{fm}^2$

$$\frac{3}{4\pi} e_{E1}^2 \langle r^2 \rangle_i$$

$=1.6244\ e^2\mathrm{fm}^2$

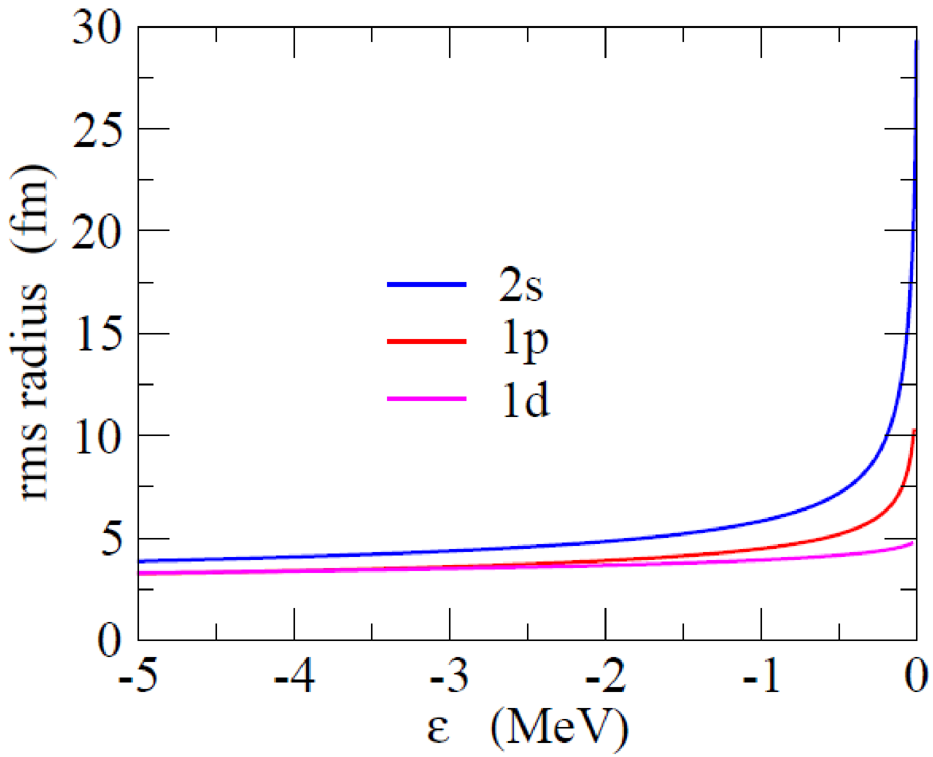


$$\underbrace{1.5275}_{\text{physical transition}} + \underbrace{0.0967}_{\text{forbidden transition}} = 1.6242$$

和則（わそく）: Sum Rule

$$S_0 = \int_0^\infty dE_c \frac{dB(E1)}{dE_c} = \frac{3}{4\pi} e_{\mathrm{E1}}^2 \langle r^2 \rangle_i$$

全E1遷移確率は r^2 の（基底状態）期待値に比例



初期状態が l=0 または l=1だと
束縛が弱くなるほど半径は増大

⇩

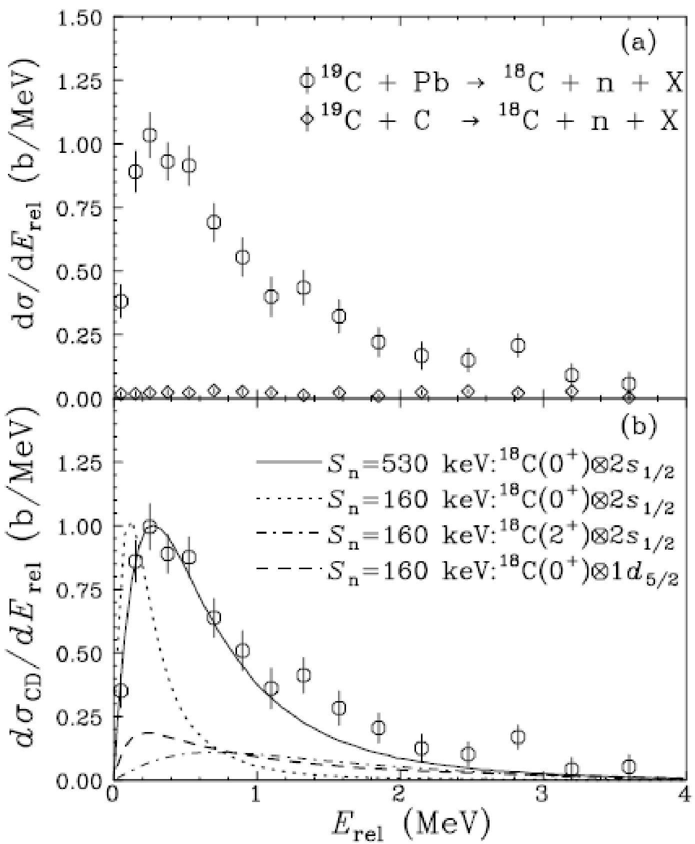
全E1遷移確率も増大

⇧

逆に大きな全E1遷移確率
（またはクーロン分解断面積）
が観測されたら l=0 or l=1 が示唆
される → ハロー構造

1n ハロー核の他の候補

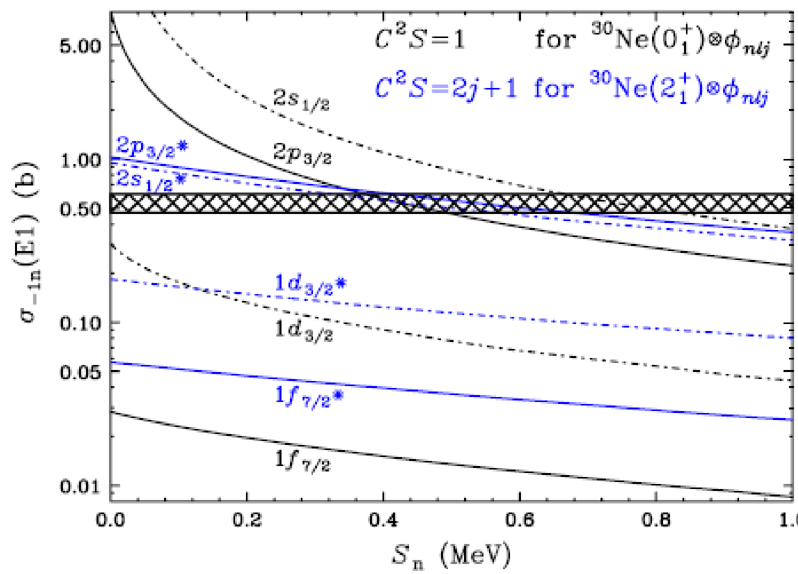
^{19}C: S_n = 0.58(9) MeV



^{19}C のクーロン分解反応

T. Nakamura et al., PRL83(‘99)1112

^{31}Ne: S_n = 0.29 +/- 1.64 MeV



大きなクーロン分解反応の断面積

T. Nakamura et al.,
PRL103(‘09)262501

和則(わそく):Sum Rule

次に $S_1 = \int_0^\infty dE_c\,(E_c - E_b)\frac{dB(E1)}{dE_c}$ (Energy Weighted Sum Rule)

基本的な考え方:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\langle\psi_i|[\hat{F},[H,\hat{F}]]|\psi_i\rangle &= \frac{1}{2}\langle\psi_i|\hat{F}(H\hat{F}-\hat{F}H)-(H\hat{F}-\hat{F}H)\hat{F}|\psi_i\rangle \\
&= \langle\psi_i|\hat{F}H\hat{F}-E_i\hat{F}^2|\psi_i\rangle \\
&= \sum_f E_f\,|\langle\psi_i|\hat{F}|f\rangle|^2 - E_i\langle\psi_i|\hat{F}^2|\psi_i\rangle \\
&= \sum_f (E_f - E_i)|\langle f|\hat{F}|\psi_i\rangle|^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle\psi_i|\hat{F}H\hat{F}|\psi_i\rangle &= \sum_f \langle\psi_i|\hat{F}H|f\rangle\langle f|\hat{F}|\psi_i\rangle \\
&= \sum_f E_f\langle\psi_i|\hat{F}|f\rangle\langle f|\hat{F}|\psi_i\rangle
\end{aligned}
$$

(完全系) $\sum_f |f\rangle\langle f| = 1$

和則（わそく）: Sum Rule

$$\boxed{\sum_f (E_f - E_i)|\langle f|\hat{F}|\psi_i\rangle|^2 = \frac{1}{2}\langle\psi_i|[\hat{F},[H,\hat{F}]]|\psi_i\rangle}$$

$$\begin{aligned}
S_1 &= \int_0^\infty dE_c\,(E_c - E_b)\frac{dB(E1)}{dE_c} \sim \sum_f \frac{E_f - E_i}{2l_i+1}\,|\langle\psi_f||\hat{D}||\psi_i\rangle|^2 \\
&= \sum_{n_f,l_f}\sum_{m_f,m_i}\frac{3(E_f - E_i)}{2l_i+1}\left|\langle\psi_{n_f l_f m_f}|\hat{D}_0|\psi_i\rangle\right|^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{D}_0 &= e_{\mathrm{E1}} r Y_{10}(\hat{\boldsymbol{r}}) \\
&= e_{\mathrm{E1}}\sqrt{\frac{3}{4\pi}}z
\end{aligned}$$

$$= \frac{3}{2l_i+1}\sum_{m_i}\frac{1}{2}\left\langle\psi_i\left|\left[\hat{D}_0,[H_0,\hat{D}_0]\right]\right|\psi_i\right\rangle$$

$$\begin{aligned}
[H_0,\hat{D}_0] &= \left[\frac{\boldsymbol{p}^2}{2\mu}+V(r),\hat{D}_0\right] = \left[\frac{p_z^2}{2\mu},\hat{D}_0\right] \\
&= \frac{1}{2\mu}\cdot e_{\mathrm{E1}}\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cdot\left[p_z^2,z\right] = \frac{1}{2\mu}\cdot e_{\mathrm{E1}}\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cdot(-i\hbar p_z)
\end{aligned}$$

和則（わそく）: Sum Rule

$$\boxed{\sum_f (E_f - E_i)|\langle f|\hat{F}|\psi_i\rangle|^2 = \frac{1}{2}\langle\psi_i|[\hat{F},[H,\hat{F}]]|\psi_i\rangle}$$

$$S_1 = \frac{3}{2l_i+1}\sum_{m_i}\frac{1}{2}\left\langle\psi_i\middle|\left[\hat{D}_0,[H_0,\hat{D}_0]\right]\middle|\psi_i\right\rangle$$

$$\begin{aligned}\hat{D}_0 &= e_{\mathrm{E1}} r Y_{10}(\hat{\boldsymbol{r}}) \\ &= e_{\mathrm{E1}}\sqrt{\frac{3}{4\pi}}z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[H_0,\hat{D}_0] &= \left[\frac{\boldsymbol{p}^2}{2\mu}+V(r),\hat{D}_0\right] = \left[\frac{p_z^2}{2\mu},\hat{D}_0\right] \\ &= \frac{1}{2\mu}\cdot e_{\mathrm{E1}}\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cdot\left[p_z^2,z\right] = \frac{1}{2\mu}\cdot e_{\mathrm{E1}}\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cdot(-i\hbar p_z)\end{aligned}$$

$$\left[\hat{D}_0,[H_0,\hat{D}_0]\right] = \frac{-i\hbar}{\mu}\cdot\left(e_{\mathrm{E1}}\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\right)^2[z,p_z] = \frac{\hbar^2}{\mu}\cdot\left(e_{\mathrm{E1}}\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\right)^2$$

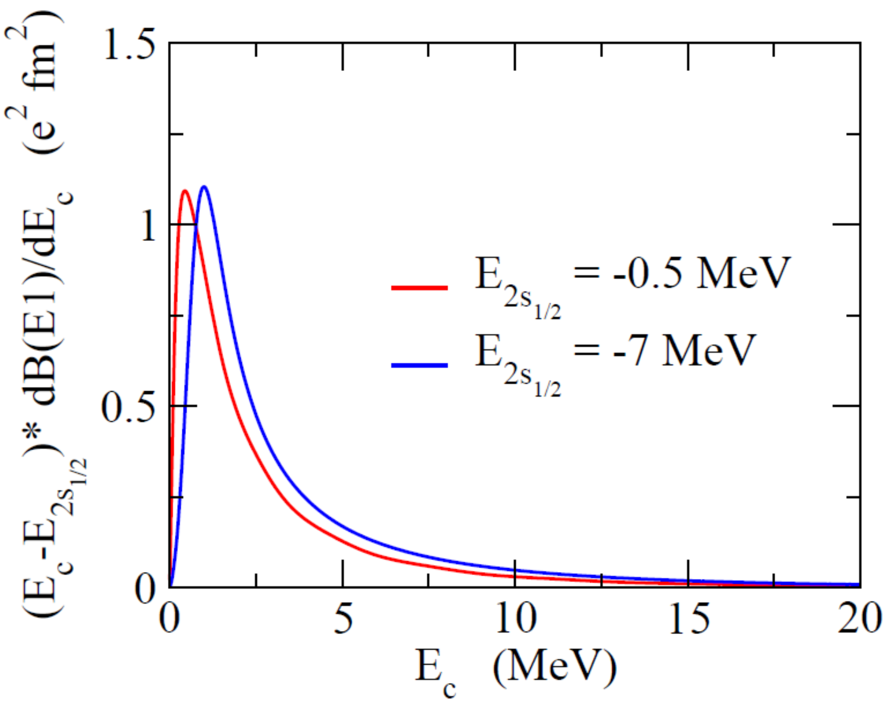
$$\boxed{S_1 = \frac{9}{8\pi}e_{\mathrm{E1}}^2\frac{\hbar^2}{\mu}}$$

モデル（ポテンシャル、束縛エネルギー、角運動量など）に依らない定数

[TRK (Thomas-Reiche-Kuhn) Sum Rule]

和則（わそく）: Sum Rule

$$S_1 = \int_0^\infty dE_c\,(E_c - E_b)\frac{dB(E1)}{dE_c} = \frac{9}{8\pi}e_{\rm E1}^2\frac{\hbar^2}{\mu}$$



$$S_1 = \int_0^\infty dE_c\,(E_c - E_b)\frac{dB(E1)}{dE_c}$$

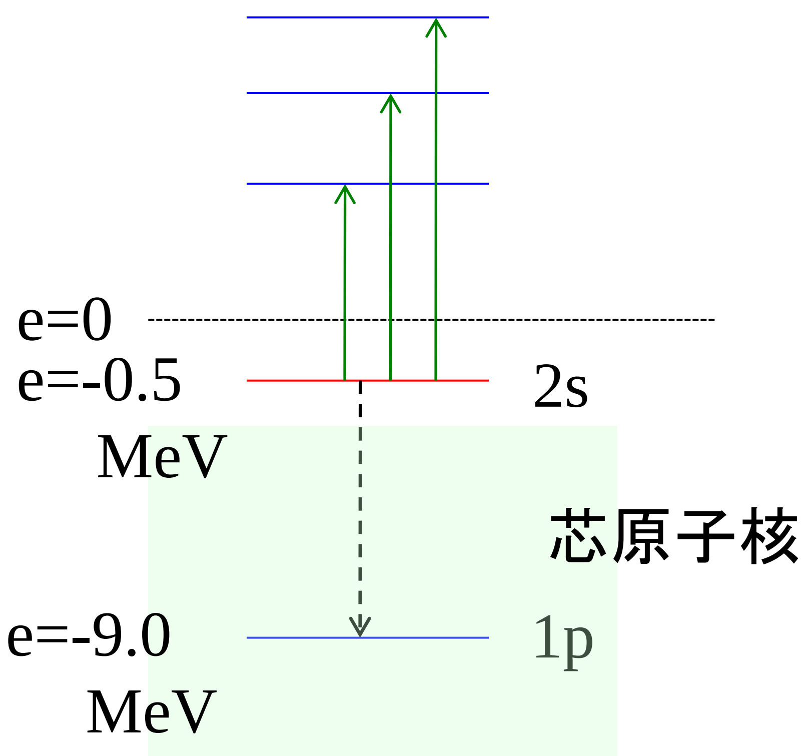
=2.79 e^{2}fm^2 MeV ($E_{\rm b}$ = -0.5 MeV)
3.18e^{2}fm^2 MeV ($E_{\rm b}$ = -7 MeV)

$$\frac{9}{8\pi}e_{\rm E1}^2\frac{\hbar^2}{\mu}$$ =1.97 e^{2}fm^2 MeV

＊ほぼ一致。
少しずれているのはパウリ禁止遷移（2sから1pへの遷移）のため

(補足)パウリ禁止遷移

$$S_1 = \int_0^\infty dE_c\,(E_c - E_b)\frac{dB(E1)}{dE_c} = \frac{9}{8\pi}\,e_{\mathrm{E1}}^2\,\frac{\hbar^2}{\mu}$$

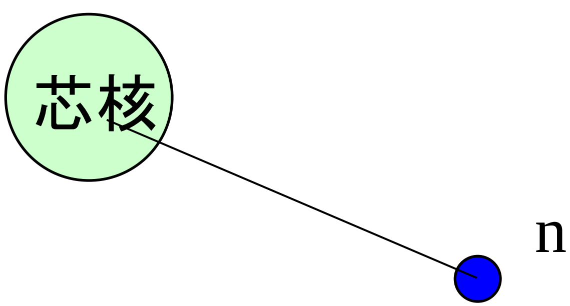


$$S_1 = \int_0^\infty dE_c\,(E_c - E_b)\frac{dB(E1)}{dE_c}$$

=2.7891 $e^2 fm^2$ MeV

$(E_{1p} - E_{2s})$ B(E1: 2s→ 1p)
= -0.8237 $e^2 fm^2$ MeV

$$\frac{9}{8\pi}\,e_{\mathrm{E1}}^2\,\frac{\hbar^2}{\mu}$$ =1.9657 $e^2 fm^2$ MeV



$$\underbrace{2.7891}_{\text{physical transition}} - \underbrace{0.8237}_{\text{forbidden transition}} = 1.9654$$

(補足)TRK和則:

一般的には
$$\boxed{S_1 = \sum_\nu (E_\nu - E_0)|\langle\nu|z|0\rangle|^2 = \frac{\hbar^2 N_{sys}}{2m}}$$

原子核(安定中重核)の光吸収断面積に適用すると

$$\sigma_{\mathrm{abs}}(E_\gamma) = \frac{4\pi^2 e^2}{\hbar c}(E_f - E_i)|\langle\phi_f|\tilde{z}|\phi_i\rangle|^2\,\delta(E_\gamma - E_f + E_i)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{z} = \sum_p (z_p - Z_{cm}) &= \sum_p \left\{ z_p - \frac{1}{A}\left(\sum_{p'} z_{p'} + \sum_n z_n\right)\right\} \\
&= \frac{NZ}{A}\left(\frac{1}{Z}\sum_p z_p - \frac{1}{N}\sum_n z_n\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned}
\int \sigma_{\mathrm{abs}}(E_\gamma)dE_\gamma &= \frac{4\pi^2 e^2}{\hbar c}\cdot\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{NZ}{A} \\
&= \frac{2\pi^2 e^2 \hbar}{mc}\cdot\frac{NZ}{A}
\end{aligned}}$$

巨大双極子共鳴:Giant Dipole Resonance (GDR)

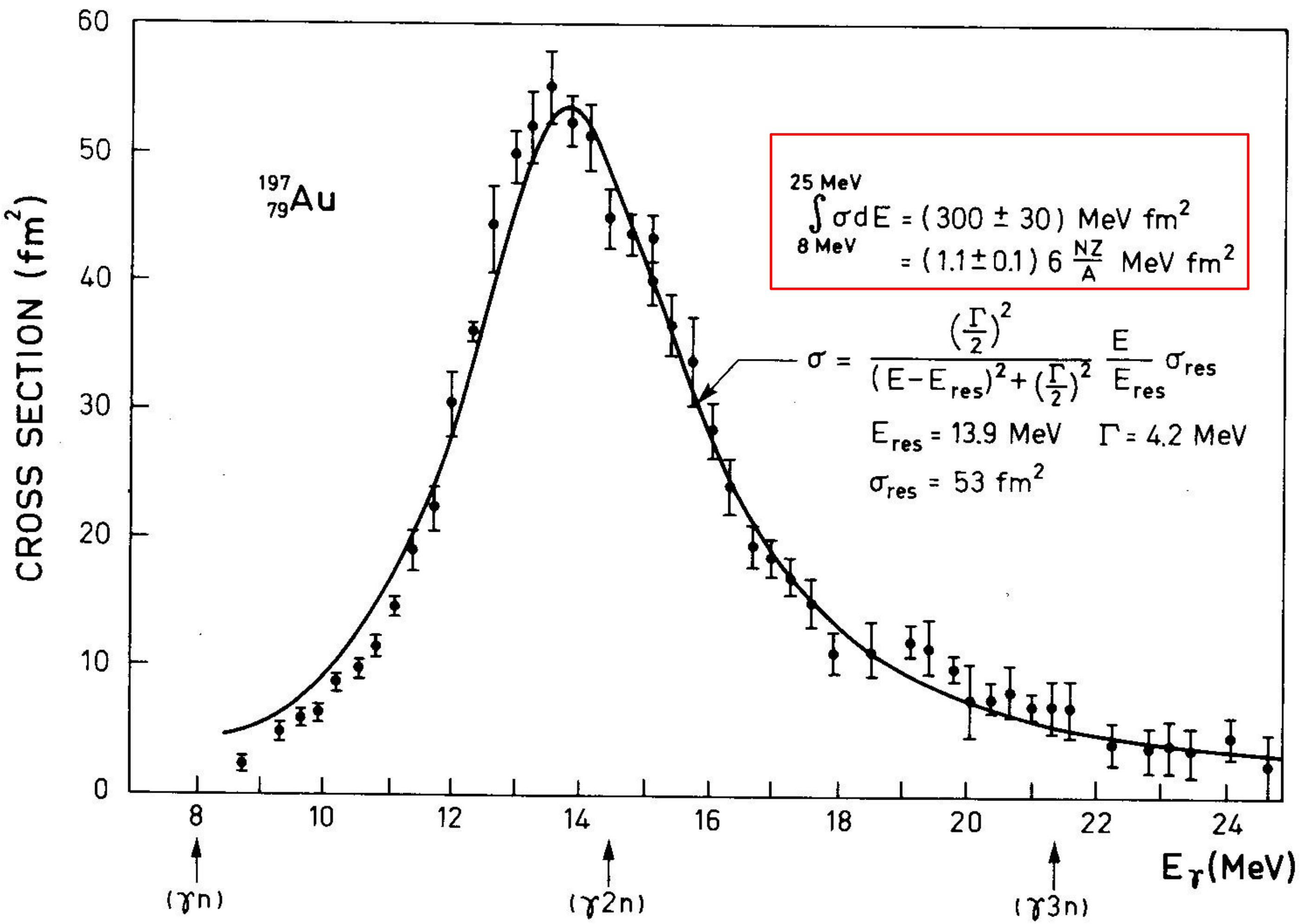


Figure 6-18 Total photoabsorption cross section for ^{197}Au. The experimental data are from S. C. Fultz, R. L. Bramblett, J. T. Caldwell, and N. A. Kerr, *Phys. Rev.* **127**, 1273 (1962). The solid curve is of Breit-Wigner shape with the indicated parameters.

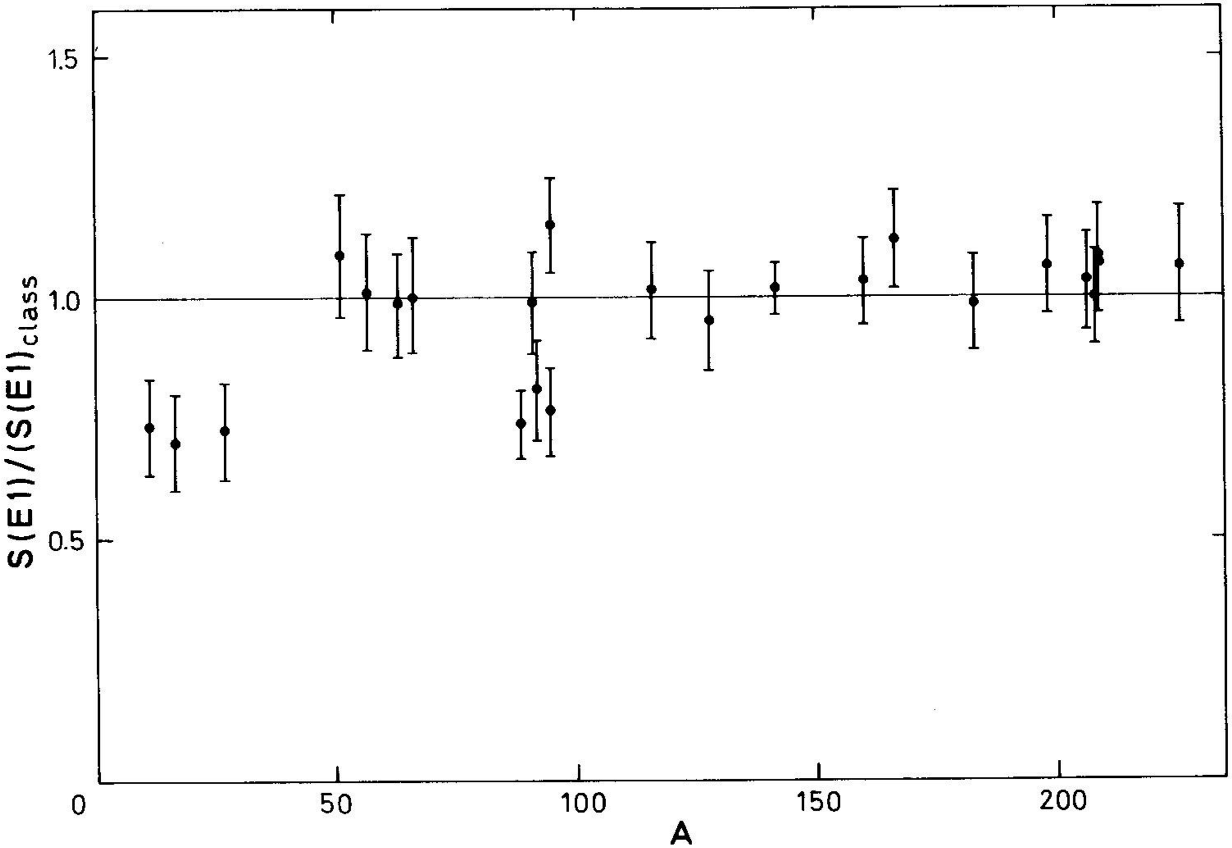
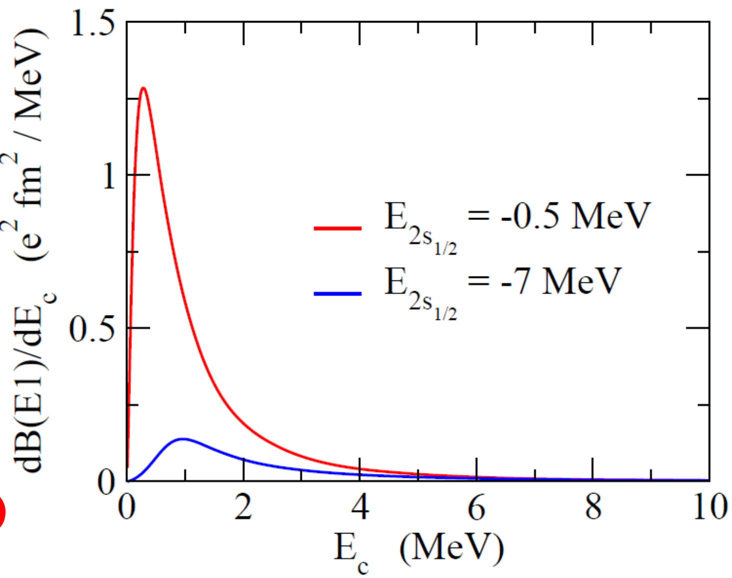


Figure 6-20 Total oscillator strength for dipole resonance. The observed total oscillator strength for energies up to 30 MeV is given in units of the classical sum rule value. For the nuclei with $A > 50$, the integrated oscillator strengths have been obtained from measurements of neutron yields produced by monochromatic γ rays (S. C. Fultz, R. L. Bramblett, B. L. Berman, J. T. Caldwell, and M. A. Kelly, in *Proc. Intern. Nuclear Physics Conference*, p. 397, ed.-in-chief R. L. Becker, Academic Press, New York, 1967). The photoscattering cross sections have been ignored, since they contribute only a very small fraction of the total cross sections. For the lighter nuclei, the yield of (γp) processes must be included and the data are from: ^{12}C and ^{27}Al (S. C. Fultz, J. T. Caldwell, B. L. Berman, R. L. Bramblett, and R. R. Harvey, *Phys. Rev.* **143**, 790, 1966); ^{16}O (Dolbilkin *et al.*, *loc.cit.*, Fig. 6-26). For the heavy nuclei ($A > 50$), other measurements have yielded total oscillator strengths that are about 20% larger than those shown in the figure (see, for example, Veyssière *et al.*, 1970).

和則の利点

$$S_0 = \int_0^\infty dE_c \frac{dB(E1)}{dE_c} = \frac{3}{4\pi} e_{\mathrm{E1}}^2 \langle r^2 \rangle_i$$

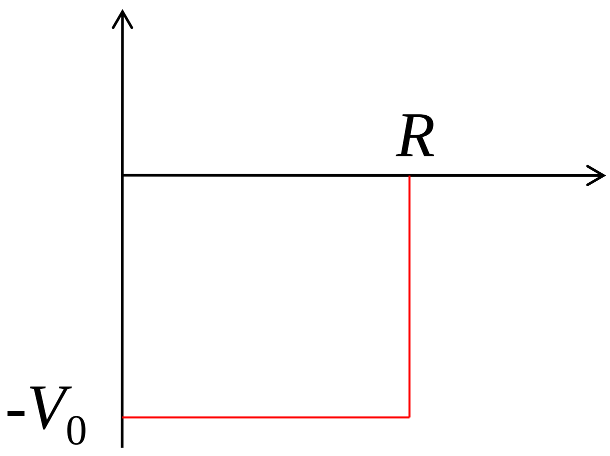
$$S_1 = \frac{9}{8\pi} e_{\mathrm{E1}}^2 \frac{\hbar^2}{\mu}$$



和則：
励起状態の（ある種の）情報が基底状態の
性質のみによって表わされる
（励起状態の情報を知っている必要がない）。

- 実験で強度分布が測られた時、測られた範囲外にも強度があるかどうか (missing strength) 判断できる。
- 強度分布を測ることによって原子核の半径などの情報を得られる。
- 実験データや数値計算のチェックになる。
  （和則の値よりとても大きくなると何かがおかしい）。
- 近似法の妥当性が判断できる。基本的な和則を満たす近似かどうか。
  cf. RPA は TRK sum rule を満たすが、Tamm-Dancoff 近似は満たさない。

演習問題 3



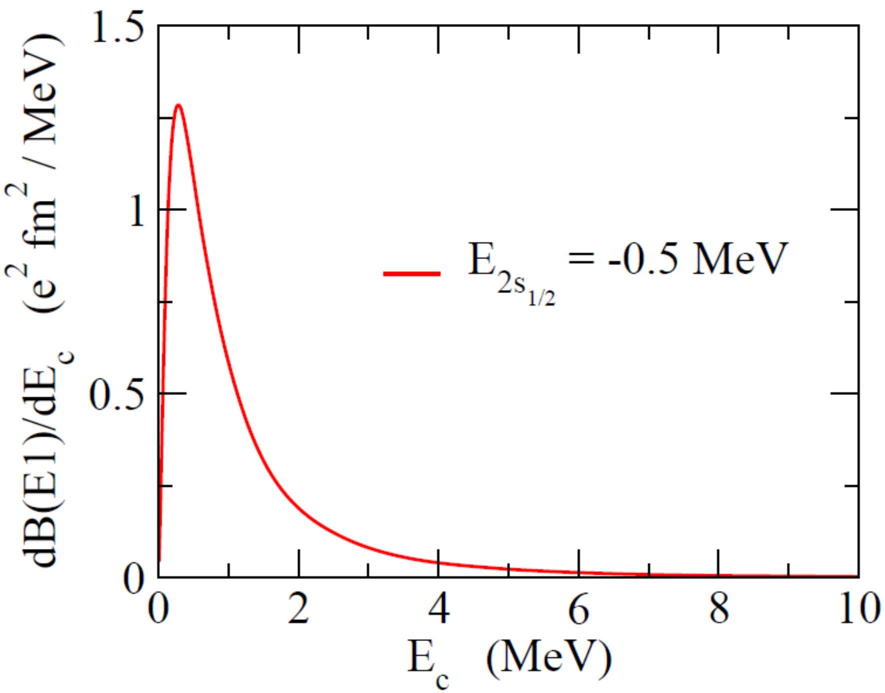
演習問題2における設定において、
和則を数値的に確認せよ。

$$S_0(E) \equiv \int_0^E dE_c \frac{dB(E1)}{dE_c}$$

$$S_1(E) \equiv \int_0^\infty dE_c \, (E_c - E_b) \frac{dB(E1)}{dE_c}$$

として、$S_0(E)$, $S_1(E)$ を E の関数として
プロットせよ。

共鳴状態について



$$\frac{dB(E1)}{dE} = \frac{3}{4\pi} e_{E1}^2 \left| \int_0^\infty r^2 dr\, r \cdot \frac{u_{l_b}(r)}{r} \cdot \frac{u_{E,l_c}(r)}{r} \right|^2$$

$$\begin{aligned} u_{E,l_c}(r) &\sim r^{l_c+1} \qquad (r \sim 0) \\ &\to \sqrt{\frac{2\mu}{\pi k \hbar^2}} \sin(kr - l_c\pi/2 + \delta_{l_c}) \end{aligned}$$

（復習）位相のずれ δ_l

自由粒子の運動: $$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi = E\psi = \frac{k^2\hbar^2}{2m}\psi$$

$$\begin{aligned}\psi(\boldsymbol{r}) &= e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\,i^l j_l(kr)P_l(\cos\theta) \\ &\to \frac{i}{2kr}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i^l\left[e^{-i(kr-l\pi/2)} - e^{i(kr-l\pi/2)}\right]P_l(\cos\theta)\end{aligned}$$

ポテンシャルがある場合: $$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\boldsymbol{r}) - E\right]\psi = 0$$

波動関数の漸近形

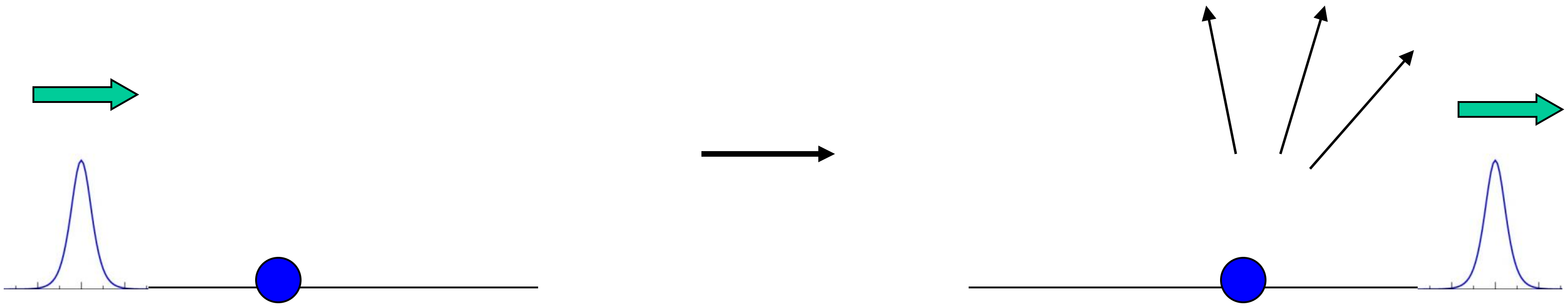
$$\begin{aligned}\psi(\boldsymbol{r}) &\to \frac{i}{2kr}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i^l\left[e^{-i(kr-l\pi/2)} - \underline{\underline{S_l}}\,e^{i(kr-l\pi/2)}\right]P_l(\cos\theta) \\ &= e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + \underbrace{\left[\sum_l(2l+1)\frac{S_l-1}{2ik}P_l(\cos\theta)\right]}_{f(\theta)}\frac{e^{ikr}}{r}\end{aligned}$$

$f(\theta)$ （散乱振幅）

$$\psi(\boldsymbol{r}) \rightarrow e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + \left[\sum_l (2l+1)\frac{S_l-1}{2ik}P_l(\cos\theta)\right]\frac{e^{ikr}}{r}$$

$$= e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r}$$

＝（入射波）＋（散乱波）



弾性散乱のみが起こる場合：$|S_l| = 1$ （フラックスの保存）

$$\boxed{S_l = e^{2i\delta_l}}$$

δ_l ：位相のずれ（phase shift）

弾性散乱のみが起こる場合: $|S_l| = 1$ （フラックスの保存）

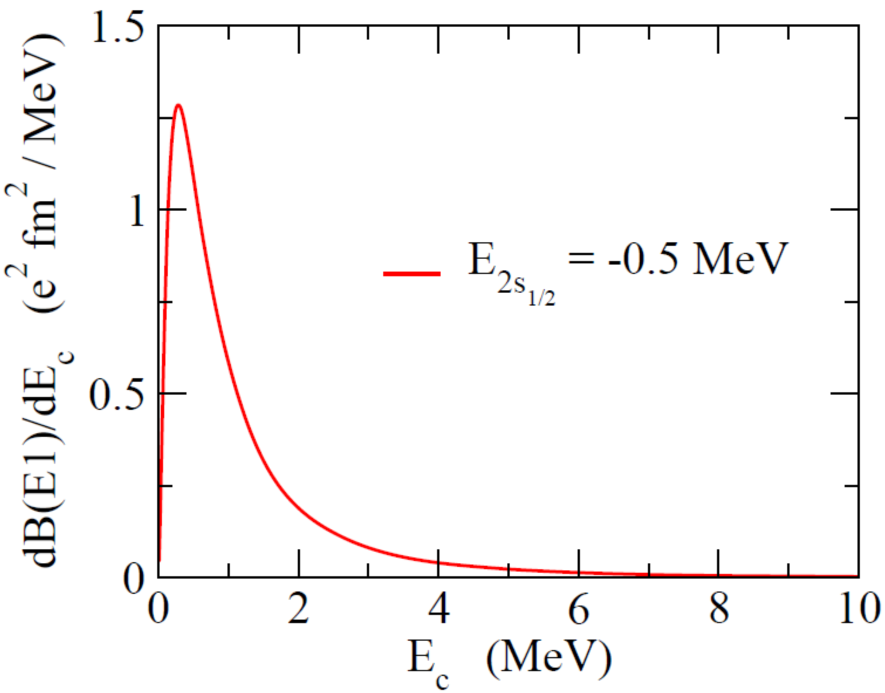
$$\boxed{S_l = e^{2i\delta_l}}$$

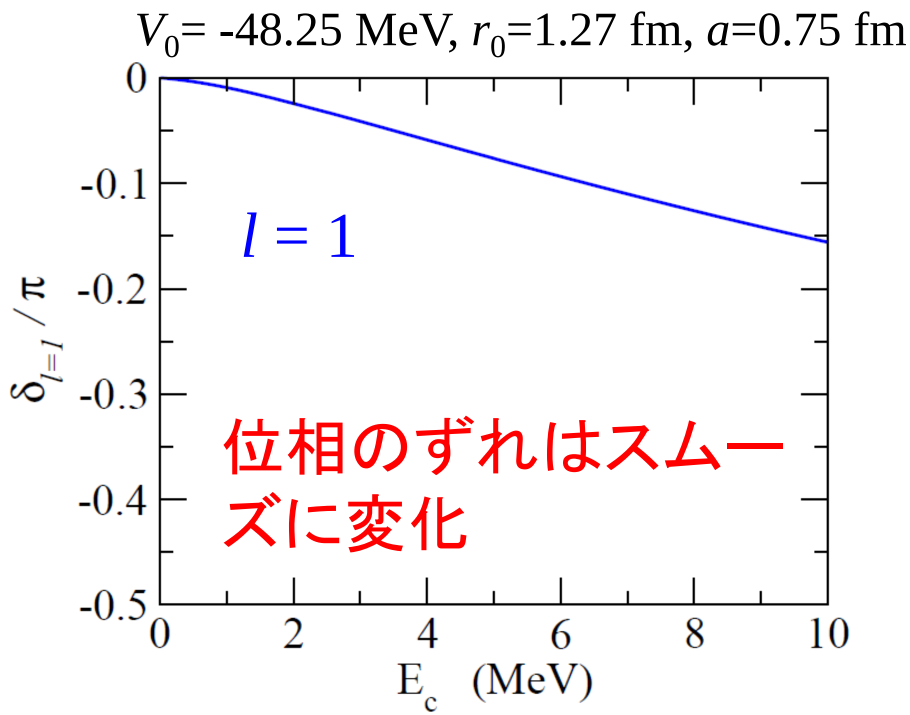
δ_l :位相のずれ（phase shift）

$$\psi(\boldsymbol{r}) \;\to\; \frac{i}{2kr}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\,i^l\,\underbrace{\left[e^{-i(kr-l\pi/2)} - S_l\,e^{i(kr-l\pi/2)}\right]}\,P_l(\cos\theta)$$

$$\begin{aligned}
&\quad\; e^{-i(kr-l\pi/2)} - e^{2i\delta_l}\,e^{i(kr-l\pi/2)} \\
&= e^{i\delta_l}\left(e^{-i(kr-l\pi/2+\delta_l)} - e^{i(kr-l\pi/2+\delta_l)}\right) \\
&= -2i\,\underline{\underline{\sin\left(kr-l\pi/2+\delta_l\right)}}
\end{aligned}$$

共鳴状態について



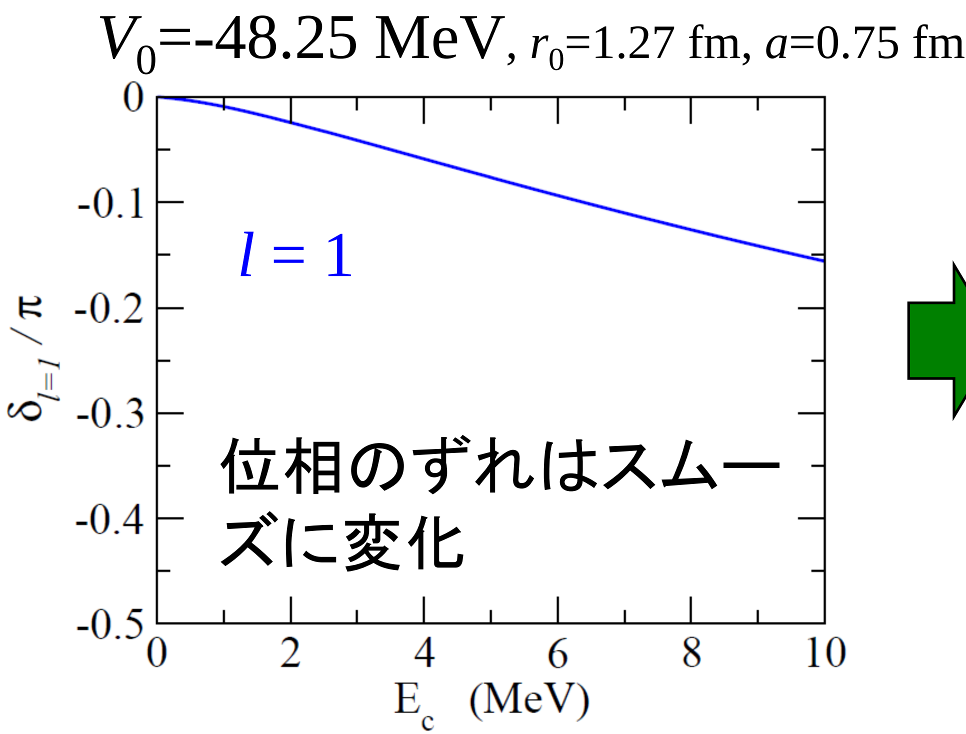


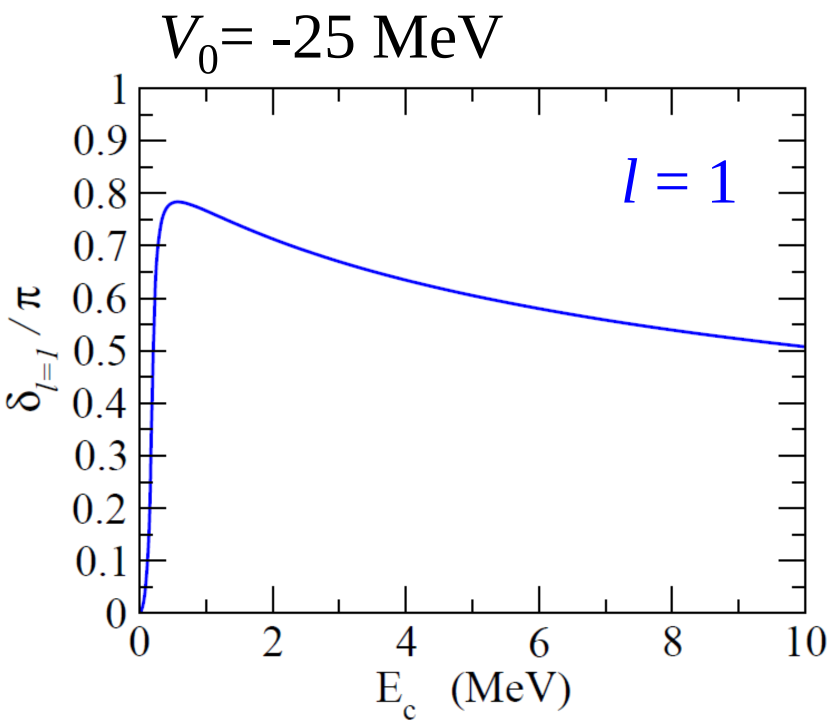
$$\frac{dB(E1)}{dE} = \frac{3}{4\pi} e_{\rm E1}^2 \left| \int_0^\infty r^2 dr\, r \cdot \frac{u_{l_b}(r)}{r} \cdot \frac{u_{E,l_c}(r)}{r} \right|^2$$

$$\begin{aligned} u_{E,l_c}(r) &\sim r^{l_c+1} \qquad (r \sim 0) \\ &\to \sqrt{\frac{2\mu}{\pi k \hbar^2}} \sin(kr - l_c\pi/2 + \delta_{l_c}) \end{aligned}$$

共鳴状態について

ただし、ポテンシャルによっては位相のずれが大きく変化する場合もある

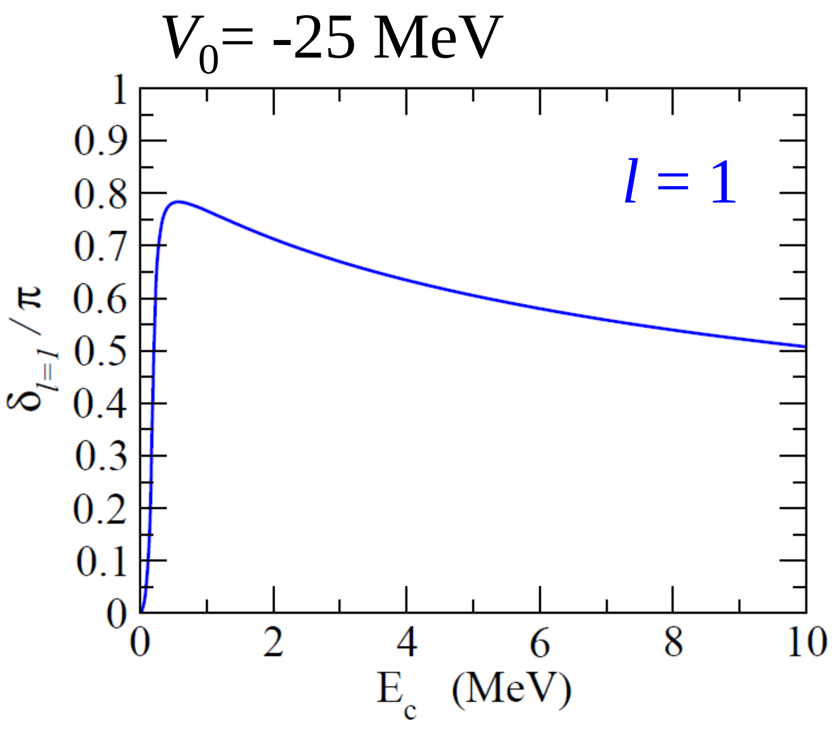


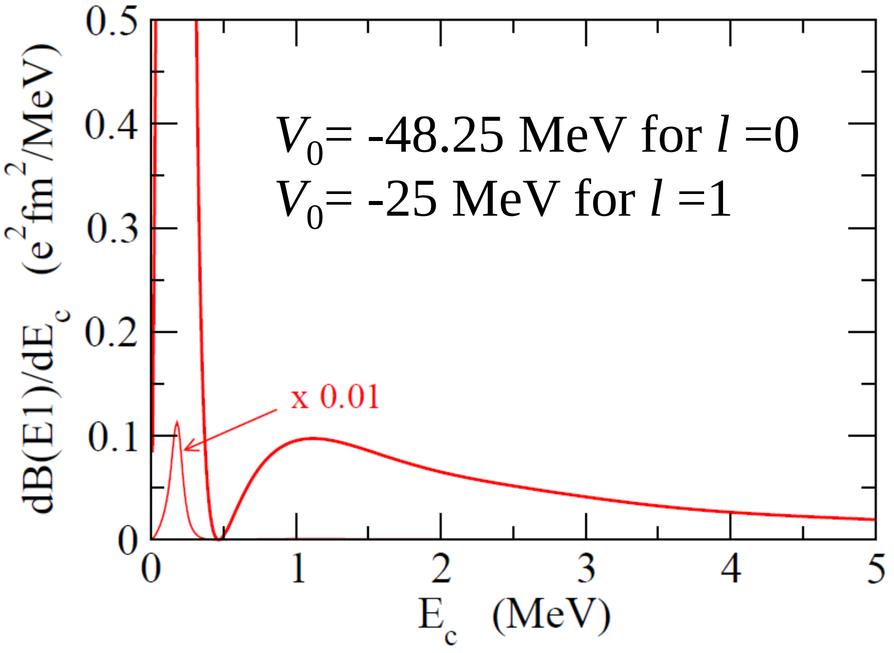


E_c = 0.19 MeV で位相のずれは大きく立ち上がる

共鳴状態について

位相のずれが大きく変化するようなポテンシャルを用いて
B(E1) を計算すると:

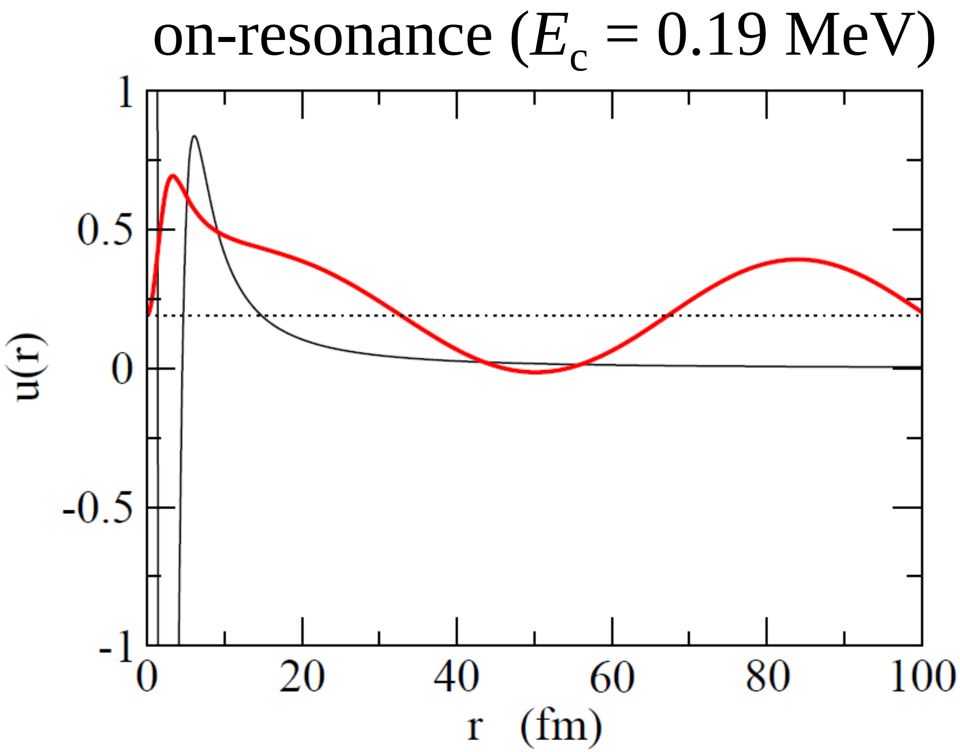


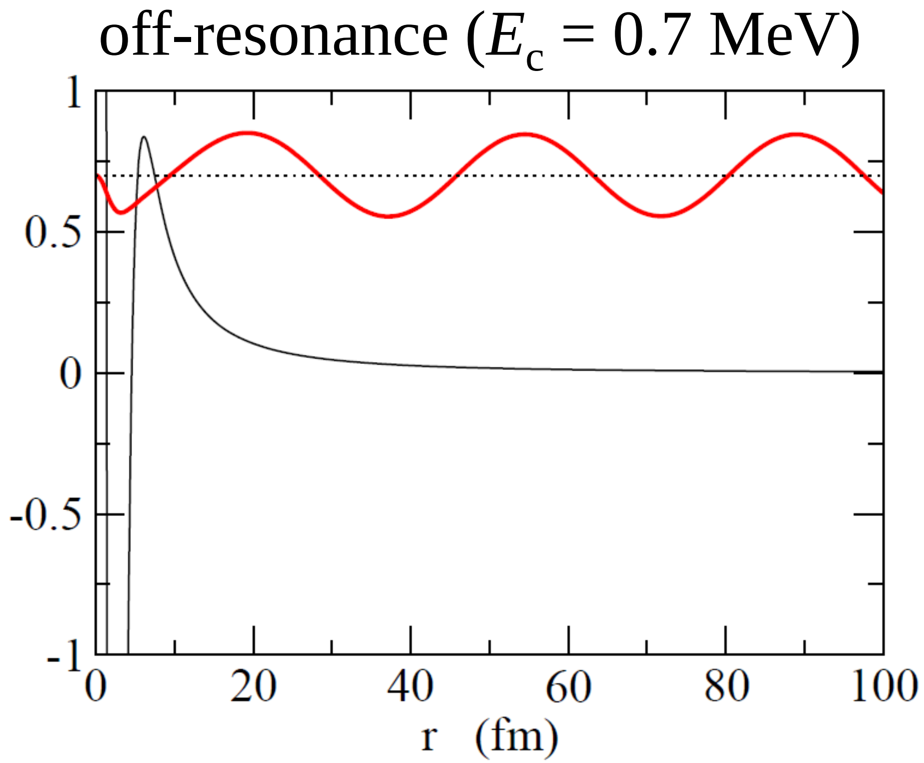


E_c = 0.19 MeV で位相のずれは大きく立ち上がる

同じエネルギーで B(E1) は大きく増幅 = 共鳴現象

波動関数

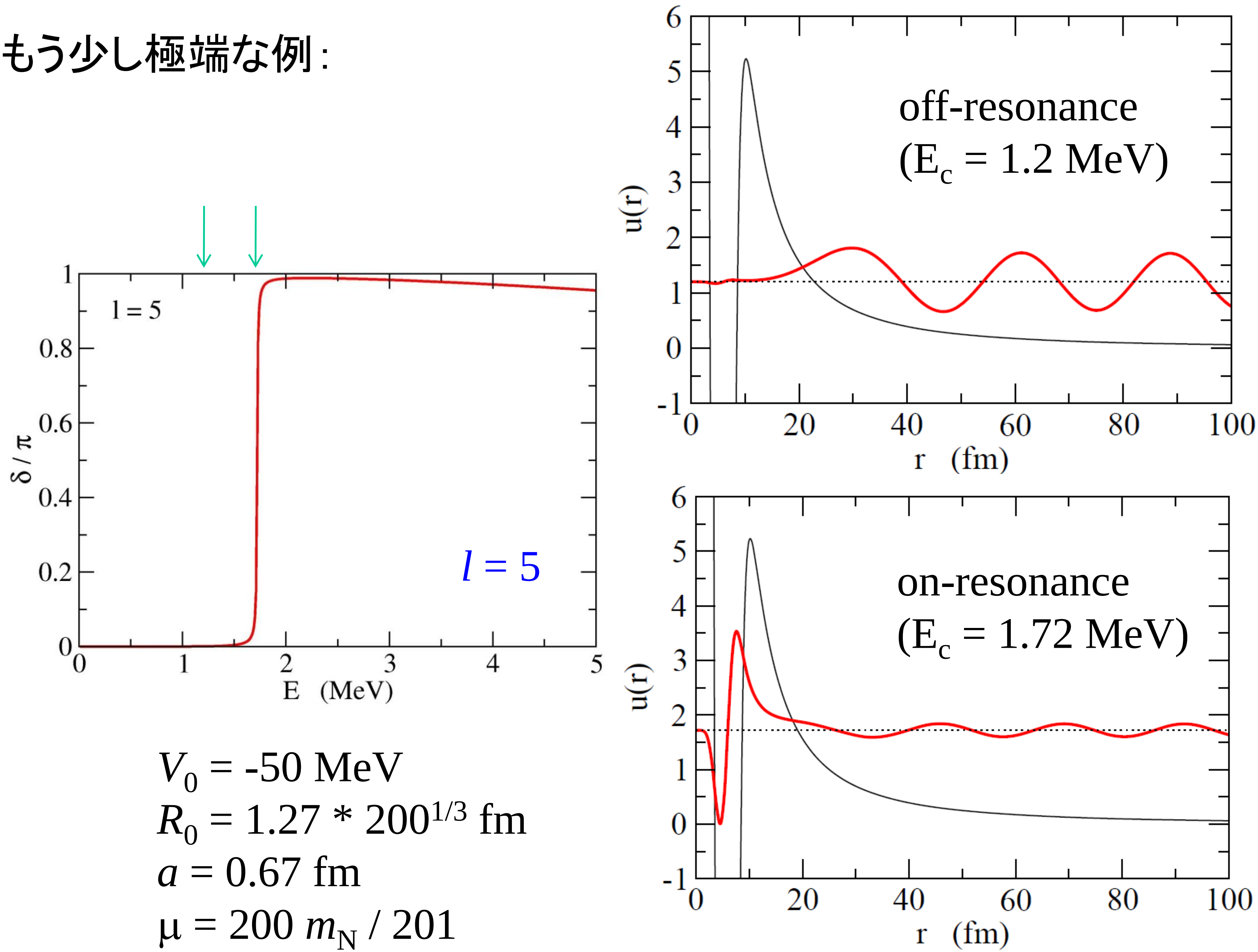




波動関数は障壁の内側で大きな振幅

障壁の内側では振幅が小さい

もう少し極端な例:



V_0 = -50 MeV

R_0 = 1.27 * $200^{1/3}$ fm

a = 0.67 fm

μ = 200 m_N / 201

➢off-resonance では

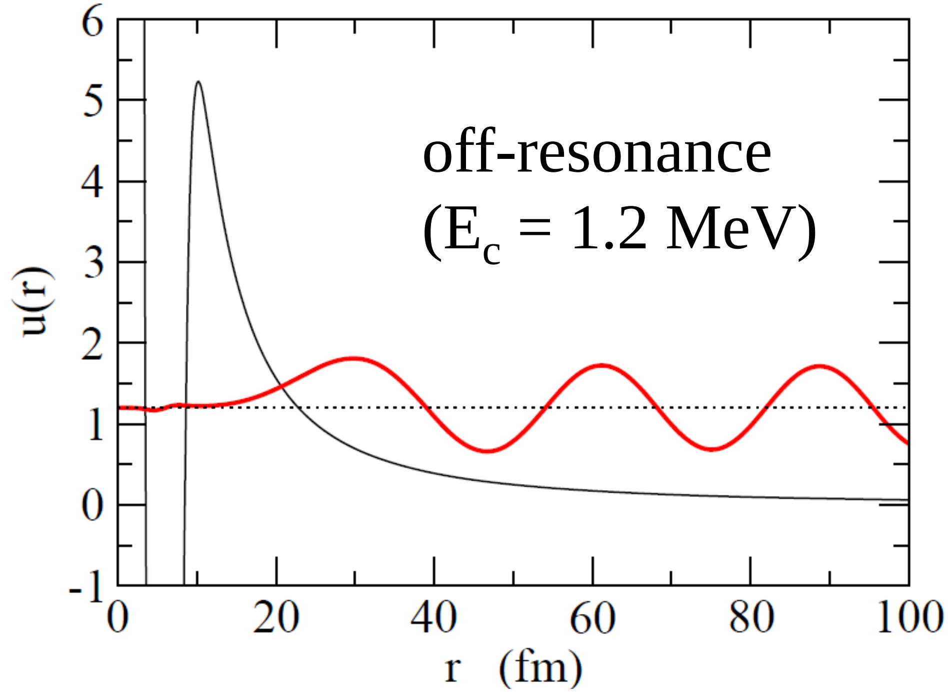
- 波動関数は障壁の外側で大きな振幅
- トンネル効果による障壁内部にしみ込む

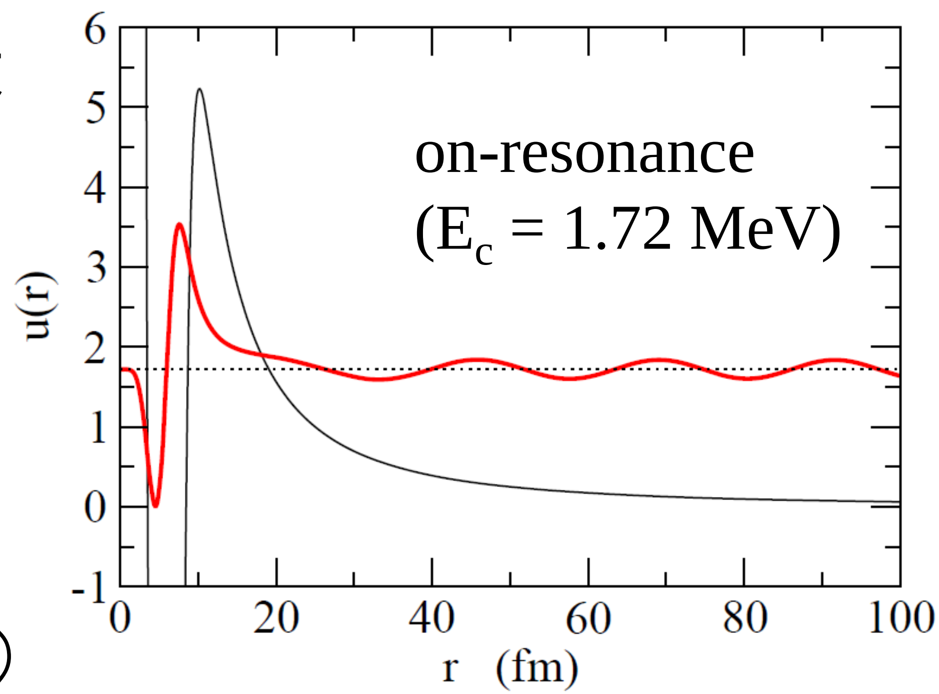
➢on-resonance では

- 波動関数は障壁内部で束縛状態のように振る舞う
- 障壁にトラップされた波動関数がトンネル効果により障壁の外側にしみ出る
- 準安定状態

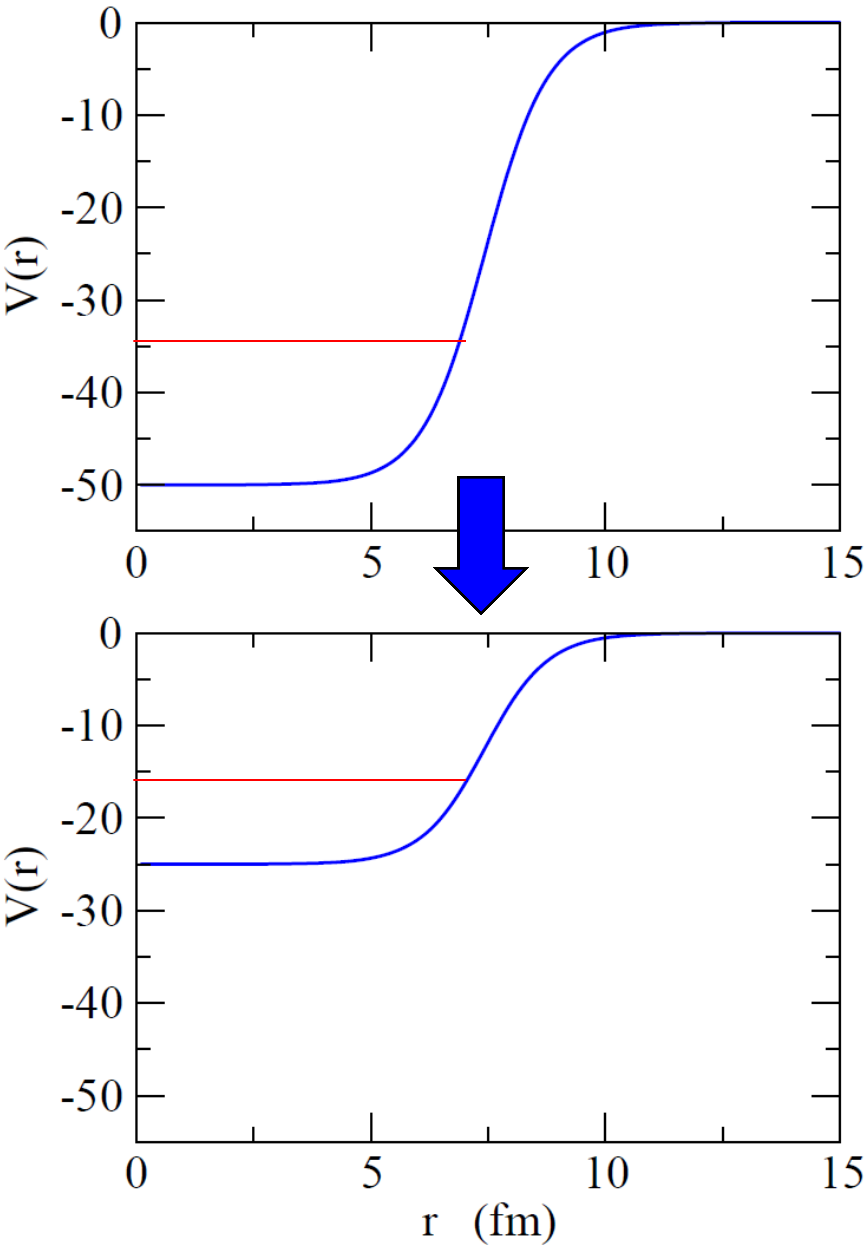
α崩壊と同じ描像

陽子放出崩壊(陽子過剰核)





（補足）Analytic Continuation in the Coupling Constant (ACCC)法

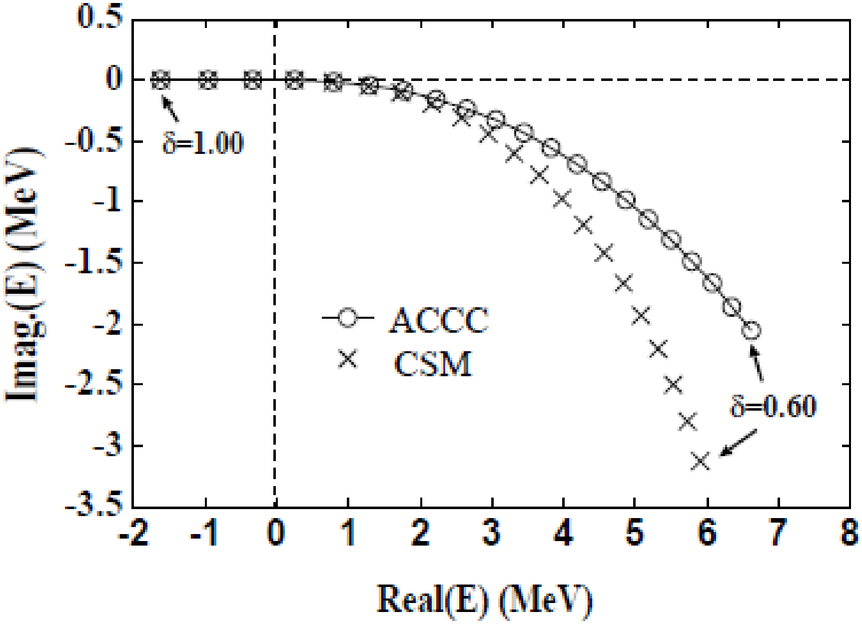


ポテンシャルを浅くしていくと
束縛状態のエネルギーは上がる

↓

やがて束縛状態は共鳴状態へと
連続的に変化
（従って共鳴状態は連続状態に
埋め込まれた束縛状態とも言える。）

（補足）Analytic Continuation in the Coupling Constant (ACCC)法



S. Aoyama, PRC68(‘03)034313

ポテンシャルを浅くしていくと
束縛状態のエネルギーは上がる

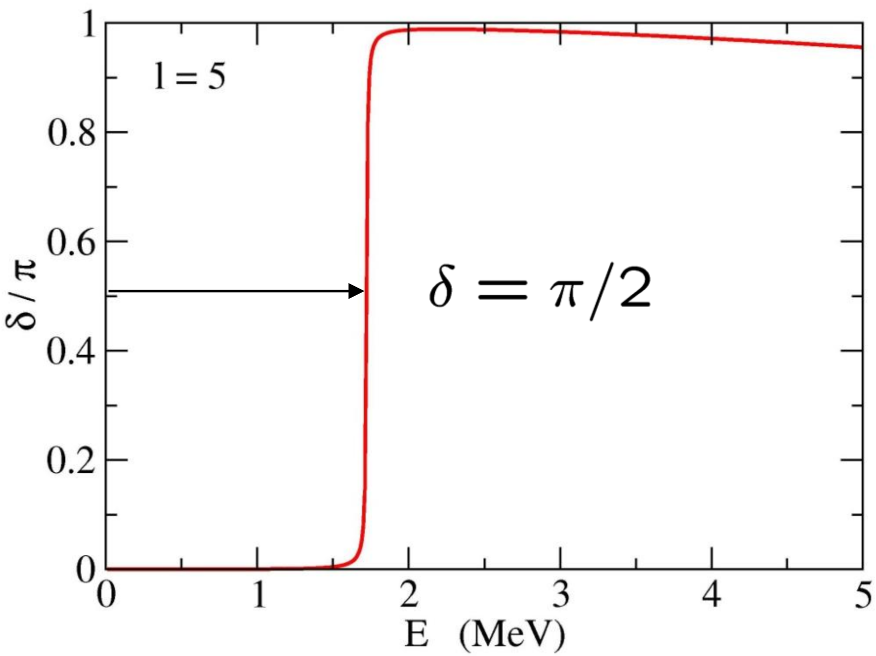
↓

やがて束縛状態は共鳴状態へと
連続的に変化
（従って共鳴状態は連続状態に
埋め込まれた束縛状態とも言える。）

ACCC 法は束縛状態から外挿することにより共鳴状態の
エネルギーや幅を求める

（補足）Breit-Wigner の公式

幅が狭ければ、位相のずれが $\pi/2$ を切る時に共鳴



Breit-Wigner formula:

$$\boxed{\delta(E) = \tan^{-1}\frac{\Gamma}{2(E_R - E)} + \delta_0(E)}$$

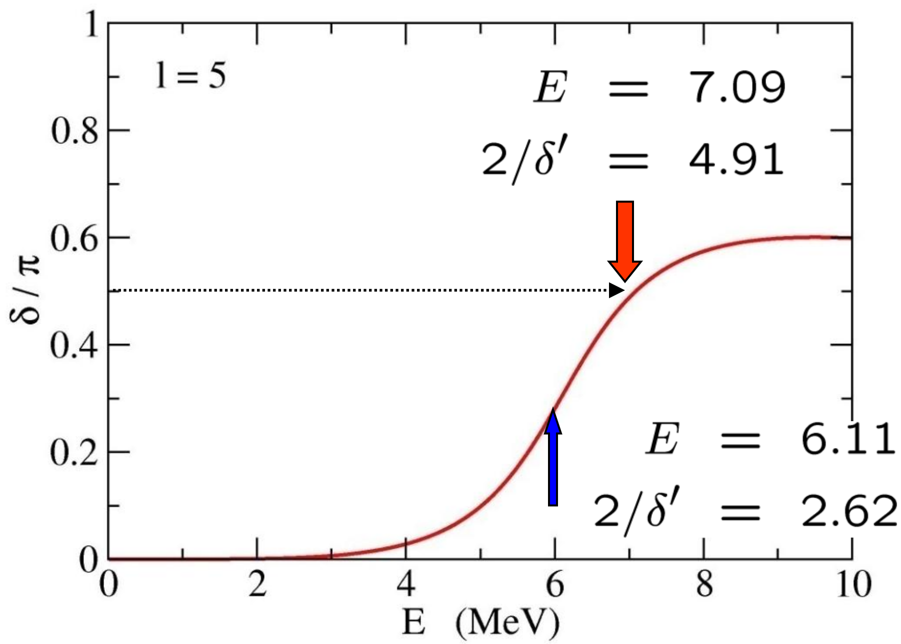
$$\Longrightarrow \quad \Gamma = \frac{2}{\delta'(E)}$$

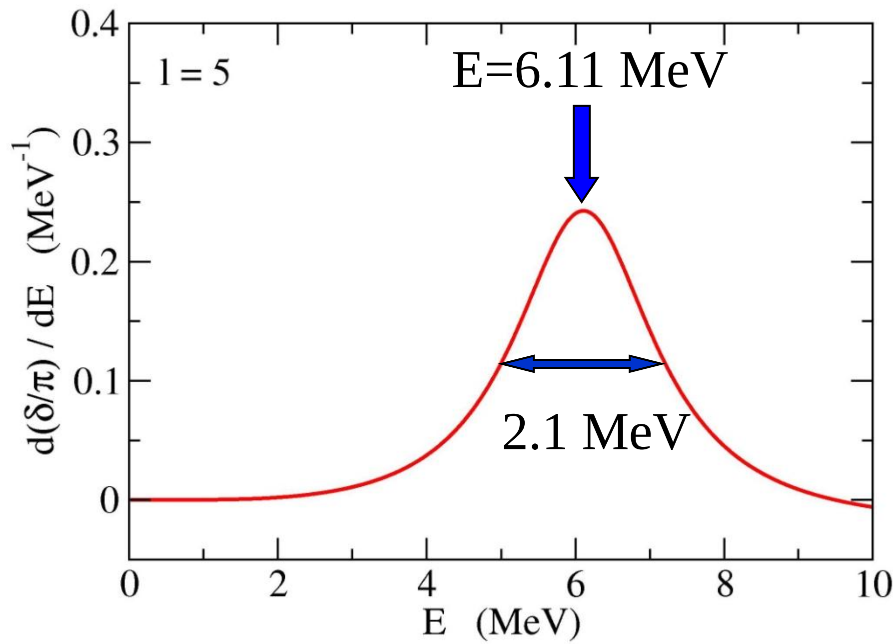
V_0 = -50 MeV
R_0 = 1.27 * $200^{1/3}$ fm
a = 0.67 fm
μ = 200 m_N / 201

(note) ただし、幅が広いと π/2 とは限らない

$$\delta(E) = \tan^{-1}\frac{\Gamma}{2(E_R - E)} + \delta_0(E)$$

background phase shift

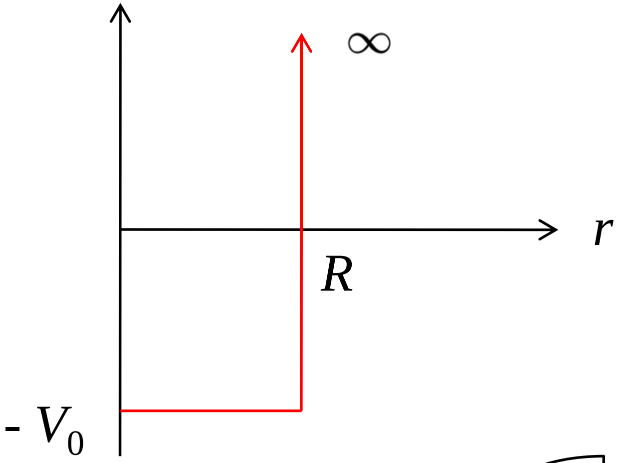




Gamow state:
$$E = 6.01 \quad \text{MeV}$$
$$\Gamma = 2.22 \quad \text{MeV}$$

(補足)何故 $\delta=\pi/2$ が準束縛状態に対応するのか?

(i) まず、無限に高い井戸型ポテンシャルの束縛状態は:



$$\begin{aligned} u_l(r) &= \kappa r\, j_l(\kappa r) \\ &\sim \sin(\kappa r - l\pi/2) \qquad (\kappa r \gg l) \end{aligned}$$

$$\kappa = \sqrt{2m(E+V_0)/\hbar^2}$$

波動関数は $r = R$ でゼロ:

$$\sin(\kappa R - l\pi/2) = 0$$

$$\boxed{\kappa R = \left(n + \frac{l}{2}\right)\pi \sim n\pi}$$

$$(\kappa R \gg l)$$

$$\downarrow$$

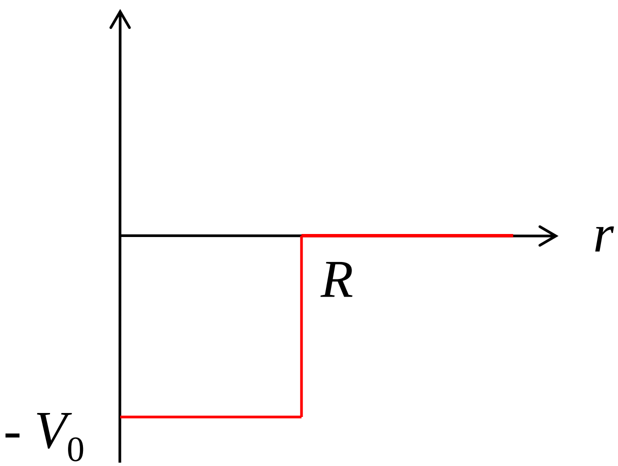
$$(n \gg l)$$

(補足)何故 $\delta=\pi/2$ が準束縛状態に対応するのか?

(i) まず、無限に高い井戸型ポテンシャルの束縛状態は:

$$\kappa R = n\pi \qquad\qquad \kappa = \sqrt{2m(E+V_0)/\hbar^2}$$

(ii) 次に有限の高さの井戸型ポテンシャルの散乱状態は:



$$\begin{aligned}
\tan\delta_l &= \frac{k\, j_l'(kR) j_l(\kappa R) - \kappa\, j_l(kR) j_l'(\kappa R)}{k\, n_l'(kR) j_l(\kappa R) - \kappa\, n_l(kR) j_l'(\kappa R)} \\
&\sim \frac{2l+1}{[(2l+1)!!]^2}(kR)^{2l+1} \\
&\quad \times \frac{l\, j_l(\kappa R) - \kappa R\, j_l'(\kappa R)}{(l+1) j_l(\kappa R) + \kappa R\, j_l'(\kappa R)}
\end{aligned}$$

$$(kR \ll l) \qquad k = \sqrt{2mE/\hbar^2}$$

この分数の分母がゼロになると $\tan\delta_l$ は発散:すなわち $\delta_l = \pi/2$

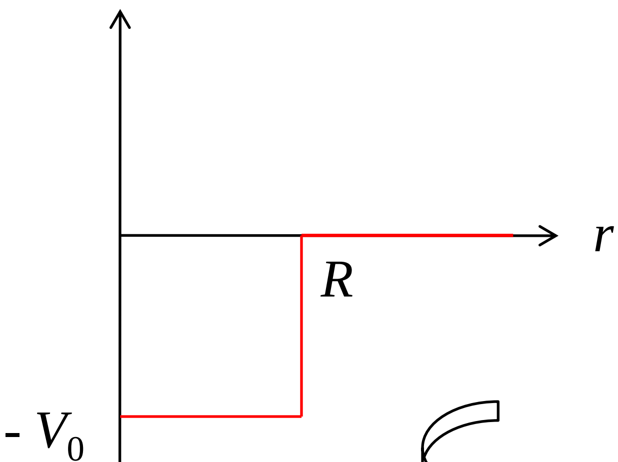
$$\longrightarrow \quad (l+1) j_l(\kappa R) + \kappa R\, j_l'(\kappa R) = 0$$

(補足)何故 $\delta=\pi/2$ が準束縛状態に対応するのか?

(i) まず、無限に高い井戸型ポテンシャルの束縛状態は:

$$\kappa R = n\pi \qquad\qquad \kappa = \sqrt{2m(E+V_0)/\hbar^2}$$

(ii) 次に有限の高さの井戸型ポテンシャルの散乱状態は:



$\delta_l = \pi/2$ となるとき

$$(l+1)j_l(\kappa R) + \kappa R\, j_l'(\kappa R) = 0$$

$$\frac{l}{\kappa R}\sin(\kappa R - l\pi/2) + \cos(\kappa R - l\pi/2) \sim 0$$

$$(\kappa R \gg l)$$

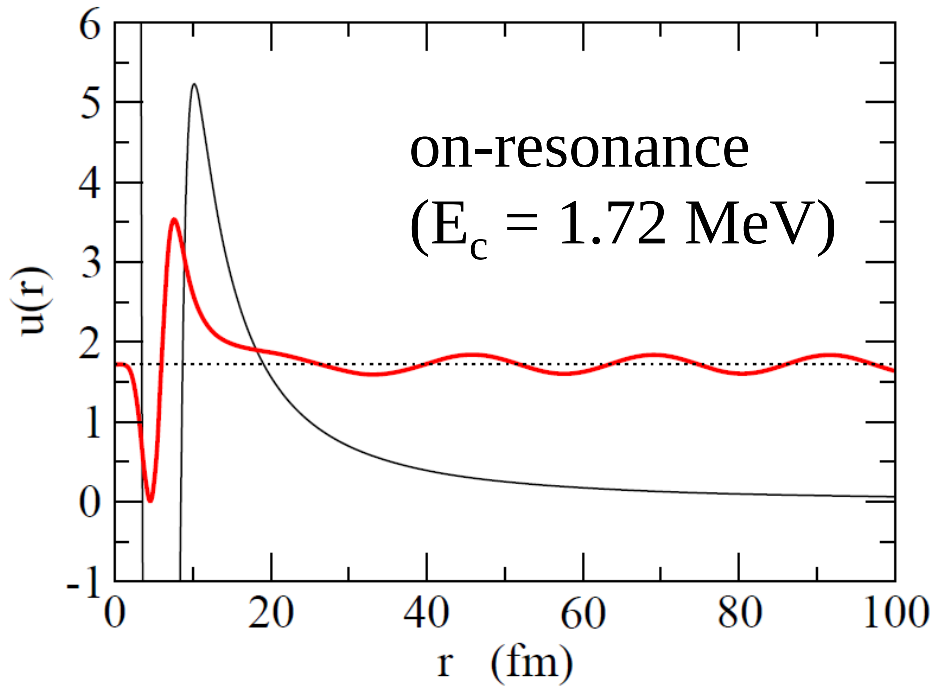
$$\cos(\kappa R - l\pi/2) \sim 0$$

$$\kappa R \sim \left(n + \frac{l+1}{2}\right)\pi \sim n\pi$$

陽子ドリップ線を越えた原子核の陽子放出崩壊

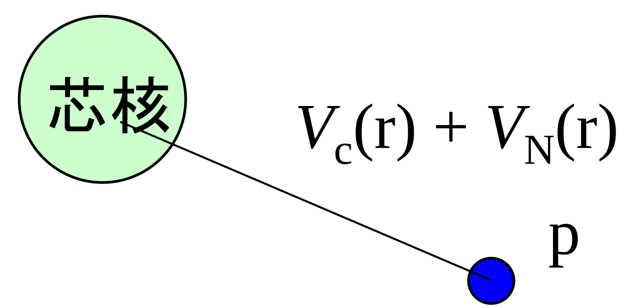
➢ 共鳴状態の波動関数

- 波動関数は障壁内部で束縛状態のように振る舞う
- 障壁にトラップされた波動関数がトンネル効果により障壁の外側にしみ出る
- 準安定状態

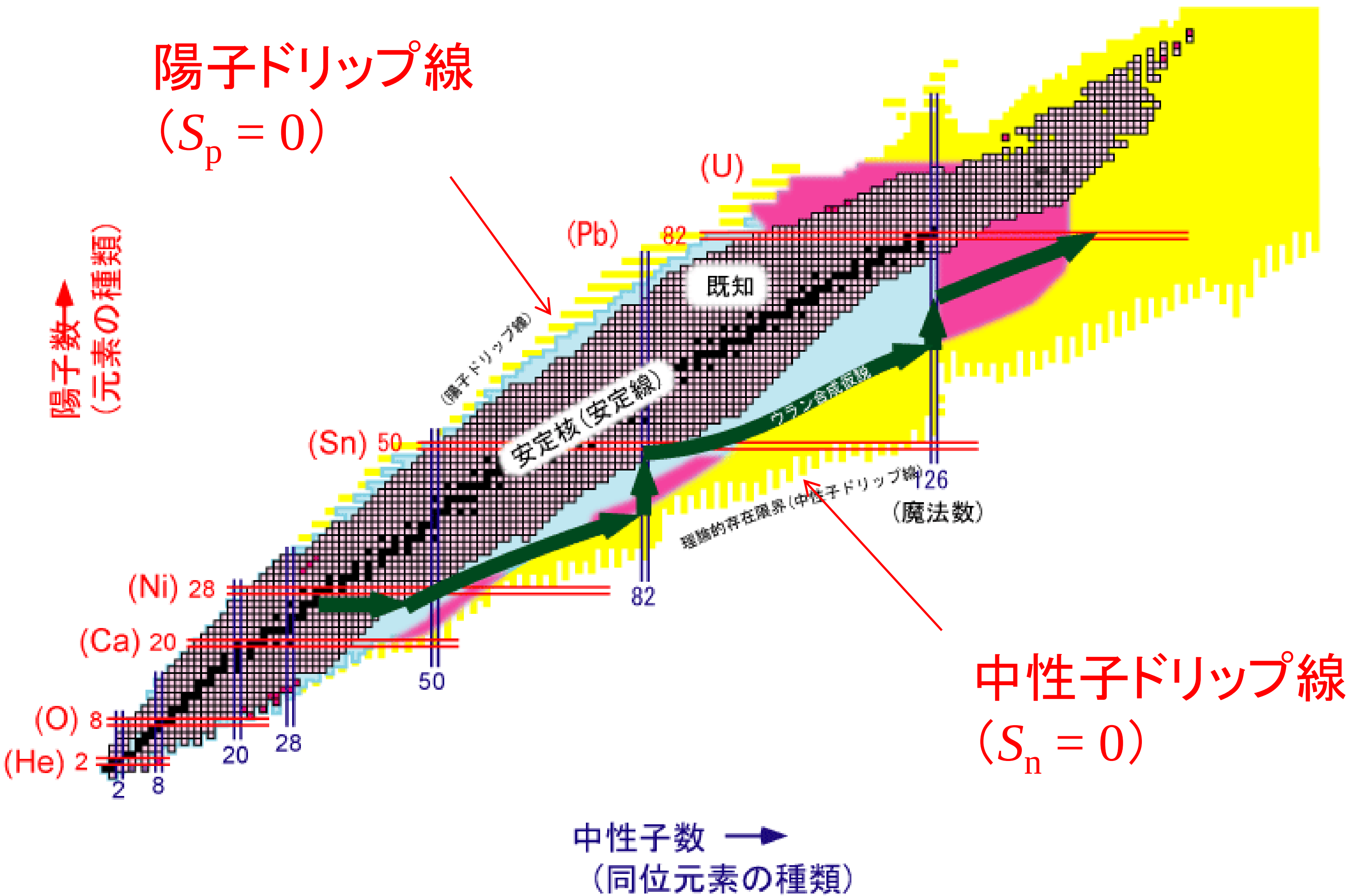


α崩壊と同じ描像

陽子放出崩壊(陽子過剰核)

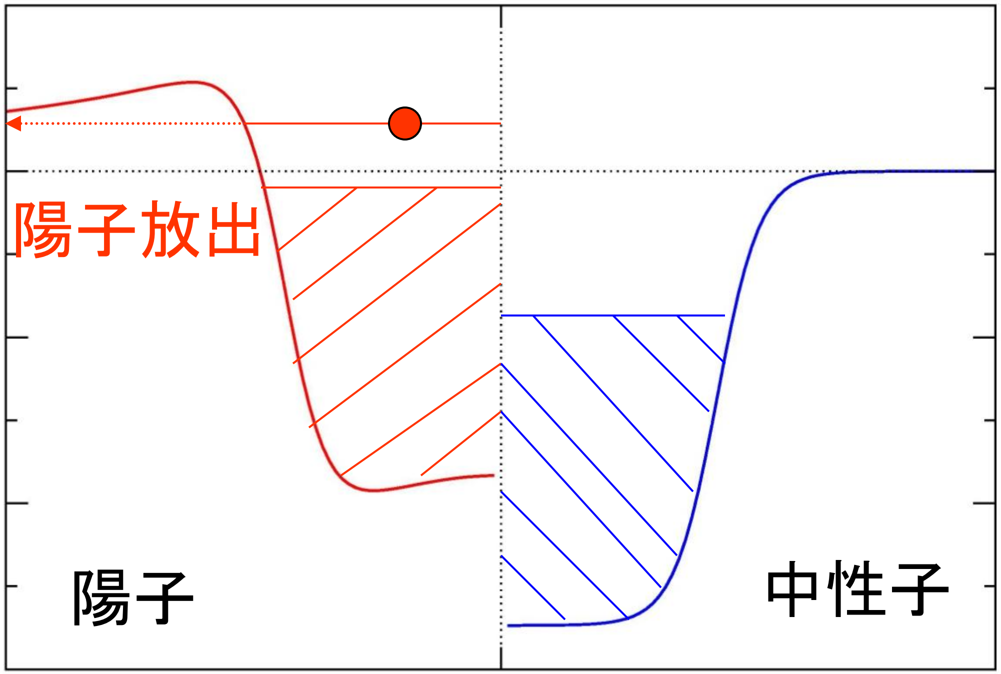


陽子ドリップ線を越えた原子核の陽子放出崩壊



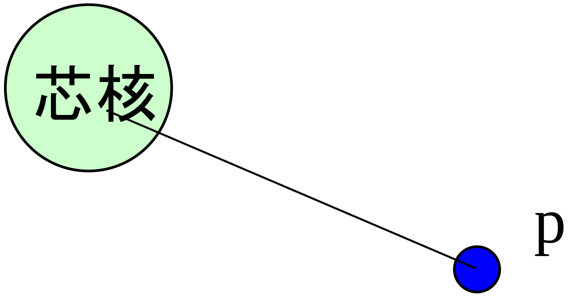
陽子放出崩壊

陽子ドリップ線を越えた原子核



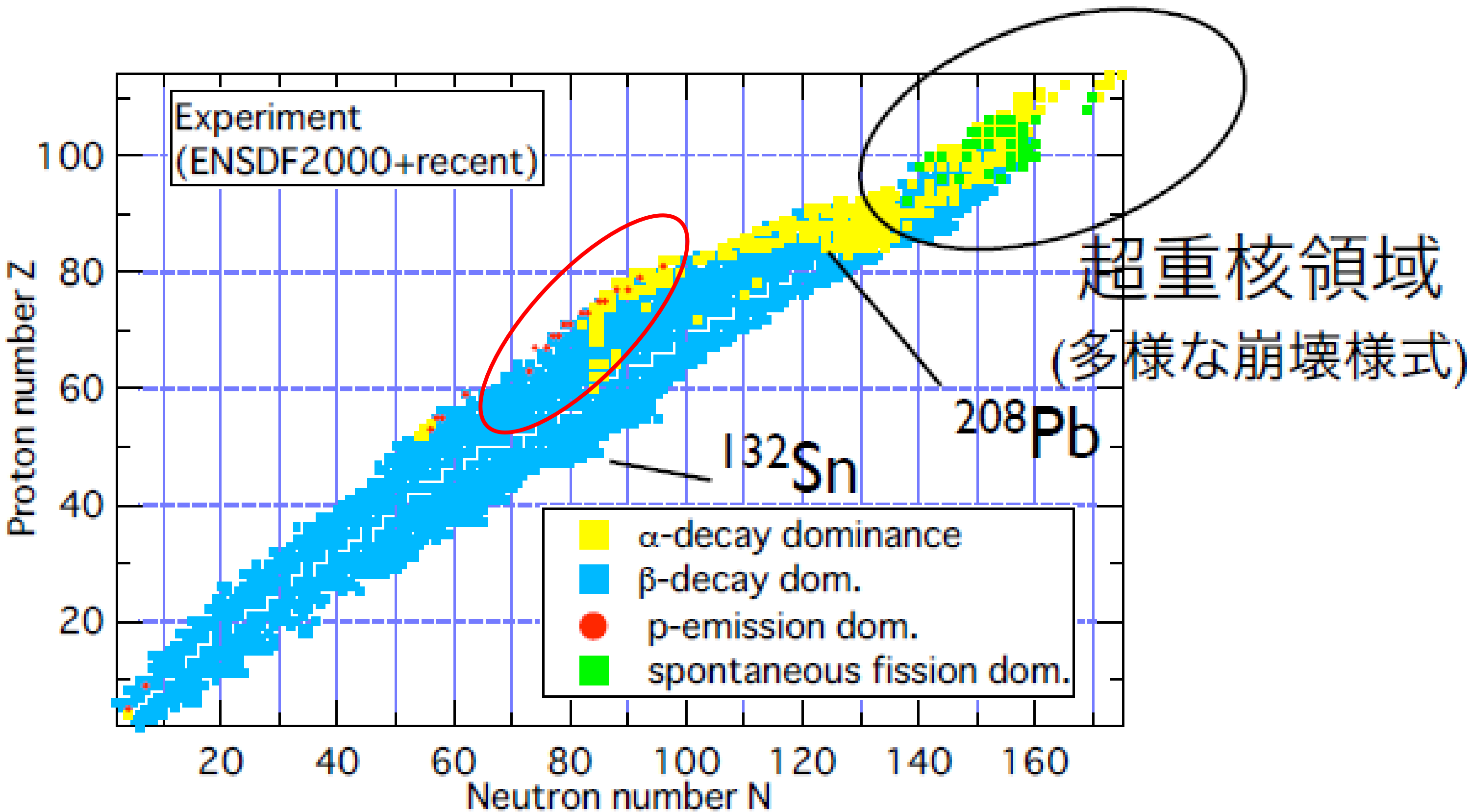
陽子：クーロン障壁にトラップ
（障壁をトンネルしなければならない）

→ 非常に幅の狭い（長寿命な）共鳴状態



多くの（基底状態）陽子放出核がオークリッジやアルゴンヌ研究所で発見

実験の観測量: 陽子の放出エネルギーE_p と崩壊半減期 $T_{1/2}$



小浦寛之氏(JAEA)
のスライドより

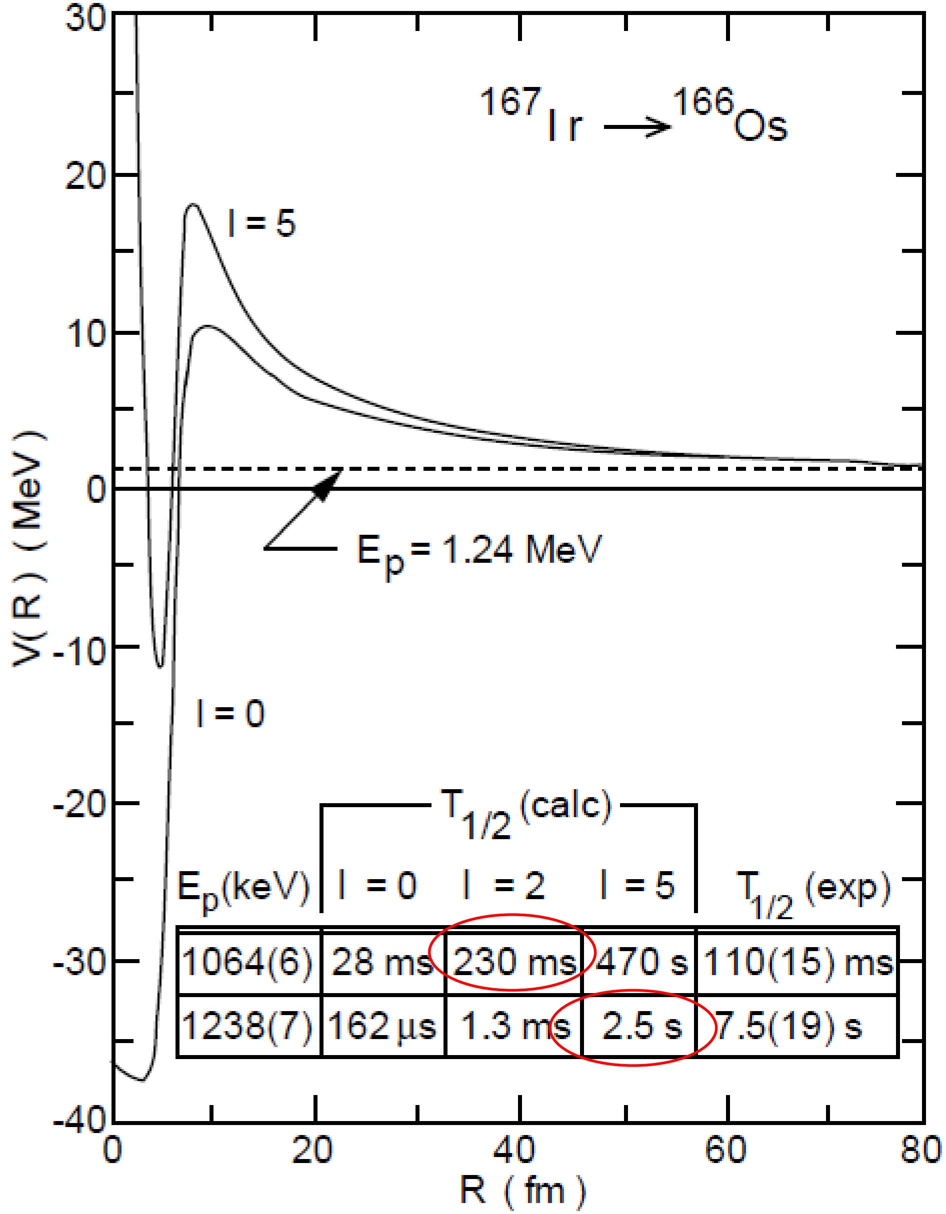


Figure 3 Proton-nucleus potential calculated for the proton emitter ^{167}Ir. The *inset* shows the proton-decay half-lives calculated using the WKB approximation for three values of the angular momentum ℓ, compared to the experimental values for the ground and isomeric transitions.

A ~ 150-160 領域における典型的な値

V_b ~ 10 MeV (l=0)
E_p ~ 1 MeV
R_{turn}: 80~100 fm
Γ : 10^{-18}~10^{-22} MeV
$T_{1/2}$: 100 μs~1 sec

陽子放出崩壊の一つの特徴:
半減期が l に敏感

↓

陽子崩壊を通じて陽子過剰核の陽子一粒子状態の l を決定できる

P.J. Woods and C.N. Davids,
Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. 47 ('97)541

α崩壊との相違点

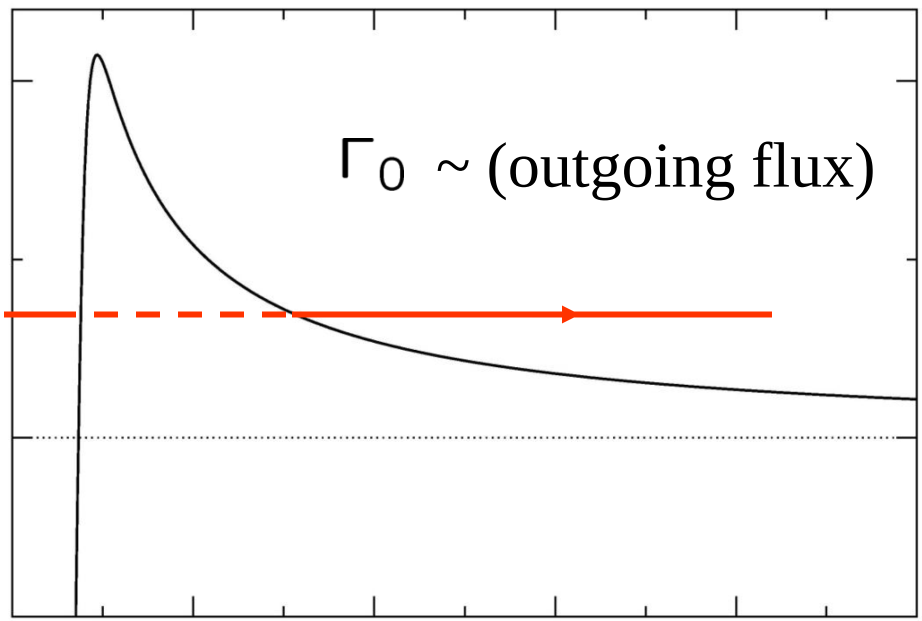
1. 換算質量 μ が小さい

➡ *l* の依存性が強い(遠心力ポテンシャル)

➡ 陽子の一粒子状態の情報を得ることができる
（偶々核のα崩壊では *l* = 0 がメイン）

2. 分光学的因子 (spectroscopic factor) がずっと単純

$${}^{A+1}_{Z+1}X \rightarrow {}^{A}_{Z}X + p$$



$$\begin{aligned} \Gamma &= \Gamma_0 \cdot S \\ S &= |\langle (A+1)|(A)+1\rangle|^2 \end{aligned}$$

S: 特定の状態が（多体の）波動関数の中に存在する確率

- 陽子崩壊：軌道の占有確率
- α崩壊：α粒子が析出する確率（とても複雑）

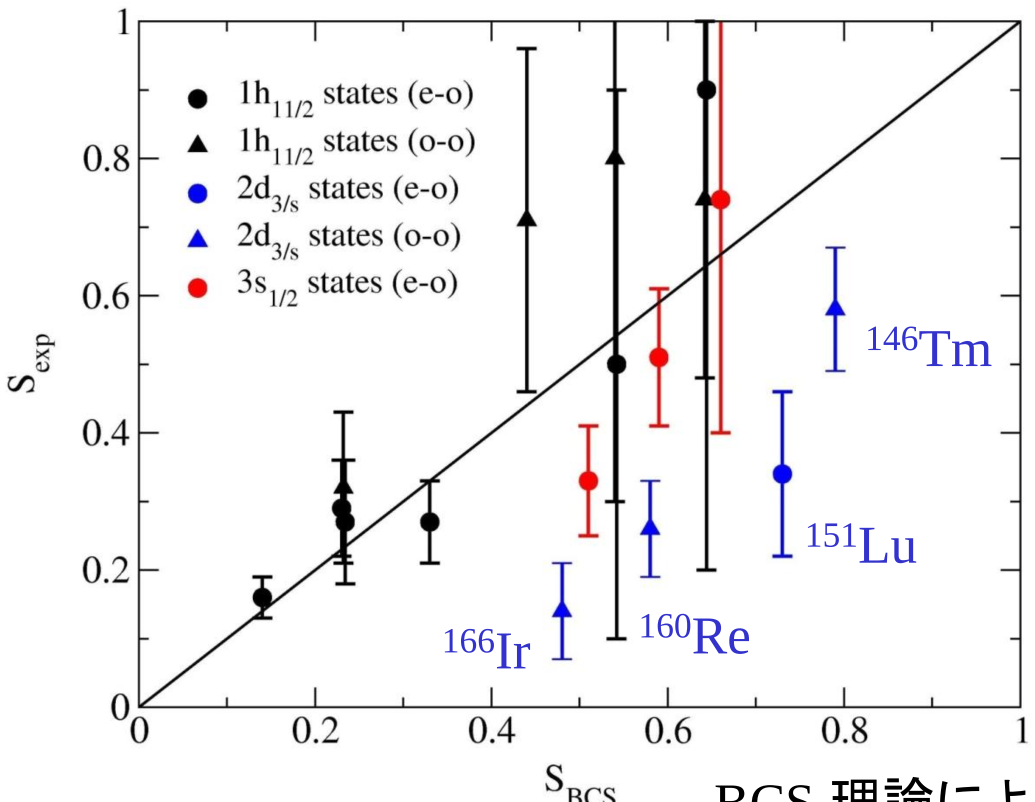
分光学的因子

崩壊の半減期: $T_{1/2} = \frac{\hbar}{\Gamma}\log 2 = \frac{\hbar}{S\Gamma_0}\log 2 \longleftarrow N(t) = N_0 e^{-\Gamma t/\hbar}$

「実験的な」分光学的因子:

$$S_{\rm exp} \equiv \frac{T^{\rm th}_{1/2}}{T^{\rm exp}_{1/2}} = \left(\frac{\hbar}{\Gamma_0}\log 2\right) \Big/ T^{\rm exp}_{1/2}$$

(ただし、これは理論のモデルに依存する量に注意)

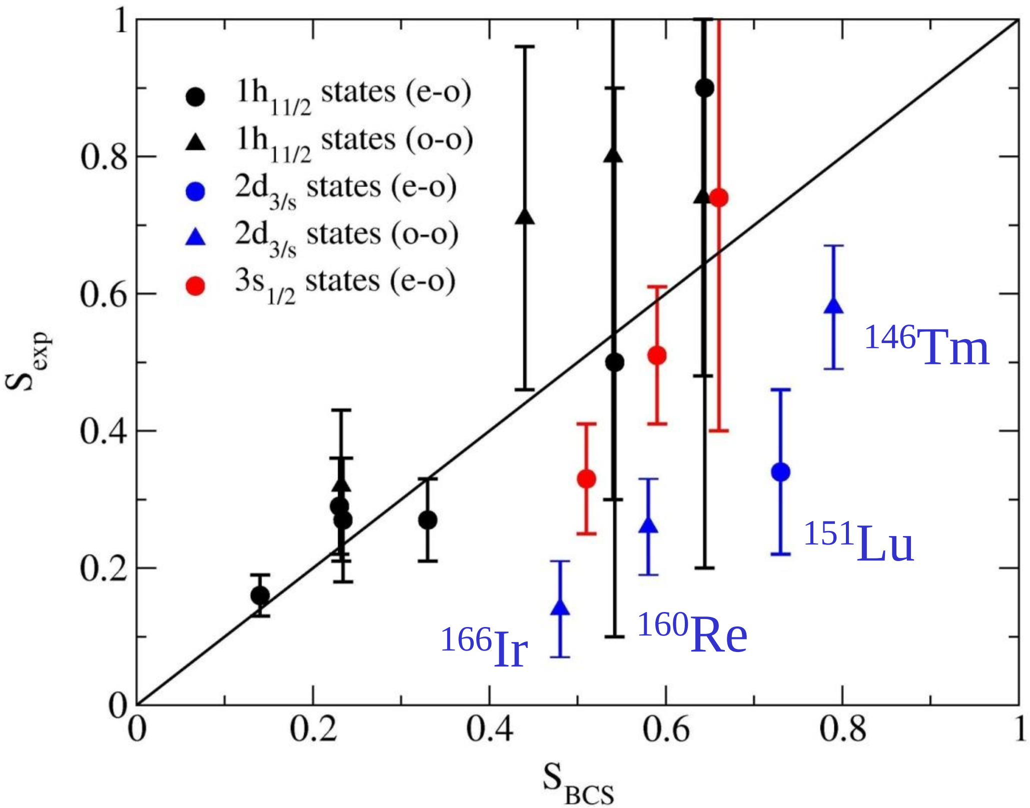


BCS 理論による分光学的因子

- s 波、h 波に対しては実験と理論がよく一致
- d 波に対しては大きなずれ

S. Aberg et al., PRC56('97)1762

分光学的因子

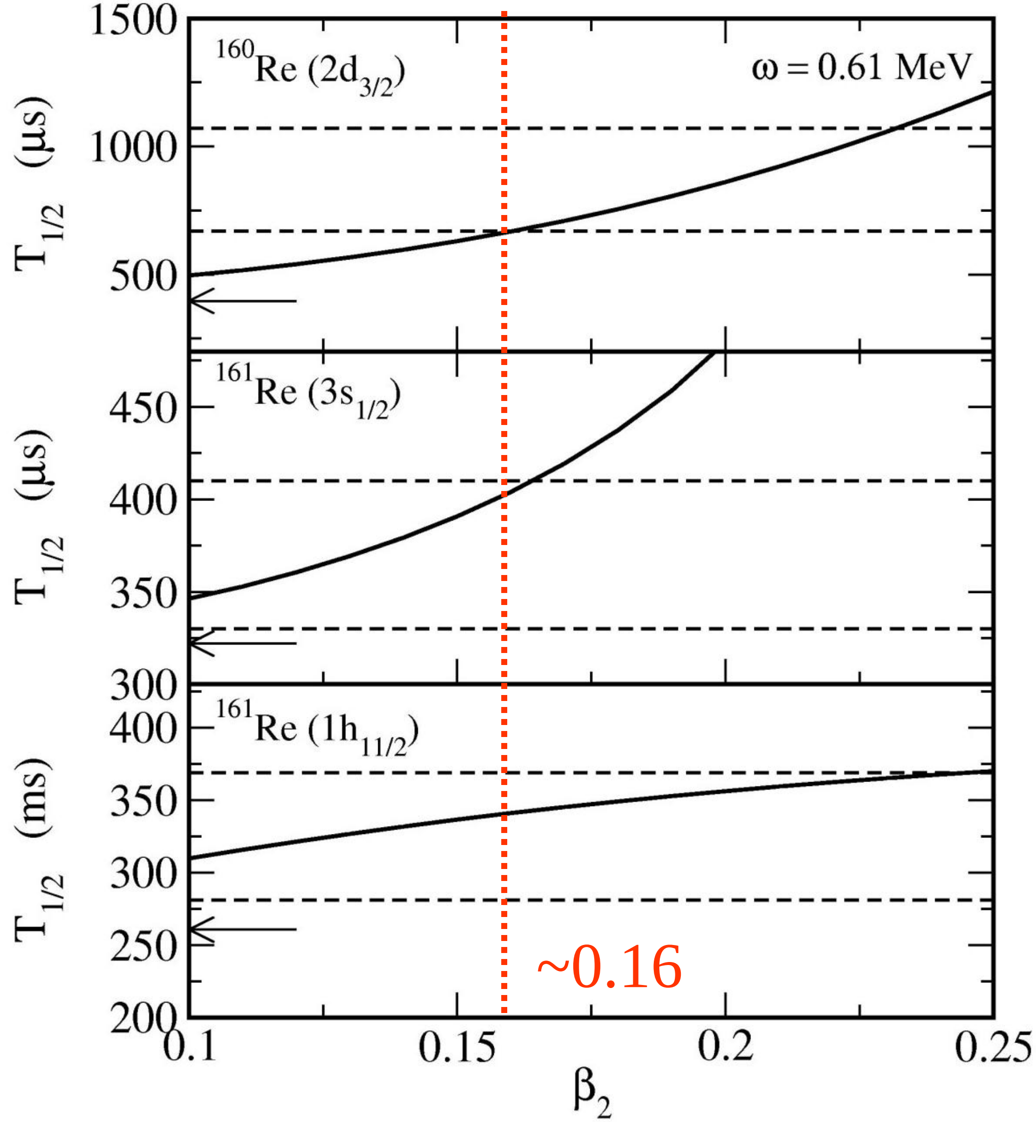


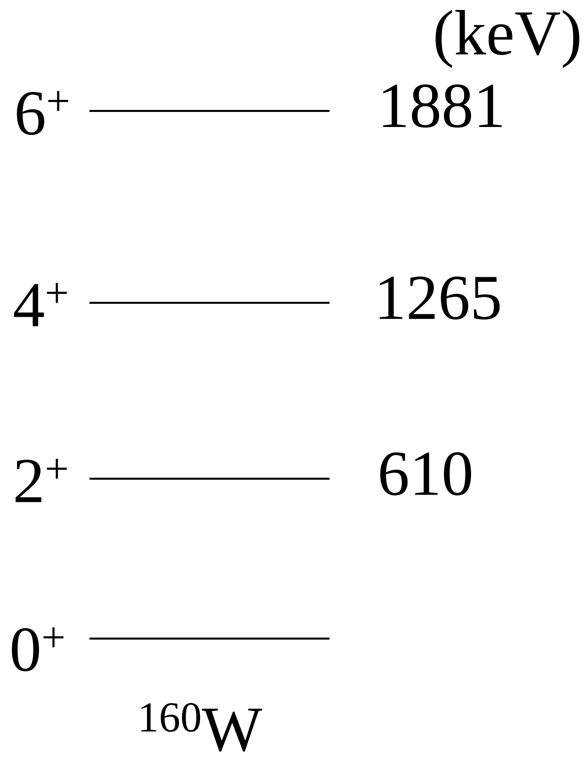
- s 波、h 波に対しては実験と理論がよく一致
- d 波に対しては大きなずれ

原子核の変形や振動を考慮するとずれがほとんどなくなる

- L.S. Ferreira and E. Maglione, PRC61(‘00)021304(R)
- K.Hagino, PRC64(’01)041304(R)
- C.N. Davids and H. Esbensen, PRC64(’01)034317

$$^{160,161}_{75}\mathrm{Re} \rightarrow p + ^{160,159}_{74}\mathrm{W}$$





A. Keenen et al., PRC63('01)064309

K. Hagino, PRC64('01)041304

(参考)ガモフ状態

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2}+V_{\rm cent}(r)+V(r)-E\right]u(r)=0$$

共鳴状態の境界条件として、

- 原点正則
- 遠方で外向き波

を課す。

$$\begin{aligned} u(r) &\sim r^{l+1} & (r\to 0)\\ &\to \mathcal{N}(G_l(kr)+iF_l(kr)) & (r\to\infty)\end{aligned}$$

エネルギーを複素数にしなければならない

$$E\to E_R - i\frac{\Gamma_0}{2} \longleftarrow \text{共鳴幅}$$

E_R ↑ 共鳴エネルギー

（参考）グリーン関数法（非常に幅の狭い共鳴状態）

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2}+V_{\rm cent}(r)+V(r)-\left(E-\frac{i}{2}\Gamma_0\right)\right]u(r)=0$$

まず Γ_0 =0 とし位相のずれが $\delta = \pi/2$ となる散乱状態を求める:

$$\begin{aligned}\phi(r) &\sim r^{l+1} && (r\to 0)\\ &\to \widetilde{\mathcal{N}}G_l(kr) && (r\to\infty)\end{aligned}$$

このときのエネルギーが共鳴のエネルギー。幅は以下のように求める。

<u>グリーン関数法 (Gell-Mann-Goldberger 変換)</u>　　cf. DWBA

$$[\hat{T}+V-E]\Psi=0$$

$$\hookrightarrow\left[\hat{T}+\frac{Z_De^2}{r}-E\right]\Psi=\left(\frac{Z_De^2}{r}-V\right)\Psi$$

$$\hookrightarrow\Psi\sim\frac{1}{\hat{T}+\frac{Z_De^2}{r}-E-i\eta}\left(\frac{Z_De^2}{r}-V\right)\Phi$$

Γ_0 = 0 として求めた
定常波

$$\Psi \sim \frac{1}{\hat{T} + \frac{Z_D e^2}{r} - E - i\eta}\left(\frac{Z_D e^2}{r} - V\right)\Phi$$

外向波　　原点正則

(note)

$$\left\langle \boldsymbol{r} \left| \left(\hat{T} + \frac{Z_D e^2}{r} - E - i\eta\right)^{-1} \right| \boldsymbol{r}' \right\rangle = \frac{2\mu}{k\hbar^2}\frac{O_l(kr_>)}{r_>}\mathcal{Y}_{jl}(\hat{\boldsymbol{r}}_>) \cdot \mathcal{Y}^*_{jl}(\hat{\boldsymbol{r}}_<)\frac{F_l(kr_<)}{r_<}$$

For $r \to \infty,\ u(r) \to \mathcal{N}(G_l(kr) + iF_l(kr))$

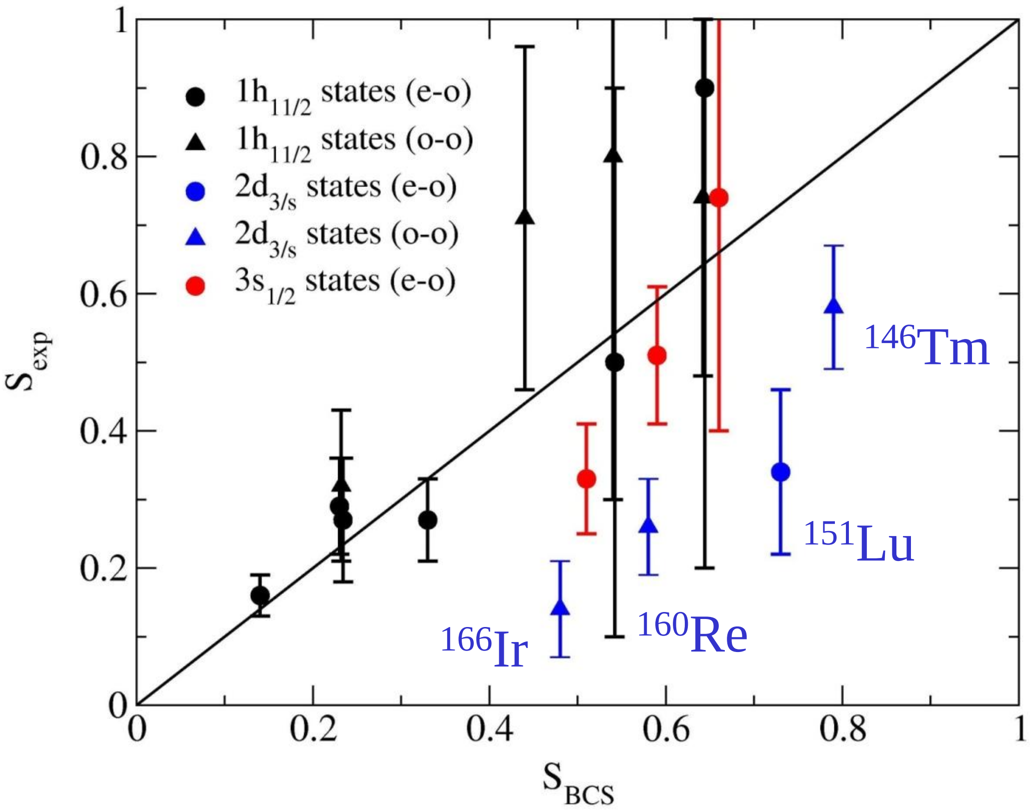
with

$$\boxed{\mathcal{N} = -\frac{2\mu}{\hbar^2 k}\int_0^\infty r^2 dr\, F_l(kr)\left(V(r) - \frac{Z_D e^2}{r}\right)\phi(r)}$$

$\Gamma_0 =$ (outgoing flux) / (normalization):

$$= \frac{\frac{\hbar^2 k}{\mu}\mathcal{N}^2}{\int_0^{r_2} |\phi(r)|^2 r^2 dr}$$

原子核の変形



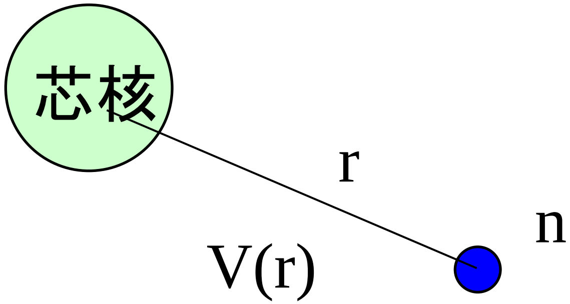
➢*s* 波、*h* 波に対しては実験と理論がよく一致

➢*d* 波に対しては大きなずれ

原子核の変形や振動を考慮するとずれがほとんどなくなる

関連した問題は ^{11}Be にも存在

これまで、芯核は球形として ^{11}Be の最外殻中性子の一粒子運動を議論してきた：

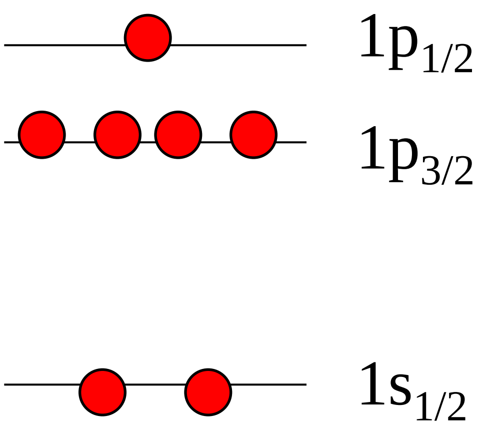


相対運動のハミルトニアン

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V(r)$$

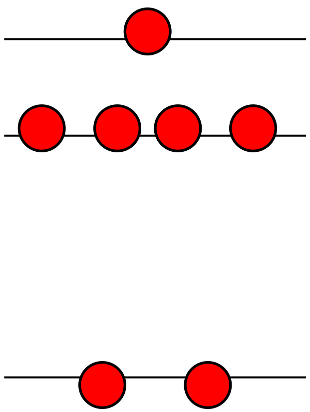
球形のポテンシャル

球形ポテンシャルの準位



^{11}Be の基底状態は $I^\pi = 1/2^-$

球形ポテンシャルの準位



$1p_{1/2}$

$1p_{3/2}$

$1s_{1/2}$

^{11}Be の基底状態は $I^{\pi} = 1/2^{-}$

実際の ^{11}Be の準位

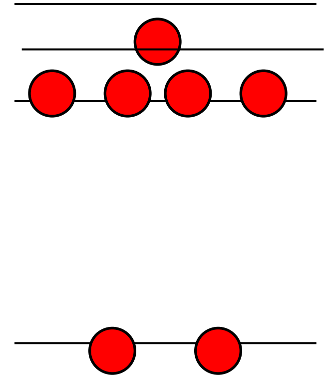
0.32 MeV

$1/2^{-}$

$1/2^{+}$

^{11}Be

?



$1p_{1/2}$

$2s_{1/2}$

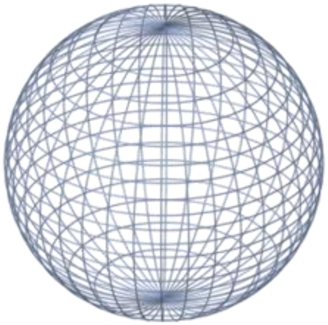
$1p_{3/2}$

$1s_{1/2}$

"parity inversion"

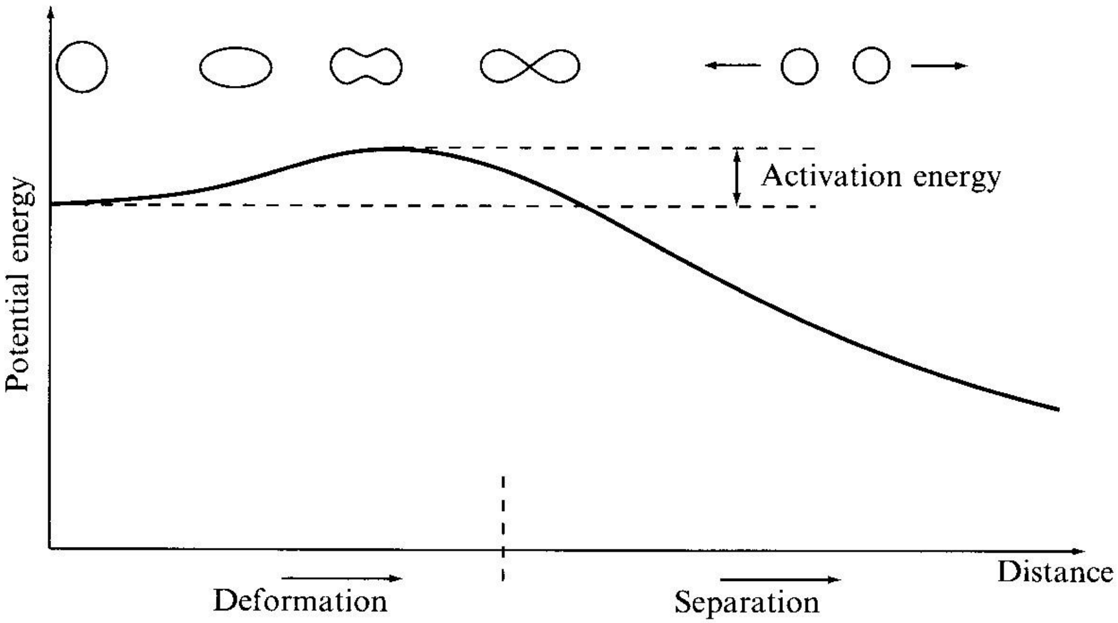
^{11}Be は変形している? ⟶ 変形したポテンシャル中の一粒子運動

(復習)殻補正と原子核の変形



常に球形に極小値を持つ

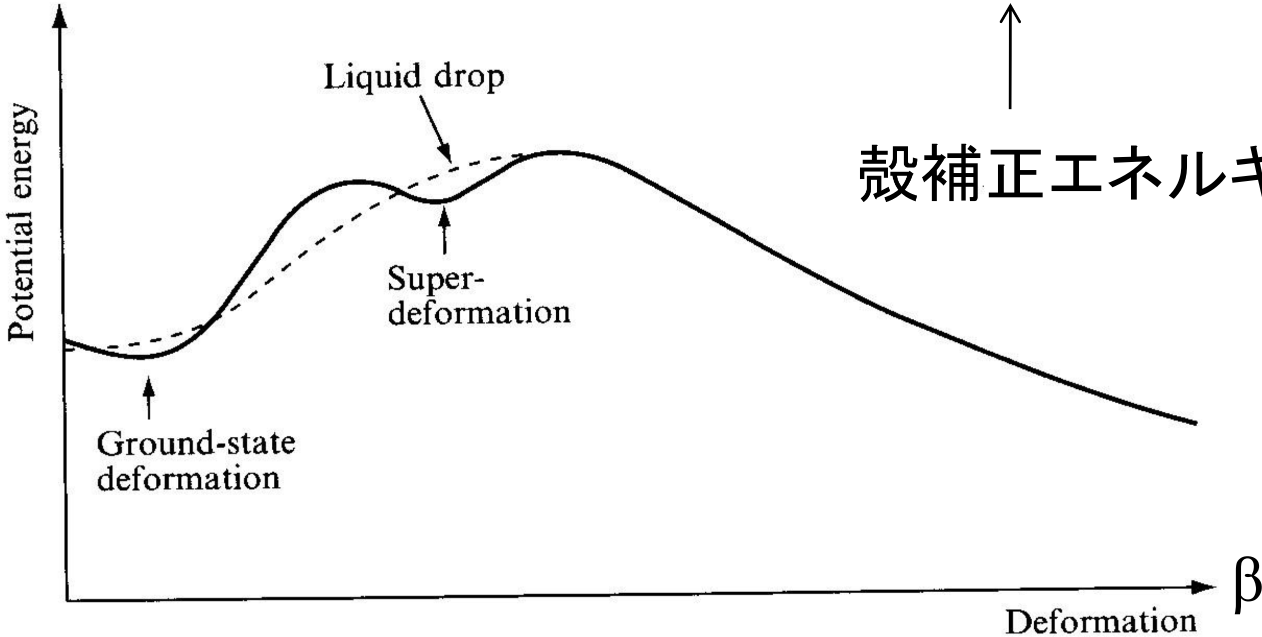
液滴模型による変形エネルギー曲線

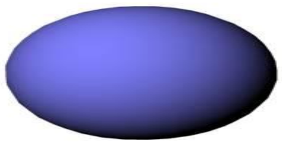


(復習)殻補正と原子核の変形

$$E(\beta) = E_{LDM}(\beta) + E_{\mathrm{shell}}(\beta)$$

殻補正エネルギー:魔法数の起源



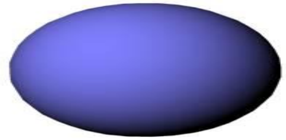


液滴模型のみ ⟶ 常に球形が基底状態

殻補正 ⟶ 変形状態が基底状態になる場合がある

＊対称性の自発的破れ

変形の証拠



^{154}Sm　のスペクトル

0.903 (MeV)	8^+
0.544	6^+
0.267	4^+
0.082	2^+
0	0^+

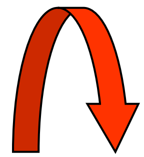
^{154}Sm

$$E_I \sim \frac{I(I+1)\hbar^2}{2\mathcal{J}}$$

cf. 剛体の回転エネルギー（古典力学）

$$E = \frac{1}{2}\mathcal{J}\omega^2 = \frac{I^2}{2\mathcal{J}}$$

$$(I = \mathcal{J}\omega,\ \ \omega = \dot{\theta})$$

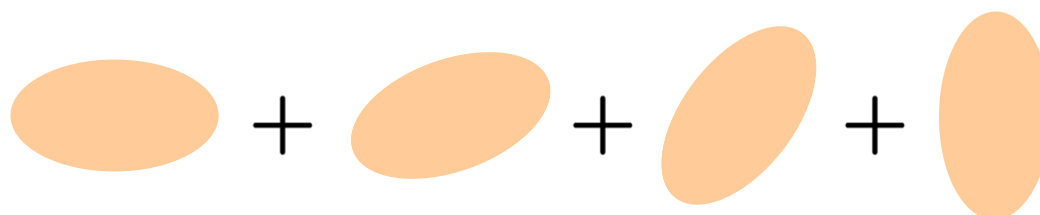


^{154}Sm は変形している

(参考) 0^+ 状態とは?

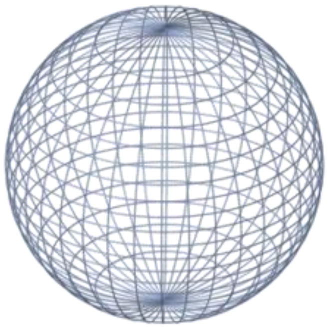
0^+: 空間異方性がない(「球形」)

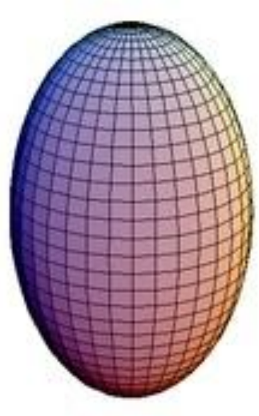
→ すべての向きを同等に混ぜればよい

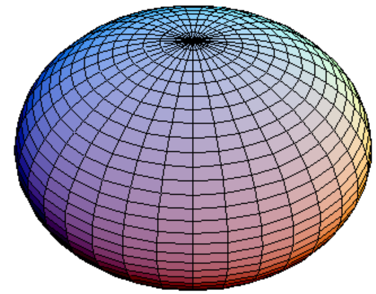


c.f. HF + Angular Momentum Projection

回転楕円体



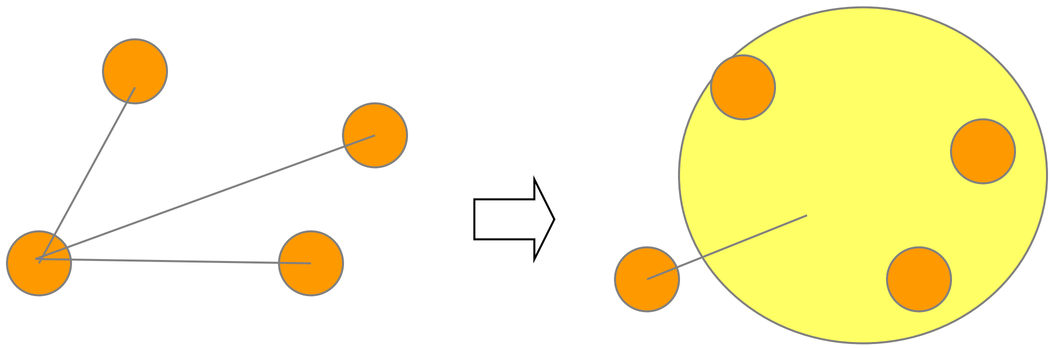




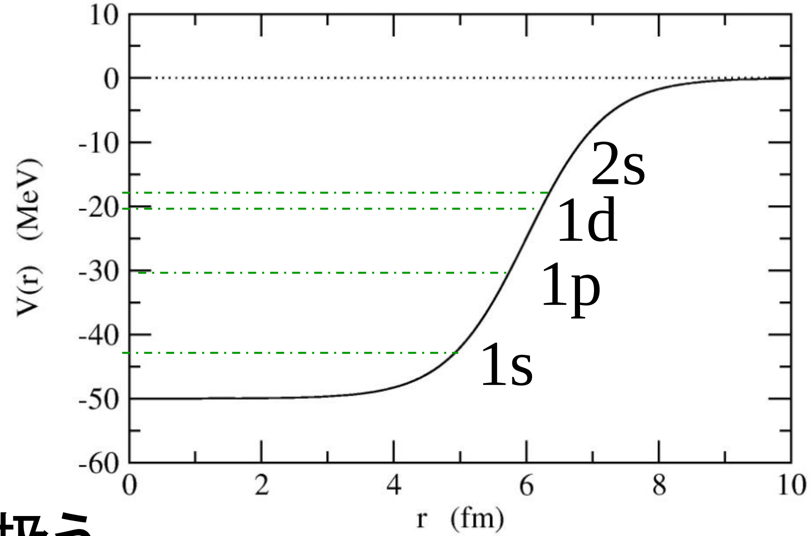
球形　　プロレート　　オブレート　　三軸非対称

殻効果

平均場近似と変形核



Woods-Saxon ポテンシャル



他の核子との相互作用を平均的に取り扱う

⇒ 有効ポテンシャル中の一体問題

← ポテンシャルはエネルギーが最小となるように決める（変分原理の考え方）

$$V(\boldsymbol{r}) \sim \int v(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}'$$

＋反対称化の効果

変分原理　(Rayleigh-Ritz 法)

$$\boxed{\frac{\langle\Psi|H|\Psi\rangle}{\langle\Psi|\Psi\rangle} \geq E_{\mathrm{g.s.}}}$$

(証明)

（わかりやすいように）$E_{\mathrm{gs}} = 0$ となるようにエネルギーの基準をとる

$$|\Psi\rangle = \sum_n C_n |\phi_n\rangle \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{lhs} = \frac{\sum_{n\neq 0} C_n^2 E_n}{\sum_n C_n^2} \geq 0 = E_{\mathrm{g.s.}}$$

応用例：非調和振動子の近似解

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \beta x^4$$

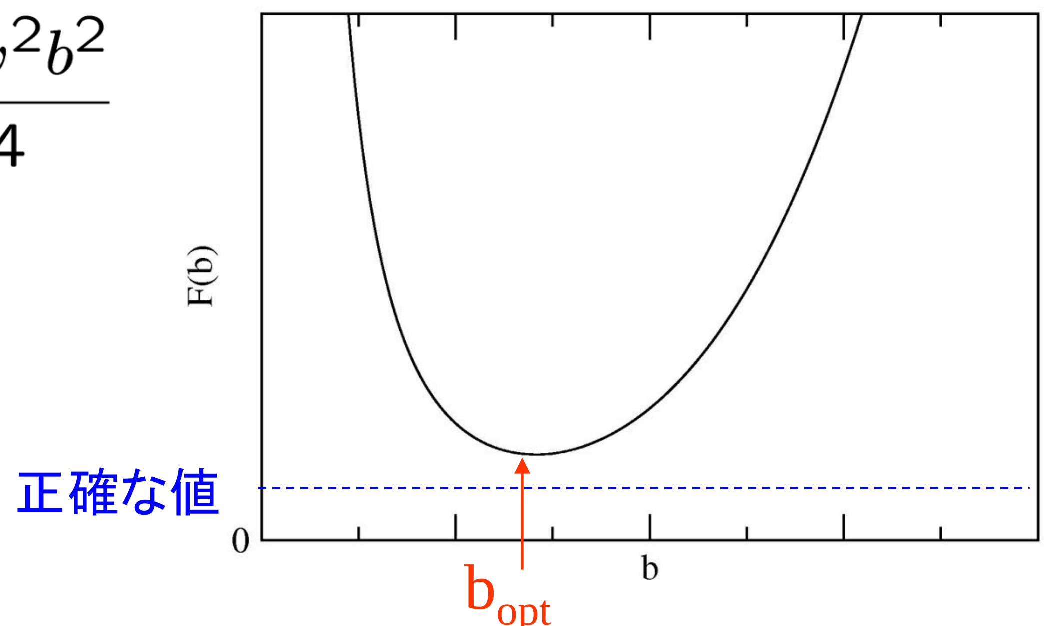
試行関数:

$$\Psi(x) = (\pi b^2)^{-1/4}\,\mathrm{exp}(-x^2/2b^2)$$

(note) if $\beta = 0, \quad b = \sqrt{\hbar/m\omega}$

$$\frac{\langle\Psi|H|\Psi\rangle}{\langle\Psi|\Psi\rangle} = \frac{\hbar^2}{4mb^2} + \frac{m\omega^2 b^2}{4} + \frac{3\beta b^4}{4}$$

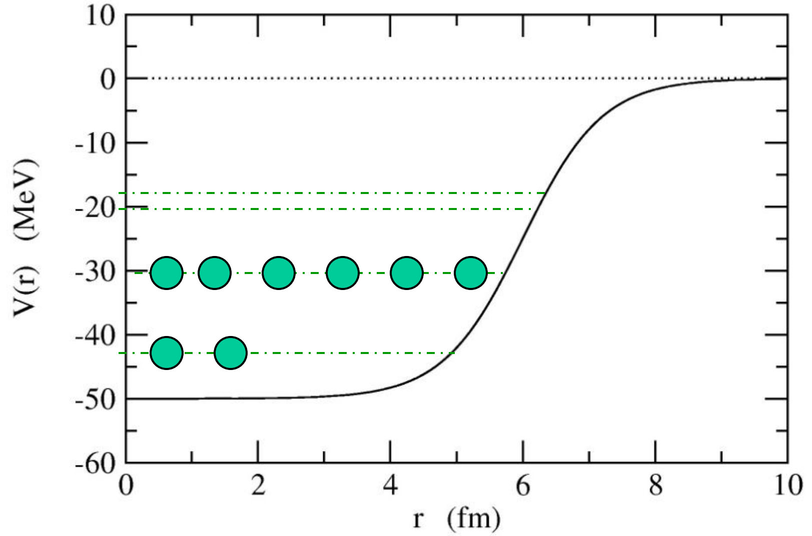
$$\equiv F(b)$$



Hartree-Fock 法

ポテンシャル中の独立粒子運動

エネルギーが低い準位に
下から詰める



$$\Psi(1,2,\cdots,A) = \mathcal{A}[\psi_1(1)\psi_2(2)\cdots\psi_A(A)]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{A!}}\begin{vmatrix} \psi_1(1) & \psi_2(1) & \cdots & \psi_A(1) \\ \psi_1(2) & \psi_2(2) & \cdots & \psi_A(2) \\ \vdots & & & \\ \psi_1(A) & \psi_2(A) & \cdots & \psi_A(A) \end{vmatrix}$$

スレーター行列式: パウリ原理による反対称化

(note)

$$\Psi(1,2) = (\psi_1(1)\psi_2(2) - \psi_1(2)\psi_2(1))/\sqrt{2}$$

多体のハミルトニアン:

$$H = -\sum_{i=1}^{A} \frac{\hbar^2}{2m}\nabla_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j}^{A} v(\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{r}_j)$$

$$\begin{aligned}
\langle \Psi | H | \Psi \rangle &= -\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{i=1}^{A}\int \psi_i^*(\boldsymbol{r})\nabla^2\psi_i(\boldsymbol{r})\,d\boldsymbol{r} \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{i,j}^{A}\int \psi_i^*(\boldsymbol{r})\psi_j^*(\boldsymbol{r}')v(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\psi_i(\boldsymbol{r})\psi_j(\boldsymbol{r}')\,d\boldsymbol{r}d\boldsymbol{r}' \\
&\quad - \frac{1}{2}\sum_{i,j}^{A}\int \psi_i^*(\boldsymbol{r})\psi_j^*(\boldsymbol{r}')v(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\psi_i(\boldsymbol{r}')\psi_j(\boldsymbol{r})\,d\boldsymbol{r}d\boldsymbol{r}'
\end{aligned}$$

ψ_i^* に関して変分: $\psi_i^* \to \psi_i^* + \delta\psi_i^*$ としてもエネルギー期待値が不変

Hartree-Fock 方程式:

$$\boxed{\begin{aligned}
&-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi_i(\boldsymbol{r}) + \sum_j \int \psi_j^*(\boldsymbol{r}')v(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\psi_j(\boldsymbol{r}')\psi_i(\boldsymbol{r})\,d\boldsymbol{r}' \\
&\qquad - \sum_j \int \psi_j^*(\boldsymbol{r}')v(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\psi_j(\boldsymbol{r})\psi_i(\boldsymbol{r}')\,d\boldsymbol{r}' = \epsilon_i\psi_i(\boldsymbol{r})
\end{aligned}}$$

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2\psi_i(\boldsymbol{r}) + V_H(\boldsymbol{r})\psi_i(\boldsymbol{r}) + \int V_F(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\psi_i(\boldsymbol{r}')\,d\boldsymbol{r}' = \epsilon_i\,\psi_i(\boldsymbol{r})}$$

$$\begin{aligned} V_H(\boldsymbol{r}) &= \int v(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\rho_{\mathsf{HF}}(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}' \\ \widehat{V}_F(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') &= -\rho_{\mathsf{HF}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')v(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \end{aligned}$$

直接 (Hartree) 項

交換 (Fock) 項
[非局所ポテンシャル]

$$\begin{aligned} \rho_{\mathsf{HF}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') &= \sum_i \psi_i^*(\boldsymbol{r}')\psi_i(\boldsymbol{r}) \\ \rho_{\mathsf{HF}}(\boldsymbol{r}) &= \sum_i \psi_i^*(\boldsymbol{r})\psi_i(\boldsymbol{r}) = \rho_{\mathsf{HF}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}) \end{aligned}$$

Iteration

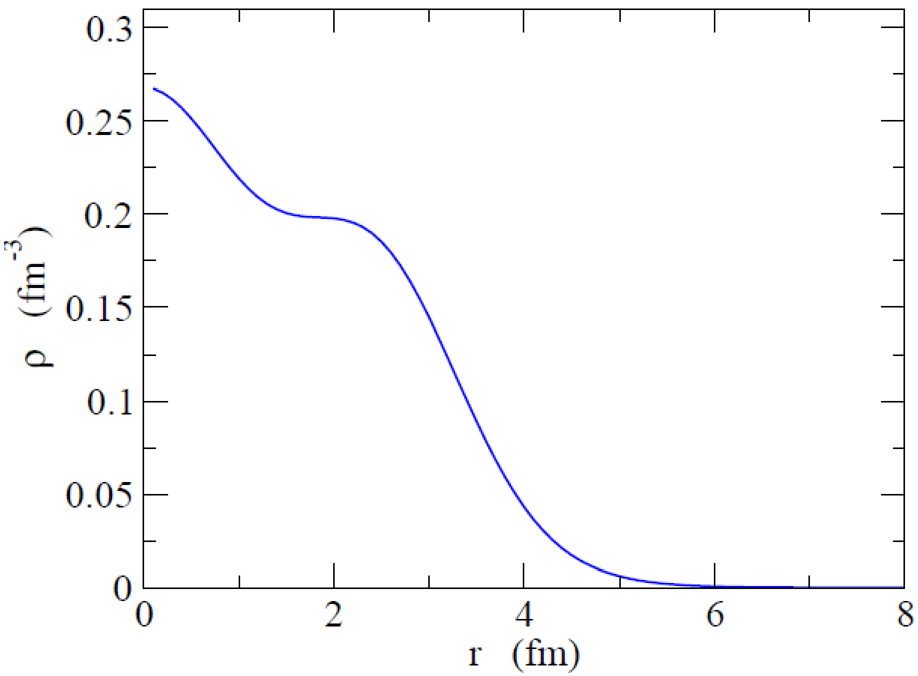
V_{HF} は波動関数に依存

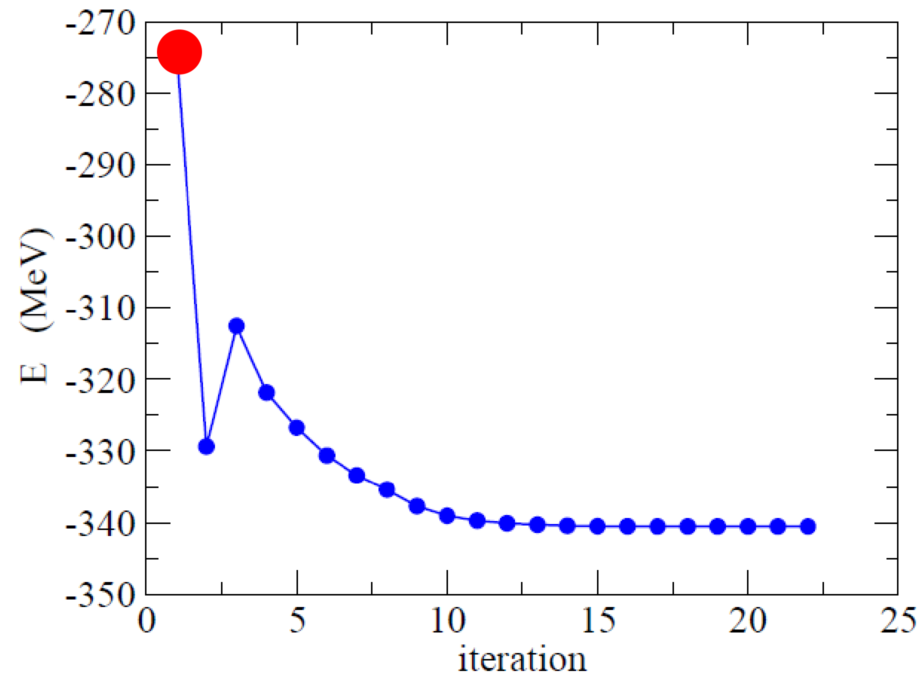
Iteration（繰り返し）:

$$\{\psi_i\} \rightarrow \rho_{\mathsf{HF}} \rightarrow V_{\mathsf{HF}} \rightarrow \{\psi_i\} \rightarrow \cdots$$

自己無撞着 (self-consistent) な解

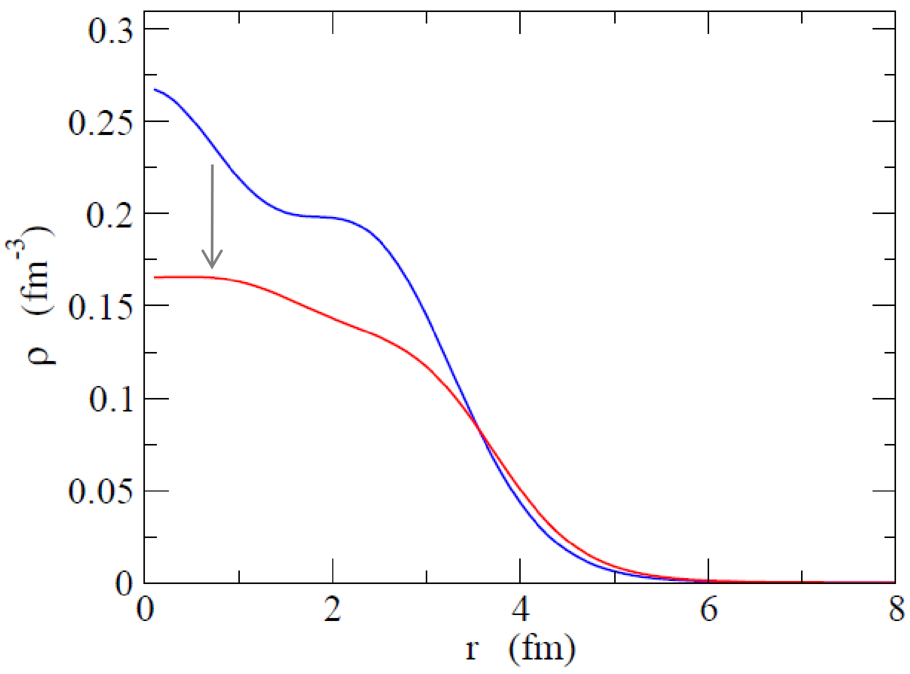
^{40}Ca に対する Skyrme-Hartree-Fock 計算

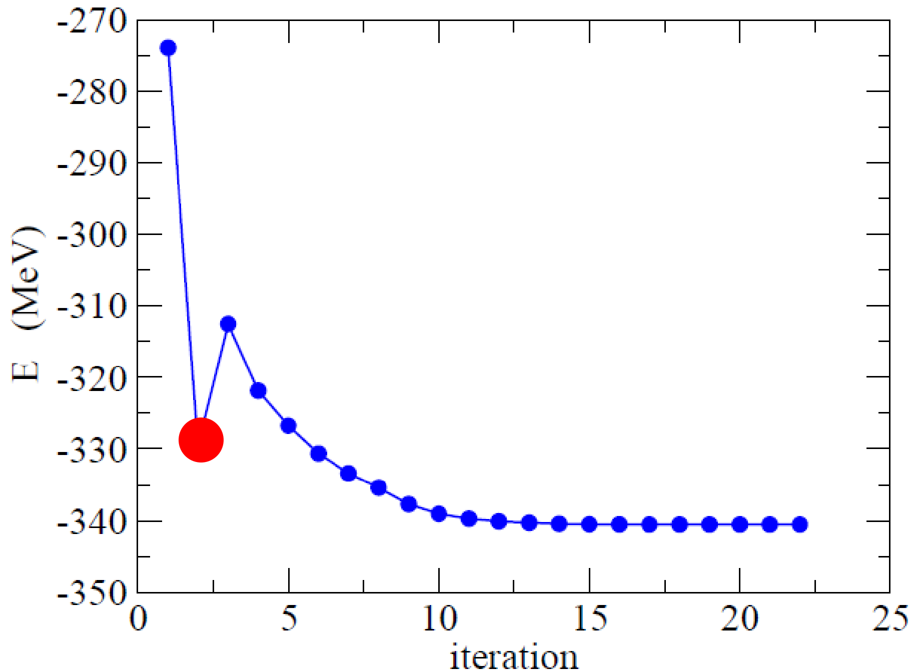




核子間の相互作用を考慮して密度を最適化

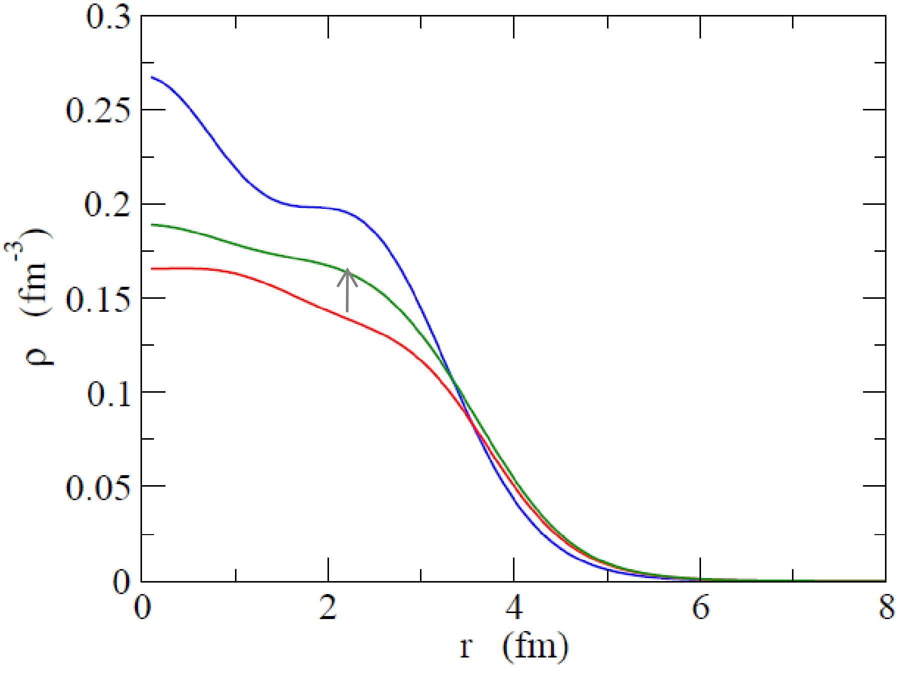
^{40}Ca に対する Skyrme-Hartree-Fock 計算

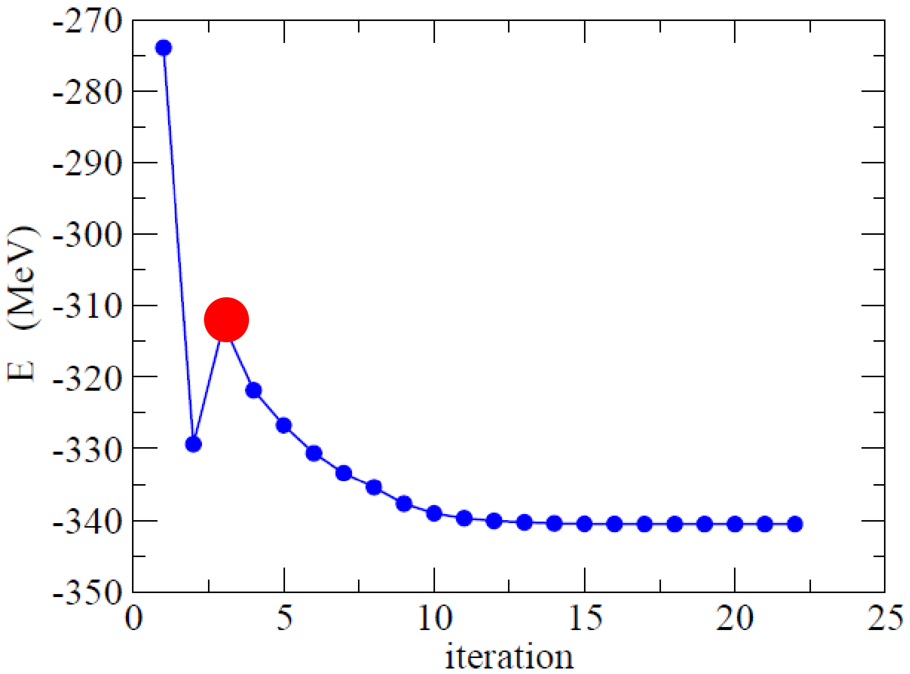




核子間の相互作用を考慮して密度を最適化

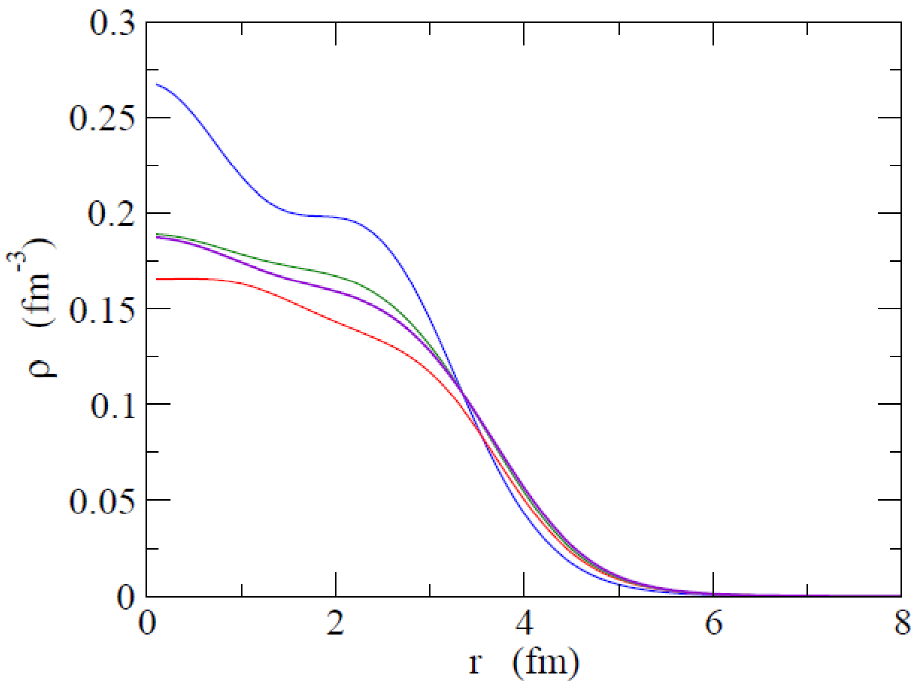
^{40}Ca に対する Skyrme-Hartree-Fock 計算

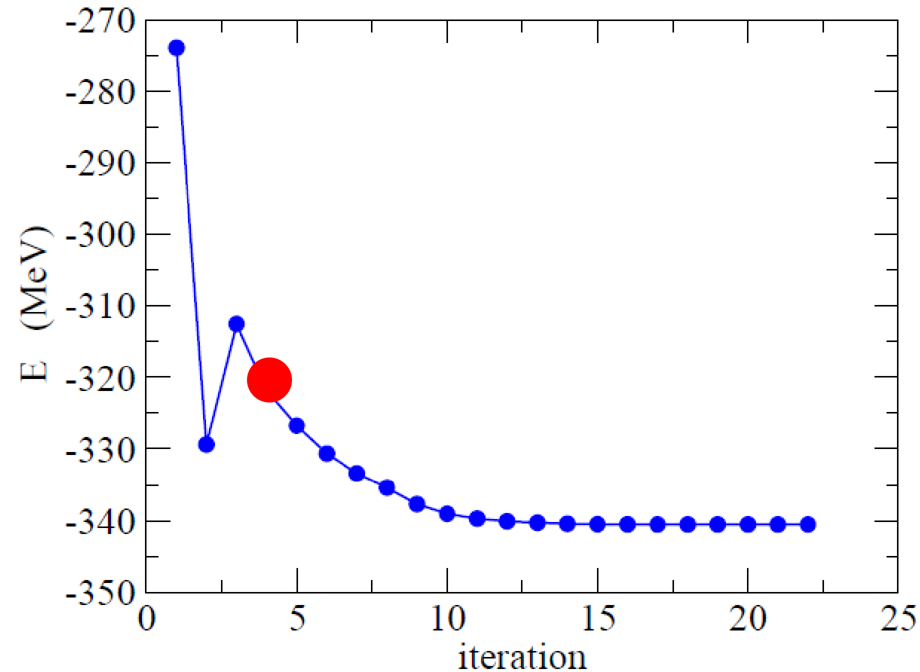




核子間の相互作用を考慮して密度を最適化

^{40}Ca に対する Skyrme-Hartree-Fock 計算





核子間の相互作用を考慮して密度を最適化

→ 自動的に最適な形、密度が決まる

Hartree-Fock 法と対称性

$$
\begin{aligned}
H &= -\sum_{i=1}^{A}\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j}^{A} v(\boldsymbol{r}_i,\boldsymbol{r}_j) \\
&= \underbrace{\sum_{i=1}^{A}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}_i^2 + V_{\mathrm{HF}}(i)\right)}_{h_{\mathrm{HF}}} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i,j}^{A} v(\boldsymbol{r}_i,\boldsymbol{r}_j) - \sum_i V_{\mathrm{HF}}(i)}_{V_{\mathrm{res}}}
\end{aligned}
$$

残留相互作用

Slater 行列式

$$
\Psi_{\mathrm{HF}}(1,2,\cdots,A) = \mathcal{A}[\psi_1(1)\psi_2(2)\cdots\psi_A(A)]
$$

h_{HF} の固有状態。ただし、H の固有状態ではない。

Ψ_{HF} : H の持つ対称性を必ずしも持つ必要はない。

“対称性が破れた解”

“対称性の自発的破れ”

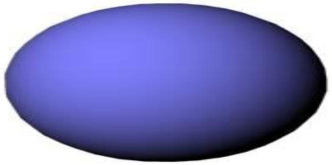
対称性の破れ

利点: 独立粒子の単純な描像を保ったまま主要な多体相関を取り入れることができる

不利な点: 実験と比べるためには(原理的には)破れた対称性を回復する必要がある。

- 並進対称性: HF では常に破れる
- 回転対称性

変形解



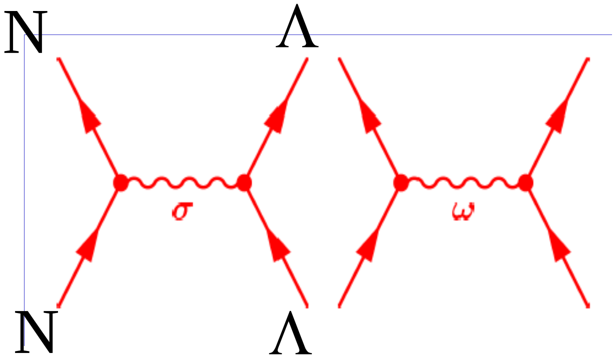
エネルギーを最適化するように原子核の形が自動的に決まる

応用例:変形したハイパー核に対するRMF計算

ハイパー核:原子核+Λ粒子

Λ粒子の原子核の形に対する影響は?

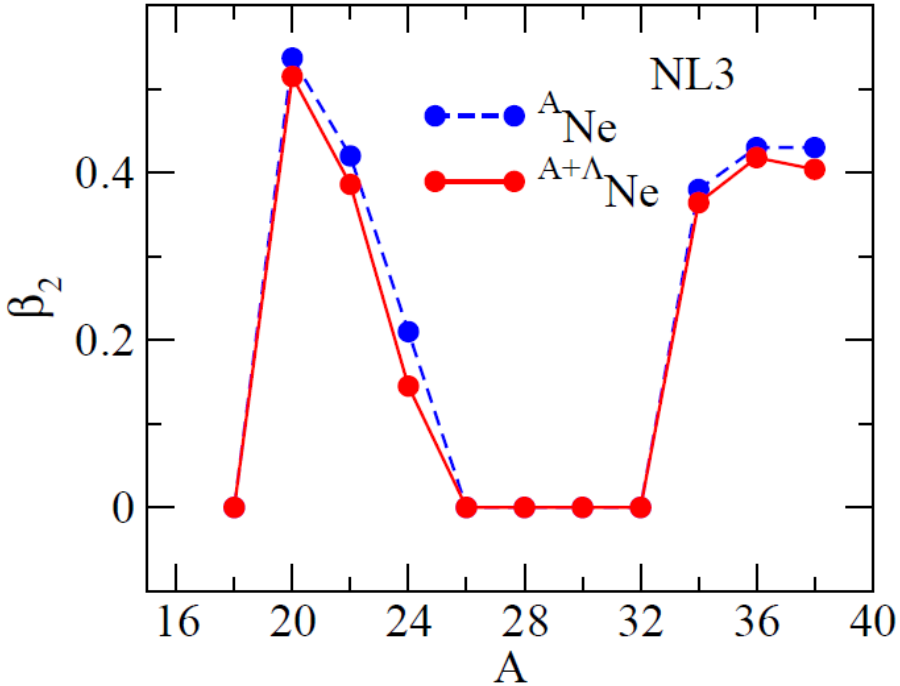
相対論的平均場理論



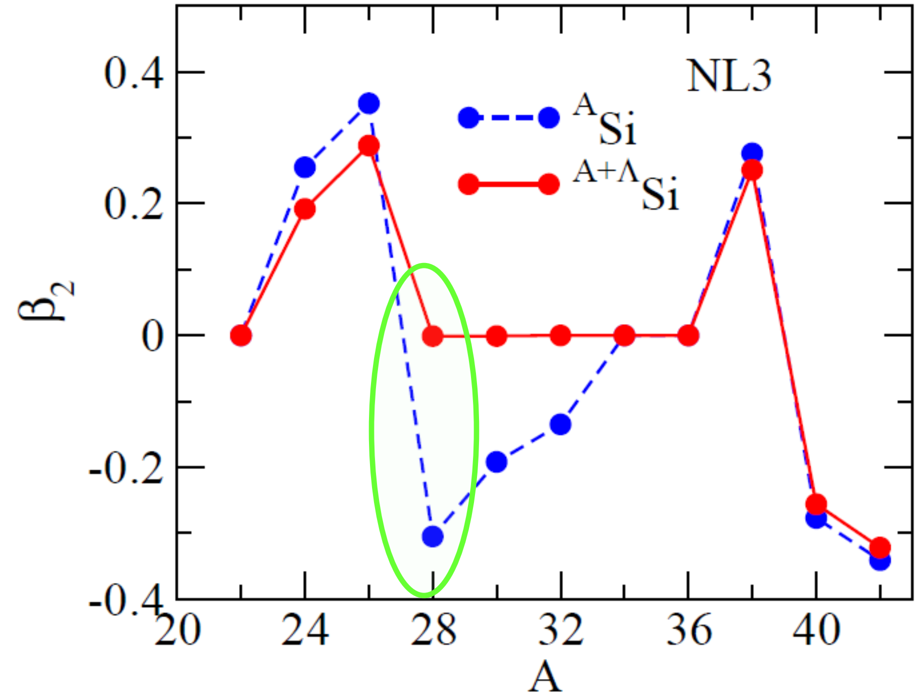
中間子交換による核子間力

Λσ and Λω couplings

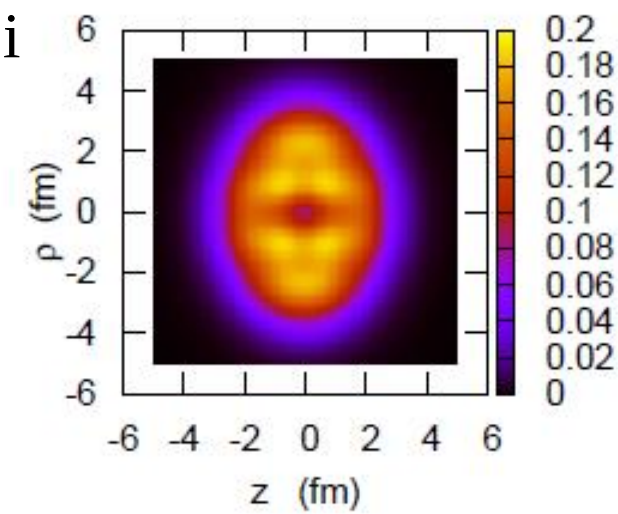
Ne isotopes



Si isotopes

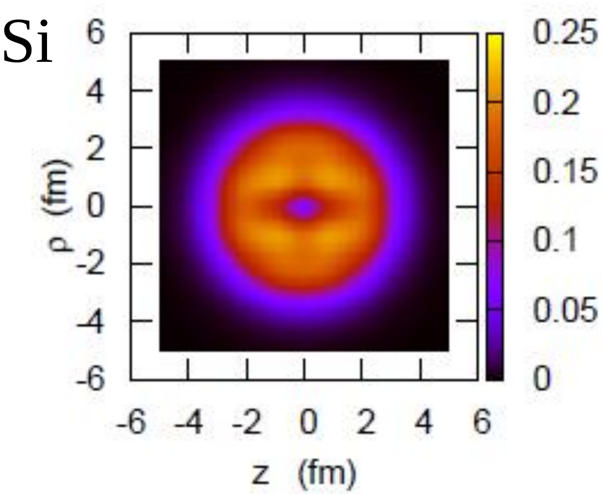


^{28}Si



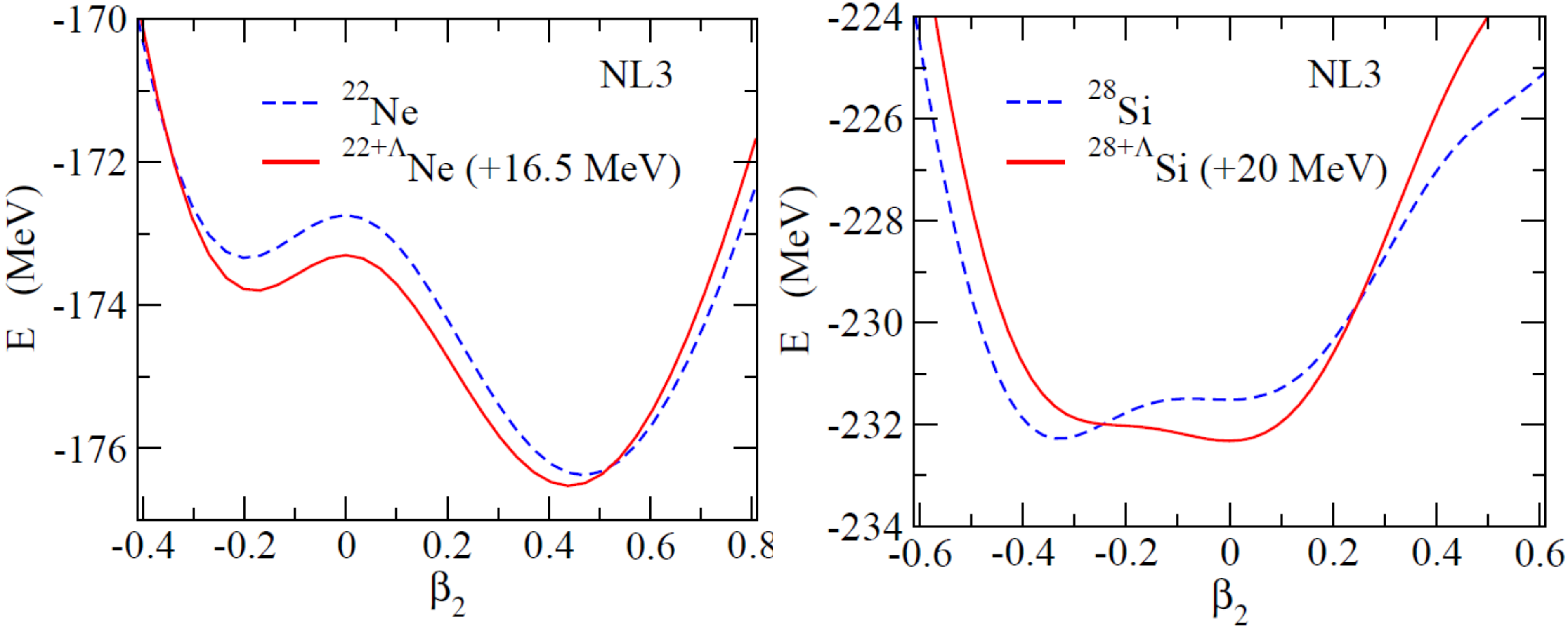
$\xrightarrow{\Lambda}$

$^{29}_{\Lambda}$Si



Myaing Thi Win and K.Hagino, PRC78('08)054311

Potential energy surface



Myaing Thi Win and K.H., PRC78('08)054311

2008年のノーベル物理学賞

“for the discovery of the mechanism of spontaneous broken symmetry in subatomic physics”

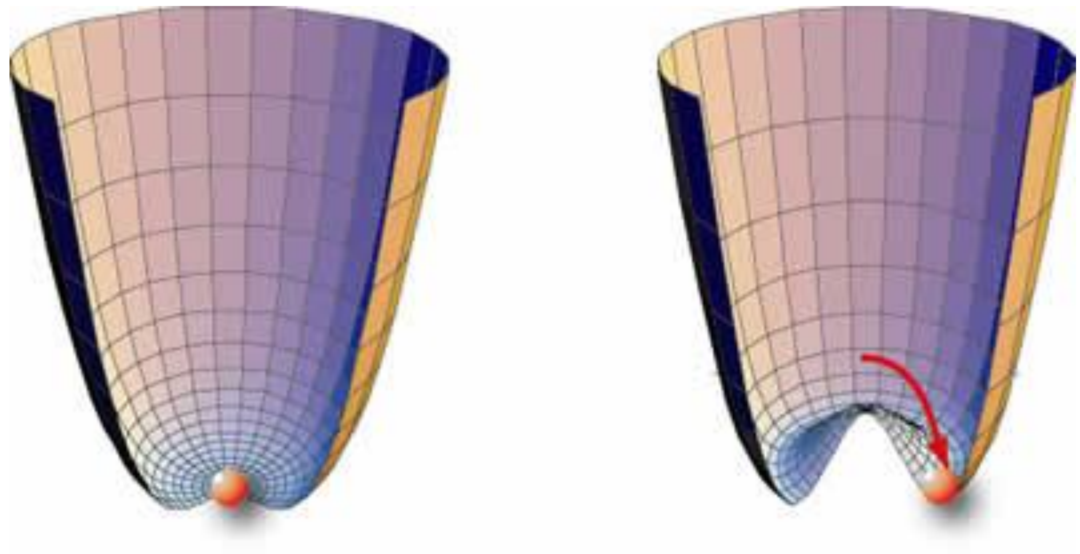
南部陽一郎

“for the discovery of the origin of the broken symmetry which predicts the existence of at least three families of quarks in nature”

小林誠、益川敏英

対称性の自発的破れ

ハミルトニアンが持つ対称性を、真空が持たない（破る）。



（対称性を回復するように
南部・ゴールドストン・モード（ゼロ・モード）
が発生）

休憩(頭の体操)

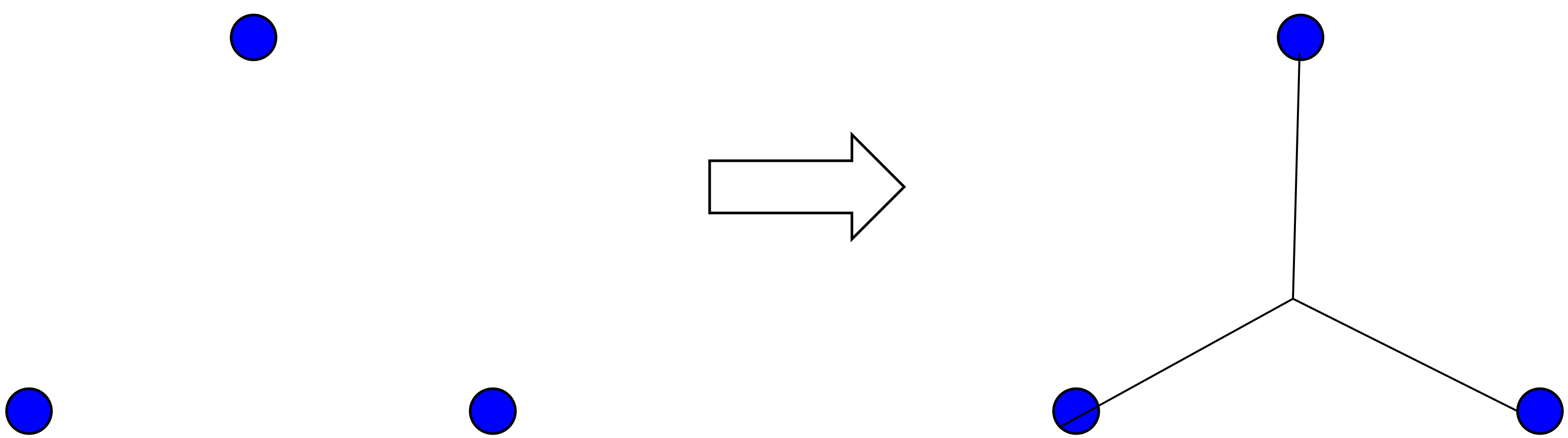
頂点が何個かある

- 頂点を適当な線でつなぐ
- 何本引いてもよい
- 線は交わってもよい
- 一つの点から線を通って全ての点にいけるようにする

線の長さの合計が最短になる線のひき方は?

例)正三角形の場合

対称となるように引く



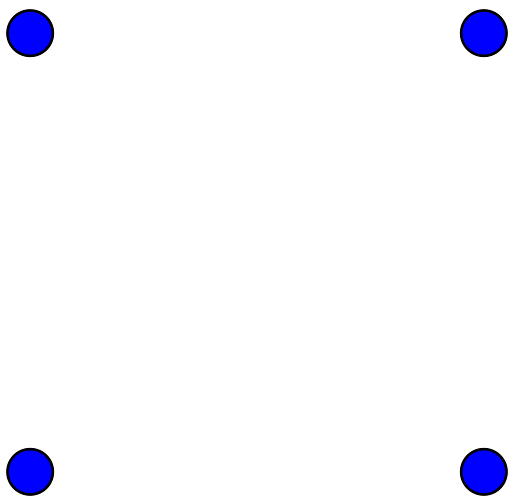
休憩(頭の体操)

頂点が何個かある

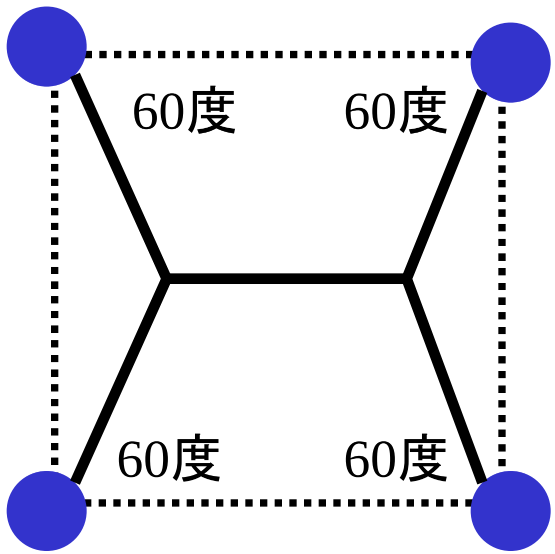
- 頂点を適当な線でつなぐ
- 何本引いてもよい
- 線は交わってもよい
- 一つの点から線を通って全ての点にいけるようにする

線の長さの合計が最短になるひき方は?

(問題)正方形の場合は?



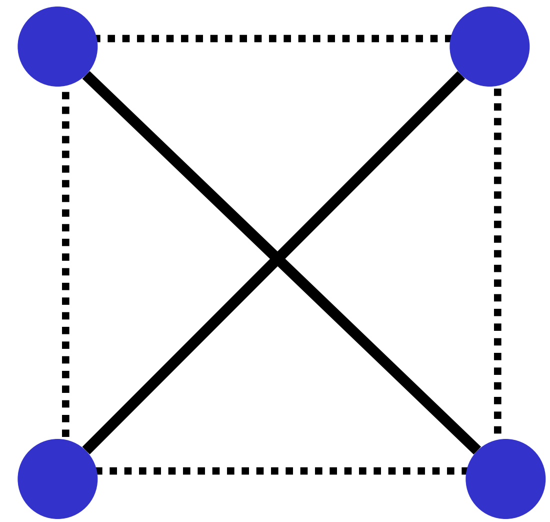
（答え）



長さ

$$4 \times \frac{1}{\sqrt{3}} + \left(1 - 2 \times \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$$
$$= 1 + \sqrt{3}$$
$$= 2.732 \cdots$$

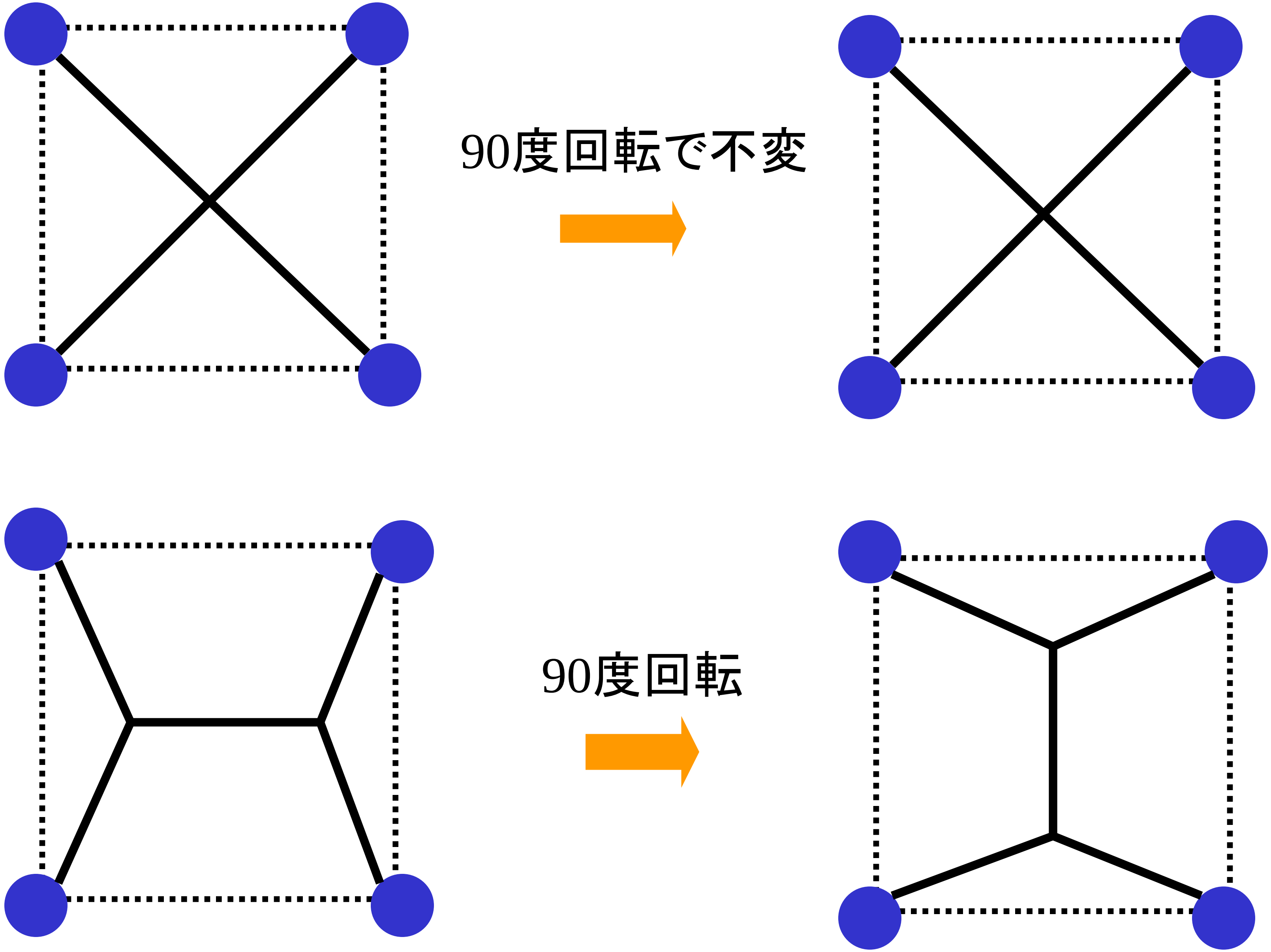
cf.



長さ

$$2 \times \sqrt{2} = 2.828 \cdots$$

参考：
小池武志「原子核研究」Vol. 52 No. 2, p. 14



対称性の自発的破れの好例

スライド：小池武志氏（東北大学）

変形ポテンシャル中の一粒子運動

$$V(\boldsymbol{r}) \sim \int v(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}' \sim -g\rho(\boldsymbol{r}) \qquad \text{if} \quad v(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -g\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

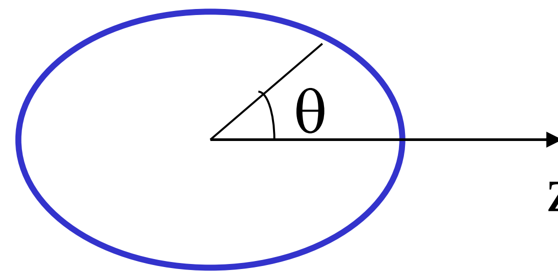
密度分布が変形すると、平均場ポテンシャルも同じように変形

(note) 軸対称な回転楕円体の半径: $R(\theta) = R_0(1+\beta_2 Y_{20}(\theta))$

Woods-Saxon ポテンシャル

$V(r) = -V_0/[1+\exp((r-R_0)/a)]$

の半径 R_0 を $R(\theta)$ に変えると



変形Woods-Saxon ポテンシャル

$$\boxed{\begin{aligned} V(r,\theta) &= -V_0/[1+\exp((r-R_0-R_0\beta_2 Y_{20}(\theta))/a] \\ &\sim V_0(r) - \beta_2 R_0 \frac{dV_0}{dr} Y_{20}(\theta) + \cdots \end{aligned}}$$

変形ポテンシャル中の一粒子運動

変形Woods-Saxon ポテンシャル

$$\boxed{\begin{aligned} V(r,\theta) &= -V_0/[1+\exp((r-R_0-R_0\beta_2 Y_{20}(\theta))/a] \\ &\sim V_0(r) - \beta_2 R_0 \frac{dV_0}{dr} Y_{20}(\theta) + \cdots \end{aligned}}$$

ポテンシャルが回転対称性を持たない

$\longrightarrow$ 角運動量がいい量子数にならない
（保存しない）

■Y_{20}の項の効果を1次の摂動論を用いて考察してみよう

（復習）1次の摂動論

$$H = H_0 + H_1$$

H_0 の固有値、固有状態がわかっているとする:

$$H_0|\phi_n^{(0)}\rangle = E_n^{(0)}|\phi_n^{(0)}\rangle$$

H_1 があることによって、固有値、固有関数は次のように変化する:

$$\begin{aligned} E_n &= E_n^{(0)} + \langle\phi_n^{(0)}|H_1|\phi_n^{(0)}\rangle + \cdots \\ |\phi_n\rangle &= |\phi_n^{(0)}\rangle + \sum_{m\neq n} \frac{\langle\phi_m^{(0)}|H_1|\phi_n^{(0)}\rangle}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}|\phi_m\rangle + \cdots \end{aligned}$$

変形ポテンシャル中の一粒子運動

変形Woods-Saxon ポテンシャル

$$\boxed{V(r,\theta) \sim V_0(r) - \beta_2 R_0 \frac{dV_0}{dr} Y_{20}(\theta) + \cdots}$$

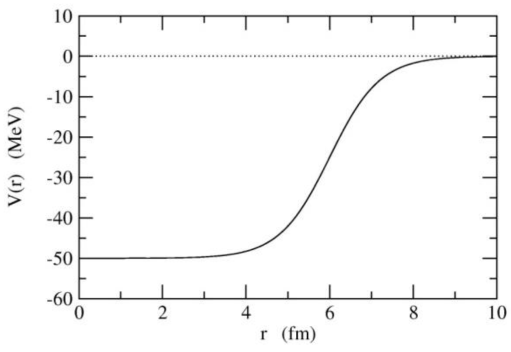
■Y_{20}の項の効果を1次の摂動論を用いて考察してみよう

β=0（球形ポテンシャル）の時の固有関数: $\psi_{nlK}(\boldsymbol{r}) = R_{nl}(r) Y_{lK}(\hat{\boldsymbol{r}})$

固有値: E_{nl} （K には依存しない）

エネルギーの変化分:

$$\begin{aligned} E_{nl} &\rightarrow E_{nl} + \langle \psi_{nlK} | \Delta V | \psi_{nlK} \rangle \\ &= E_{nl} - \beta_2 R_0 \underbrace{\left[\int_0^\infty r^2 dr \frac{dV_0}{dr} (R_{nl}(r))^2 \right]}_{\text{正の量}} \cdot \underbrace{\langle Y_{lK} | Y_{20} | Y_{lK} \rangle}_{\propto\, -(3K^2 - l(l+1))} \end{aligned}$$



変形ポテンシャル中の一粒子運動

変形Woods-Saxon ポテンシャル

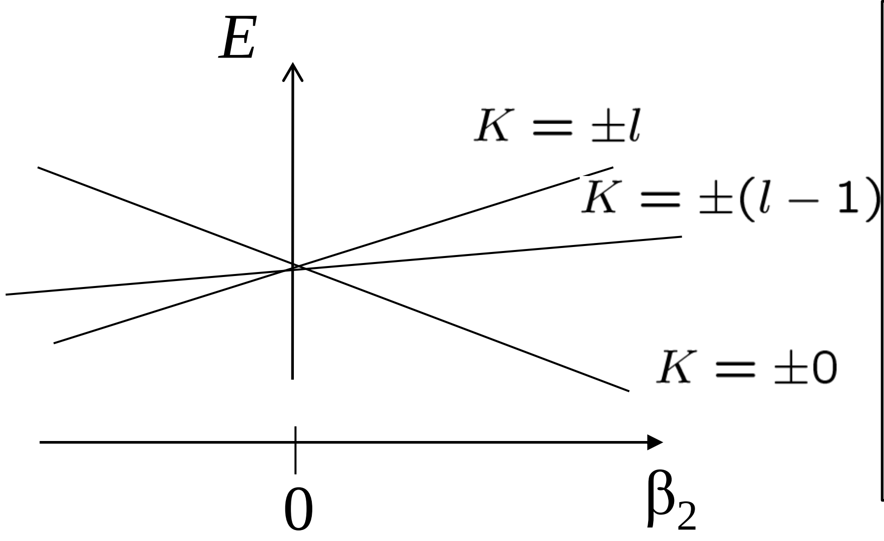
$$\psi_{nlK}(\boldsymbol{r}) = R_{nl}(r)Y_{lK}(\hat{\boldsymbol{r}})$$

$$\boxed{V(r,\theta) \sim V_0(r) - \beta_2 R_0 \frac{dV_0}{dr} Y_{20}(\theta) + \cdots}$$

■Y_{20}の項の効果を1次の摂動論を用いて考察してみよう

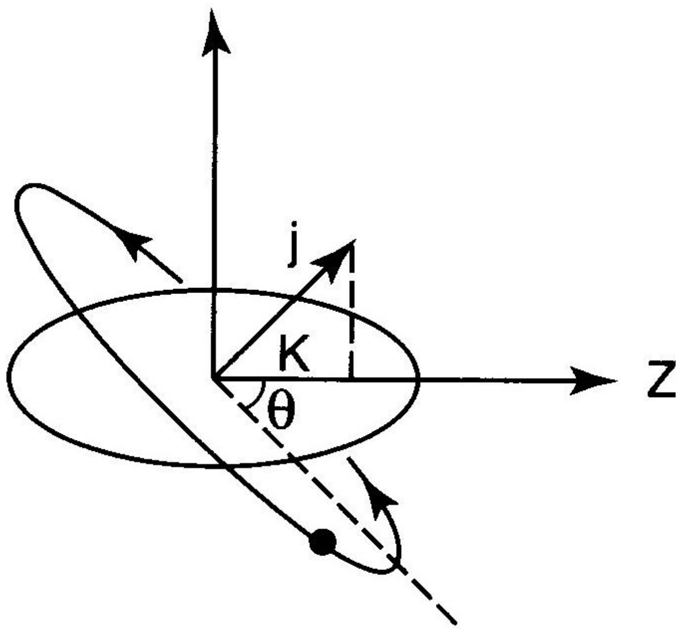
エネルギーの変化分:

$$E_{nl} \;\to\; E_{nl} + \alpha_{nl}\,\beta_2\,(3K^2 - l(l+1)) \qquad (\alpha_{nl} > 0)$$

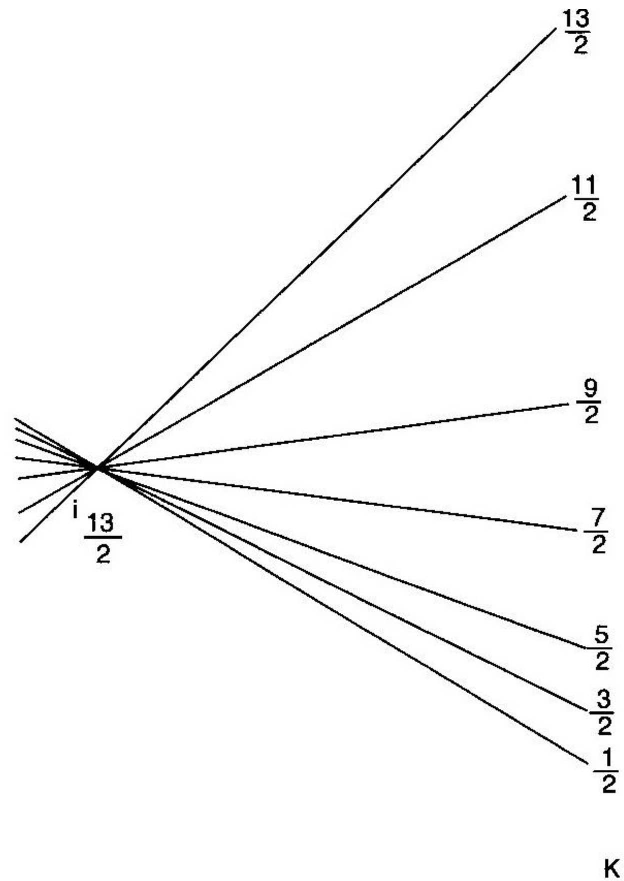


- K ごとにエネルギー変化が異なる（縮退が解ける）
- $\beta_2 > 0$ では K が小さいほどエネルギーが低くなる。
- $\beta_2 < 0$ ではその逆
- K と $-K$ は縮退する

幾何学的解釈



$\sin\theta \sim K / j$



- K は角運動量ベクトルの z 軸への射影
- 核子の軌道は角運動量ベクトルに垂直な平面内
- プロレート変形の場合、小さな K ほど長軸に沿って運動。
- 従ってより引力を感じてエネルギーが下がる。
- 大きな K は短軸に沿って運動し、エネルギーを損する。

変形ポテンシャル中の一粒子運動

$$\boxed{V(r,\theta) \sim V_0(r) - \beta_2 R_0 \frac{dV_0}{dr} Y_{20}(\theta) + \cdots}$$

■Y_{20}の項の効果を1次の摂動論を用いて考察してみよう

次に波動関数の変化分: $|\phi_n\rangle = |\phi_n^{(0)}\rangle + \sum_{m\neq n} \frac{\langle \phi_m^{(0)}|H_1|\phi_n^{(0)}\rangle}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} |\phi_m\rangle + \cdots$

β=0（球形ポテンシャル）の時の固有関数: $\psi_{nlK}(\boldsymbol{r}) = R_{nl}(r) Y_{lK}(\hat{\boldsymbol{r}})$

$$\psi_{nlK} \to \psi_{nlK} + \sum_{n'l'K'} \frac{\langle \psi_{n'l'K'}|\Delta V|\psi_{nlK}\rangle}{E_{nl} - E_{n'l'}} \psi_{n'l'K'}$$

$\langle Y_{l'K'}|Y_{20}|Y_{lK}\rangle$ でつながる状態が波動関数に混ざる

- l は保存せず、様々な l が波動関数に混ざる
- 軸対称変形 (Y_{20}) の場合、K は変化しない ($K' = K$)、すなわち保存量
- Y_{20} はパリティを変えない。従って、パリティも保存量。

変形ポテンシャル中の一粒子運動

$$\boxed{V(r,\theta) \sim V_0(r) - \beta_2 R_0 \frac{dV_0}{dr} Y_{20}(\theta) + \cdots}$$

一般的には、

$$\Psi_K(\boldsymbol{r}) = \sum_l \frac{u_{lK}(r)}{r} Y_{lK}(\hat{\boldsymbol{r}})$$

＊u_{lK}を球形ポテンシャルの固有関数で展開することも可能。その場合

$$u_{lK}(r) = \sum_n \alpha_{nlK}\, u_{nl}(r)$$

例）

$$\begin{aligned}
|K^\pi\rangle = \left|0^+\right\rangle &= A_s\,|Y_{00}\rangle + A_d\,|Y_{20}\rangle + A_g\,|Y_{40}\rangle + \cdots \\
\left|1^+\right\rangle &= B_d\,|Y_{21}\rangle + B_g\,|Y_{41}\rangle + \cdots \\
\left|0^-\right\rangle &= C_p\,|Y_{10}\rangle + C_f\,|Y_{30}\rangle + C_h\,|Y_{50}\rangle + \cdots
\end{aligned}$$

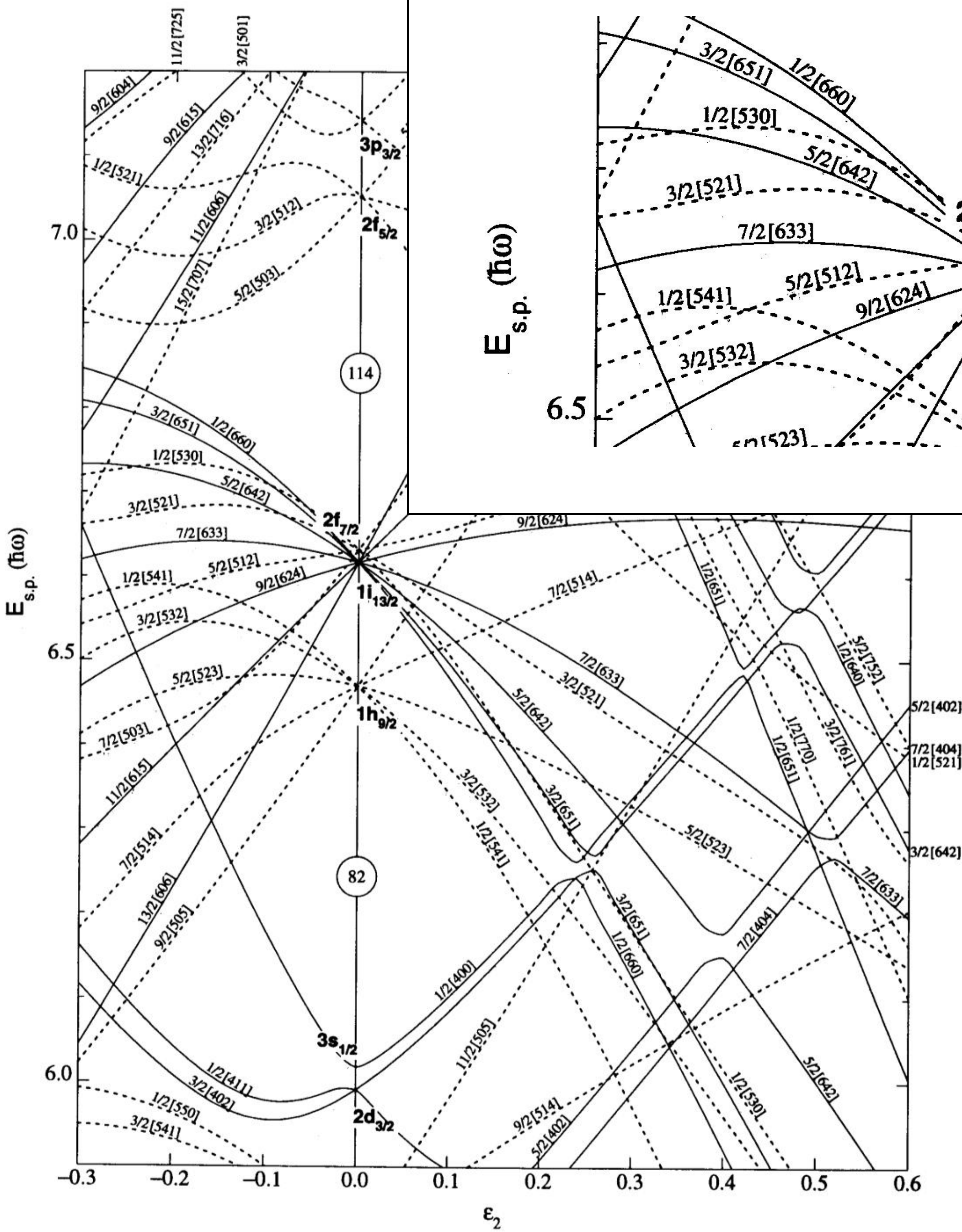
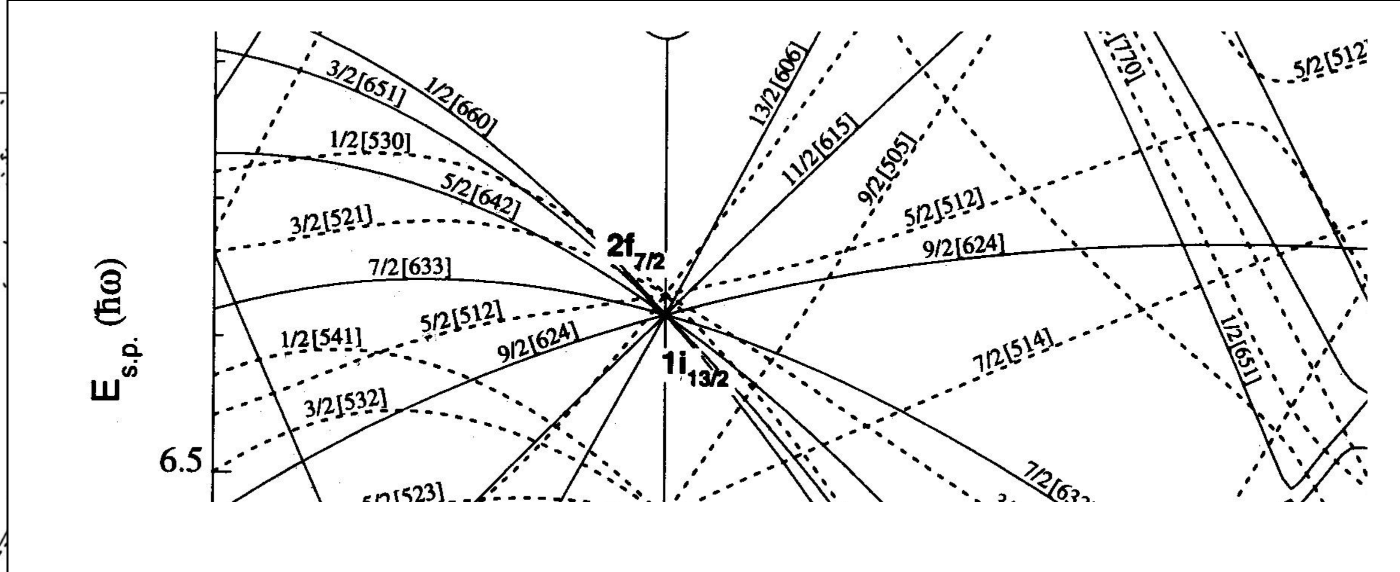


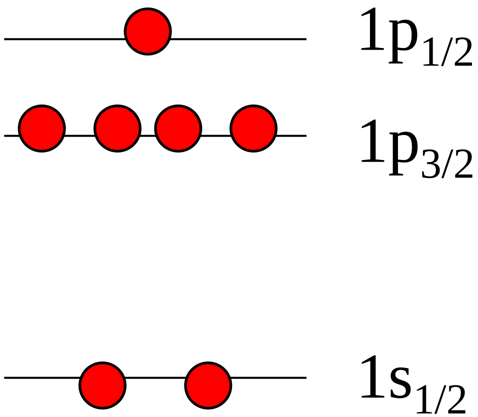
Figure 13. Nilsson diagram for protons, $Z \geq 82$ ($\varepsilon_4 = \varepsilon_2^2/6$).



Nilsson 図

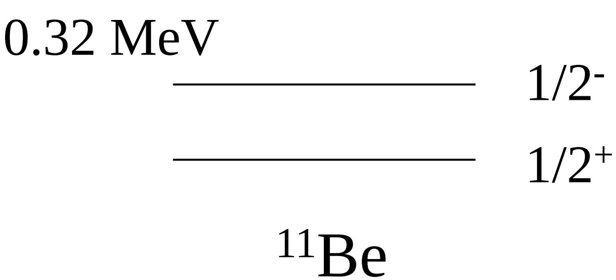
^{11}Be の問題に戻ると。。。。

球形ポテンシャルの準位

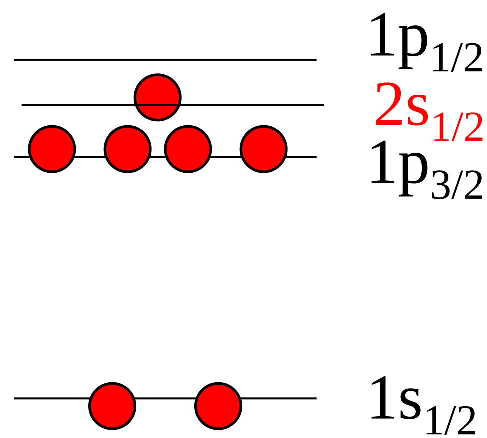


^{11}Be の基底状態は $I^{\pi} = 1/2^{-}$

実際の ^{11}Be の準位

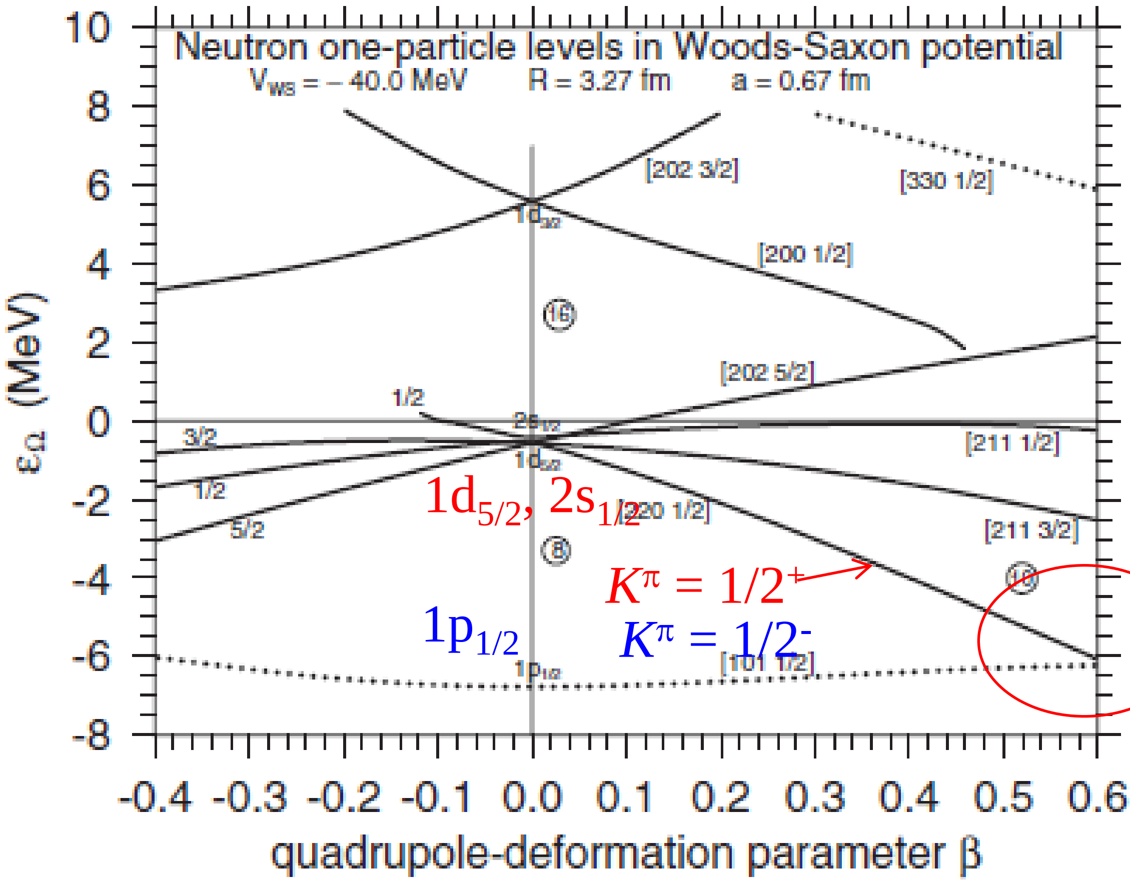


?



"parity inversion"

変形の効果で^{11}Be の準位構造は説明できるか?



変形度が大きくなると正パリティ状態と負パリティ状態が確かに逆転する

I. Hamamoto, J. Phys. G37('10)055102

(参考)^{10}Be の回転励起(有限の励起エネルギー)を取り入れた結合チャンネル計算:

H. Esbensen, B.A. Brown, H. Sagawa, PRC51('95)1274

F.M. Nunes, I.J. Thompson, R.C. Johnson, NPA596('96)171

演習問題 4

変形 Woods-Saxon ポテンシャルのエネルギー固有値を求める Fortran プログラム:

http://www.nucl.phys.tohoku.ac.jp/~hagino/lecture2/nilsson.f

このプログラムを用いて(あるいはプログラムを自作して) ^{11}Be のニルソン図を作成せよ。

s-wave dominance 現象

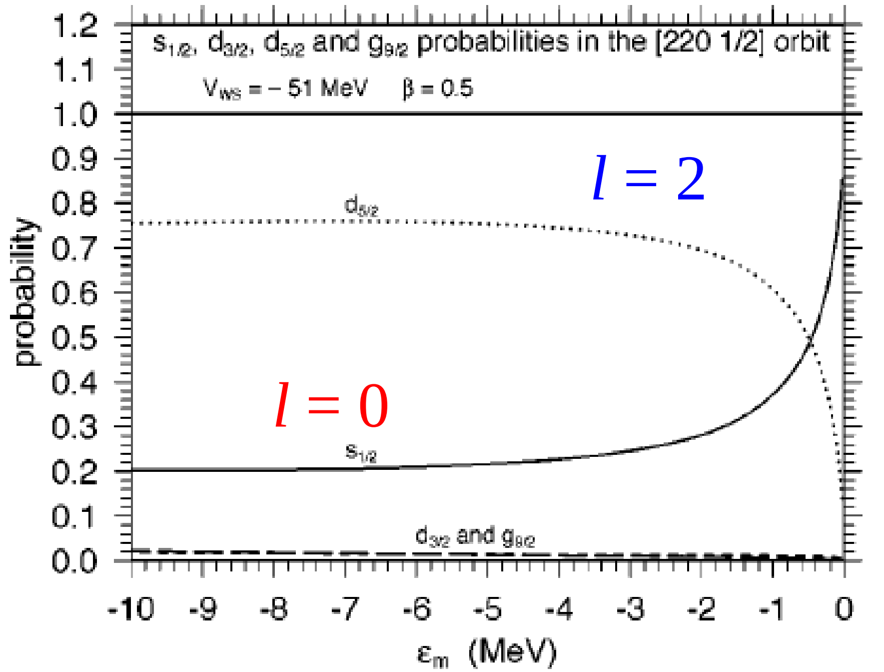
変形核では様々な l の成分が混ざる:

$$\Psi_{K^\pi=0^+}(\boldsymbol{r}) = R_0(r)Y_{00}(\hat{\boldsymbol{r}}) + R_2(r)Y_{20}(\hat{\boldsymbol{r}}) + R_4(r)Y_{40}(\hat{\boldsymbol{r}}) + \cdots$$

束縛が弱くなると、どんなに小さな変形においても、l = 0 の項がドミナントになる。

（束縛エネルギーがゼロの極限では l =0 の成分が 100%）

T. Misu, W. Nazarewicz, and S. Aberg, NPA614('97)44



I. Hamamoto, PRC69('04)041306(R)

s-wave dominance 現象

（摂動は成り立たないが）あえて摂動で考えてみると:

$$\psi_{l=2} \to \psi_{l=2} + \frac{\langle \psi_{l=0} | \Delta V | \psi_{l=2} \rangle}{E_{l=2} - E_{l=0}} \psi_{l=0} + (l = 4)$$

$$\Delta V(r,\theta) = -\beta_2 R_0 \frac{dV_0}{dr} Y_{20}(\theta)$$

(note)

$$\int_0^\infty r^{n+2} dr\, R_l(r) R_{l'}(r) \propto \begin{cases} |\epsilon|^{(l+l'-n-1)/2} & (n > l + l' - 1) \\ -\frac{1}{2} \ln |\epsilon| & (n = l + l' - 1) \\ \text{const.} & (n < l + l' - 1) \end{cases}$$

T. Misu, W. Nazarewicz, and S. Aberg, NPA614('97)44

for $l = 2$, $l' = 0$: $n = 1$ 以上で発散

$l = 2$, $l' = 4$: $n = 5$ 以上で発散

s-wave dominance 現象

（摂動は成り立たないが）あえて摂動で考えてみると:

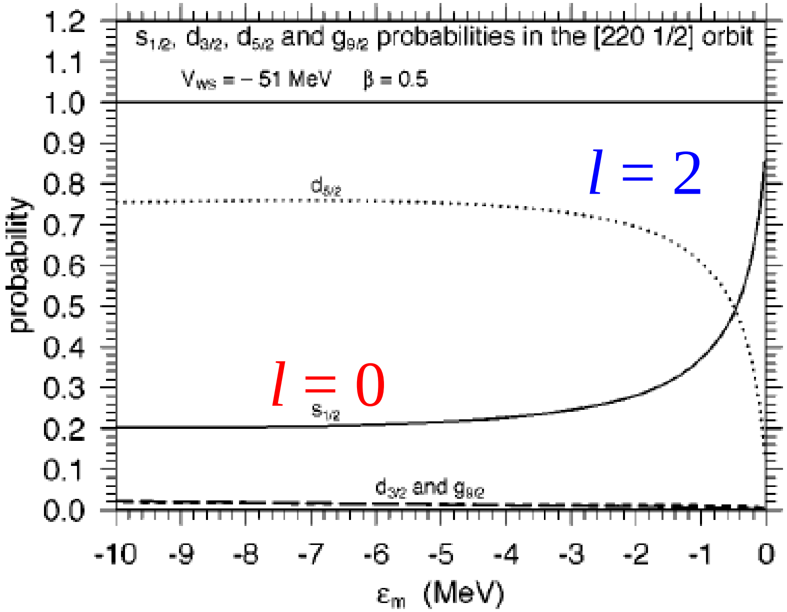
$$\psi_{l=2} \to \psi_{l=2} + \frac{\langle \psi_{l=0} | \Delta V | \psi_{l=2} \rangle}{E_{l=2} - E_{l=0}} \psi_{l=0} + (l=4)$$

$$\Delta V(r,\theta) = -\beta_2 R_0 \frac{dV_0}{dr} Y_{20}(\theta)$$

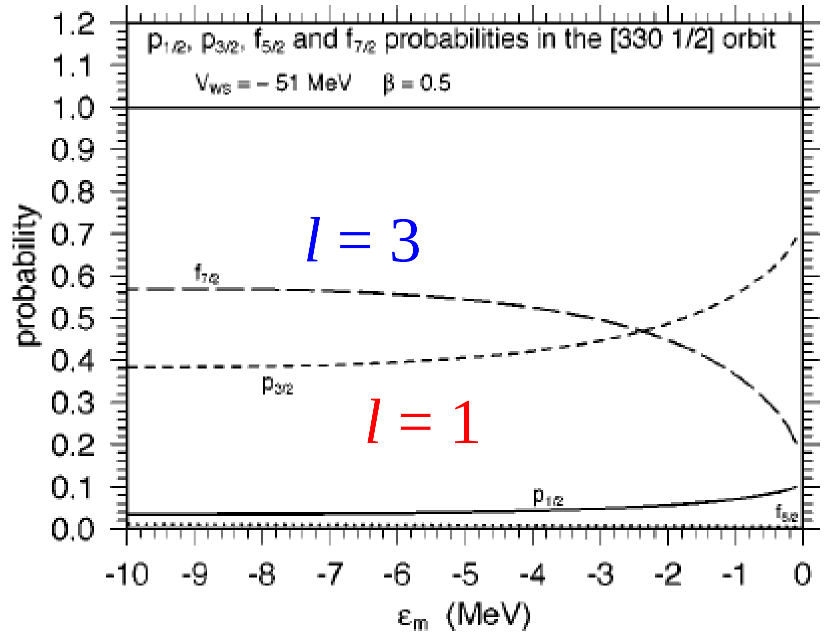
(note) $\int_0^\infty r^{n+2} dr\, R_l(r) R_{l'}(r)$:for l = 2, l' = 0: n = 1 以上で発散
l = 2, l' = 4: n = 5 以上で発散

$$\boxed{\begin{aligned} \psi &= \frac{\psi_{l=2} + c_0\,\psi_{l=0} + c_4\,\psi_{l=4}}{\sqrt{1 + c_0^2 + c_4^2}} \\ &\to \psi_{l=0} \qquad (c_0 \to \infty) \end{aligned}}$$

s-wave dominance 現象

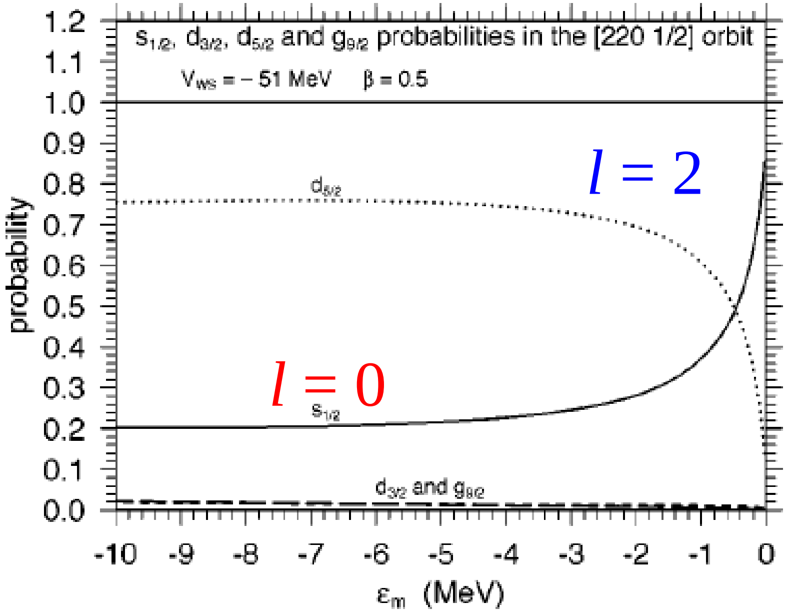


I. Hamamoto, PRC69('04)041306(R)



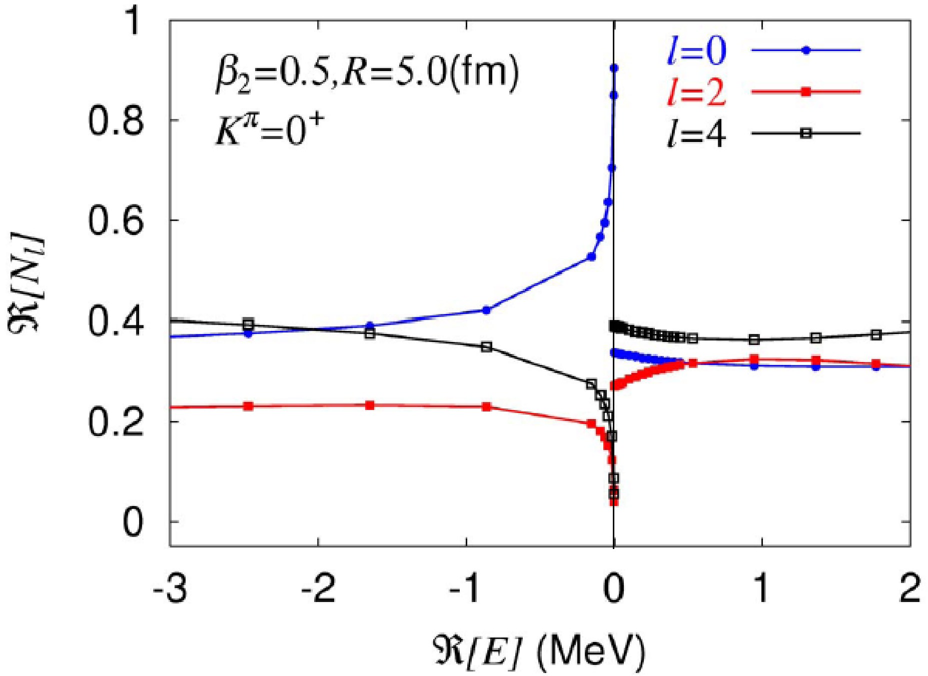
$l = 1$ の成分も同様に弱束縛で増大（但し 100% にはならない）

s-wave dominance 現象



I. Hamamoto, PRC69('04)041306(R)

変形した共鳴(ガモフ)状態の各成分

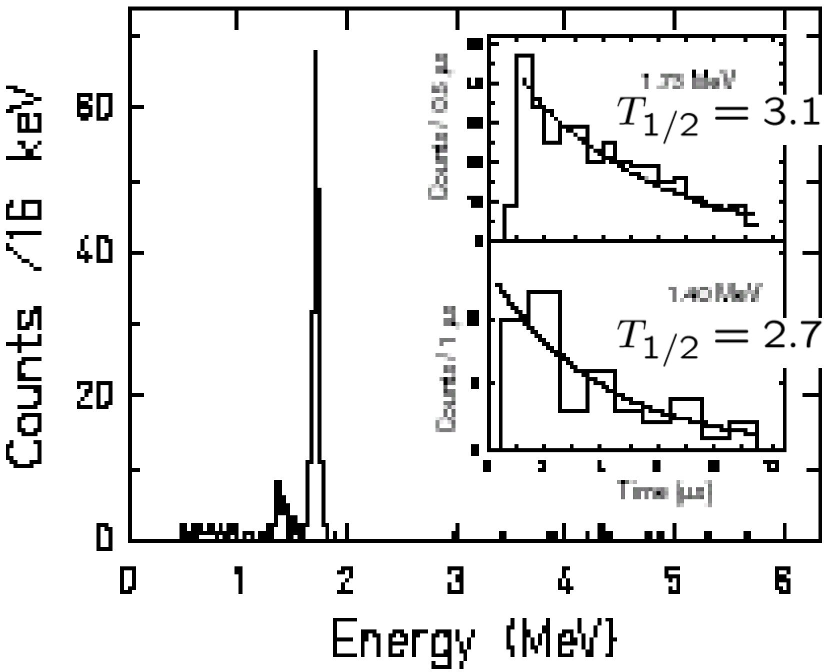


s-wave dominance は
共鳴状態に連続的につながる
わけではない

K. Yoshida and K. Hagino,
PRC72('05)064311

（参考）コア励起を取り入れた陽子放出崩壊の計算

^{145}Tm (Oak Ridge group)の実験データ:



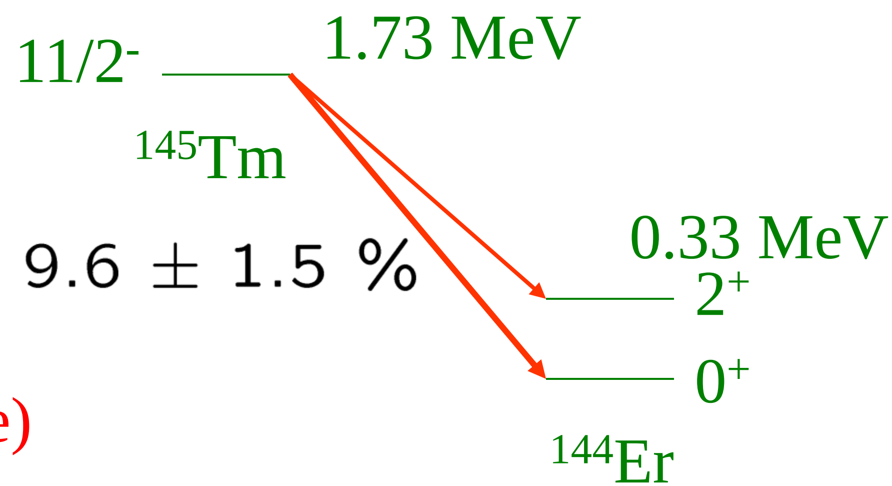
$T_{1/2} = 3.1 \pm 0.3\mu s$

$T_{1/2} = 2.7 \pm 1.0\mu s$

$^{145}\mathrm{Tm}(h_{11/2})$

$\rightarrow {}^{144}\,\mathrm{Er}(0^+) \sim 90.4\%$

$\rightarrow {}^{144}\,\mathrm{Er}(2^+) \sim 9.6\%$



$\mathrm{BR} = 9.6 \pm 1.5\ \%$

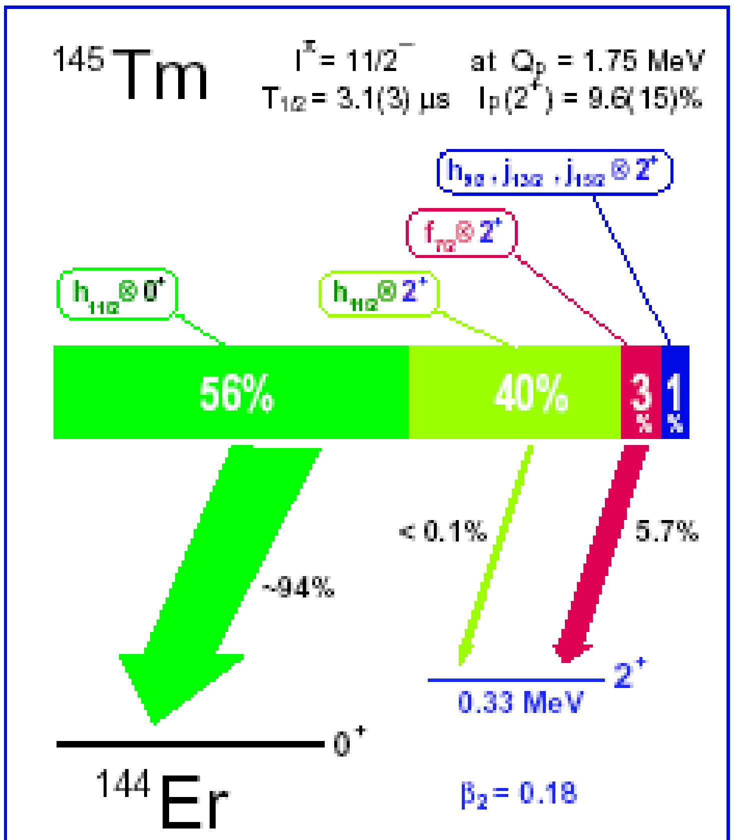
崩壊の微細構造 (fine structure)

M. Karny et al., PRL90('03)012502

（参考）コア励起を取り入れた陽子放出崩壊の計算（結合チャンネル）

K.P. Rykaczewski, K.Hagino, et al.

$$
\begin{aligned}
|11/2^-\rangle = &\ |h_{11/2}\rangle \otimes |0^+\rangle + |f_{7/2}\rangle \otimes |2^+\rangle \\
&+ |h_{9/2}\rangle \otimes |2^+\rangle + |h_{11/2}\rangle \otimes |2^+\rangle \\
&+ |j_{13/2}\rangle \otimes |2^+\rangle + |j_{15/2}\rangle \otimes |2^+\rangle
\end{aligned}
$$



11/2$^-$ 1.73 MeV

^{145}Tm

0.33 MeV

2$^+$

0$^+$

^{144}Er

Expt:

BR = 9.6 ± 1.5 %

$T_{1/2}$=3.1±0.3 μs

Calc.

$T_{1/2}$=3.0 ± 0.4 μs

I_p=5.7±0.3 %

（参考）結合チャンネル方程式の解き方（束縛状態の場合）

変形したポテンシャル中の粒子の運動（簡単のためスピンなし）

$$\boxed{\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V_0(r) + V_2(r)Y_{20}(\theta) - E\right]\Psi(\boldsymbol{r}) = 0}$$

- 基底展開法　または
- 座標表示（結合チャンネル方程式）

結合チャンネル法

$$\Psi(\boldsymbol{r}) = \Psi_K(\boldsymbol{r}) = \sum_l \frac{u_l(r)}{r} Y_{lK}(\hat{\boldsymbol{r}})$$ と展開

$$\langle Y_{lK}|H - E|\Psi\rangle = 0$$

coupled-channels equations

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2} + V_0(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} - E\right]u_l(r)$$
$$= -V_2(r)\sum_{l'}\langle Y_{lK}|Y_{20}|Y_{l'K}\rangle\, u_{l'}(r)$$

$$\Psi_K(\boldsymbol{r}) = \sum_l \frac{u_l(r)}{r} Y_{lK}(\hat{\boldsymbol{r}})$$

$$\boxed{\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2} + V_0(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} - E\right] u_l(r) = -V_2(r)\sum_{l'}\langle Y_{lK}|Y_{20}|Y_{l'K}\rangle\, u_{l'}(r)}$$

境界条件（束縛状態）：

$$u_l \sim r^{l+1} \qquad (r \sim 0)$$

$$\to h_l^{(+)}(i\kappa r) \sim e^{-\kappa r} \qquad (r \to \infty)$$

解き方

２階の N 次連立微分方程式（N はチャンネルの数）

$\longrightarrow$ N 個の線形独立な（原点で）正則解（+ N 個の非正則解）

1. N 個の線形独立な原点正則解を用意
2. 無限遠の境界条件を満たすように線形結合をとる

$$\Psi_K(\boldsymbol{r}) = \sum_l \frac{u_l(r)}{r} Y_{lK}(\hat{\boldsymbol{r}})$$

$$\boxed{\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2} + V_0(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} - E\right] u_l(r) = -V_2(r)\sum_{l'}\langle Y_{lK}|Y_{20}|Y_{l'K}\rangle\, u_{l'}(r)}$$

境界条件(束縛状態): $u_l \sim r^{l+1} \qquad (r \sim 0)$

$$\to h_l^{(+)}(i\kappa r) \sim e^{-\kappa r} \qquad (r \to \infty)$$

解き方

1. N 個の線形独立な原点正則解を用意: $\vec{\phi}^{(1)}, \cdots, \vec{\phi}^{(N)}$

2. 無限遠の境界条件を満たすように線形結合をとる:

$$\vec{u}(r) = \sum_i C_i \vec{\phi}^{(i)}$$

例えば

$\phi_l^{(i)}(r) \to r^{l+1}\delta_{l,i} \qquad r \to 0$ となる N 個の線形独立解

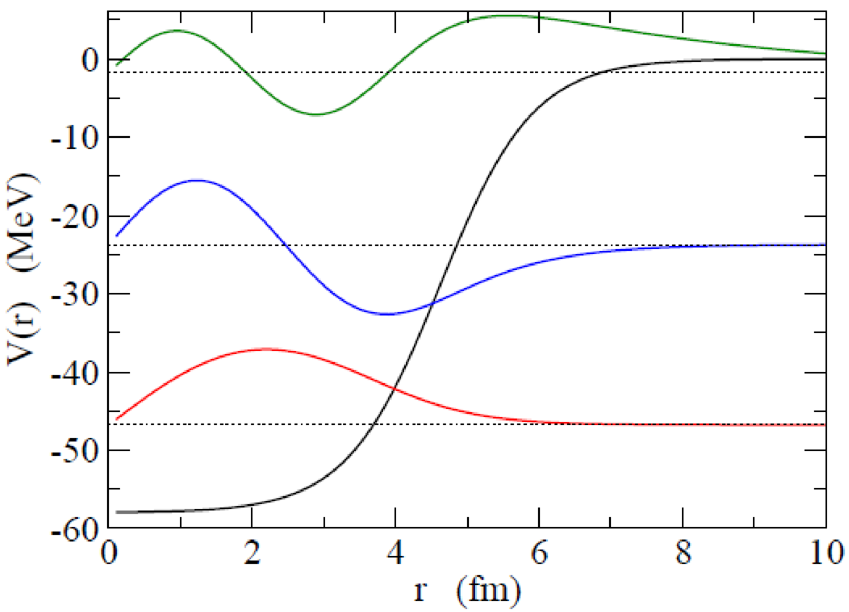
$\phi_l^{(i)}(r) \to A_{li}e^{-\kappa r} + B_{li}e^{+\kappa r} \qquad r \to \infty$ のように振舞うとすると

$u_l(r) \to \sum_i C_i A_{li} e^{-\kappa r} + \sum_i C_i B_{li} e^{\kappa r}$ ⇨ $\boxed{\sum_i C_i B_{li} = 0}$ が束縛条件

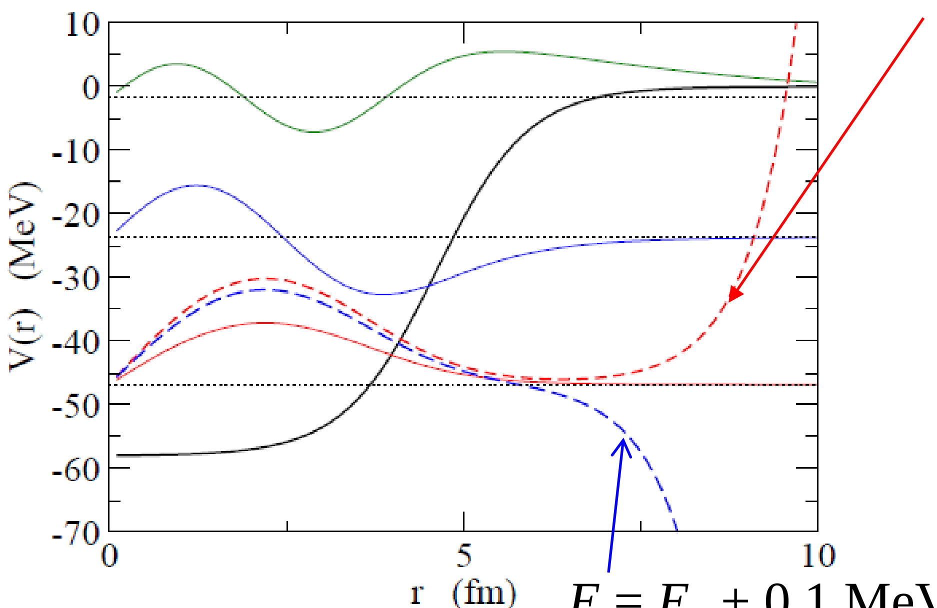
波動関数のノード（球形の場合）

V_0 = 58 MeV,
R = 4.62 fm
a = 0.65 fm

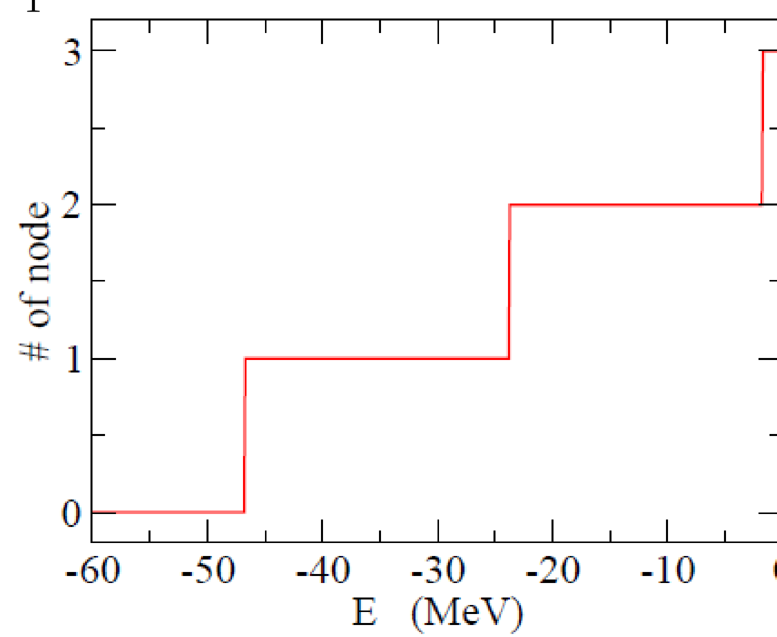
l = 0



$E = E_1 - 0.1$ MeV



$E = E_1 + 0.1$ MeV



一般化された波動関数のノード（変形核の場合）

B.R. Johnson, J. Chem. Phys. 69('78)4678

1．N 個の線形独立な原点正則解を用意： $\vec{\phi}^{(1)}, \cdots, \vec{\phi}^{(N)}$

2．無限遠の境界条件を満たすように線形結合をとる：

$$\vec{u}(r) = \sum_i C_i \vec{\phi}^{(i)}$$

用意した N 個の線形独立解から行列 $\psi_{li}(r) \equiv \phi_l^{(i)}(r)$ を構成

$f(r) \equiv det(\psi(r))$ がゼロを切るところを一般化されたノードと定義する

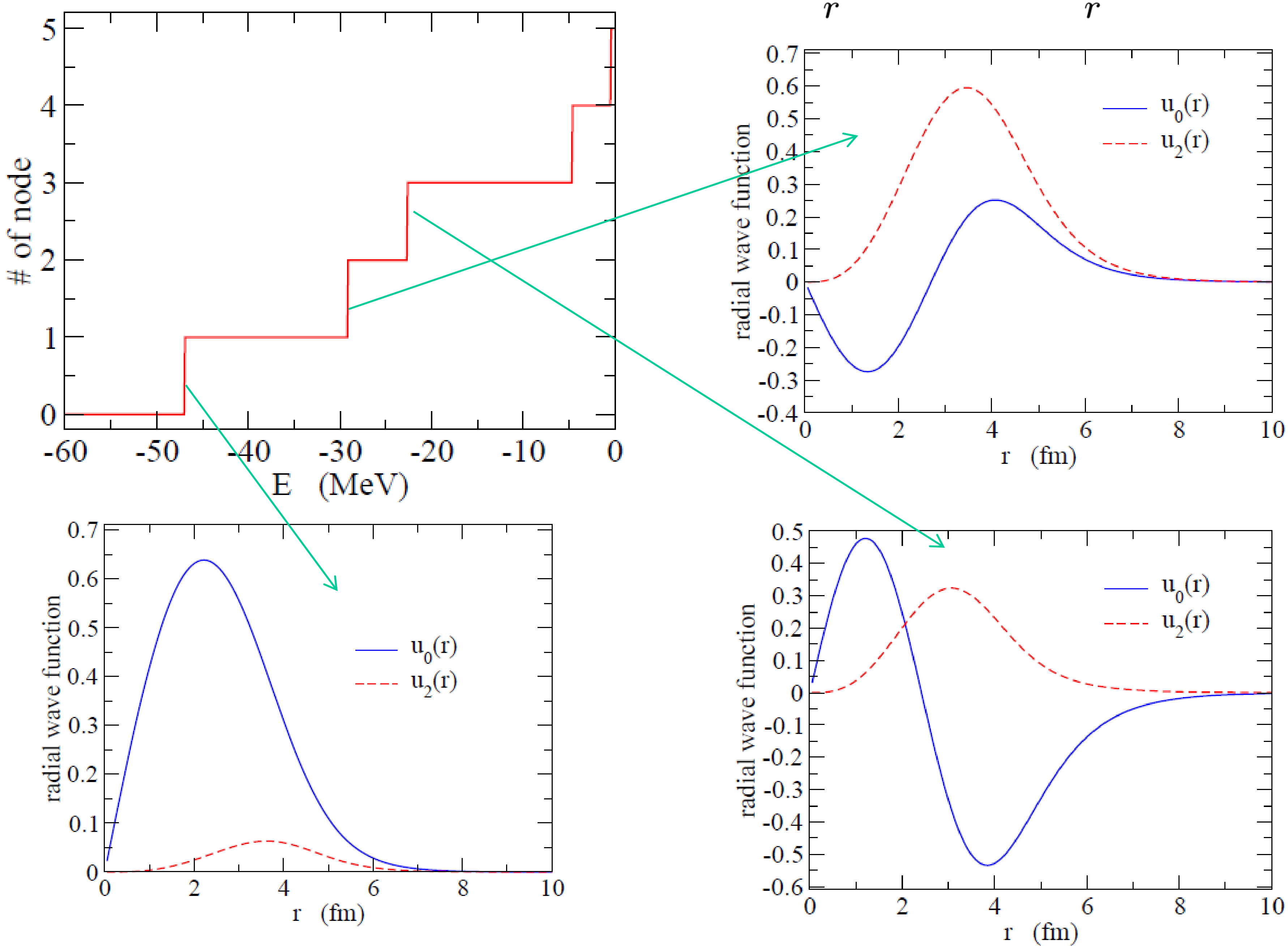
(note) $f(R_{box}) = 0$ が満たされれば、$\vec{u}(r = R_{\rm box}) = 0$ となる解を作ることができる。

（一般化された box boundary condition）

K.H. and N. Van Giai, NPA735('04)55

計算例: $\beta = 0.2,\ K^{\pi} = 0^{+}$

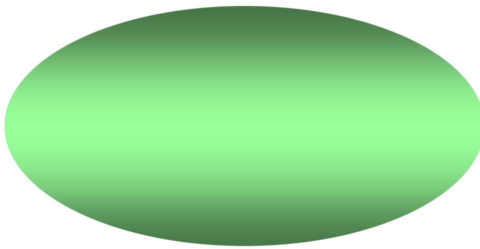
$$\Psi(\boldsymbol{r}) = \frac{u_0(r)}{r} Y_{00}(\hat{\boldsymbol{r}}) + \frac{u_2(r)}{r} Y_{20}(\hat{\boldsymbol{r}})$$



Resonances in multi-channel systems

Mean-field equation: $[T + V - E]\,\psi = 0$

deformed potential: $V(\boldsymbol{r}) = V_0(r) + \underbrace{V_2(r)Y_{20}(\hat{\boldsymbol{r}}) + \cdots}_{\text{mixing of ang. mom.}}$



single particle wave function: $\boxed{\psi(\boldsymbol{r}) = \sum_l \frac{u_l(r)}{r} Y_{lK}(\hat{\boldsymbol{r}})}$

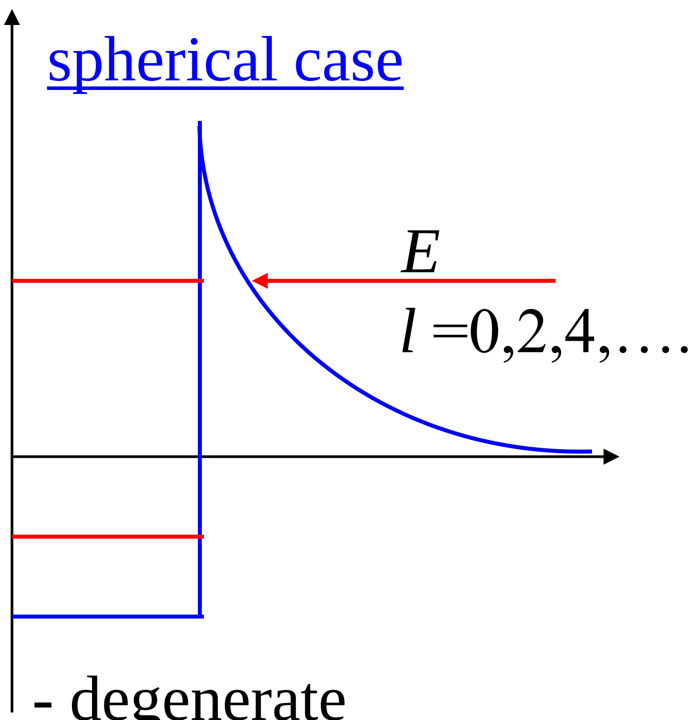
$$\langle Y_{lK}|H - E|\psi\rangle = 0$$

coupled-channels equations

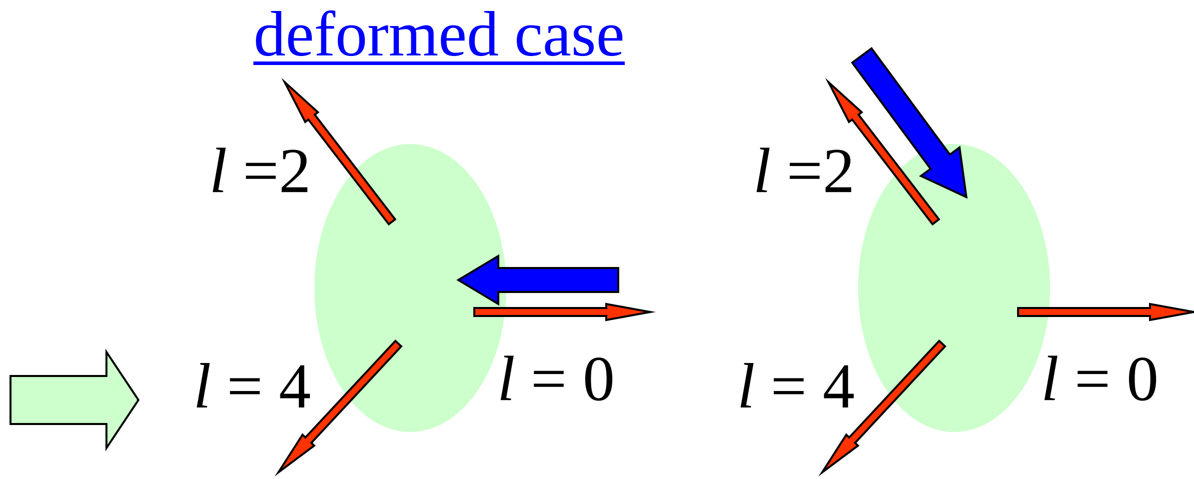
$$\boxed{\begin{aligned}&\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2} + V_0(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} - E\right] u_l(r) \\ &\qquad = -V_2(r)\sum_{l'}\langle Y_{lK}|Y_{20}|Y_{l'K}\rangle\, u_{l'}(r) + \cdots\end{aligned}}$$

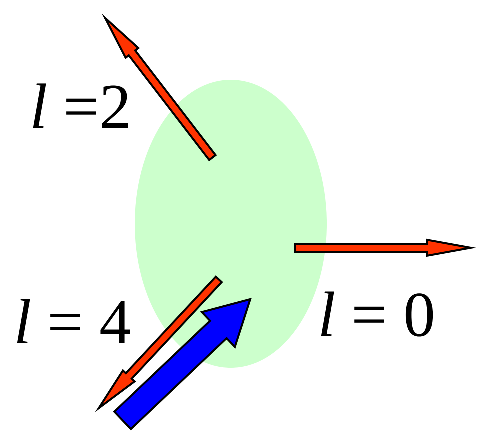
coupled-channels equations

$$
\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2}+V_0(r)+\frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}-E\right]u_l(r)
$$
$$
=-V_2(r)\sum_{l'}\langle Y_{lK}|Y_{20}|Y_{l'K}\rangle\, u_{l'}(r)+\cdots
$$

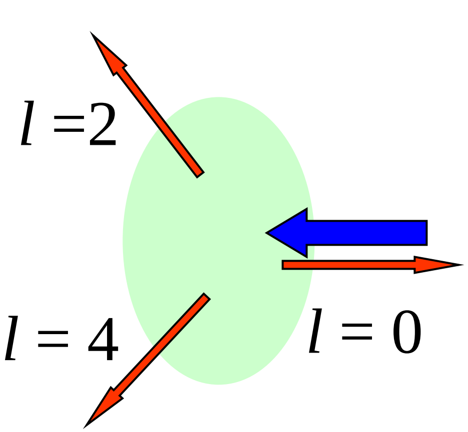


- degenerate
- form a complete set
  (linear indep. solution)

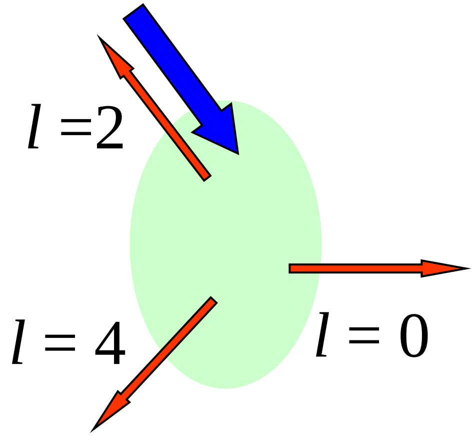




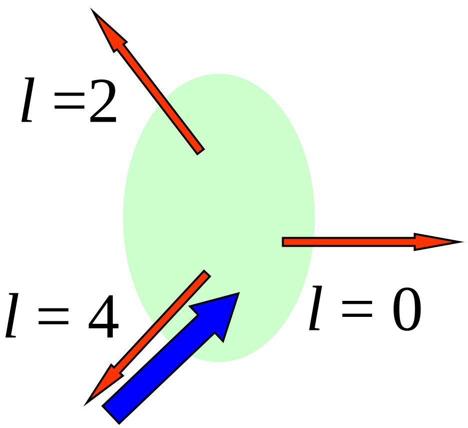
the same # of lin. indep. solutions



$$l_0 = 0$$



$$l_0 = 2$$



$$l_0 = 4$$

$$\psi_{l_0}(\boldsymbol{r}) = \sum_l \frac{u_{ll_0}(r)}{r} Y_{lK}(\hat{\boldsymbol{r}})$$

$$u_{ll_0}(r) \;\; \to \;\; e^{-i(kr - l\pi/2)}\delta_{l,l_0} - S_{ll_0}\, e^{i(kr - l\pi/2)}$$

S-matrix

How to characterize a multi-channel resonance?

$$\boxed{u_{ll_0}(r) \to e^{-i(kr-l\pi/2)}\delta_{l,l_0} - S_{ll_0}\, e^{i(kr-l\pi/2)}}$$

(note) spherical case: $S_{ll_0} = S_l\,\delta_{l,l_0} = e^{2i\delta_l}\,\delta_{l,l_0}$

✧ How about looking at the diagonal components???

$$S_{ll} = \eta_l \cdot e^{2i\delta_{ll}}$$

cf. S-matrix from an optical potential

Model:

$$V(r,\theta) = V_{\mathrm{WS}}(r) - \beta_2 R_0 \frac{dV_{\mathrm{WS}}}{dr} Y_{20}(\theta)$$

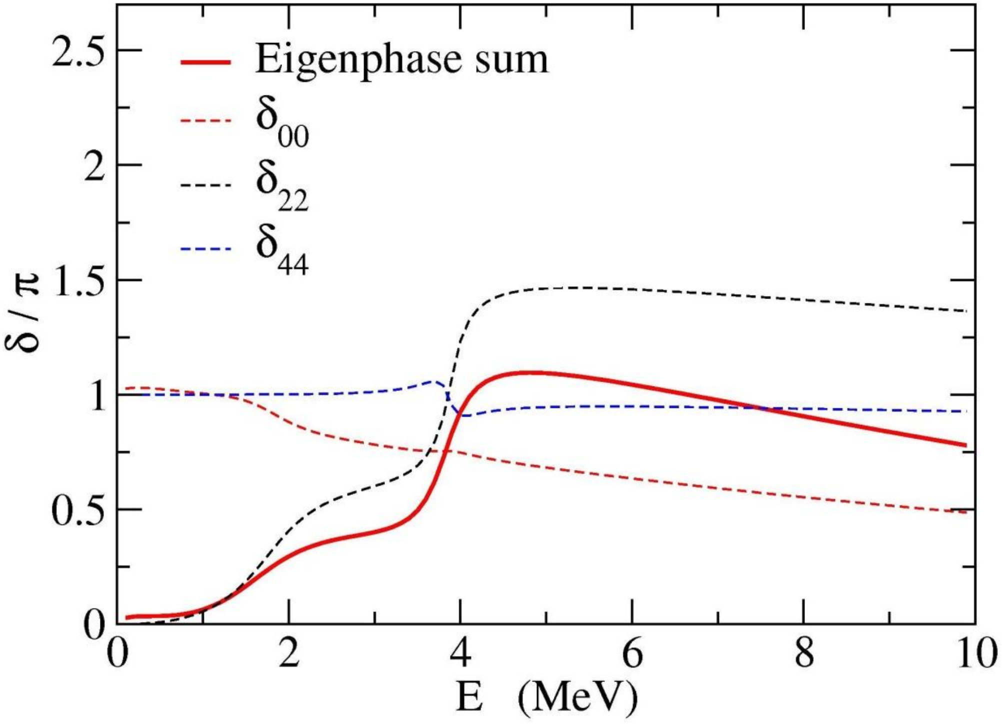
$$\begin{aligned} V_0 &= 48 \text{ MeV} \\ R_0 &= 4.5 \text{ fm} \\ a &= 0.63 \text{ fm} \\ \beta_2 &= 0.1 \\ K &= 0 \end{aligned}$$

Gamow states:

1. E_{res} = 3.78 MeV
   Γ = 0.53 MeV
   (*g*-wave dominance)

2. E_{res} = 1.59 MeV
   Γ = 1.57 MeV
   (*d*-wave dominance)

s, *d*, *g* –wave mixing ($K^\pi = 0^+$)



cf. wf component for a resonance: K. Yoshida and K.H., PRC72('05)064311

Eigen-channel approach

ref. D. Loomba et al., JCP75 ('81) 4546

$$\begin{cases} \psi_{l_0}(\boldsymbol{r}) = \sum_l \frac{u_{ll_0}(r)}{r} Y_{lK}(\hat{\boldsymbol{r}}) \\ u_{ll_0}(r) \to e^{-i(kr-l\pi/2)}\delta_{l,l_0} - S_{ll_0}\, e^{i(kr-l\pi/2)} \end{cases}$$

<u>mix the basis states so that the resonance can be visualized clearly</u>

1. diagonalize the S-matrix:

$$\boxed{(U^\dagger S U)_{aa'} = e^{2i\delta_a}\delta_{a,a'}}$$

2. define the eigen-channel with *U*:

$$\tilde{\psi}_a(\boldsymbol{r}) \equiv \sum_{l_0} \psi_{l_0}(\boldsymbol{r}) U_{l_0 a}$$

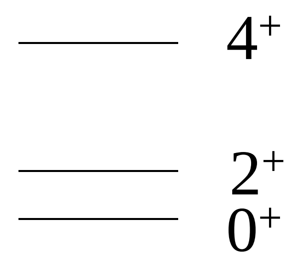
(note) as $r \to \infty$

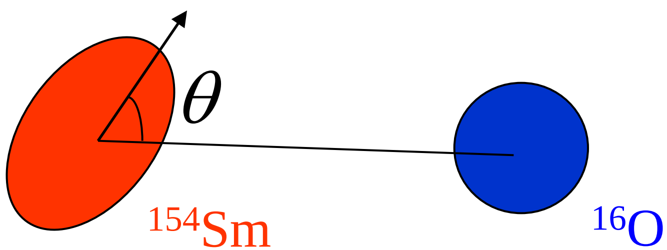
$$\boxed{\tilde{\Psi}_a(\boldsymbol{r}) \to \frac{1}{r}\sum_l \left\{ e^{-i(kr-l\pi/2)} - e^{2i\delta_a} e^{i(kr-l\pi/2)} \right\} U_{la} Y_{lK}(\hat{\boldsymbol{r}})}$$

(note) Low energy Heavy-Ion reactions

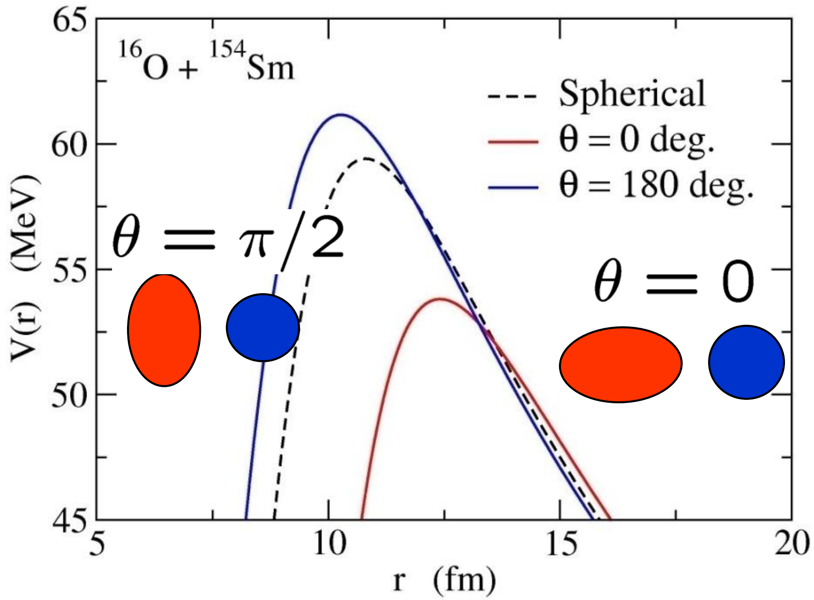
$$\psi(\boldsymbol{r}) = \sum_{l} \frac{u_I(r)}{r} Y_{J0}(\hat{\boldsymbol{r}}) |\phi_I\rangle$$

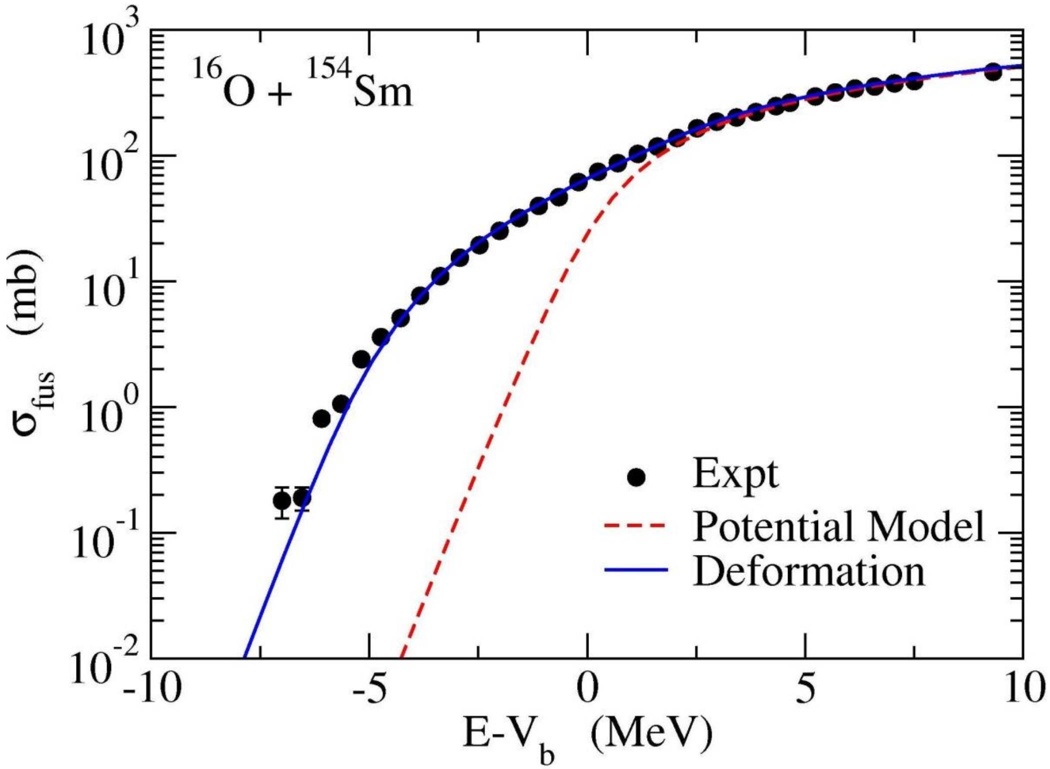
- physical channel: spin of the rotor (I)
- eigen-channel: orientation angle of the rotor





$$\boxed{\sigma_{\text{fus}}(E) = \int_0^1 d(\cos\theta)\sigma_{\text{fus}}(E;\theta)}$$





Eigen-phase sum

A.U. Hazi, PRA19('79)920
K.H. and N. Van Giai, NPA735 ('04) 55

$$(U^\dagger S U)_{aa'} = e^{2i\delta_a}\delta_{a,a'} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\Delta \equiv \sum_a \delta_a}$$

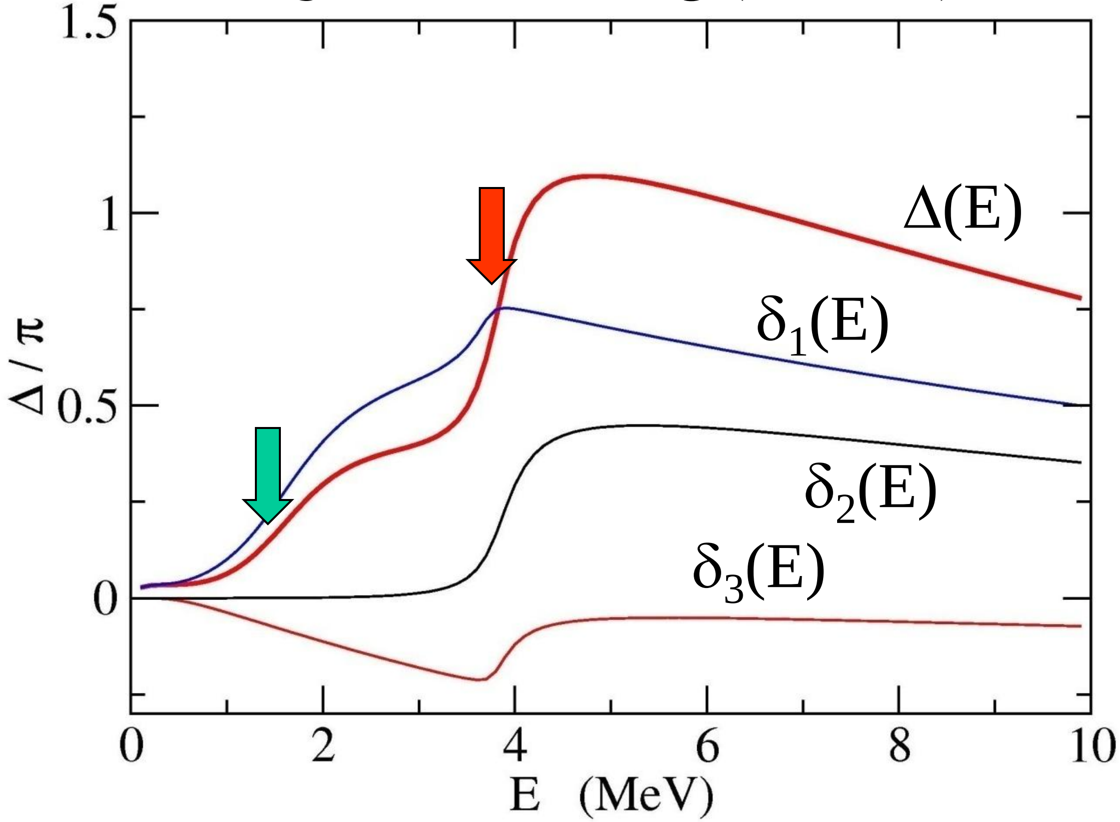
Breit-Wigner formula

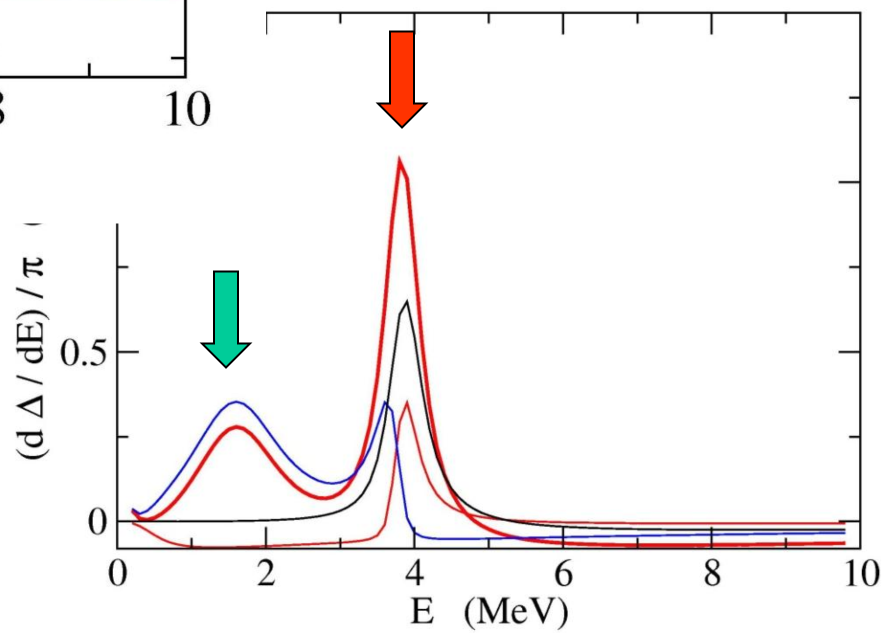
$$S_{\alpha\beta} = e^{2i\phi_\alpha}\,\delta_{\alpha,\beta} - i\frac{\sqrt{\Gamma_\alpha\Gamma_\beta}}{E - E_R + i\Gamma/2}\,e^{i(\phi_\alpha+\phi_\beta)}$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\Delta(E) = \tan^{-1}\frac{\Gamma}{2(E_R - E)} + \Delta_0(E)}$$

Eigenphase sum: satisfies the single channel formula

s, d, g –wave mixing ($K^\pi = 0^+$)





Gamow states:

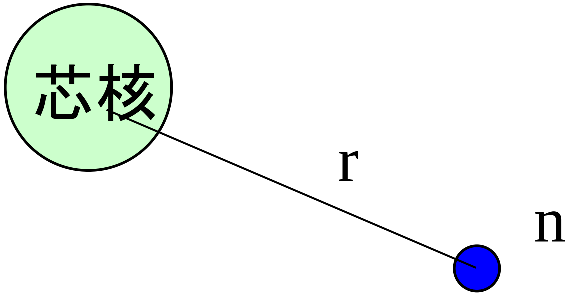
1. E_{res} = 3.78 MeV
   Γ = 0.53 MeV

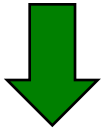
2. E_{res} = 1.59 MeV
   Γ = 1.57 MeV

２粒子ハロー核の性質

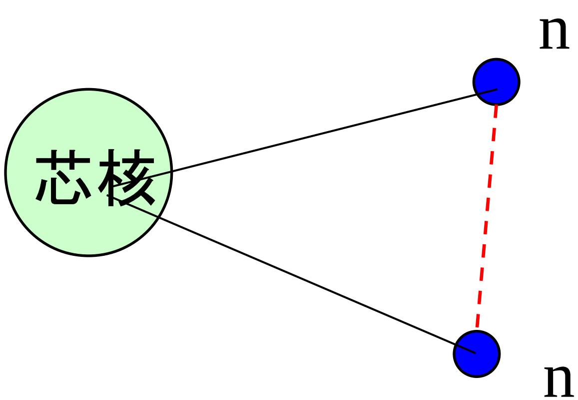
－ペアリング
－ボロミアン原子核
－双中性子相関

これまでは、芯核のまわりに中性子が１個ある場合を考えてきた

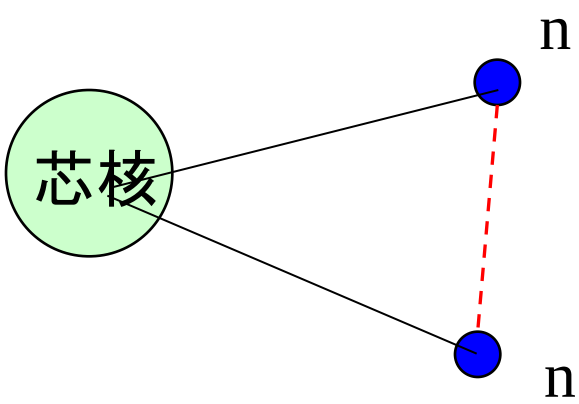




芯核のまわりに中性子が２個あるとどうなる?

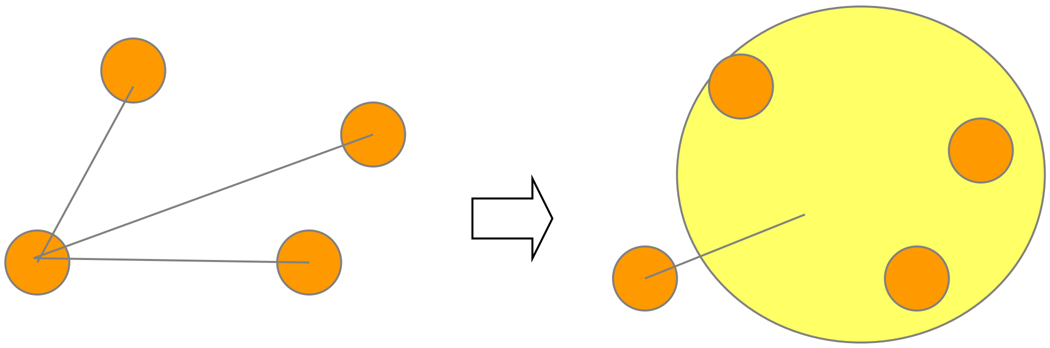


2中性子間に働く相互作用の影響は?



2中性子間に働く相互作用の影響は?

平均場理論



他の核子との相互作用を平均的に取り扱う

単純な平均場近似が完全に成り立っているとすると、2中性子間相互作用は平均場ポテンシャルを通じて考慮され、それ以上の相互作用を考える必要はない。(2中性子が独立に運動。)

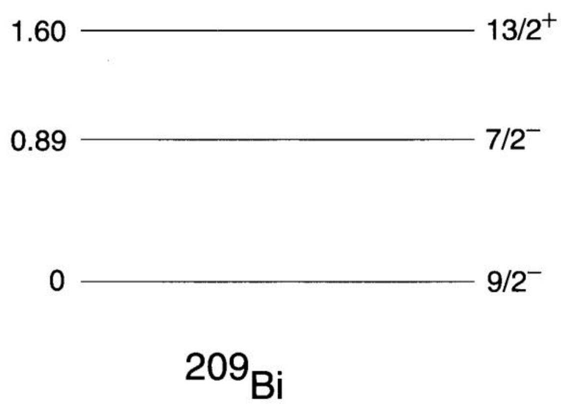
$$H = \sum_i T_i + \sum_{i<j} v_{ij} \rightarrow H = \sum_i (T_i + V_i) + \underbrace{\cancel{\sum_{i<j} v_{ij} - \sum_i V_i}}_{\text{平均からのずれ（残留相互作用）}}$$

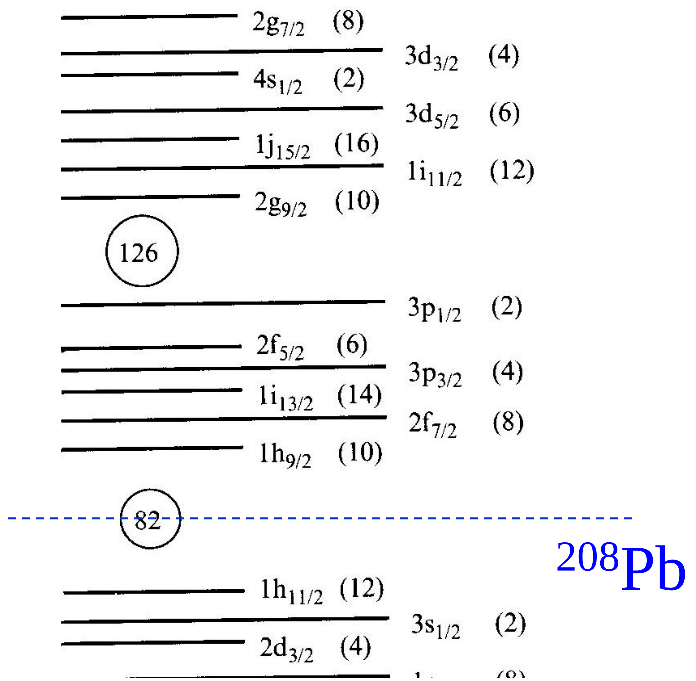
残留相互作用は完全に無視してもよいのか?

$\longrightarrow$ 開殻原子核では重要な役割を果たすことが知られている（ペアリング）

対相関（ペアリング）

$^{209}_{83}\mathrm{Bi}_{126} = {}^{208}_{82}\mathrm{Pb}_{126} + \mathrm{p}$





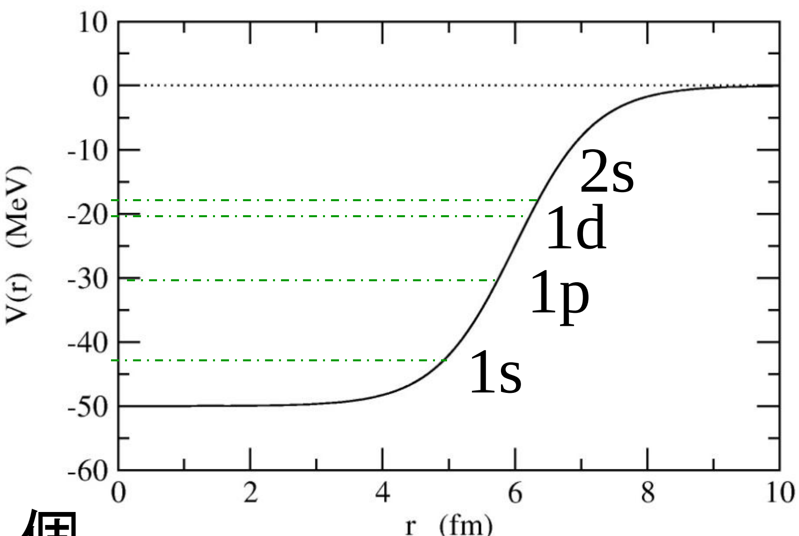
$^{210}_{84}\mathrm{Po}_{126} = {}^{208}_{82}\mathrm{Pb}_{126} + 2\mathrm{p}$

もし独立粒子近似が成り立っていると:

E=0: $[h_{9/2} \otimes h_{9/2}]^I$ $(I=0,2,4,6,8)$

E=0.89 MeV: $[h_{9/2} \otimes f_{7/2}]^I$

$(I=1,2,3,4,5,6,7,8)$



⇨ 状態の数: 1 MeV以下に13 個

$^{210}_{84}\mathrm{Po}_{126} = {}^{208}_{82}\mathrm{Pb}_{126} + 2p$

独立粒子近似が成り立っていると:

E=0: $[h_{9/2} \otimes h_{9/2}]^I$ (I=0,2,4,6,8)

E=0.89 MeV: $[h_{9/2} \otimes f_{7/2}]^I$ (I=1,2,3,4,5,6,7,8)

⇒ 状態の数: 1 MeV以下に13 個

実際のスペクトル:

1.20 MeV ———— 4^+

0.81 MeV ———— 2^+

0 ———— 0^+

^{210}Po

⇔ 残留相互作用の効果

$$H = \sum_{i=1}^{A}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_i^2 + V_{\mathrm{HF}}(i)\right) + \underline{\underline{\frac{1}{2}\sum_{i,j}^{A} v(\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{r}_j) - \sum_i V_{\mathrm{HF}}(i)}}$$

対相関(ペアリング)

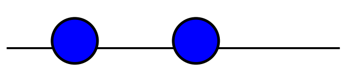
$$H=\sum_{i=1}^{A}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}_i^2+V_{\rm HF}(i)\right)+\frac{1}{2}\sum_{i,j}^{A}v(\boldsymbol{r}_i,\boldsymbol{r}_j)-\sum_i V_{\rm HF}(i)$$

簡単のために、残留相互作用としてデルタ関数を仮定してみる
(超短距離力)

$$\begin{aligned}v_{\rm res}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') &\sim -g\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\\ &=-g\frac{\delta(r-r')}{rr'}\sum_{\lambda\mu}Y^*_{\lambda\mu}(\hat{\boldsymbol{r}})Y_{\lambda\mu}(\hat{\boldsymbol{r}}')\end{aligned}$$

摂動論で残留相互作用の効果を見積もってみる:

l



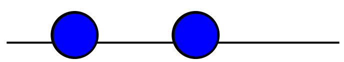
非摂動な波動関数:
角運動量 l の状態に中性子2個、それが
全角運動量 L を組んでいる

$$\boxed{|(ll)LM\rangle=\sum_{m,m'}\langle lmlm'|LM\rangle\psi_{lm}(\boldsymbol{r})\psi_{lm'}(\boldsymbol{r}')}$$

対相関（ペアリング）

$$
\begin{aligned}
v_{\text{res}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') &\sim -g\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \\
&= -g\frac{\delta(r-r')}{rr'}\sum_{\lambda\mu} Y^*_{\lambda\mu}(\hat{\boldsymbol{r}})Y_{\lambda\mu}(\hat{\boldsymbol{r}}')
\end{aligned}
$$

l



$$
\boxed{|(ll)LM\rangle = \sum_{m,m'} \langle lmlm'|LM\rangle \psi_{lm}(\boldsymbol{r})\psi_{lm'}(\boldsymbol{r}')}
$$

$$\Downarrow$$

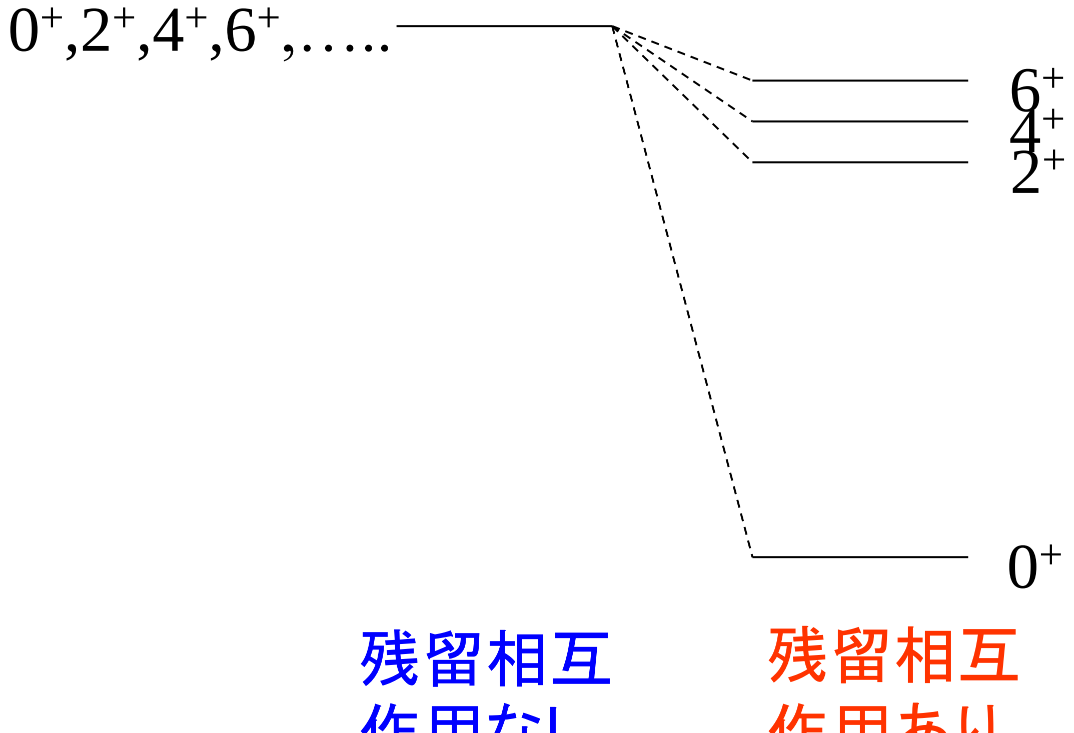
残留相互作用によるエネルギー変化：

$$
\begin{aligned}
\Delta E_L &= \langle (ll)LM|v_{\text{res}}|(ll)LM\rangle \\
&= -g\,I_r^{(l)}\,\frac{(2l+1)^2}{4\pi}\begin{pmatrix} l & l & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2
\end{aligned}
$$

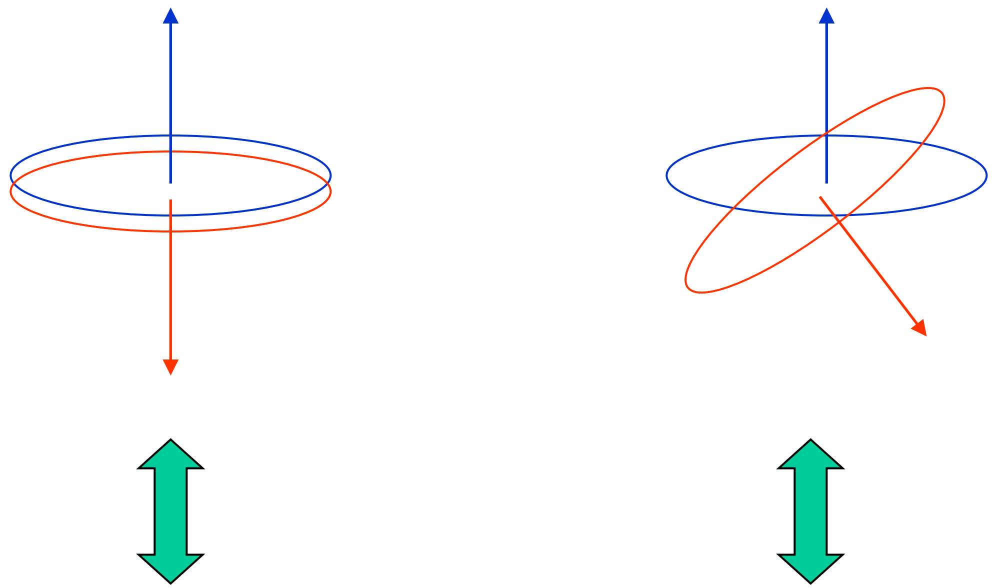
$$
I_r^{(l)} = \int_0^\infty r^2 dr\,(R_l(r))^4
$$

$$\Delta E_L = -g\, I_r^{(l)} \frac{(2l+1)^2}{4\pi} \begin{pmatrix} l & l & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \equiv -g\, I_r^{(l)} \frac{A(ll;L)}{4\pi}$$

$A(ll;L)$	L=0	L=2	L=4	L=6	L=8
l = 2	5.00	1.43	1.43	---	---
l = 3	7.00	1.87	1.27	1.63	---
l = 4	9.00	2.34	1.46	1.26	1.81



簡単な解釈:



L=0　対　　　　　　　　$L \neq 0$　対

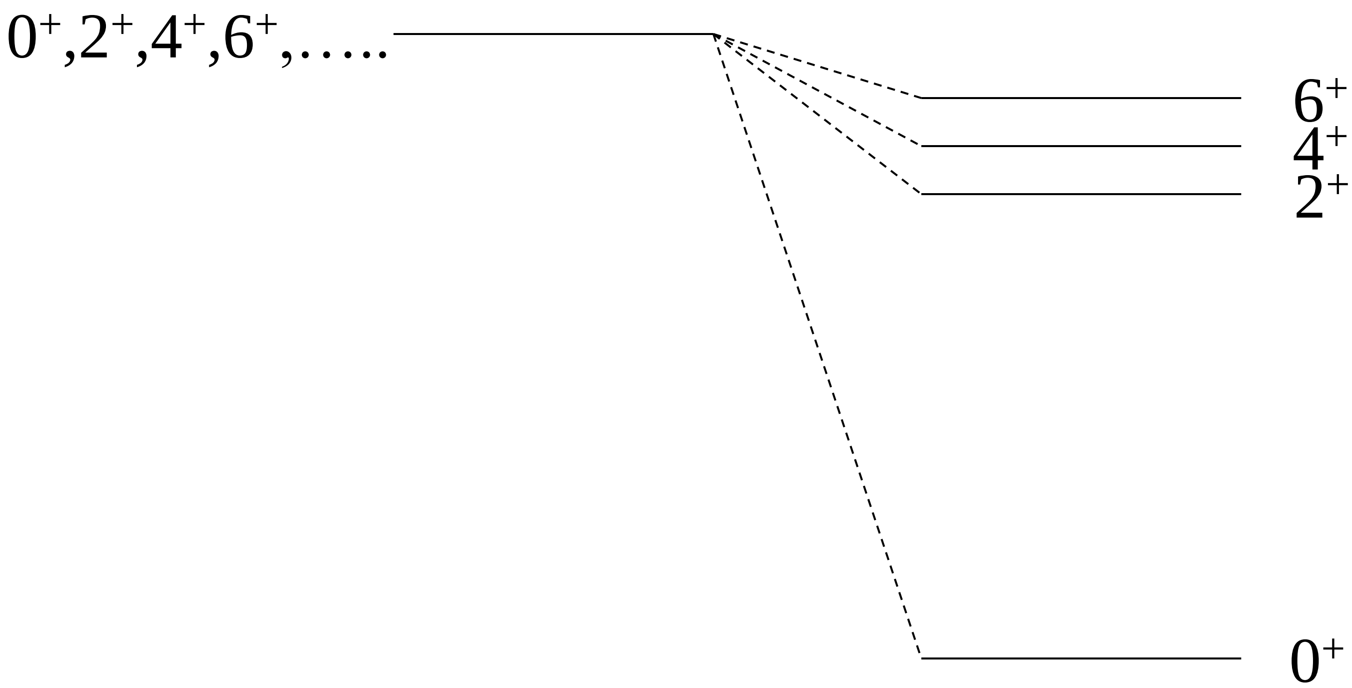
L=0 対に対して空間的重なりが最大（エネルギー的に得）

"対相関"

(note)

$$\psi(l^2; L=0) = \sum_m \langle l m l - m | L=0,0\rangle\, Y_{lm}(\hat{\boldsymbol{r}}_1) Y_{l-\mu}(\hat{\boldsymbol{r}}_2) = Y_{l0}(\theta_{12})/\sqrt{4\pi}$$

すべての m が「コヒーレント」に寄与



残留相互作用なし

残留相互作用あり

<u>原子核の基底状態のスピン</u>

- 偶々核:例外なしに 0^+
- 奇核: 最外殻核子の角運動量と一致

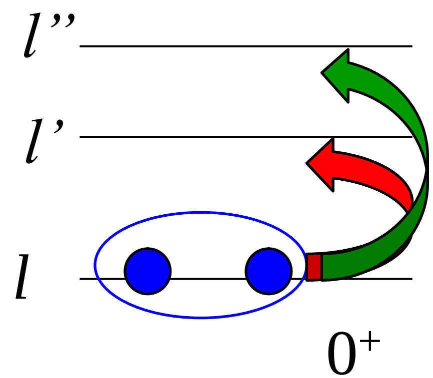
東縛エネルギー

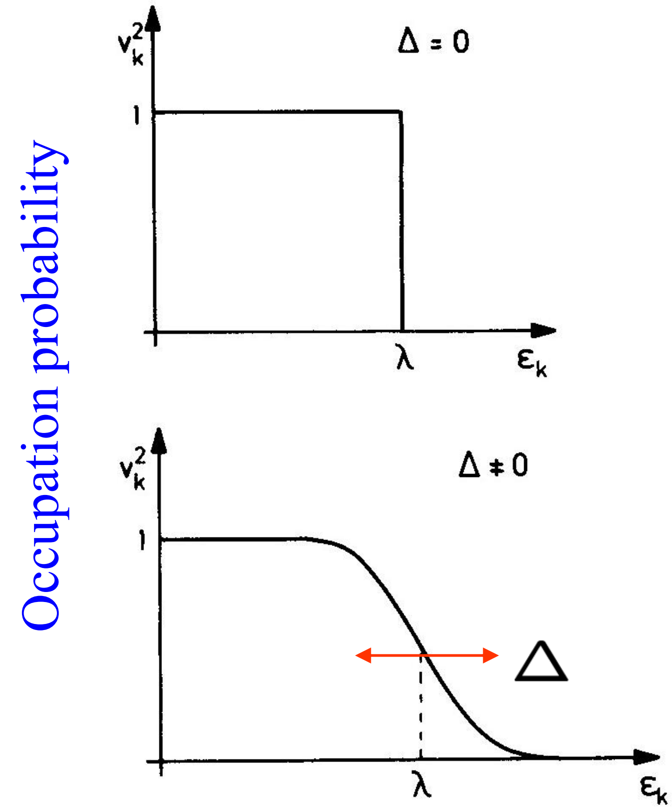
対相関のため、同種核子（2つの中性子または2つの陽子）が角運動量ゼロを組むと安定化

例:

	東縛エネルギー (MeV)
${}^{210}_{82}Pb_{128} = {}^{208}_{82}Pb_{126}+2n$	1646.6
${}^{210}_{83}Bi_{127} = {}^{208}_{82}Pb_{126}+n+p$	1644.8
${}^{209}_{82}Pb_{127} = {}^{208}_{82}Pb_{126}+n$	1640.4
${}^{209}_{83}Bi_{126} = {}^{208}_{82}Pb_{126}+p$	1640.2

波動関数:





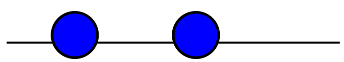
$$
\begin{aligned}
|\Psi_{0+}\rangle \;&=\; |(ll)L=0\rangle \\
&+\sum_{l'} \frac{\langle (l'l')L=0|v_{\rm res}|(ll)L=0\rangle}{2\epsilon_l - 2\epsilon_{l'}}\,|(l'l')L=0\rangle + \cdots
\end{aligned}
$$

各軌道は部分的にのみ占有されることになる

cf. BCS 理論

(参考)スピンを考慮すると:

$$v_{\mathrm{res}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \sim -g\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = -g\frac{\delta(r-r')}{rr'}\sum_{\lambda\mu} Y^*_{\lambda\mu}(\hat{\boldsymbol{r}})Y_{\lambda\mu}(\hat{\boldsymbol{r}}')$$

j 

$$\boxed{|(jj)IM\rangle = \sum_{\mu,\mu'}\langle j\mu j\mu'|IM\rangle\psi_{j\mu}(\boldsymbol{r})\psi_{j\mu'}(\boldsymbol{r}')}$$

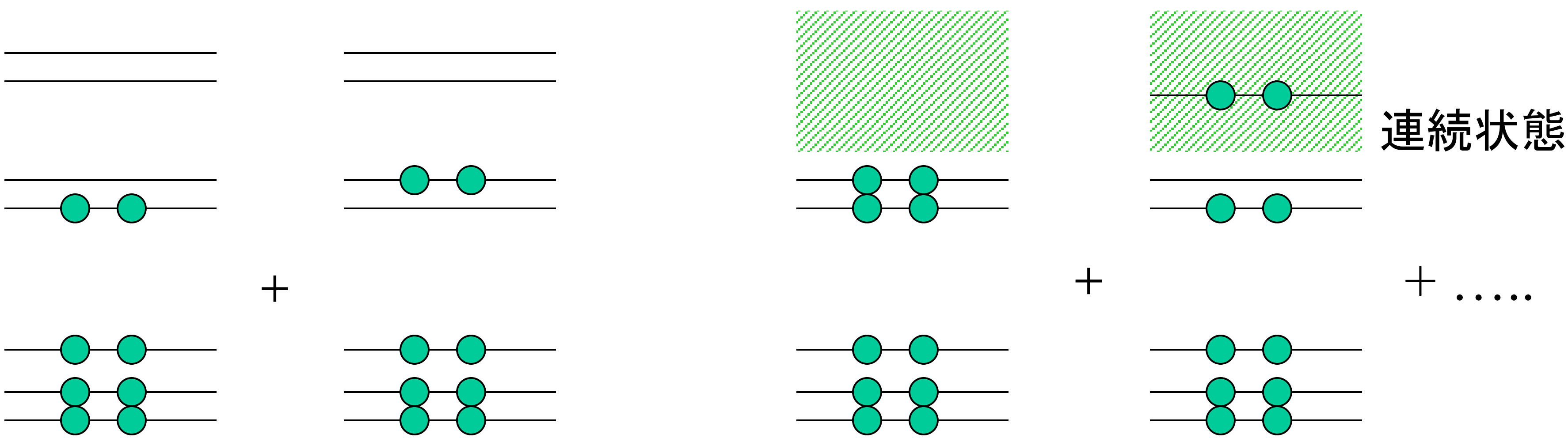
$$\Delta E_I \sim \langle (jj)IM|-g\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')|(jj)IM\rangle = -g\,F_r\,\frac{(2j+1)^2}{2}\begin{pmatrix} j & j & I \\ 1/2 & -1/2 & 0\end{pmatrix}^2$$

(for even I)

$$F_r = \int dr\frac{u^4_{jl}(r)}{4\pi r^2}$$ (radial integral)

弱束縛核における対相関

$$H=\sum_i T_i+\sum_{i<j} v_{ij} \to H=\sum_i (T_i+V_i)+\underbrace{\sum_{i<j} v_{ij}-\sum_i V_i}_{\substack{\text{平均からのずれ} \\ \text{（残留相互作用）}}}$$



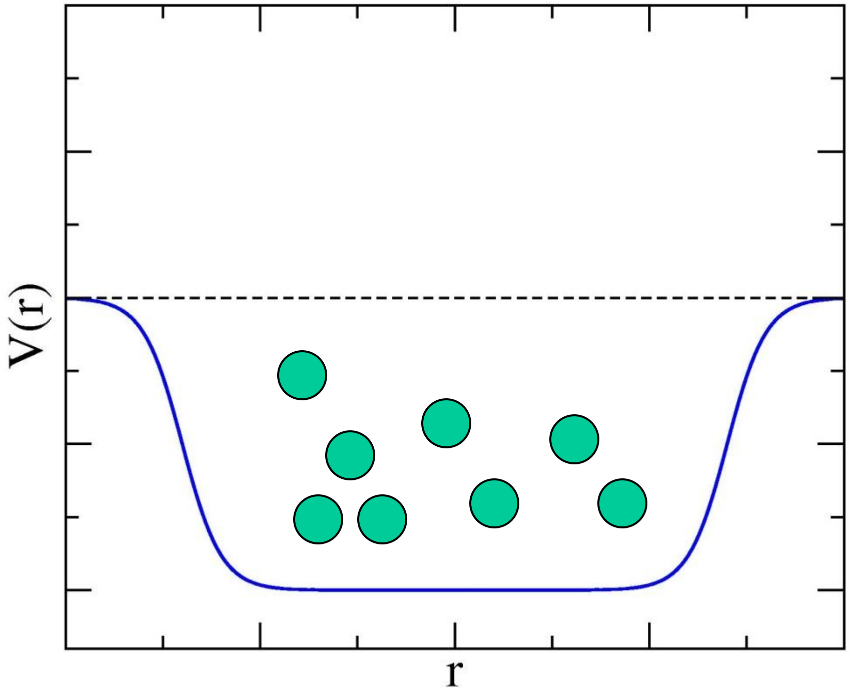
安定な原子核
→ 超流動状態

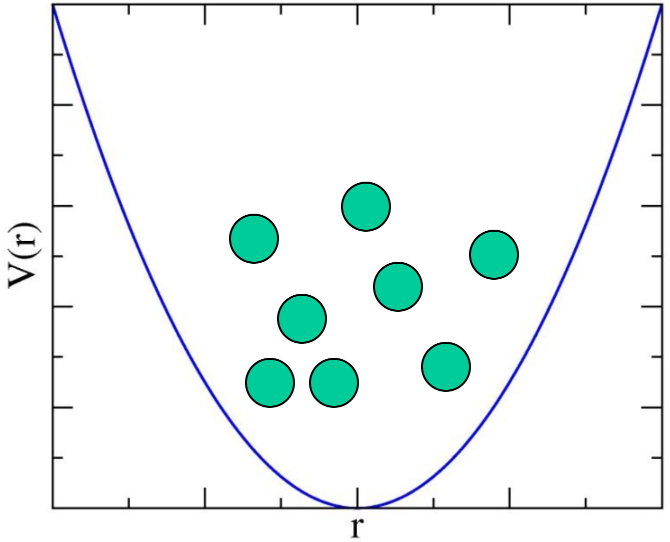
弱く束縛された系

中性子過剰核の物理

- 弱束縛系
- 残留相互作用（対相関）
- 連続状態との結合

ポテンシャルの井戸に束縛された相互作用する多フェルミオン系





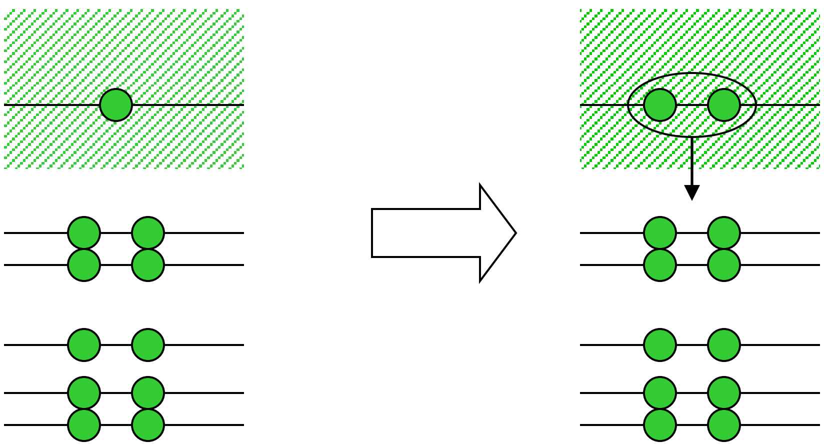
cf. a harmonic trap

- 有限の深さを持つ井戸
- 自己無撞着性

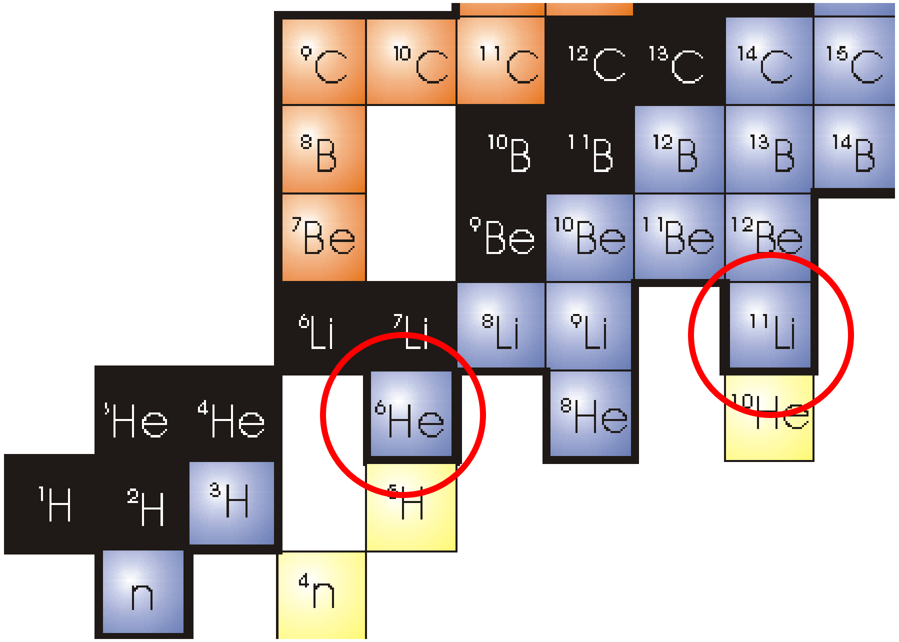
⇒ とてもチャレンジングな問題
（わからないことは色々ある）

ボロミアン原子核

残留相互作用 → 引力



不安定　　　　安定



"ボロミアン核"

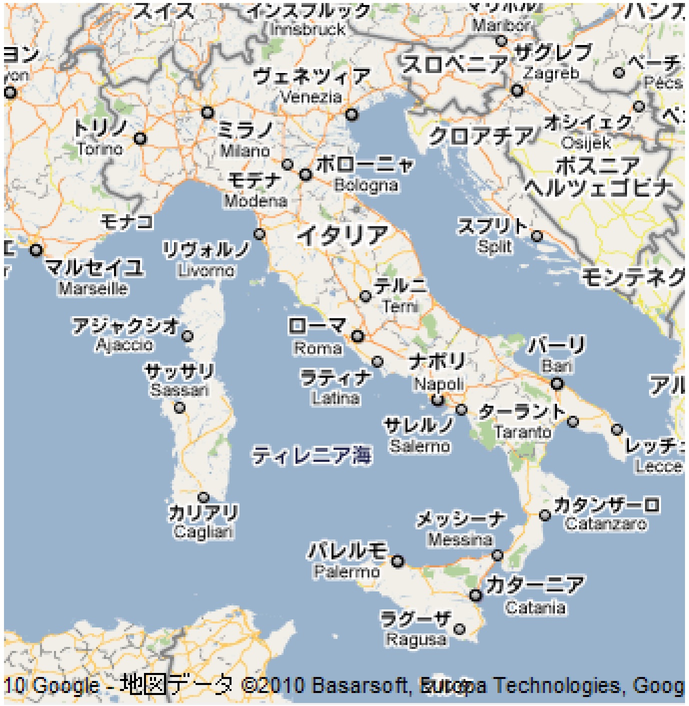
ボロミアン核の構造

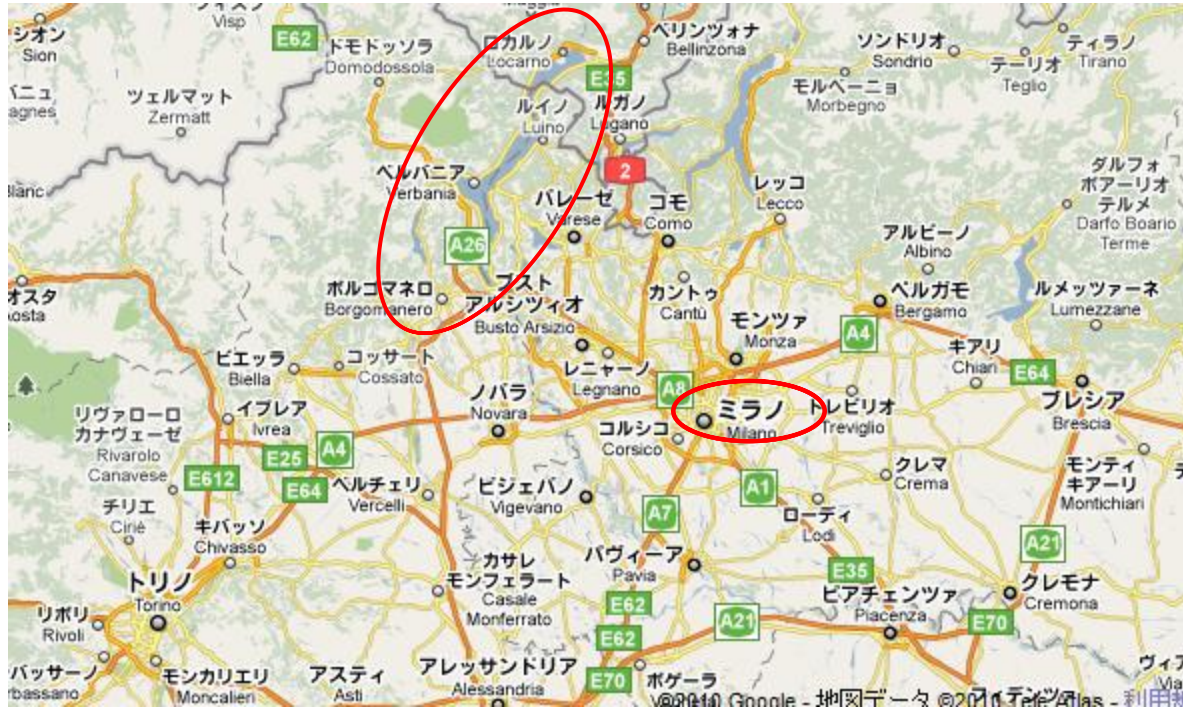
✓多体相関のため non-trivial
✓多くの注目を集めている

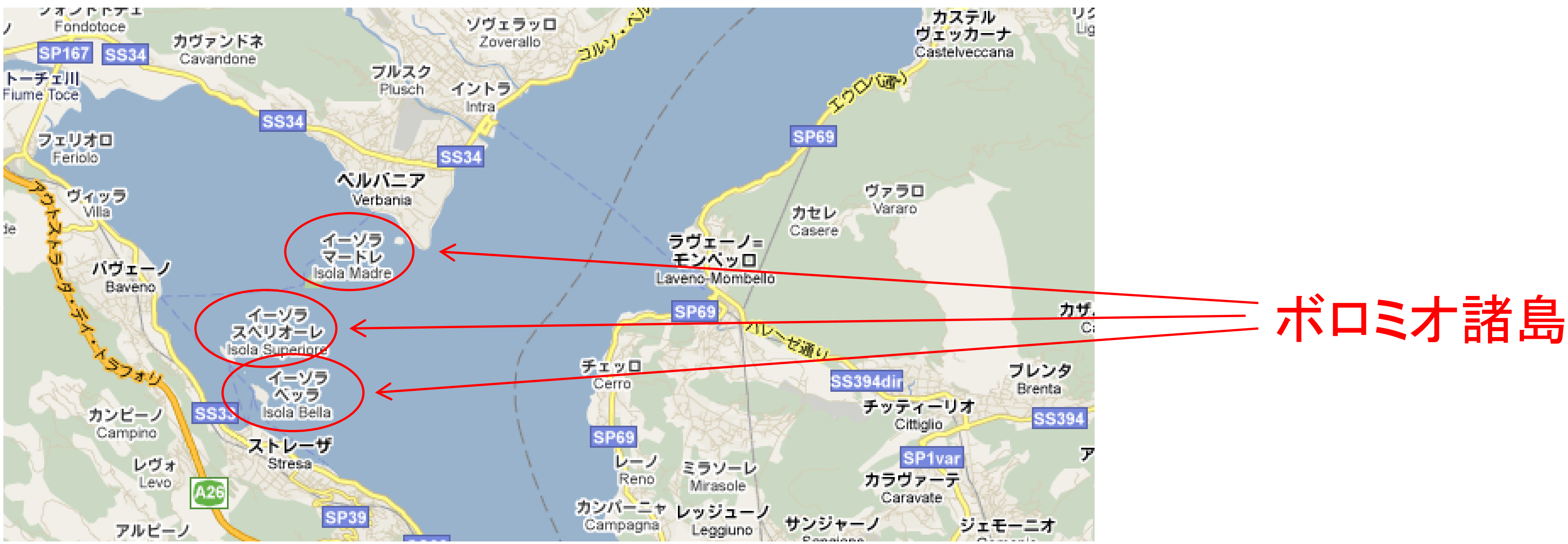
（休憩）ボロミアンって何?

ボッロメオ諸島
（北イタリア、マッジョーレ湖）
ミラノの近く

ボッロメオ家（13世紀）の紋章


スイス
インスブルック
Innsbruck
Maribor
スロベニア
ザグレブ
Zagreb
ヴェネツィア
Venezia
トリノ
Torino
ミラノ
Milano
ボローニャ
Bologna
モデナ
Modena
クロアチア
オシイェク
Osijek
ボスニア
ヘルツェゴビナ
モナコ
リヴォルノ
Livorno
イタリア
スプリト
Split
マルセイユ
Marseille
テルニ
Terni
モンテネグ
アジャクシオ
Ajaccio
ローマ
Roma
バーリ
Bari
サッサリ
Sassari
ラティナ
Latina
ナポリ
Napoli
サレルノ
Salerno
ターラント
Taranto
レッチェ
Lecce
ティレニア海
カリアリ
Cagliari
メッシーナ
Messina
カタンザーロ
Catanzaro
パレルモ
Palermo
カターニア
Catania
ラグーザ
Ragusa
10 Google - 地図データ ©2010 Basarsoft, Europa Technologies, Goog


シオン
Sion
Visp
E62
ドモドッソラ
Domodossola
ロカルノ
Locarno
ベリンツォナ
Bellinzona
ソンドリオ
Sondrio
ティラノ
Tirano
テーリオ
Teglio
モルベーニョ
Morbegno
ツェルマット
Zermatt
ルイノ
Luino
ルガノ
Lugano
E35
2
ダルフォ
ボアーリオ
テルメ
Darfo Boario
Terme
ベルバニア
Verbania
バレーゼ
Varese
コモ
Como
レッコ
Lecco
A26
アルビーノ
Albino
オスタ
osta
ボルゴマネロ
Borgomanero
ブスト
アルシツィオ
Busto Arsizio
カントゥ
Cantù
モンツァ
Monza
ベルガモ
Bergamo
ルメッツァーネ
Lumezzane
A4
キアリ
Chiari
E64
ビエッラ
Biella
コッサート
Cossato
レニャーノ
Legnano
A8
ノバラ
Novara
ミラノ
Milano
トレビリオ
Treviglio
ブレシア
Brescia
リヴァローロ
カナヴェーゼ
Rivarolo
Canavese
イブレア
Ivrea
E25
A4
コルシコ
Corsico
E612
E64
ベルチェリ
Vercelli
ビジェバノ
Vigevano
A1
クレマ
Crema
モンティ
キアーリ
Montichiari
チリエ
Ciriè
キバッソ
Chivasso
A7
ローディ
Lodi
A21
カサレ
モンフェラート
Casale
Monferrato
パヴィーア
Pavia
E62
E35
ピアチェンツァ
Piacenza
クレモナ
Cremona
トリノ
Torino
リボリ
Rivoli
E62
A21
E70
バッサーノ
rbassano
モンカリエリ
Moncalieri
アスティ
Asti
アレッサンドリア
Alessandria
E70
ボゲーラ
Viadana
©2010 Google - 地図データ ©2010 Tele Atlas - 利用規約

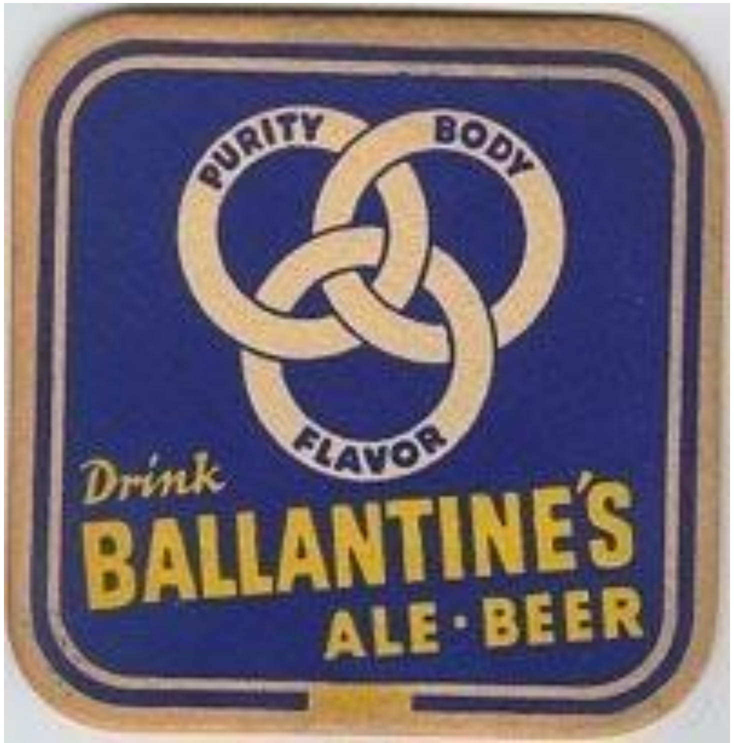

Fondotoce
ソヴェラッロ
Zoverallo
カヴァンドネ
Cavandone
SP167
SS34
カステル
ヴェッカーナ
Castelveccana
トーチェ川
Fiume Toce
プルスク
Plusch
イントラ
Intra
SS34
エウロパ通り
SP69
フェリオロ
Feriolo
SS34
ベルバニア
Verbania
ヴィッラ
Villa
ヴァラロ
Vararo
カセレ
Casere
イーソラ
マードレ
Isola Madre
ラヴェーノ＝
モンベッロ
Laveno-Mombello
バヴェーノ
Baveno
SP69
イーソラ
スペリオーレ
Isola Superiore
バレーゼ通り
チェッロ
Cerro
ブレンタ
Brenta
イーソラ
ベッラ
Isola Bella
SS394dir
チッティーリオ
Cittiglio
カンピーノ
Campino
SS33
SP69
SS394
ストレーザ
Stresa
SP1var
レヴォ
Levo
レーノ
Reno
ミラソーレ
Mirasole
カラヴァーテ
Caravate
A26
カンパーニャ
Campagna
レッジューノ
Leggiuno
サンジャーノ
ジェモーニオ
SP39
アルビーノ
アウトストラーダ・ディ・トラフォリ
ボロミオ諸島

(休憩)ボロミアンって何?

ちなみに日本でも。。。。。

三つ輪違い紋
（徳川旗本金田家の紋）

大神（おおみわ）神社
奈良県桜井市



バランタイン・エール（アメリカのビール）

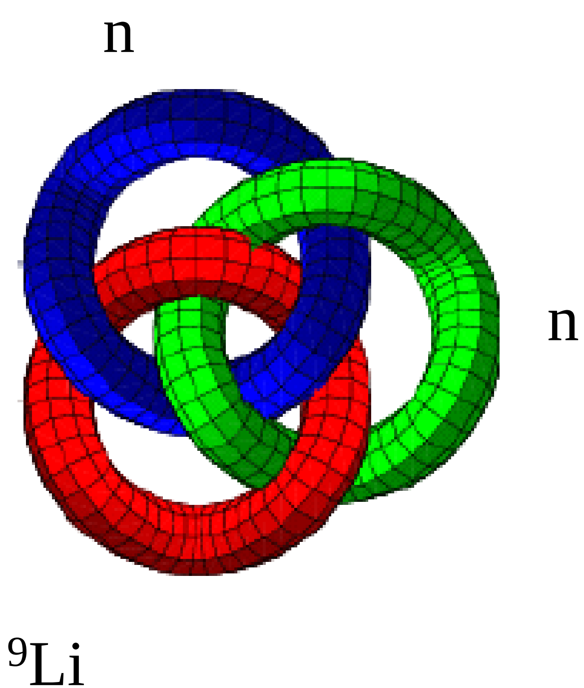
(休憩)ボロミアンって何?

三つ輪違い紋
（徳川旗本金田家の紋）

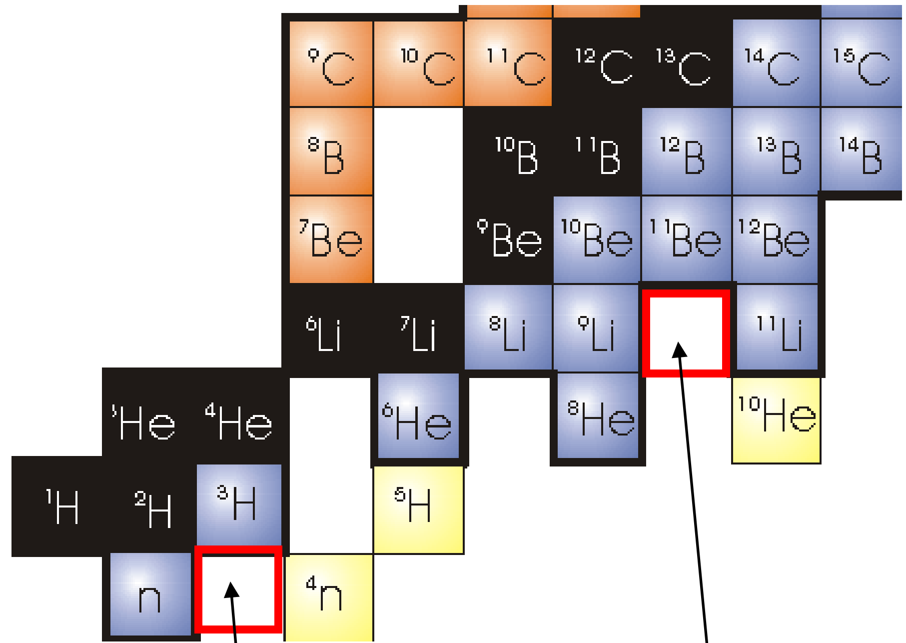
３つの輪はつながっているけど、どれか１つを
はずすとバラバラになる

「ボロミアン・リング」

ボロミアン原子核



ボロミアン核



^{10}Li (^{9}Li+n)
は存在せず

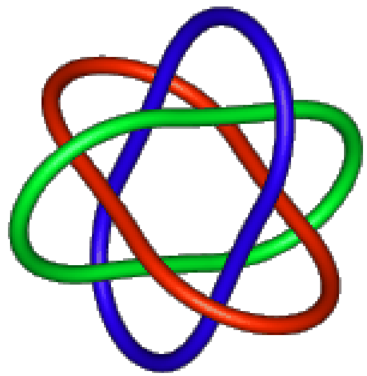
^{2}n (n+n) は存在せず

他にも、^{6}He が典型的な例

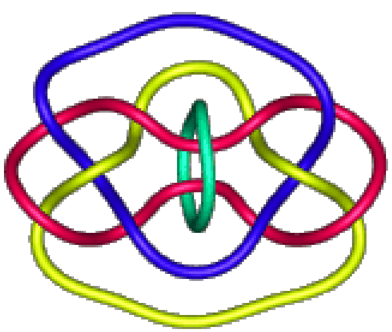
（参考）ブルニアン・リンク：拡張されたボロミアン

結び目理論: 位相幾何学の分野（数学）

n=3: Borromean



n=4

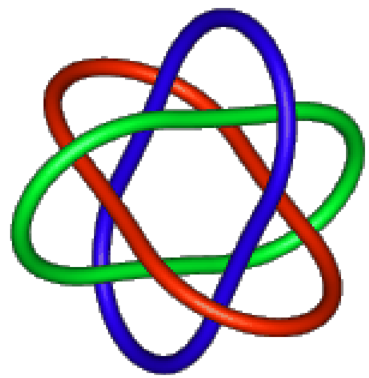


n=6

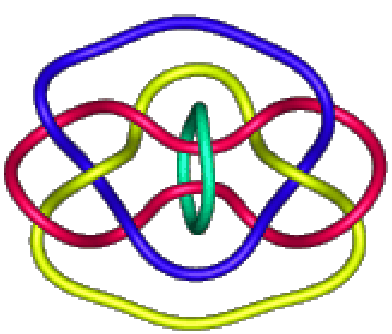
(参考)ブルニアン原子核

n=3: Borromean

^{11}Li, ^{6}He, etc.



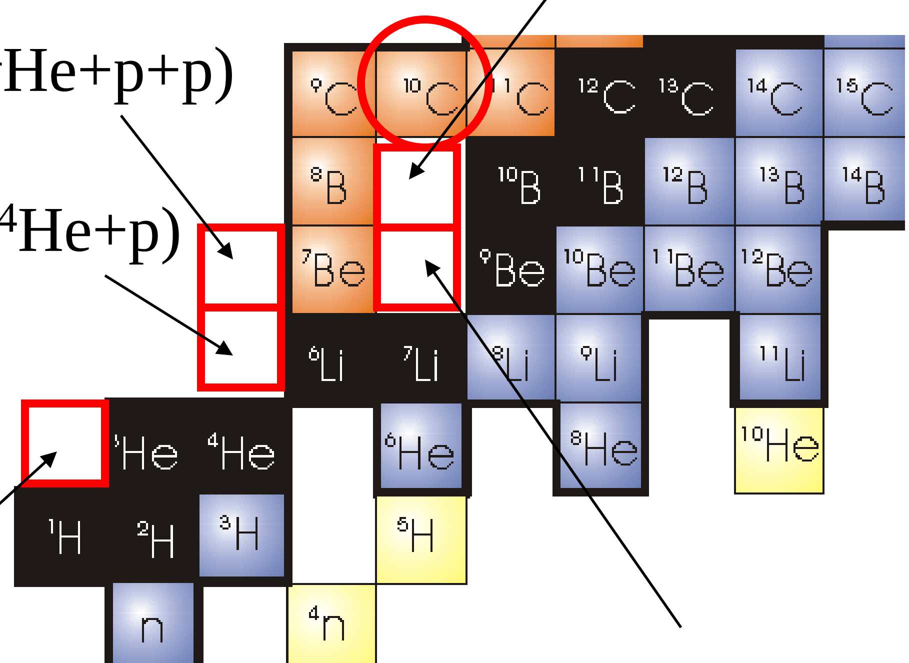
n=4: $^{10}\mathrm{C} = {}^{4}\mathrm{He}+{}^{4}\mathrm{He}+p+p$



^{9}B (^{4}He+^{4}He+p)

^{6}Be (^{4}He+p+p)

^{5}Li (^{4}He+p)



^{2}He (p+p)

^{8}Be (^{4}He+^{4}He)

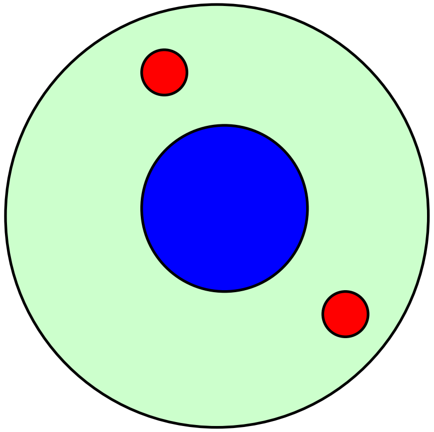
cf. N. Curtis et al., PRC77('08)021301(R)

演習問題（M1用）

一次元調和振動子ポテンシャル $V(x) = m\omega^2 x^2/2$ の基底状態に粒子が一つある。ここに外場 $F(x) = x$ をかける。

１．$\langle n|F|i\rangle$ をすべての n について求めよ。
２．Sum_n $|\langle n|F|i\rangle|^2$ を求め、$\langle x^2\rangle$ と一致することを確かめよ。
３．Sum_n $(E_n - E_i)\ |\langle n|F|i\rangle|^2$ を求め、$\hbar^2/2m$ と一致することを確かめよ。
４．初期状態が第一励起状態にあるときに、１～3と同じ問題を解け。
（５．外場が $F(x) = x^2$ の時にはどうなるか?）

双中性子 (dineutron) 相関



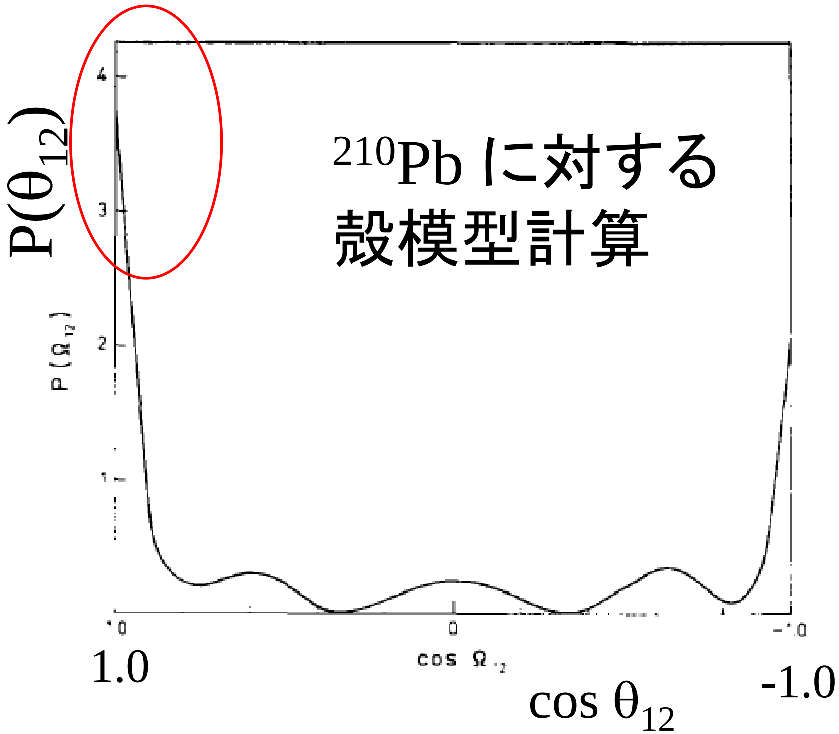
原子核中で2つの中性子は空間的に
どのように配置されているのか?

2つの中性子が独立に運動していると
すると、片方の中性子がどこにいようとも
もう片方は関知しない

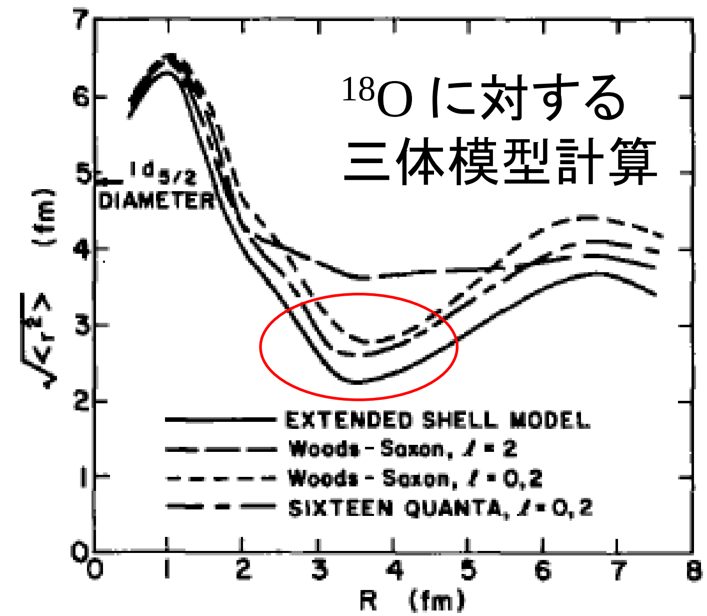
⬇

対相関が働くとどうなるか?

この問題はかなり古くから議論されてきた



G.F. Bertsch, R.A. Broglia, and C. Riedel,
NPA91(‘67)123

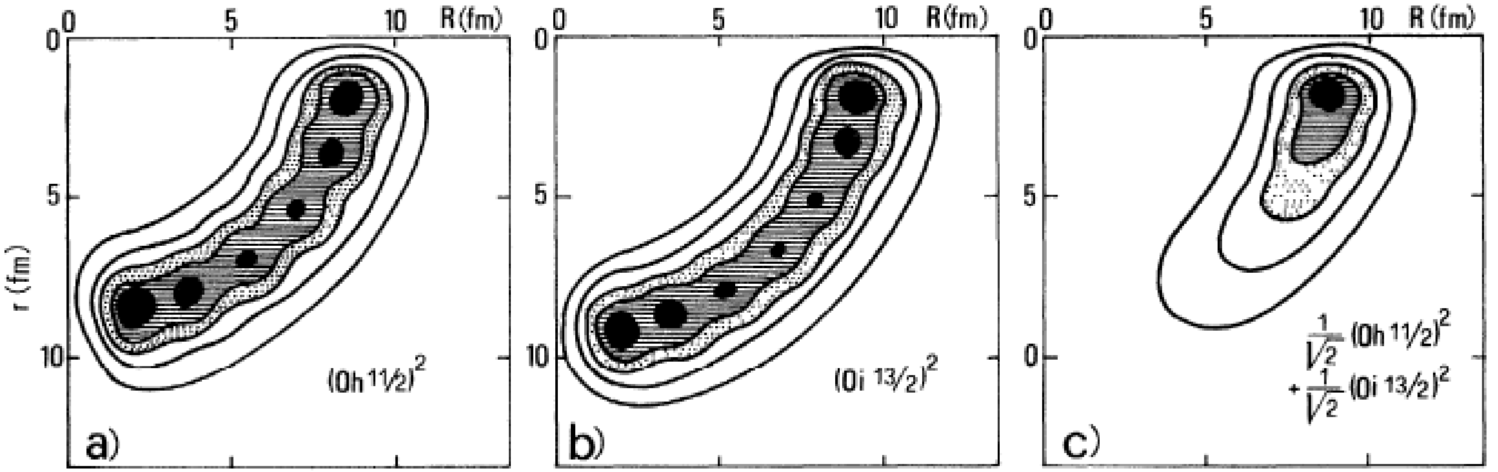


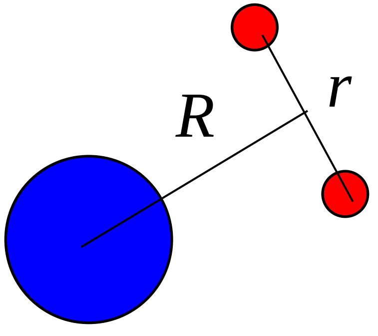
R.H. Ibarra et al.,
NPA288(‘77)397

2中性子は空間的に局在している（双中性子 – dineutron – 相関）

cf. A.B. Migdal, “Two interacting particles in a potential well”,
Soviet J. of Nucl. Phys. 16 (‘73) 238.

dineutron 相関は異なるパリティ状態の混合によって生じる



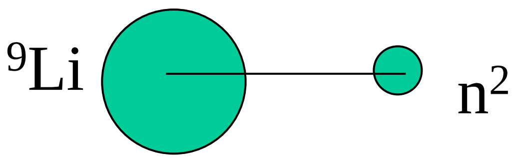


F. Catara, A. Insolia, E. Maglione, and A. Vitturi, PRC29(‘84)1091

（後でもう少し説明します）

Dineutron クラスター模型

Dineutron 相関の考えを中性子過剰核へ最初に適用したのは
Hansen と Jonson

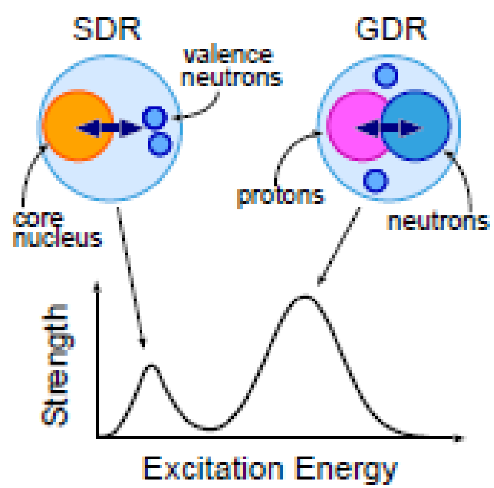


^{9}Li と n^2 の2体系として ^{11}Li の構造を
考えた (l = 0 で束縛する)

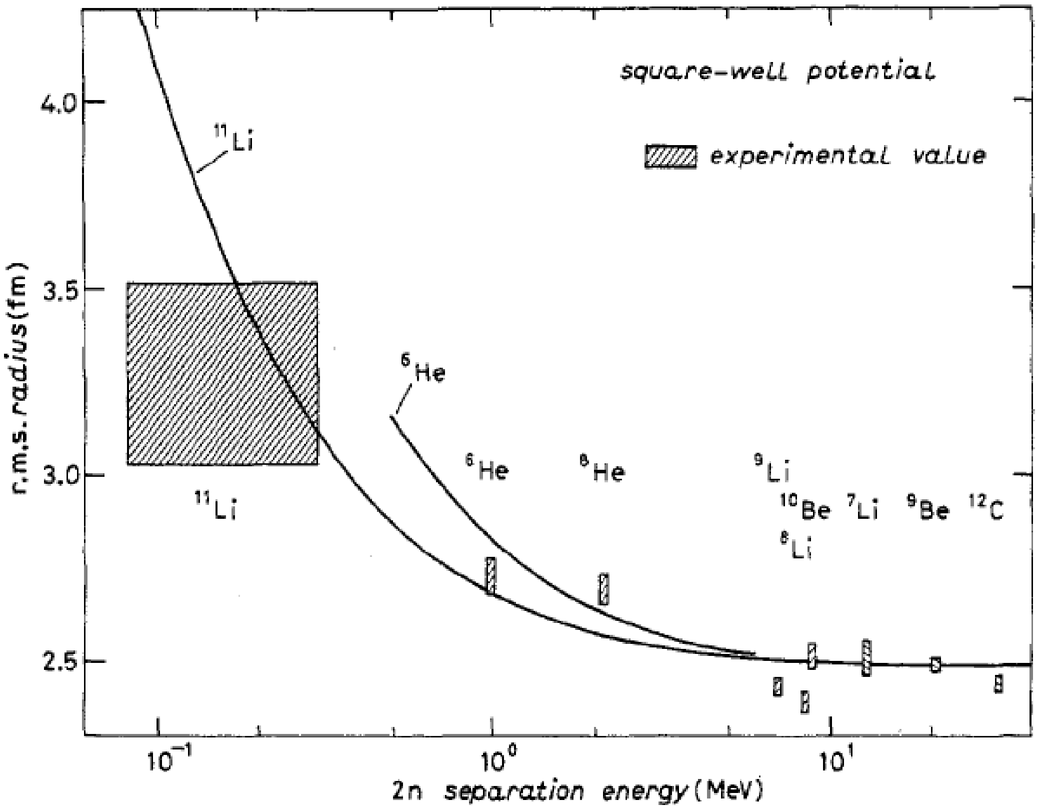
dineutron は束縛されたクラスター
と仮定(構造はナシ)

P.G. Hansen and B. Jonson, Europhys. Lett. 4(‘87)409

cf. ソフト双極子励起
K. Ikeda, INS Report JHP-7 (‘88)

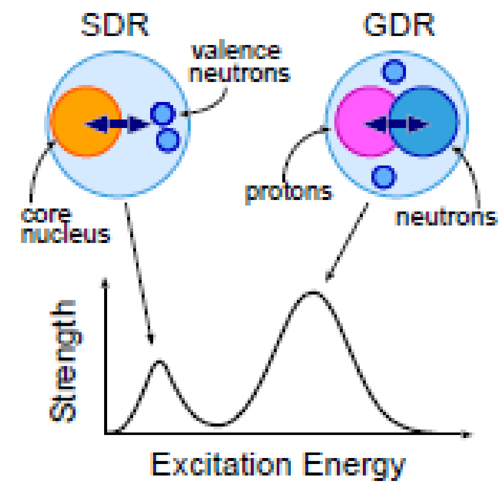


K. Ikeda, T. Myo, K. Kato, and H. Toki,
Lecture Note in Phys., vol. 818



P.G. Hansen and B. Jonson, Europhys. Lett. 4('87)409

この他にソフトE1励起の議論も。

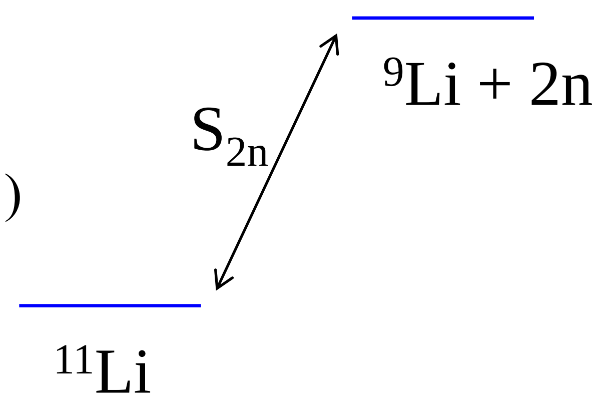


2中性子分離エネルギー:

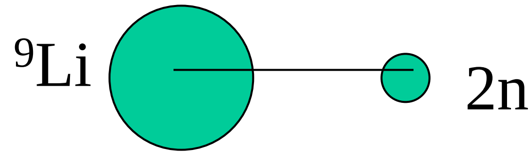
S_{2n} = 378 +/- 5 keV for ^{11}Li
973 keV for ^{6}He

(C. Bachelet et al., PRL100('08)182501)

⟹ ハロー構造



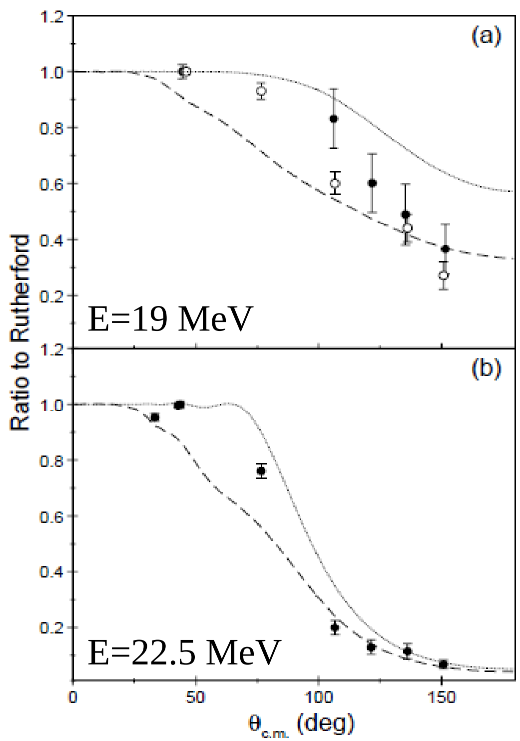
Dineutron クラスター模型



dineutron クラスター模型を用いた原子核反応の計算も多くなされた

核融合: N. Takigawa and H. Sagawa, PLB265('91)23
N. Takigawa, M. Kuratani, H. Sagawa, PRC47('93)R2470
M.S. Hussein, M.P. Pato, L.F. Canto, and R. Donangelo, PRC46('92)377

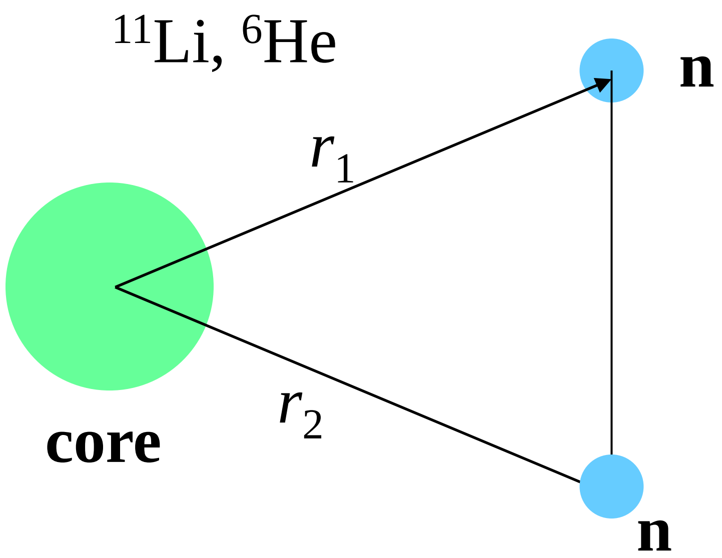
CDCC (弾性散乱、分解反応): N. Keeley et al., PRC68('03)054601



^{6}He+^{209}Bi
弾性散乱の角度分布

cf. 4-body CDCC
T. Matsumoto et al.,
PRC73('06)051602

3体模型計算 ('90~): dineutron クラスター模型の微視的理解



$$H = \frac{\boldsymbol{p}_1^2}{2m} + \frac{\boldsymbol{p}_2^2}{2m} + V_{nC}(r_1) + V_{nC}(r_2) + V_{nn} + \frac{(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2)^2}{2A_c m}$$

（最後の項は3体系の静止系で考えた芯原子核の運動エネルギー項。）

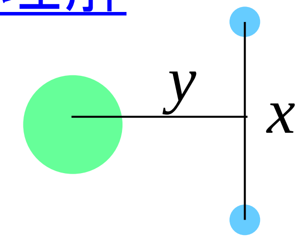
⇒ この3体ハミルトニアンの基底状態を求め、密度分布を調べる:

（例えば）V_{nn} がないときの状態で展開し、展開係数を求める

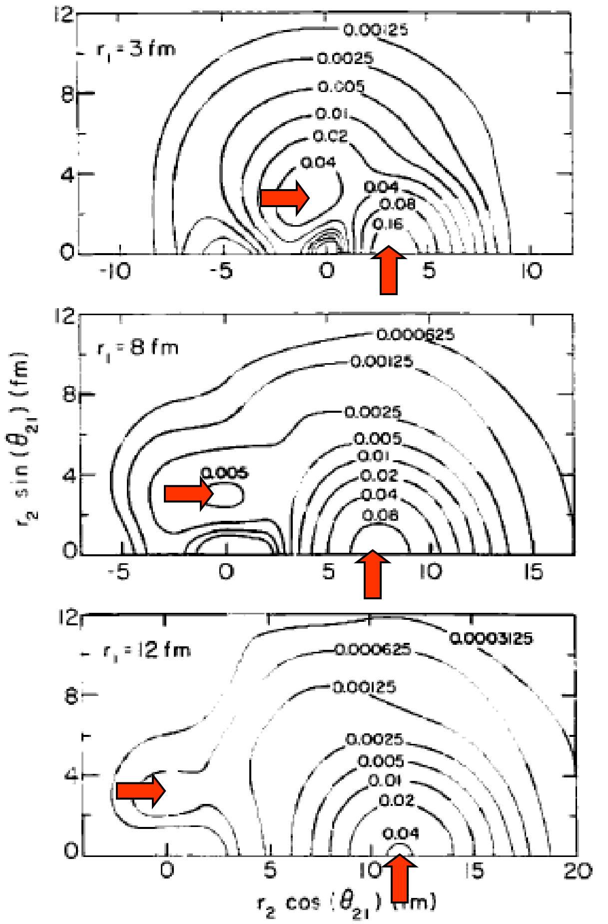
$$\boxed{\Psi_{gs}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = \mathcal{A} \sum_{nn'lj} \alpha_{nn'lj} \Psi^{(2)}_{nn'lj}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)}$$

$$\Psi^{(2)}_{nn'lj}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = \sum_m \langle jmj-m|00\rangle \psi_{nljm}(\boldsymbol{r}_1)\psi_{n'lj-m}(\boldsymbol{r}_2)$$

3体模型計算 ('90~): dineutron クラスター模型の微視的理解



$\rho_2(r_1, r_2, \theta_{12})$ for ^{11}Li



G.F. Bertsch, H. Esbensen,
Ann. of Phys., 209('91)327

$x^2y^2\,\rho_2(x, y)$ for ^{6}He

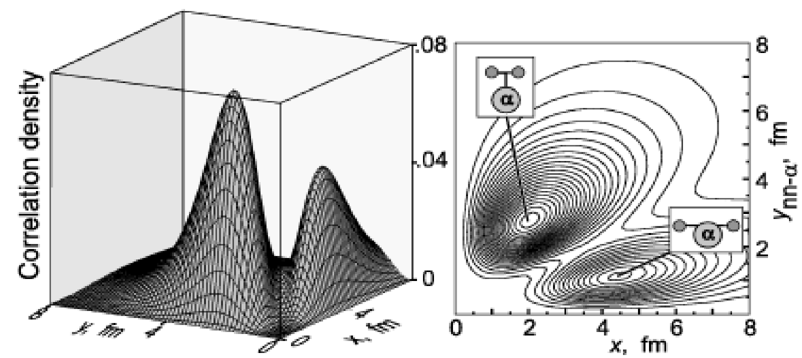


FIG. 1. Spatial correlation density plot for the 0^+ ground state of ^{6}He. Two components—di-neutron and cigarlike—are shown schematically.

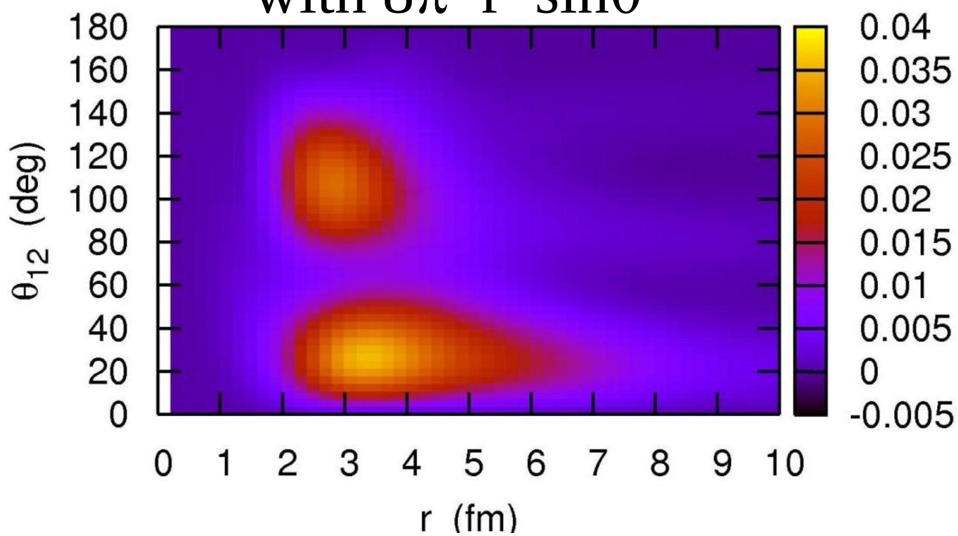
Yu.Ts. Oganessian, V.I. Zagrebaev,
and J.S. Vaagen, *PRL82('99)4996*
M.V. Zhukov et al., *Phys. Rep. 231('93)151*

"di-neutron" and *"cigar-like"*
configurations

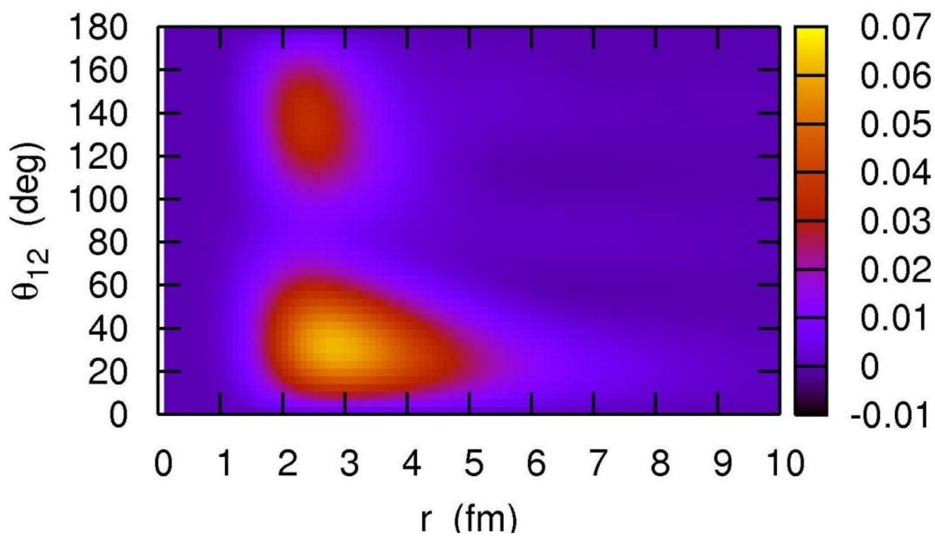
3体模型計算 ('90~): dineutron クラスター模型の微視的理解

^{11}Li

with $8\pi^2 r^4 \sin\theta$

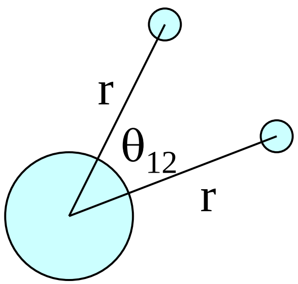


^{6}He



K.Hagino and H. Sagawa, PRC72('05)044321

別の representation

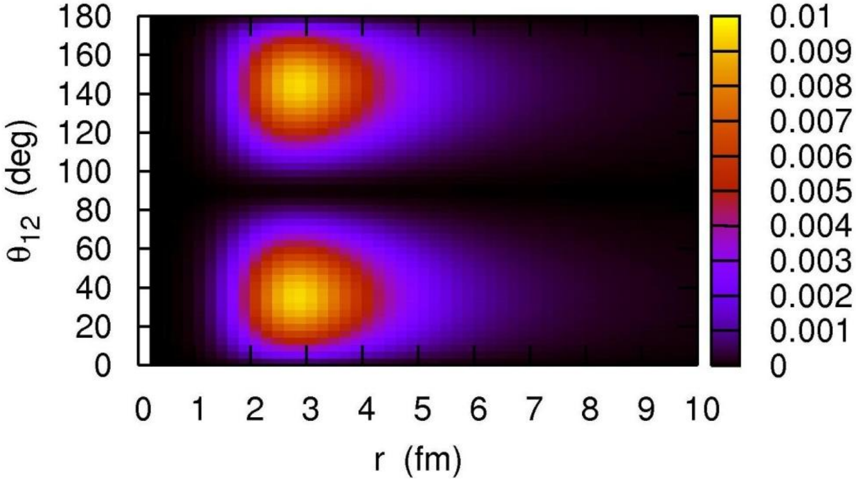


芯核と中性子の間の距離を2つの中性子とも同じにとり、r と θ の2次元プロット

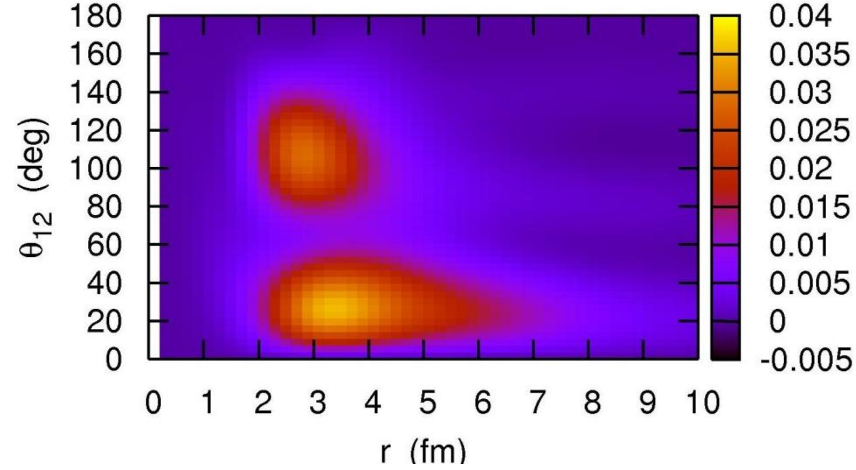
対相関力がある場合とない場合の比較 (i):

^{11}Li

対相関がない場合 $[1p_{1/2}]^2$



対相関がある場合



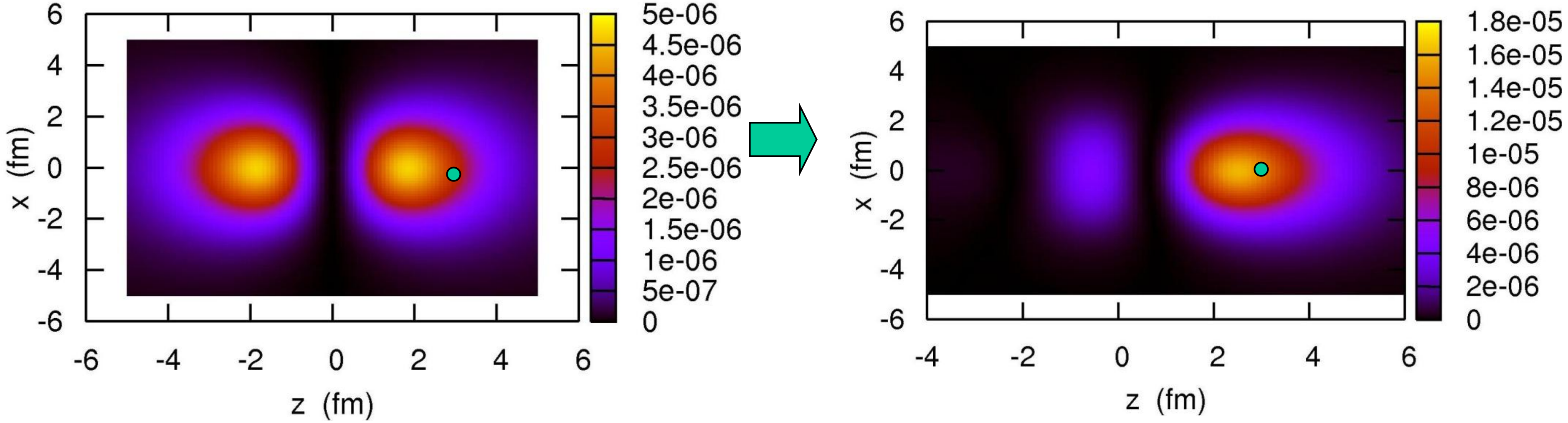
- 対相関がないと、2つの対称的なピーク($p_{1/2}$ 状態を反映)。
- 対相関があると、大きい θ にあるピークが抑制され、小さい θ にあるピークが増幅する(双中性子相関)。
- 小さい θ にあるピークのテールがのびる(ハロー構造)。

$\longleftarrow$ 対相関による連続状態との結合の効果

対相関力がある場合とない場合の比較 (ii):

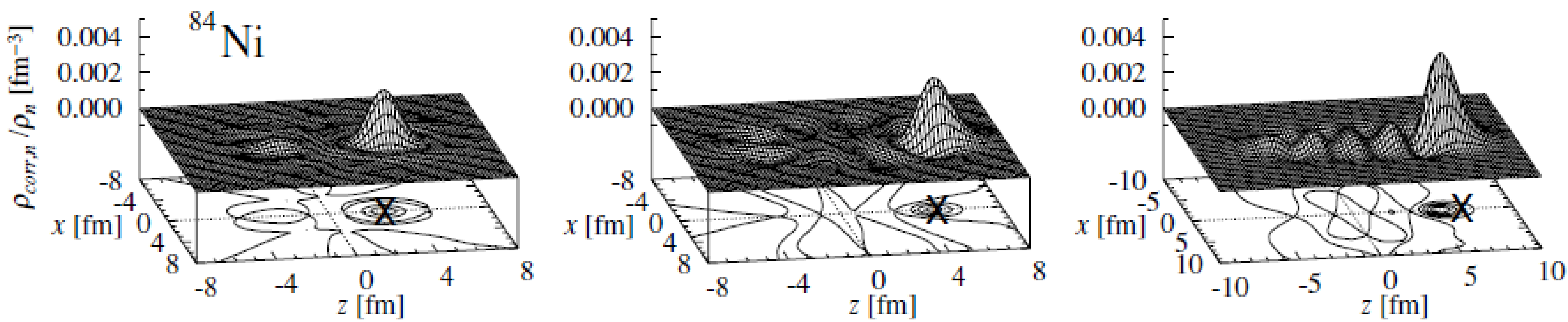
^{11}Li　1つの中性子を (z_1, x_1)=(3.4 fm, 0)に置いたときのもう一つの中性子の分布

対相関がない場合 $[1p_{1/2}]^2$　　　　対相関がある場合

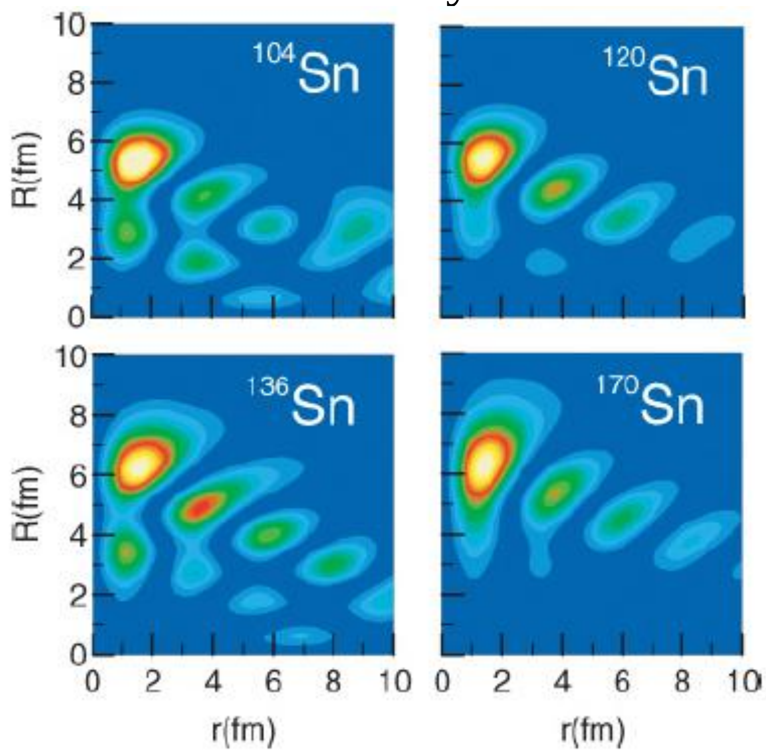


- 対相関がないと、z と $-z$ で対称的な分布。片方の中性子がどこにいても分布は変わらない。
- 対相関があると、2つの中性子は近くにいる。1つの中性子の場所が変わると、もう1つも変わる。

重い中性子過剰核の dineutron 相関

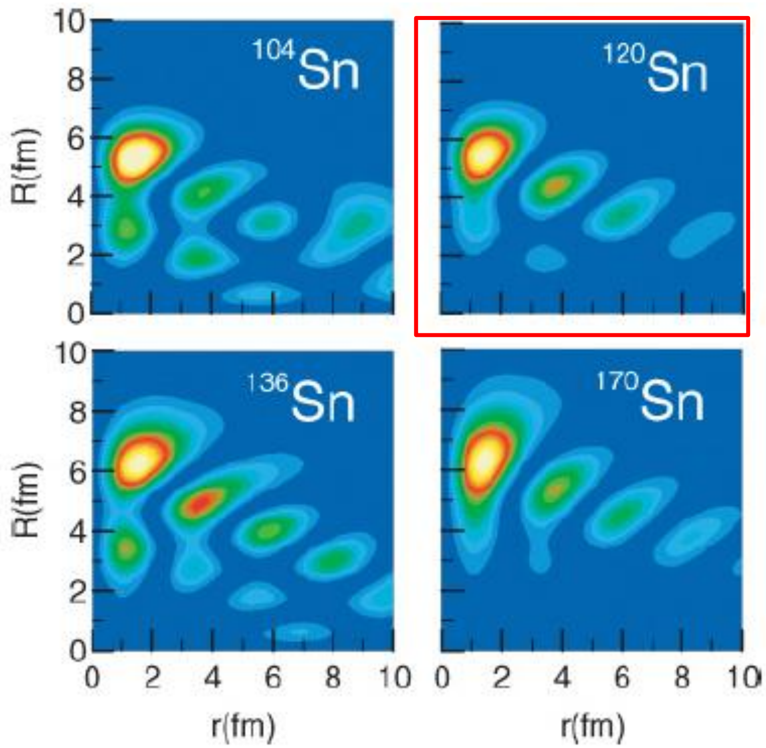


M. Matsuo, K. Mizuyama, and Y. Serizawa, PRC71(‘05)064326
Skyrme HFB



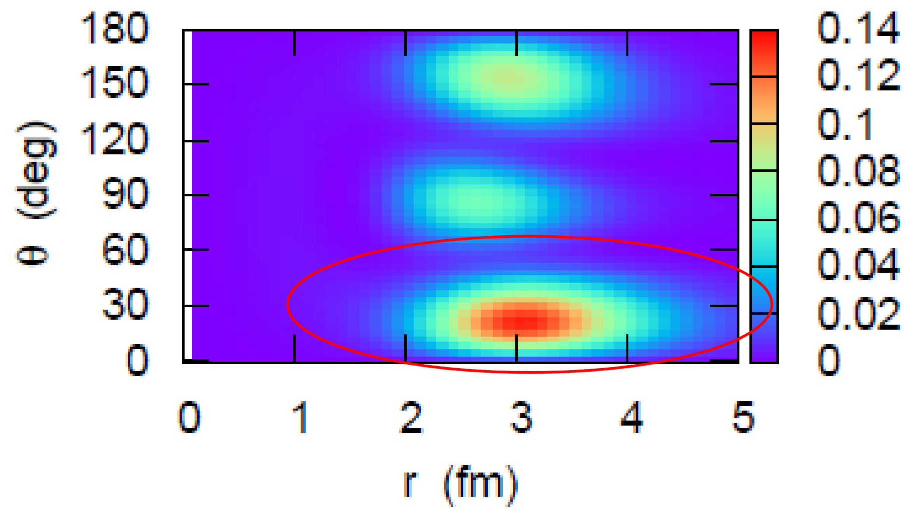
N. Pillet, N. Sandulescu, and P. Schuck,
PRC76(‘07)024310
Gogny HFB

（注）dineutron 相関は弱束縛に特有な現象というわけではない



N. Pillet, N. Sandulescu, and P. Schuck, PRC76(‘07)024310

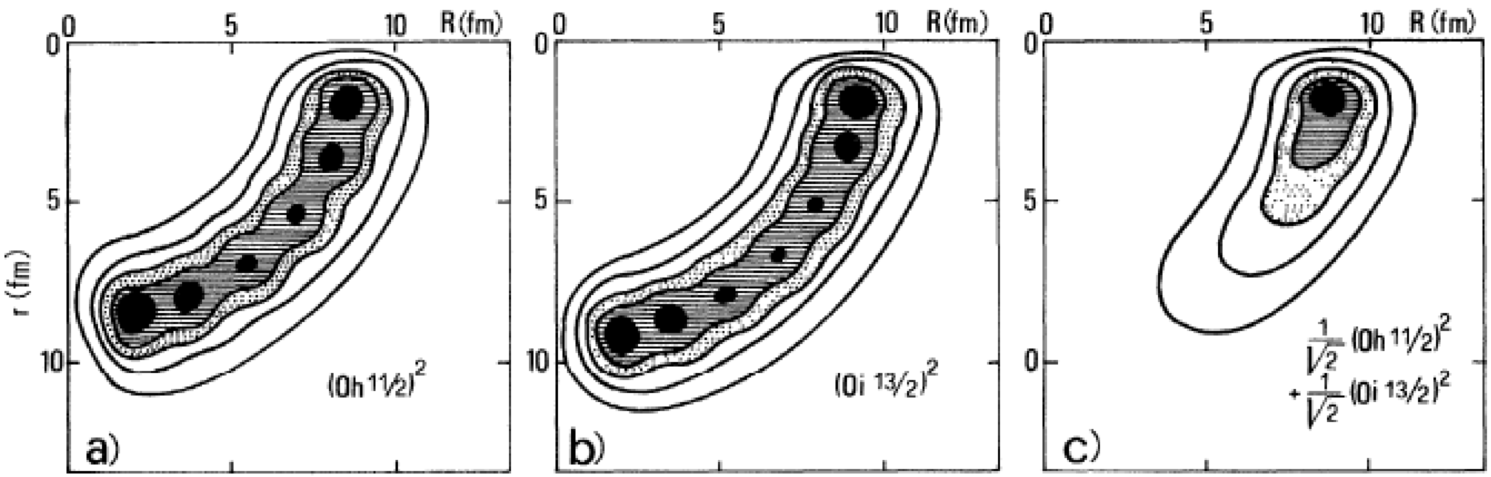
^{18}O の3体模型計算

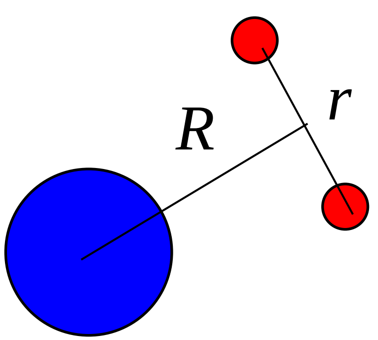


K. Hagino, H. Sagawa, and P. Schuck, J. of Phys. G37(‘10)064040

むしろ、対相関力による異なるパリティ状態の混合が本質的

dineutron 相関は異なるパリティ状態の混合によって生じる

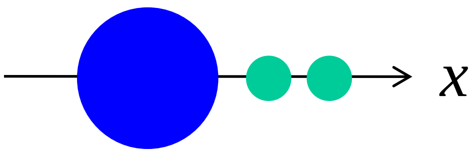




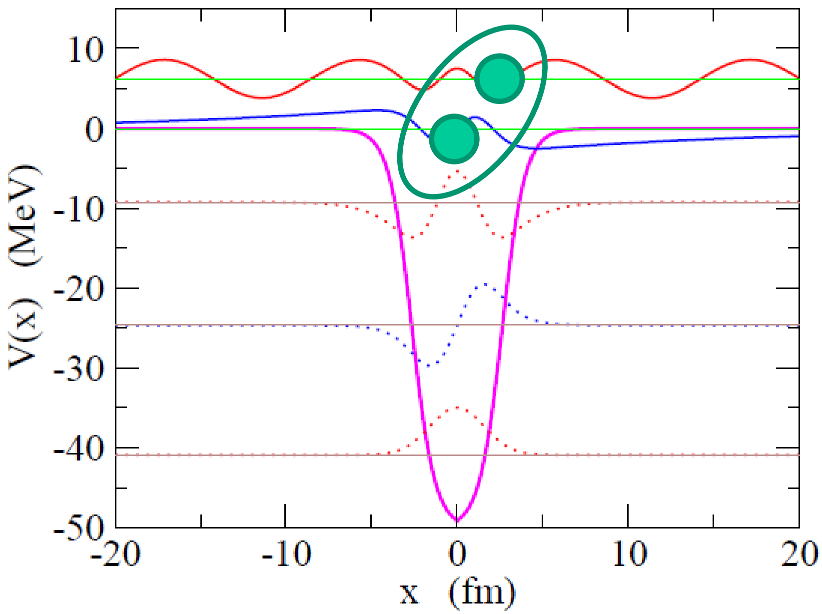
F. Catara, A. Insolia, E. Maglione, and A. Vitturi, PRC29('84)1091

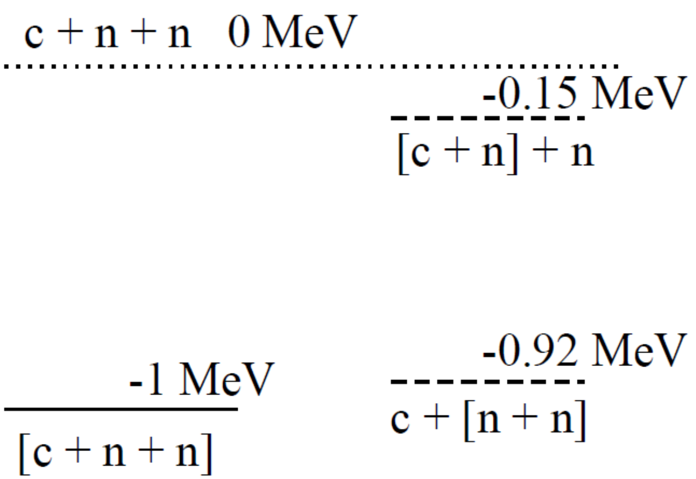
何故、異なるパリティが混ざると dineutron 相関が生じるのか?

2中性子ハロー核に対する1次元模型:



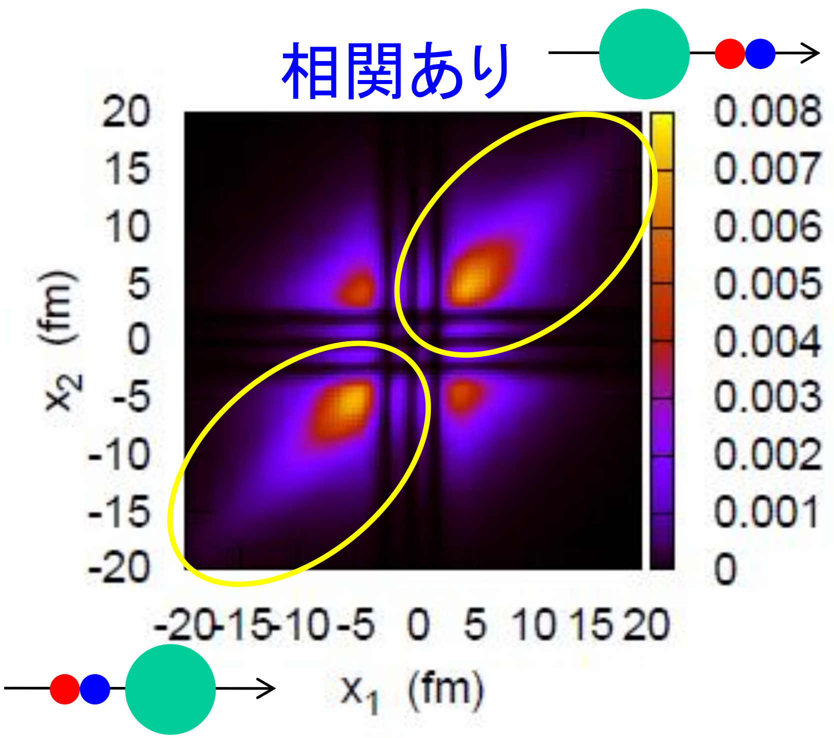
$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx_1^2} + V(x_1) - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx_2^2} + V(x_2) + v_{nn}(x_1, x_2)$$

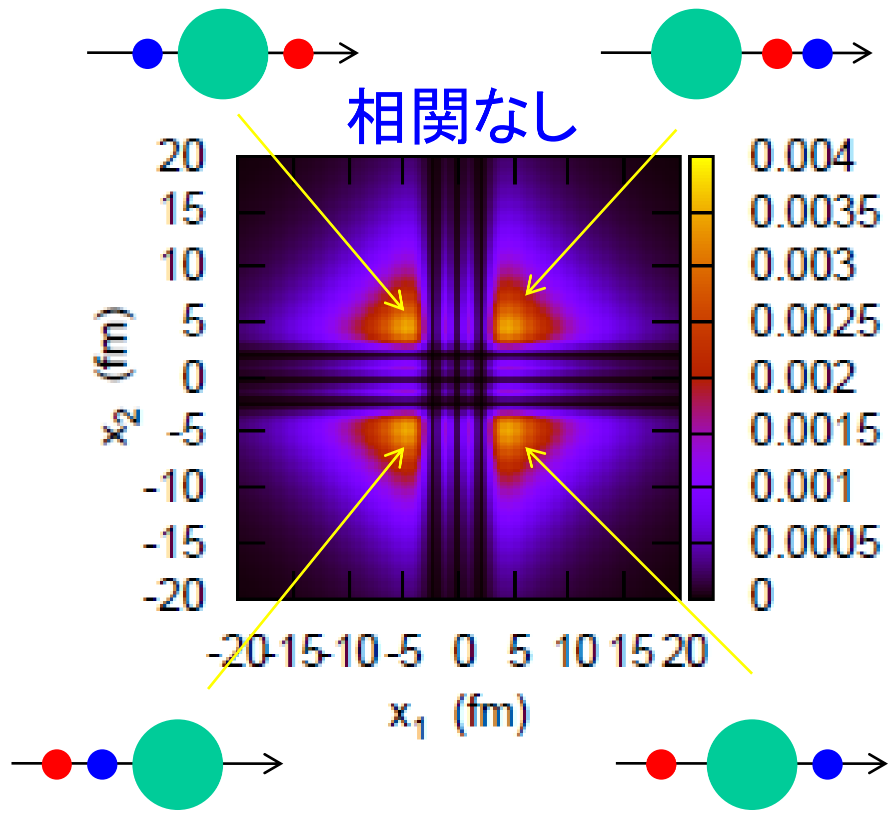




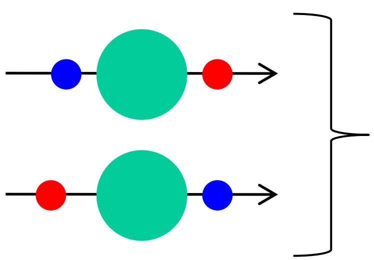
1次元ポテンシャル $V(x)$ の固有状態:正パリティ状態と負パリティ状態に分類される

何故、異なるパリティが混ざると dineutron 相関が生じるのか?





双中性子相関



大きく抑制

4つの対称的な分布

K. Hagino, A. Vitturi, F. Perez-Bernal, and H. Sagawa, preprint

何故、異なるパリティが混ざると dineutron 相関が生じるのか?

波動関数の構造: $\Psi_{\rm gs}(x_1,x_2)=\sum_{n\leq n'}\alpha_{nn'}\Psi_{nn'}(x_1,x_2)$

$$\begin{aligned}\Psi_{nn'}(x_1,x_2) \quad &\propto \quad \mathcal{S}[\phi_n(x_1)\phi_{n'}(x_2)] \\ &\times|S=0\rangle\end{aligned}$$

$$\Psi_{\rm gs}(x_1,x_2)=\Psi_{\rm ee}(x_1,x_2)+\Psi_{\rm oo}(x_1,x_2)$$

2つの中性子とも
正パリティ状態

2つの中性子とも
負パリティ状態

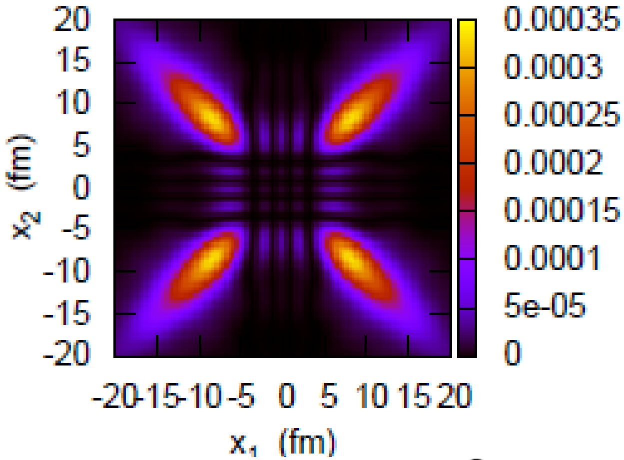
$$\begin{aligned}\longrightarrow \quad \rho_2(x_1,x_2) \quad &= \quad |\Psi_{\rm gs}(x_1,x_2)|^2 \\ &= \quad |\Psi_{\rm ee}(x_1,x_2)|^2+|\Psi_{\rm oo}(x_1,x_2)|^2 \\ &\quad\quad +2\Psi_{\rm ee}(x_1,x_2)\Psi_{\rm oo}(x_1,x_2)\end{aligned}$$

K. Hagino, A. Vitturi, F. Perez-Bernal, and H. Sagawa, preprint

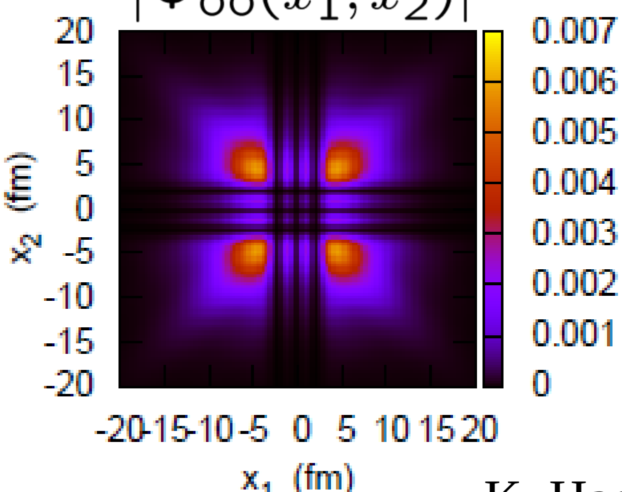
何故、異なるパリティが混ざると dineutron 相関が生じるのか?

$$\rho_2(x_1,x_2) = |\Psi_{\rm ee}(x_1,x_2)|^2+|\Psi_{\rm oo}(x_1,x_2)|^2 +2\Psi_{\rm ee}(x_1,x_2)\Psi_{\rm oo}(x_1,x_2)$$

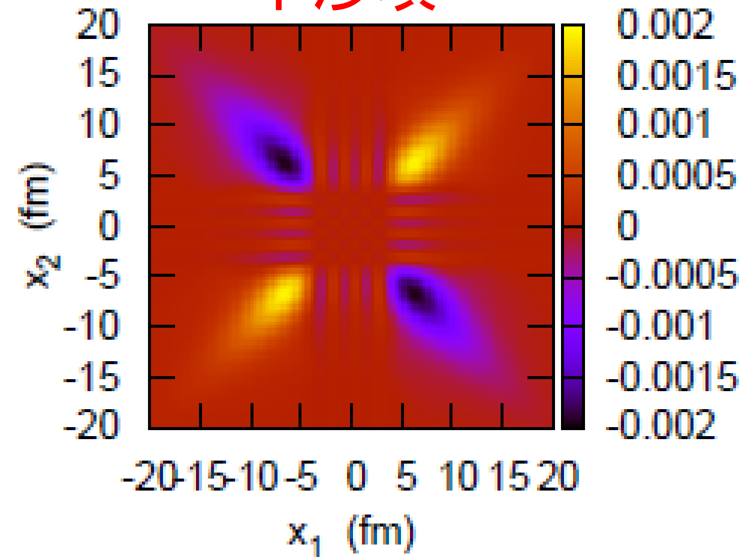
$|\Psi_{\rm ee}(x_1,x_2)|^2$



$|\Psi_{\rm oo}(x_1,x_2)|^2$



干渉項



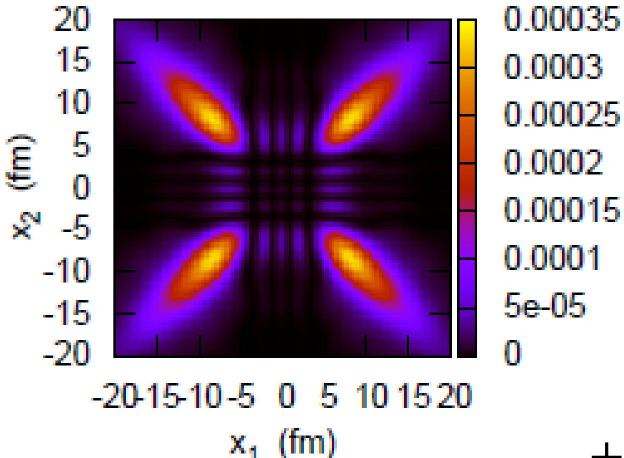
$$\Psi_{\rm ee}(x_1,x_2)\Psi_{\rm oo}(x_1,x_2) = -\Psi_{\rm ee}(x_1,-x_2)\Psi_{\rm oo}(x_1,-x_2)$$

K. Hagino, A. Vitturi, F. Perez-Bernal, and H. Sagawa, preprint

何故、異なるパリティが混ざると dineutron 相関が生じるのか?

$$
\begin{aligned}
\rho_2(x_1,x_2) &= |\Psi_{\rm ee}(x_1,x_2)|^2+|\Psi_{\rm oo}(x_1,x_2)|^2 \\
&\quad +2\Psi_{\rm ee}(x_1,x_2)\Psi_{\rm oo}(x_1,x_2)
\end{aligned}
$$

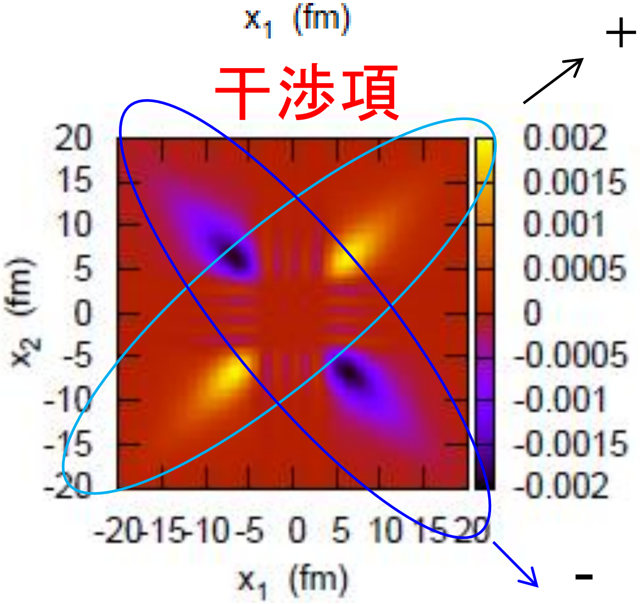
$|\Psi_{\rm ee}(x_1,x_2)|^2$

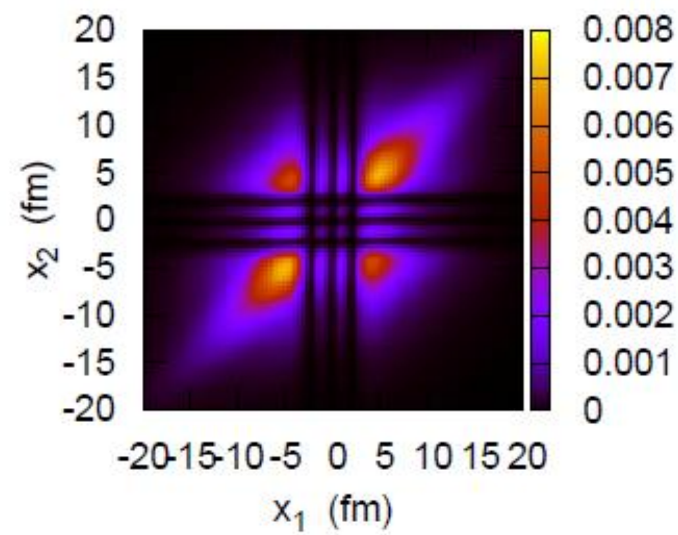


$$
\begin{aligned}
\Psi_{\rm ee}(-x_1,x_2) &= \Psi_{\rm ee}(x_1,x_2) \\
\Psi_{\rm oo}(-x_1,x_2) &= -\Psi_{\rm oo}(x_1,x_2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\rho_2(-x_1,x_2) \\
&\quad = |\Psi_{\rm ee}(x_1,x_2)|^2+|\Psi_{\rm oo}(x_1,x_2)|^2 \\
&\qquad -2\Psi_{\rm ee}(x_1,x_2)\Psi_{\rm oo}(x_1,x_2)
\end{aligned}
$$

干渉項





（参考）2レベル系にデルタ関数型相互作用を用いた場合

一粒子状態として、$\psi_e(x)$ と $\psi_o(x)$ の2つだけ存在するとする。

$\psi_e(x)$ は正パリティ: $\psi_e(-x) = \psi_e(x)$

$\psi_o(x)$ は負パリティ: $\psi_o(-x) = -\psi_o(x)$

$$\boxed{\Psi_{\mathrm{g.s.}}(x,x') = \alpha\,\phi_e(x)\phi_e(x') + \beta\,\phi_o(x)\phi_o(x')}$$

係数 α, β はハミルトニアン行列を対角化して得られる:

$$\begin{aligned} H &= h_1 + h_2 - g\,\delta(x-x') \\ &= \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= 2\epsilon_e - g\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\phi_e(x)^4 \\ B &= -g\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\phi_e(x)^2\phi_o(x)^2 \\ C &= 2\epsilon_o - g\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\phi_o(x)^4 \end{aligned}$$

（参考）2レベル系にデルタ関数型相互作用を用いた場合

$$\boxed{\Psi_{\mathrm{g.s.}}(x,x') = \alpha\,\phi_e(x)\phi_e(x') + \beta\,\phi_o(x)\phi_o(x')}$$

係数 α, β はハミルトニアン行列を対角化して得られる:

$$\begin{aligned} H &= h_1 + h_2 - g\,\delta(x-x') \\ &= \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= 2\epsilon_e - g\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\phi_e(x)^4 \\ B &= -g\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\phi_e(x)^2\phi_o(x)^2 \\ C &= 2\epsilon_o - g\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\phi_o(x)^4 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \mathcal{N}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix} 2B \\ (C-A)-\sqrt{(C-A)^2+4B^2} \end{pmatrix}}_{\text{負の量}}$$

$\Longrightarrow$ α, β は同符号

$\Longrightarrow$ 干渉項: $\alpha\beta\,\phi_e(x)\phi_e(x')\cdot\phi_o(x)\phi_o(x')$

は、$x = x'$ で正、$x = -x'$ で負

演習問題５

2中性子ハロー核に対する1次元模型に対する Fortran プログラム:

http://www.nucl.phys.tohoku.ac.jp/~hagino/lecture2/pair.f

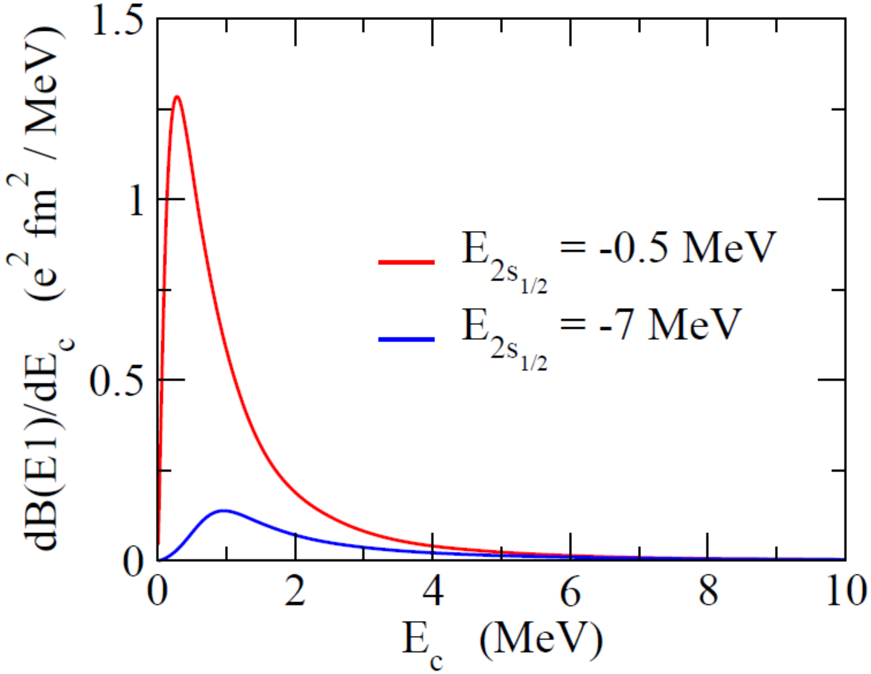
実際にプログラムを動かしてみて、dineutron correlation　を確認せよ。

束縛が深い場合はどうなるか?

ボロミアン原子核のE1励起

2中性子ハロー核の場合

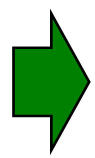
1中性子ハロー核の場合

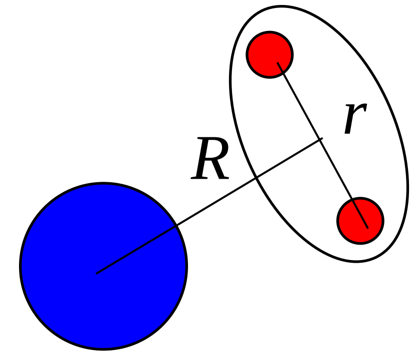


$$\hat{D}_\mu = e_{\mathrm{E1}} \cdot rY_{1\mu}(\theta, \phi)$$

$$e_{\mathrm{E1}} = \frac{Z_c}{A_c+1} e$$

$$\begin{aligned} B_{\mathrm{tot}}(E1) &= \int_0^\infty dE_c \frac{dB(E1)}{dE_c} \\ &= \frac{3}{4\pi} e_{\mathrm{E1}}^2 \langle r^2 \rangle_i \end{aligned}$$





$$\hat{D}_\mu = e_{\mathrm{E1}} \cdot RY_{1\mu}(\theta_R, \phi_R)$$

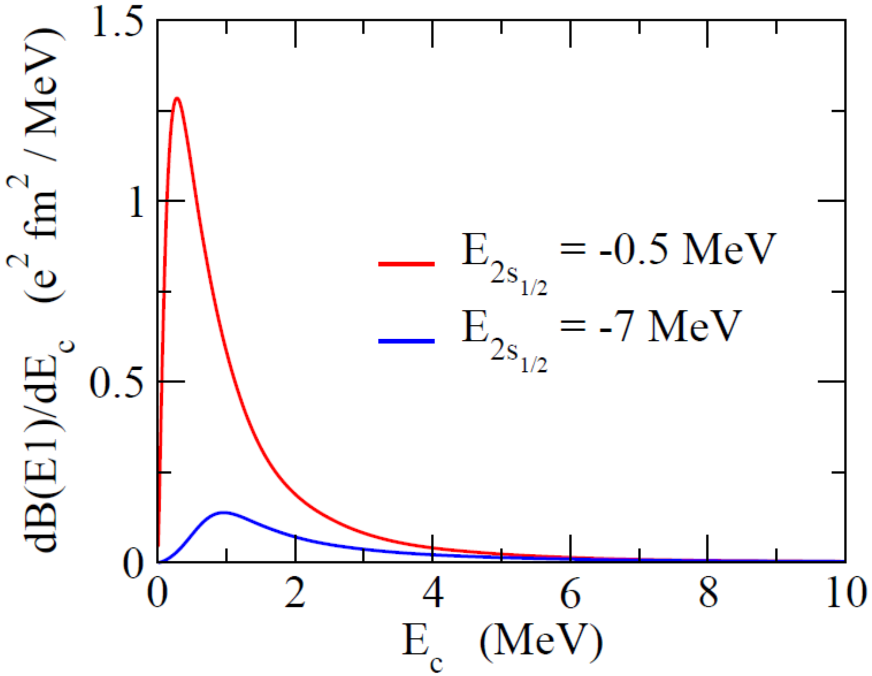
$$\boldsymbol{R} = (\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2)/2$$

$$\begin{aligned} e_{\mathrm{E1}} &= \frac{2Z_c - 0 \cdot A_c}{A_c + 2} e \\ &= \frac{2Z_c}{A_c + 2} e \end{aligned}$$

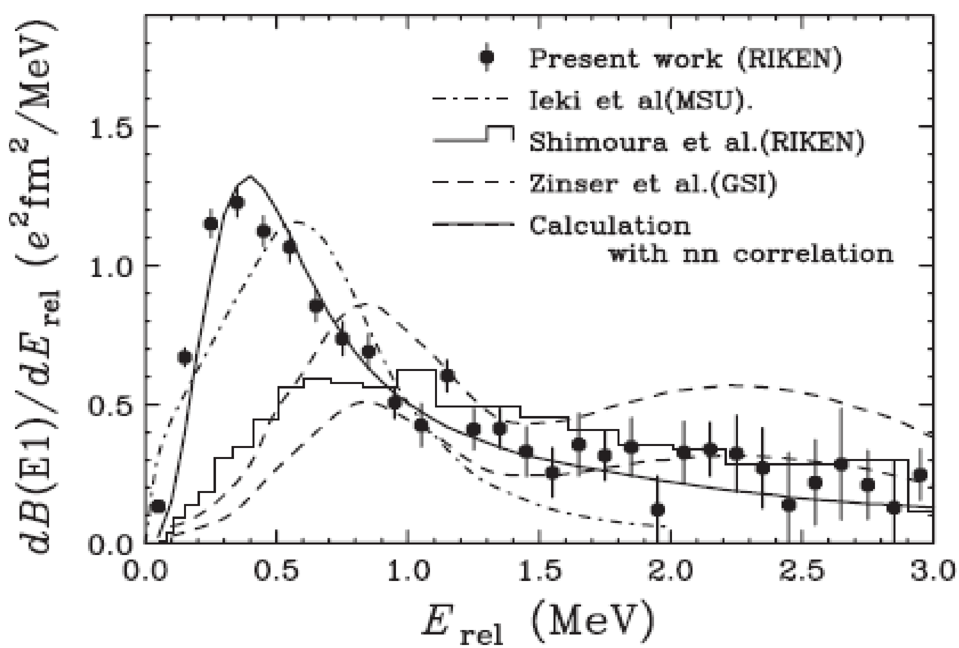
$$\begin{aligned} B_{\mathrm{tot}}(E1) &= \frac{3}{4\pi} e_{\mathrm{E1}}^2 \langle R^2 \rangle \\ &= \frac{3}{\pi} \left(\frac{Z_c e}{A_c + 2} \right)^2 \langle R^2 \rangle \end{aligned}$$

ボロミアン原子核のE1励起

1中性子ハロー核の場合



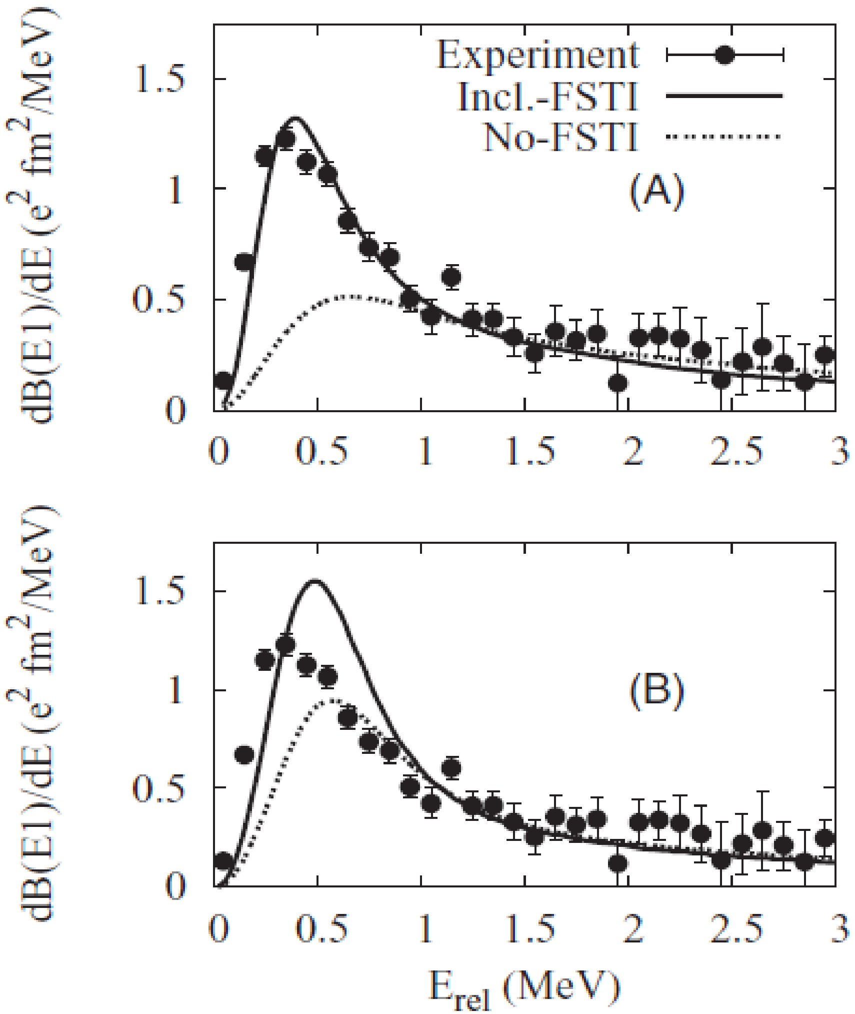
^{11}Li 原子核の実験データ



T. Nakamura et al., PRL96('06)252502

低エネルギー領域にするどいピーク

ボロミアン原子核のE1励起



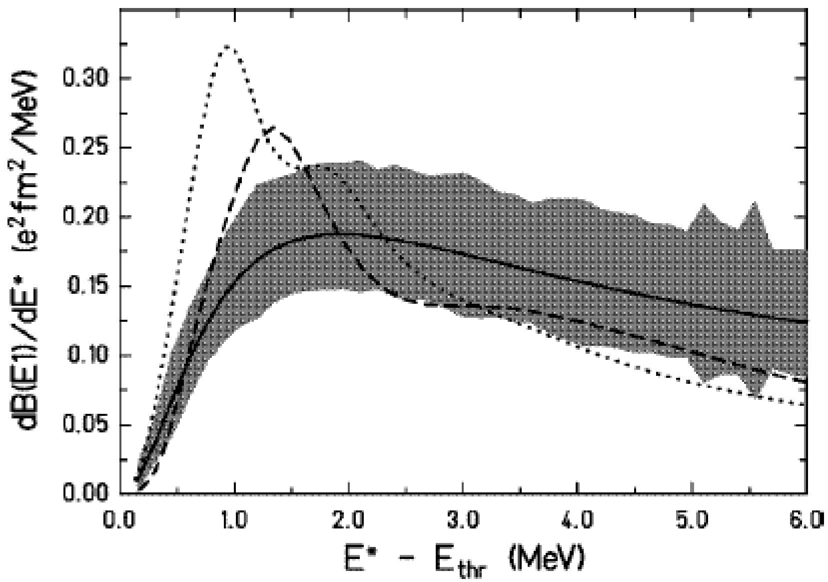
実験データは *nn* 相関を考慮しない限り説明できない

⬇

双中性子相関の有力な実験的証拠

H. Esbensen, K. Hagino, P. Mueller, and H. Sagawa, PRC76('07)024302

^{6}He の実験データ



T. Aumann et al., PRC59('99)1252

TABLE II. Experimental values (Expt.) for the integrated ($E^* \leqslant 5$ MeV and $E^* \leqslant 10$ MeV) non-energy-weighted [$\Sigma B(E1)$] and energy-weighted [$\Sigma E^{*} * B(E1)$] dipole strength. Corresponding theoretical values from "Ref." and sum rule values are given for comparison.

Ref.	$\Sigma B(E1)$ (e^2 fm^2)	$\Sigma E^{*} * B(E1)$ (e^2 fm^2 MeV)
Expt. ($E^* \leqslant 5$ MeV)	0.59 ± 0.12	1.9 ± 0.4
[7] ($E^* \leqslant 5$ MeV)	0.71	2.46
Expt. ($E^* \leqslant 10$ MeV)	1.2 ± 0.2	6.4 ± 1.3
[7] ($E^* \leqslant 10$ MeV)	1.02	4.97
Cluster sum rule	1.37 [7]	4.95
TRK sum rule		19.7

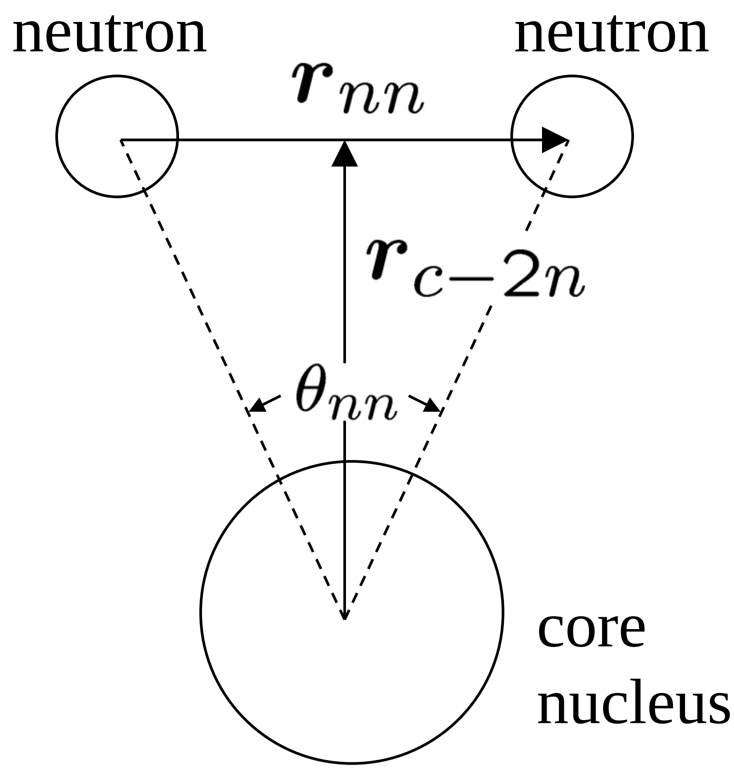
ボロミアン原子核の幾何学

実験データから2中性子の空間的配位を決められないか?

$r_{\text{c-2n}}$ と r_{nn} の情報があれば、2中性子の間の角度は

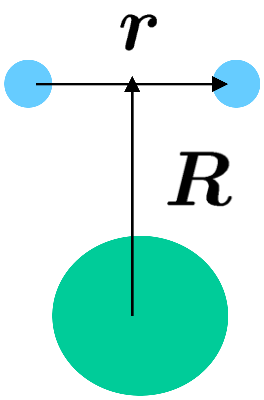
$$\cos\frac{\theta_{\text{nn}}}{2} \sim \frac{r_{\text{c}-2\text{n}}}{\sqrt{r_{\text{c}-2\text{n}}^2 + \frac{r_{\text{nn}}^2}{4}}}$$

と見積もることができる。



C.A. Bertulani and M.S. Hussein, PRC76('07)051602(R)
K. Hagino and H. Sagawa, PRC76('07)047302

ボロミアン原子核の幾何学



$\boxed{\sqrt{\langle R^2 \rangle}}$ は、B_{tot}(E1) から見積もることができる:

$$B_{\text{tot}}(E1) \sim \frac{3}{\pi}\left(\frac{Z_c e}{A_c+2}\right)^2 \langle R^2 \rangle$$

$\boxed{\sqrt{\langle r^2 \rangle}}$ は、物質密度半径から見積もることができる:

$$\boxed{\langle r_m^2 \rangle = \frac{A_c}{A_c+2}\langle r_m^2 \rangle_{A_c} + \frac{2A_c}{(A_c+2)^2}\langle R^2 \rangle + \frac{1}{2(A_c+2)}\langle r^2 \rangle}$$

または、2n 分解反応のHBT解析より見積もれる:

$$C(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2) = \frac{P_2(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2)}{P_1(\boldsymbol{p}_1) P_1(\boldsymbol{p}_2)}$$

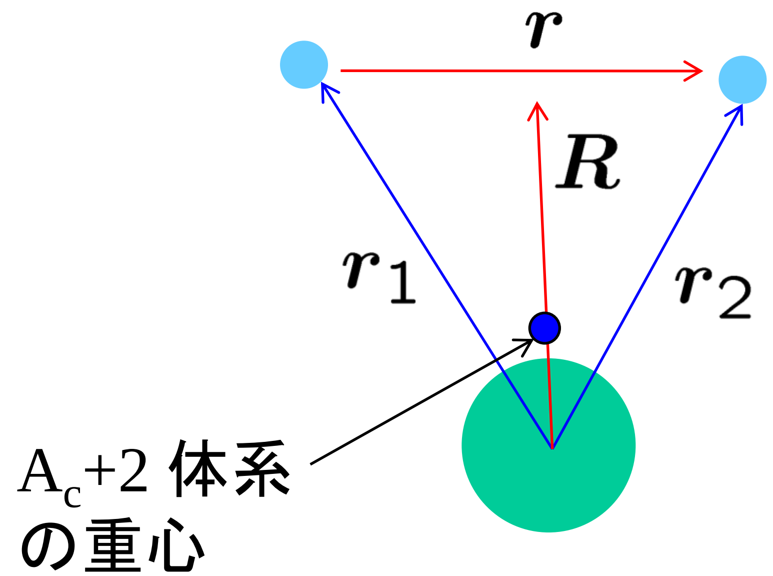
(C.A. Bertulani and M.S. Hussein, PRC76('07)051602)

3体模型に基づく matter radius の式

芯原子核の重心を原点にとる。

A_c+2 体系の重心は、

$$\boldsymbol{R}_{\rm cm} = \frac{A_c\boldsymbol{R}_{\rm core}+\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2}{A_C+2} = \frac{\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2}{A_C+2}$$



$$\langle r^2\rangle_{A_c+2} = \frac{1}{A_c+2}\cdot\left\langle\sum_{i=1}^{A_c+2}(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{R}_{\rm cm})^2\right\rangle$$

$$= \frac{1}{A_c+2}\cdot\left\langle\left(\boldsymbol{r}_1-\frac{\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2}{A_c+2}\right)^2+\left(\boldsymbol{r}_2-\frac{\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2}{A_c+2}\right)^2 + \sum_{i=3}^{A_c+2}(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{R}_{\rm cm})^2\right\rangle$$

(note)

$$\left\langle \sum_{i=3}^{A_c+2} (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{R}_{\rm cm})^2 \right\rangle = \left\langle \sum_{i=3}^{A_c+2} \boldsymbol{r}_i^2 - 2\boldsymbol{R}_{\rm cm}\cdot \overbrace{\sum_{i=3}^{A_c+2} \boldsymbol{r}_i}^{0} + A_c\cdot \boldsymbol{R}_{\rm cm}^2 \right\rangle$$

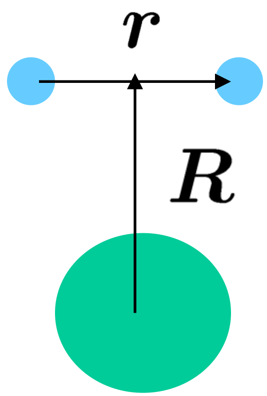
$$= A_c \langle r^2\rangle_{A_c} + \frac{A_c}{(A_c+2)^2}\langle (\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2)^2\rangle$$

$$\begin{aligned}
\langle r^2\rangle_{A_c+2} &= \frac{A_c}{A_c+2}\langle r^2\rangle_{A_c} \\
&\quad + \frac{1}{(A_c+2)^3}\Big\langle (A_c^2+2A_c+2)(r_1^2+r_2^2) \\
&\quad -4(A_c+1)\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2 + A_c(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2)^2\Big\rangle \\
&= \cdots \\
&= \frac{A_c}{A_c+2}\langle r^2\rangle_{A_c} + \frac{2A_c}{(A_c+2)^2}\langle R^2\rangle + \frac{1}{2(A_c+2)}\langle r^2\rangle
\end{aligned}$$

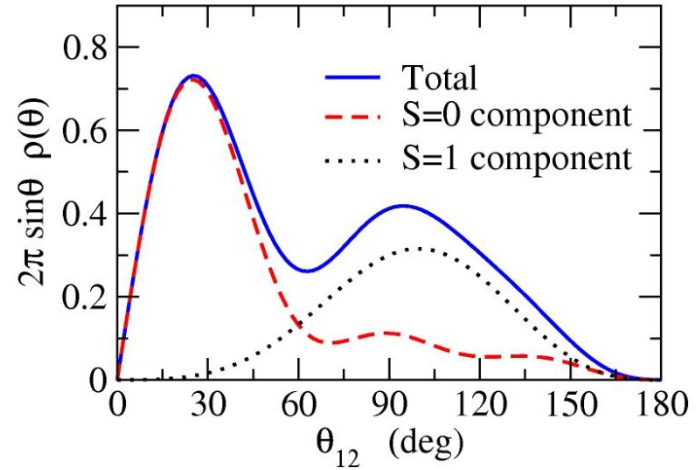
$$\boldsymbol{R} = (\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2)/2$$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$$

ボロミアン原子核の幾何学



^{11}Li　3体模型計算の結果



$\rightarrow \langle\theta_{12}\rangle = 65.29$ deg.

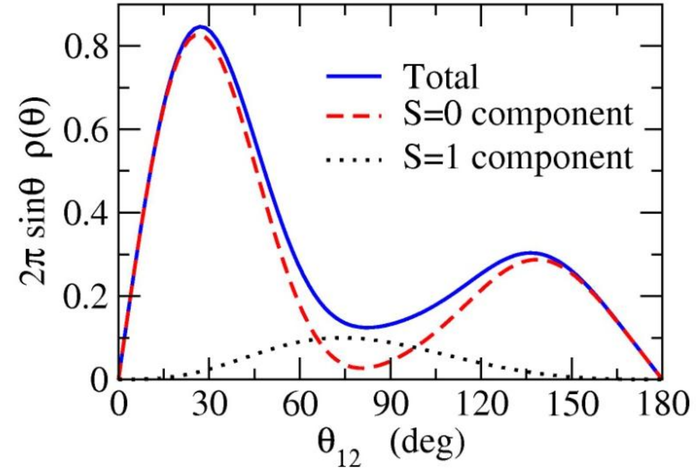
nn 間角度の「実験値」

$\sqrt{\langle R^2\rangle} \longleftarrow$ $B_{tot}(E1)$

$\sqrt{\langle r^2\rangle} \longleftarrow$ matter radius or HBT

$$\begin{aligned}\langle\theta_{12}\rangle &= 65.2^{+11.4}_{-13.0} \quad (^{11}\mathrm{Li}) \\ &= 74.5^{+11.2}_{-13.1} \quad (^{6}\mathrm{He})\end{aligned}$$

^{6}He



$\rightarrow \langle\theta_{12}\rangle = 66.33$ deg.

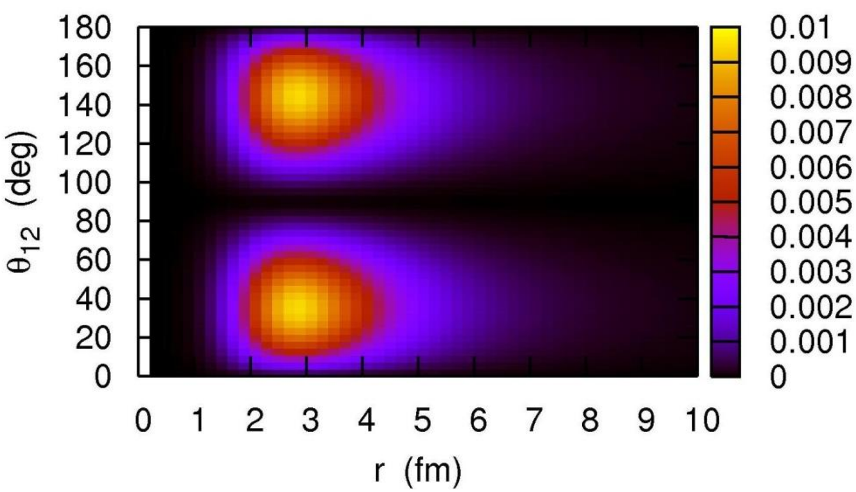
K.H. and H. Sagawa,PRC76('07)047302

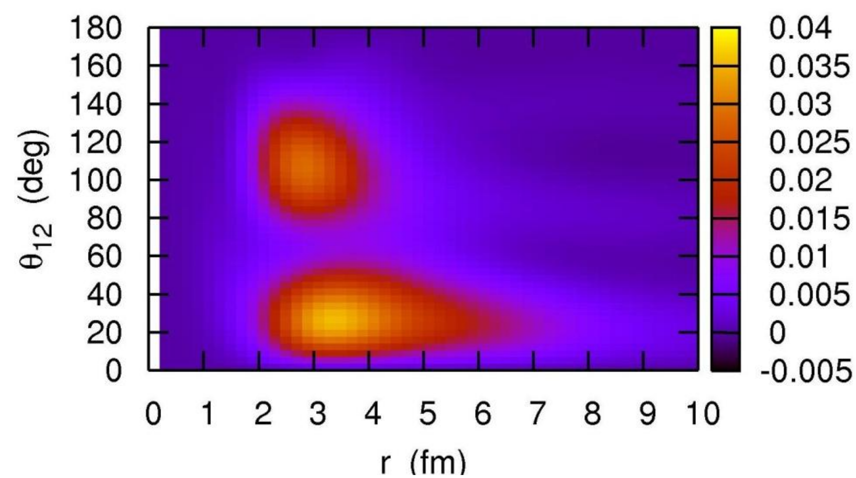
C.A. Bertulani and M.S. Hussein, PRC76('07)051602

注意点

nn 間角度の「実験値」

$$\langle\theta_{12}\rangle = 65.2^{+11.4}_{-13.0} \quad (^{11}\mathrm{Li})$$
$$= 74.5^{+11.2}_{-13.1} \quad (^{6}\mathrm{He})$$





相関がなければ $\langle\theta_{12}\rangle = 90$ 度

⇩

ここからのずれが相関の強さの度合いを反映する

$\langle\theta_{12}\rangle = 65$ 度は dineutron 相関とは矛盾しない（2つのピークの平均となっているため）

（参考）

Nucleus	Method	$\sqrt{\langle r_{nn}^2 \rangle}$ (fm)	$\sqrt{\langle r_{c-2n}^2 \rangle}$ (fm)	$\langle \theta_{nn} \rangle$ (deg.)
^{6}He	Matter radii	3.75+/-0.93	3.88+/-0.32	$51.6^{+11.2}_{-12.4}$
	HBT	5.9+/-1.2		$74.5^{+11.2}_{-13.1}$
	3body calc.	4.65	3.63	66.33
^{11}Li	Matter radii	5.50+/-2.24	5.15+/-0.33	$56.2^{+17.8}_{-21.3}$
	HBT	6.6+/-1.5		$65.2^{+11.4}_{-13.0}$
	3body calc.	6.43	5.13	65.29

K.H. and H. Sagawa,PRC76('07)047302

Nucleus	Method	$\sqrt{\langle r_{nn}^2 \rangle}$	$\sqrt{\langle r_{c-2n}^2 \rangle}$	$\langle \theta_{nn} \rangle$
^{6}He	HBT	5.9+/-1.2	3.36+/-0.39	83^{+20}_{-10}
^{11}Li	HBT	6.6+/-1.5	5.01+/-0.32	66^{+22}_{-18}

C.A. Bertulani and M.S. Hussein, PRC76('07)051602

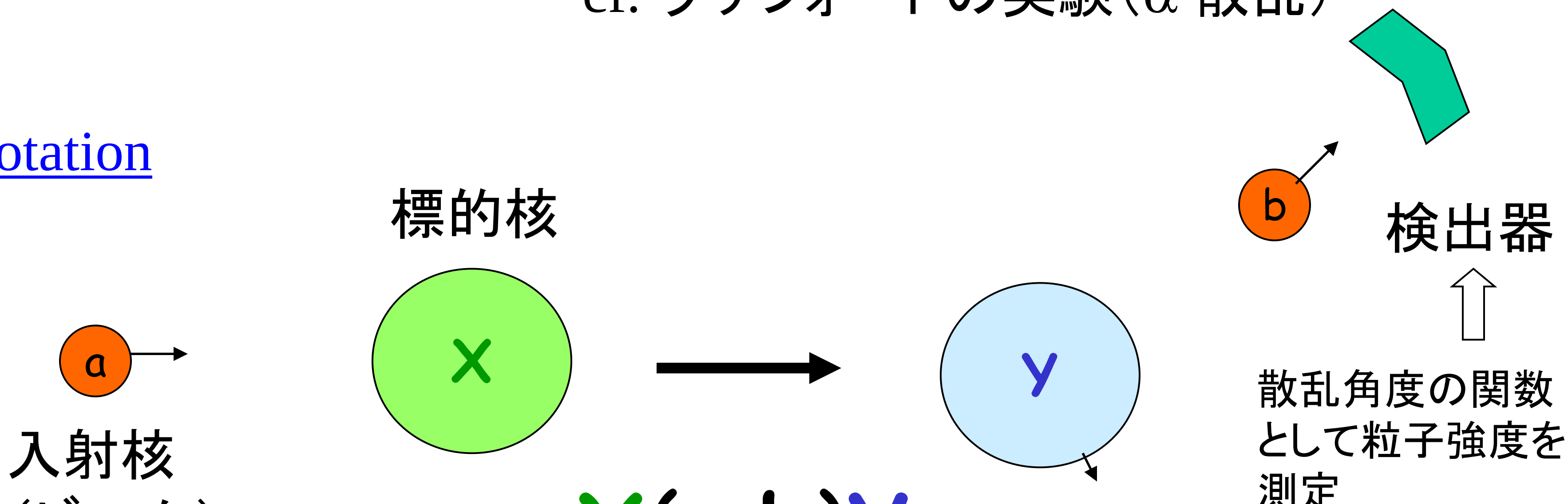
不安定核の反応（低エネルギー）

－核反応基礎論
－核融合反応
－対移行反応
－弾性散乱

核反応論基礎：基本的概念と量子力学の復習

原子核の形や相互作用、励起状態の性質：衝突実験
cf. ラザフォードの実験（α 散乱）

Notation



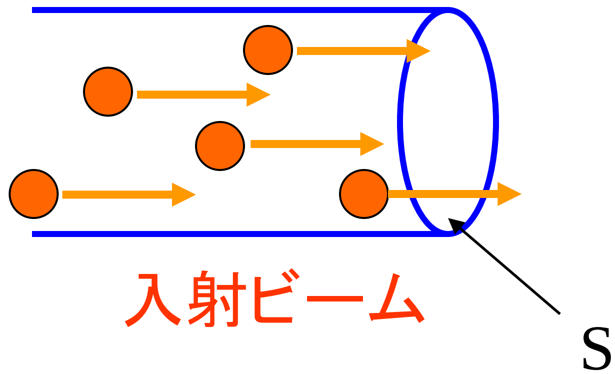
X(a,b)Y

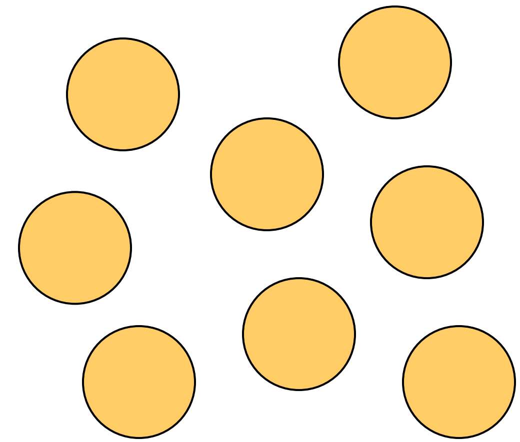
反応チャンネルの例

^{208}Pb(^{16}O,^{16}O)^{208}Pb	: ^{16}O+^{208}Pb 弾性散乱
^{208}Pb(^{16}O,^{16}O)^{208}Pb*	: ^{16}O+^{208}Pb 非弾性散乱
^{208}Pb(^{17}O,^{16}O)^{209}Pb	: 1中性子移行反応

この他に複合核合成反応も

散乱断面積



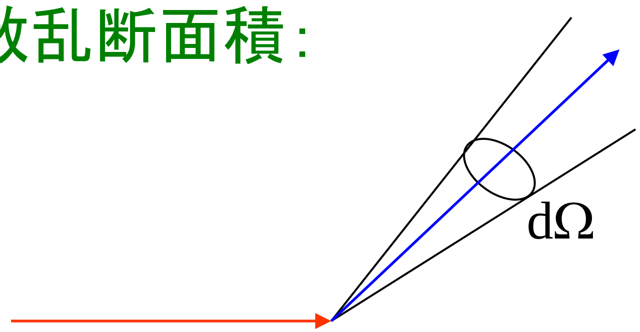


単位時間当たりに標的粒子1個に対する反応の起きる数	＝	$\sigma \cdot$ 単位時間当たり単位面積を通過する入射粒子の数

σ/S = ビーム中の入射粒子1個が標的1個と衝突した時に散乱の起こる確率

単位: 1 barn = 10^{-24} cm^2 = 100 fm^2　(1 mb = 10^{-3} b = 0.1 fm^2)

微分散乱断面積:



$$\frac{d\sigma}{d\Omega}$$

（復習）位相のずれ δ_l

自由粒子の運動：
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi = E\psi = \frac{\boldsymbol{k}^2\hbar^2}{2m}\psi$$

$$\psi(\boldsymbol{r}) = e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\, i^l j_l(kr)P_l(\cos\theta)$$
$$\to \frac{i}{2kr}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i^l\left[e^{-i(kr-l\pi/2)} - e^{i(kr-l\pi/2)}\right]P_l(\cos\theta)$$

ポテンシャルがある場合：
$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\boldsymbol{r}) - E\right]\psi = 0$$

波動関数の漸近形

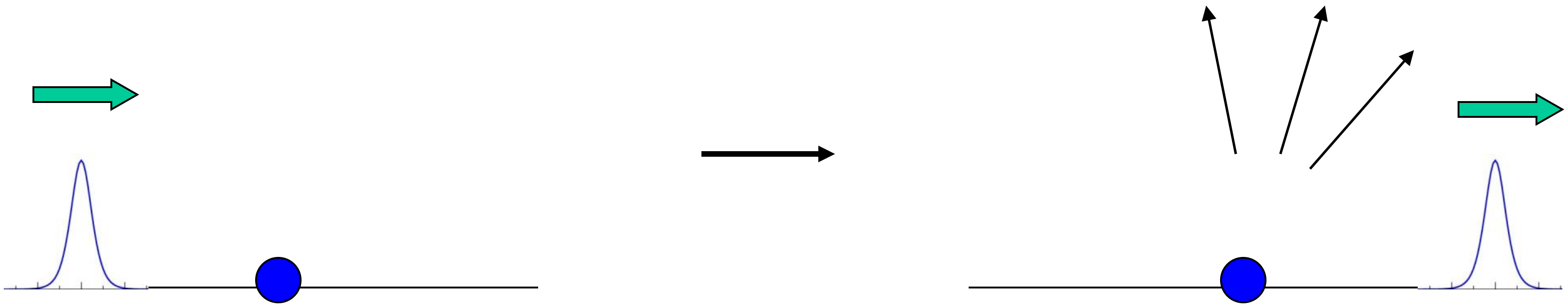
$$\psi(\boldsymbol{r}) \to \frac{i}{2kr}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i^l\left[e^{-i(kr-l\pi/2)} - \underline{\underline{S_l}}\, e^{i(kr-l\pi/2)}\right]P_l(\cos\theta)$$
$$= e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + \underbrace{\left[\sum_l (2l+1)\frac{S_l - 1}{2ik}P_l(\cos\theta)\right]}_{f(\theta)}\frac{e^{ikr}}{r}$$

$f(\theta)$ （散乱振幅）

$$\psi(\boldsymbol{r}) \;\to\; e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + \left[\sum_l (2l+1)\,\frac{S_l-1}{2ik}P_l(\cos\theta)\right]\frac{e^{ikr}}{r}$$

$$= \; e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r}$$

＝（入射波）＋（散乱波）

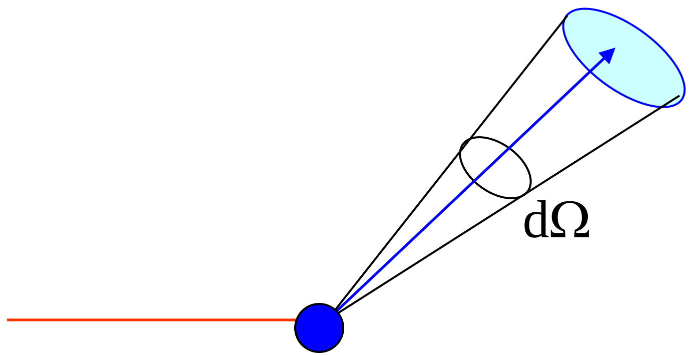


弾性散乱のみが起こる場合:　$|S_l| = 1$　（フラックスの保存）

$$\boxed{S_l = e^{2i\delta_l}}$$

δ_l :位相のずれ（phase shift）

微分散乱断面積



$$r^2 d\Omega$$

$$\psi_{sc}(\boldsymbol{r}) \sim f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r}$$

単位時間に立体角 dΩ に散乱される粒子の数:

$$N_{\mathsf{scatt}} = \boldsymbol{j}_{sc}\cdot\boldsymbol{e}_r\, r^2 d\Omega$$

$$\boldsymbol{j}_{sc} = \frac{\hbar}{2im}\left[\psi_{sc}^*\boldsymbol{\nabla}\psi_{sc} - c.c.\right] \sim \frac{k\hbar}{m}\frac{|f(\theta)|^2}{r^2}\boldsymbol{e}_r$$

（散乱波に対するフラックス）

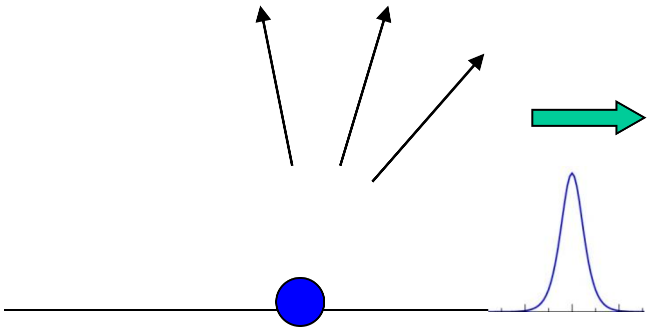
$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2}$$

$$f(\theta) = \sum_l (2l+1)\frac{S_l - 1}{2ik}P_l(\cos\theta)$$

光学ポテンシャルと吸収断面積

反応プロセス

- 弾性散乱
- 非弾性散乱
- 粒子移行
- 複合粒子形成（核融合）



弾性フラックスの減少（吸収）

光学ポテンシャル

$$\boxed{V_{\mathrm{opt}}(\boldsymbol{r}) = V(\boldsymbol{r}) - iW(\boldsymbol{r}) \qquad (W > 0)}$$

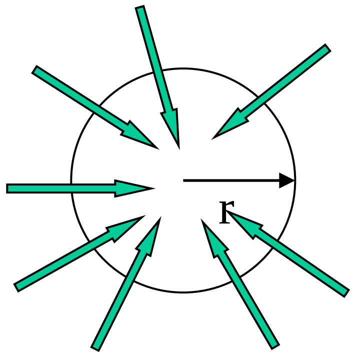
$$\longrightarrow \quad \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j} = \cdots = -\frac{2}{\hbar}W|\psi|^2$$

(note) ガウスの定理

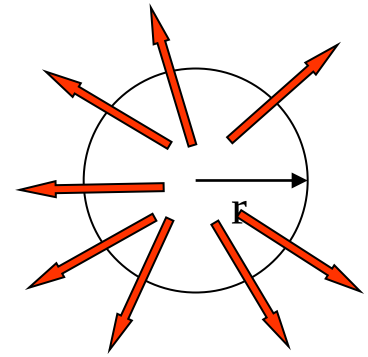
$$\int_S \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}\,dV$$

$$\psi(\boldsymbol{r}) \to \frac{i}{2k}\sum_l (2l+1)\, i^l \,\frac{1}{r}\left[\underbrace{e^{-i(kr-l\pi/2)}}_{\psi_{\text{in}}} - \underbrace{S_l e^{i(kr-l\pi/2)}}_{\psi_{\text{out}}}\right] P_l(\cos\theta)$$

全内向フラックス:



全外向フラックス:



$$j_{\text{in}}^{\text{net}} = \frac{k\hbar}{m}\cdot\frac{\pi}{k^2}\sum_l (2l+1)$$

$$j_{\text{out}}^{\text{net}} = \frac{k\hbar}{m}\cdot\frac{\pi}{k^2}\sum_l (2l+1)|S_l|^2$$

減少したフラックス: $j_{\text{in}}^{\text{net}} - j_{\text{out}}^{\text{net}} = \frac{k\hbar}{m}\cdot\frac{\pi}{k^2}\sum_l (2l+1)(1-|S_l|^2)$

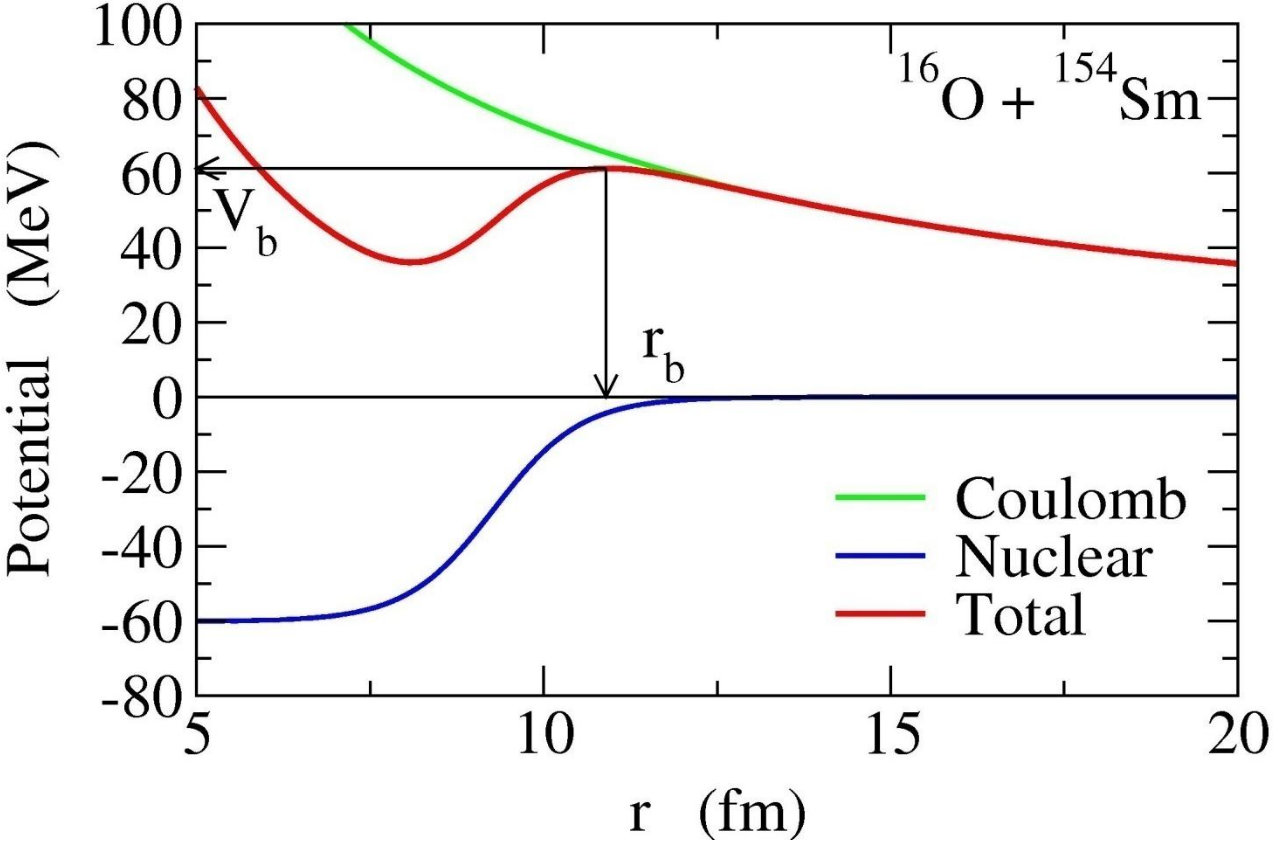
吸収断面積

$$\boxed{\sigma_{\text{abs}} = \frac{\pi}{k^2}\sum_l (2l+1)(1-|S_l|^2)}$$

重イオン反応の概観

重イオン: ^{4}He より重い原子核

重イオン間ポテンシャル

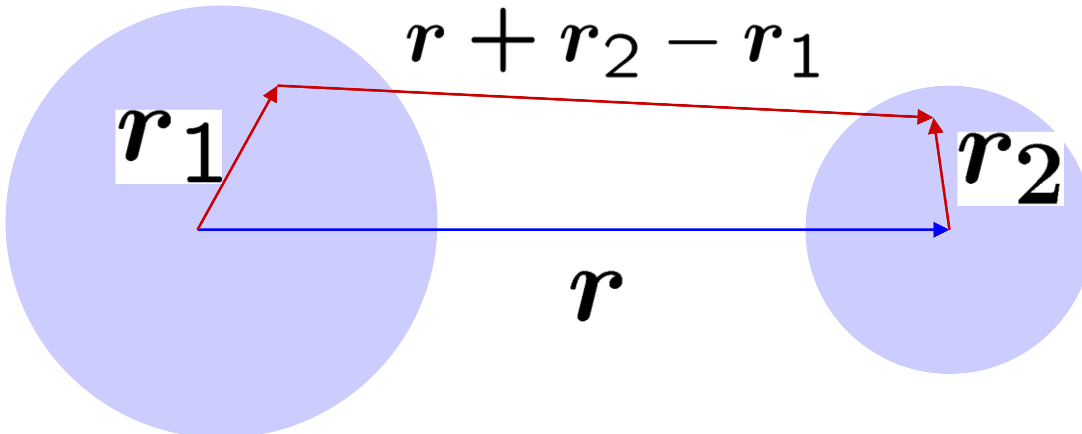


2つの力:

1. クーロン力
   長距離斥力
2. 核力
   短距離引力

両者の打ち消しあいによりポテンシャル障壁が形成（クーロン障壁）

- 二重畳み込みポテンシャル (Double Folding Potential)



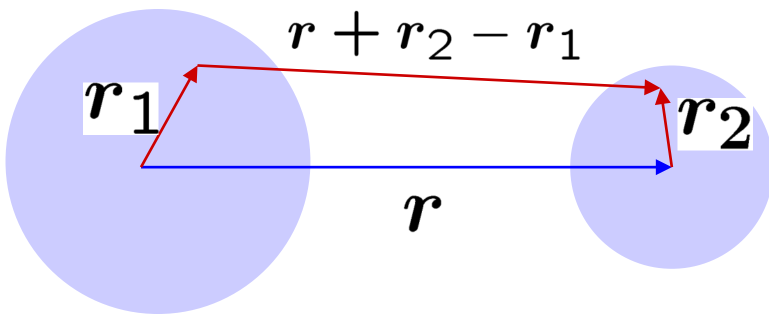
$$\begin{aligned} V_{DF}(\boldsymbol{r}) &= \int d\boldsymbol{r}_1 d\boldsymbol{r}_2\, \rho_1(\boldsymbol{r}_1)\rho_2(\boldsymbol{r}_2) \\ &\quad \times v(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1) \end{aligned}$$

v :核子間相互作用

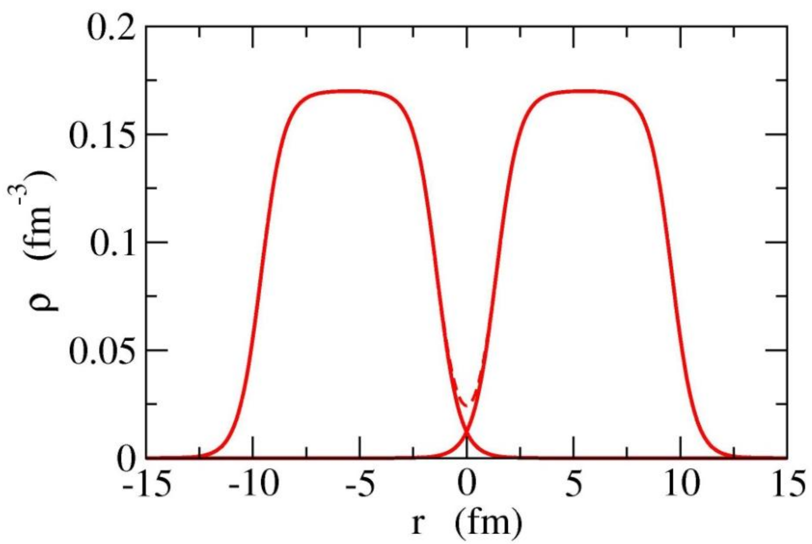
- 現象論的ポテンシャル

$$V_{WS}(r) = -\frac{V_0}{1+\exp[(r-R_0)/a]}$$

- Double Folding Potential



$$V_{DF}(\boldsymbol{r}) = \int d\boldsymbol{r}_1 d\boldsymbol{r}_2\, \rho_1(\boldsymbol{r}_1)\rho_2(\boldsymbol{r}_2) \times v_{nn}(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)$$



（微視的ポテンシャルの直接項に相当）

$$\rho(r) \sim \frac{\rho_0}{1+\exp[(r-R_d)/a_d]}$$

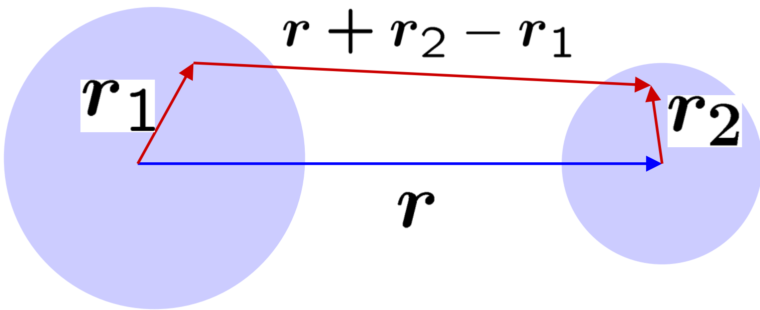
$a_d \sim 0.54$ (fm)

- Phenomenological potential

$$\boxed{V_{WS}(\boldsymbol{r}) = -\frac{V_0}{1+\exp[(r-R_0)/a]}}$$

$a \sim 0.63$ (fm)

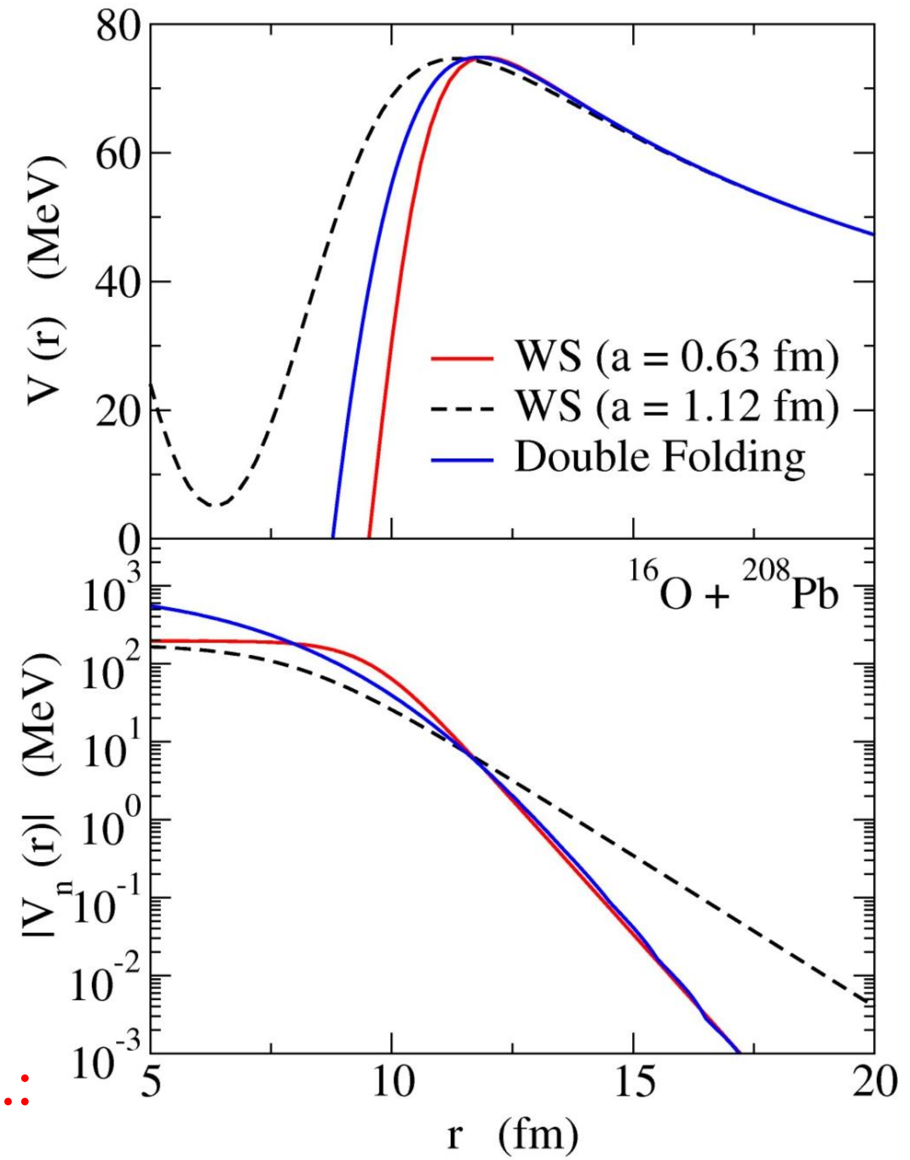
Double folding potential



$$\boxed{\begin{aligned} V_{DF}(\boldsymbol{r}) \;=\; & \int d\boldsymbol{r}_1 d\boldsymbol{r}_2\, \rho_1(\boldsymbol{r}_1)\rho_2(\boldsymbol{r}_2) \\ & \times v(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1) \end{aligned}}$$

cf. Michigan 3 range Yukawa
(M3Y) interaction

$$\begin{aligned} v_{nn}(r) \;=\; & 7999\frac{e^{-4r}}{4r} - 2134\frac{e^{-2.5r}}{2.5r} \\ & -276\,\delta(\boldsymbol{r}) \quad \text{(MeV)} \end{aligned}$$



Phenomenological Woods-Saxon pot.:

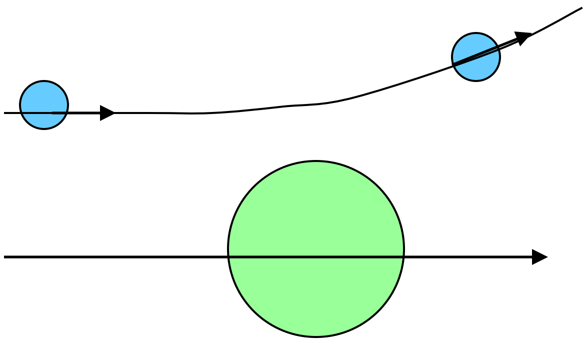
$$\boxed{V_N(r) = -V_0 / [1+\exp((r-R_0)/a)]}$$

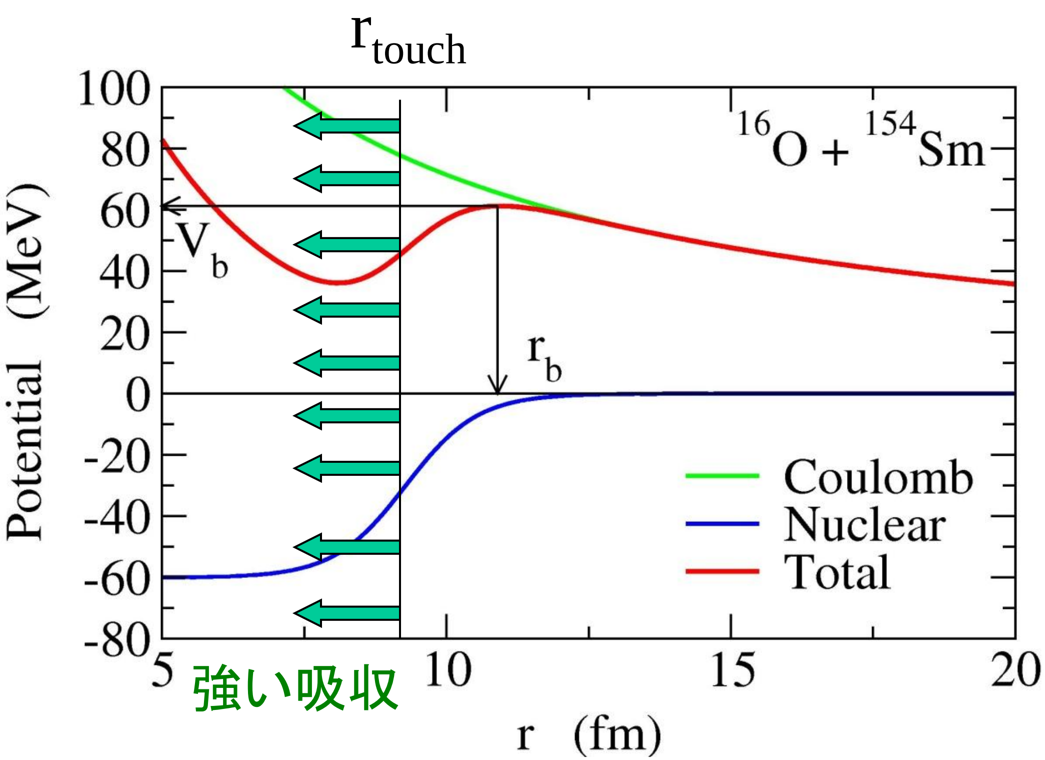
重イオン反応の3つの特徴

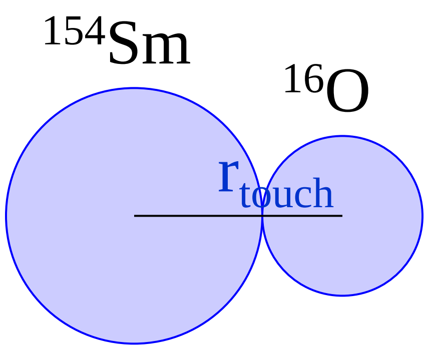
1. クーロン相互作用：重要
2. 換算質量 (reduced mass)：大きい → （半）古典的な描像 軌道の概念

$$\mu = m_T m_P/(m_T + m_P)$$

3. クーロン障壁内部での強い吸収



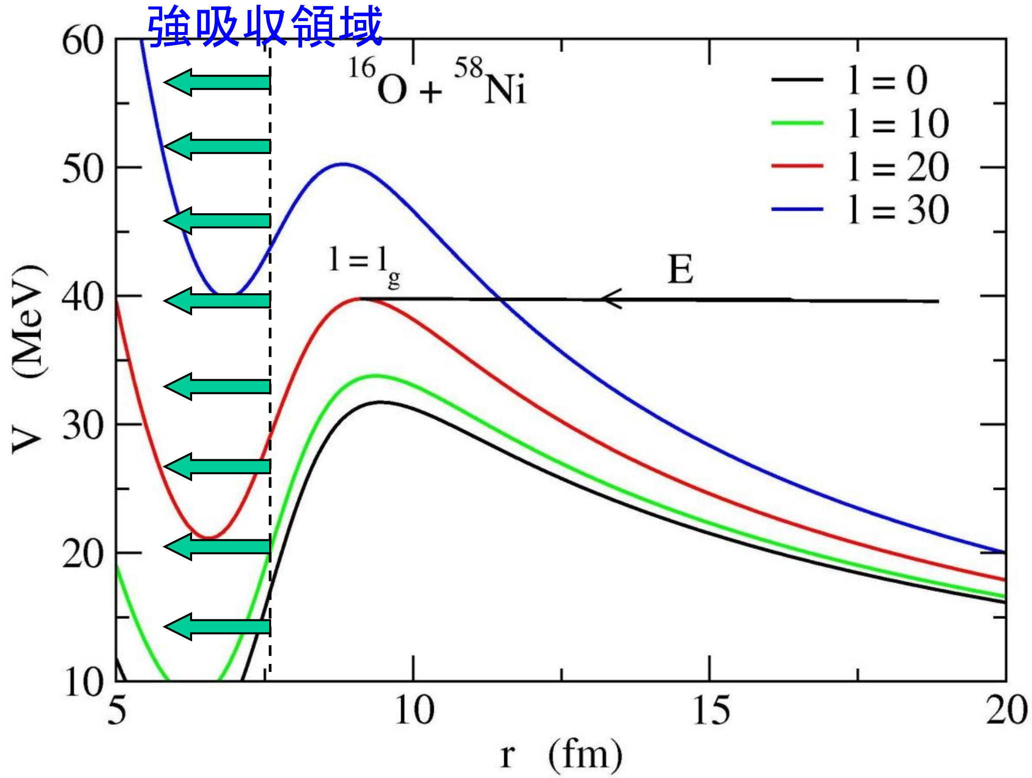




一度接触すると自動的に複合核を形成（強吸収の仮定）

擦り角運動量 (grazing angular momentum)

$$V_l(r) = V_0(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2}$$



Grazing 角運動量: $V_{l_g}(r_b) = E$

$l < l_g$:古典的に強吸収領域に到達

$l \geq l_g$:古典的には強吸収領域に到達できない

⇒ ある与えられた E に対し、反応は $l=l_g$ を境に急激に変化

i) $l \gg l_g$ or $E \ll V_b$

古典的転回点：非常に遠方

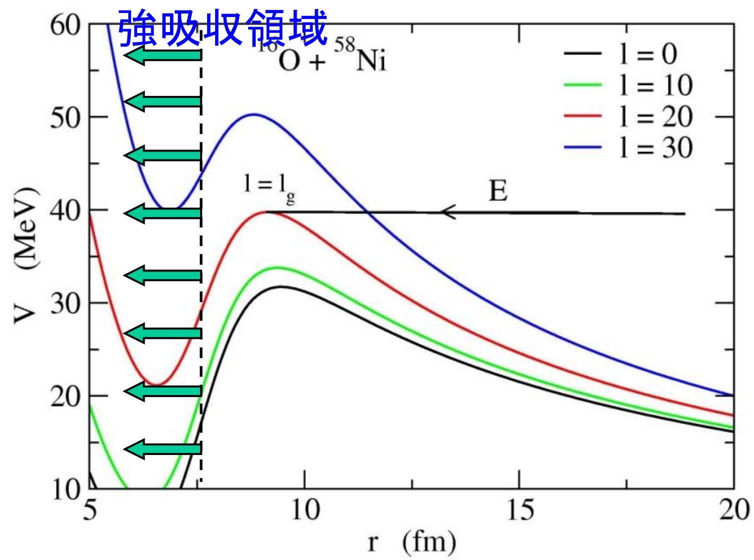
•クーロン力による弾性散乱

(Rutherford 散乱)

•散乱核のクーロン場による励起

(クーロン励起)

低励起集団運動



$l < l_g$：古典的に強吸収領域に到達

$l \geq l_g$：古典的には強吸収領域に到達できない

ii) $l \gtrsim l_g$

核力の効果が重要になる

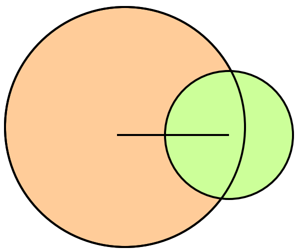
直接反応
- •弾性散乱
- •非弾性散乱
- •核子移行反応

準弾性散乱

多体系としてのダイナミックス

iii) $l < l_g$

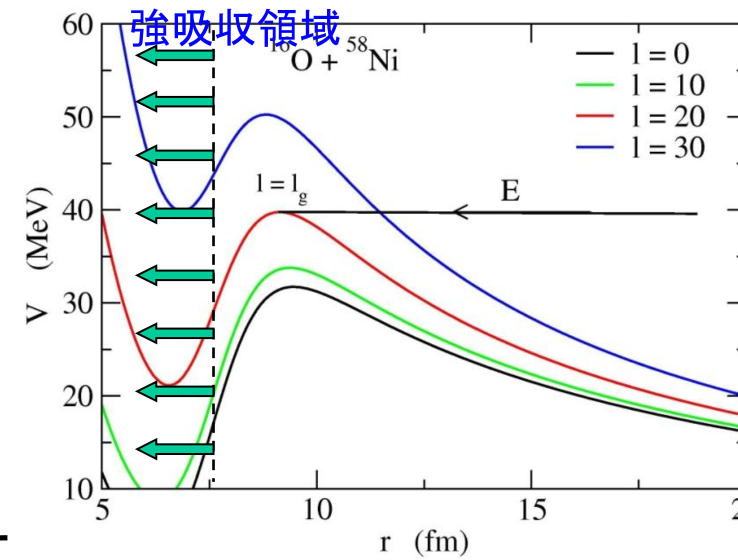
相対距離が小さく、従って密度の重なりが大きい領域に到達



- 高状態密度（複合系）
- 非常に多くの内部自由度

相対運動のエネルギーはすぐに失われ内部エネルギーに転化

熱い複合核の形成（核融合反応）



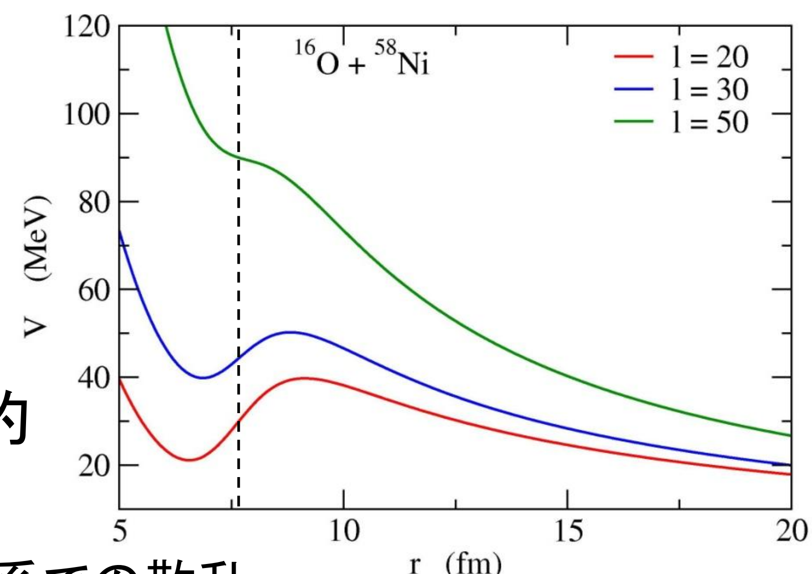
$l < l_g$: 古典的に強吸収領域に到達

$l \geq l_g$: 古典的には強吸収領域に到達できない

iv) $l_c < l_g$ となる場合

$l = l_c$ でクーロン・ポケットが消失

⇨ 直接反応と核融合反応の中間的な反応：深部非弾性散乱 (DIC)



⇦ 比較的高エネルギーでの散乱や重い系での散乱

Partial decomposition of reaction cross section

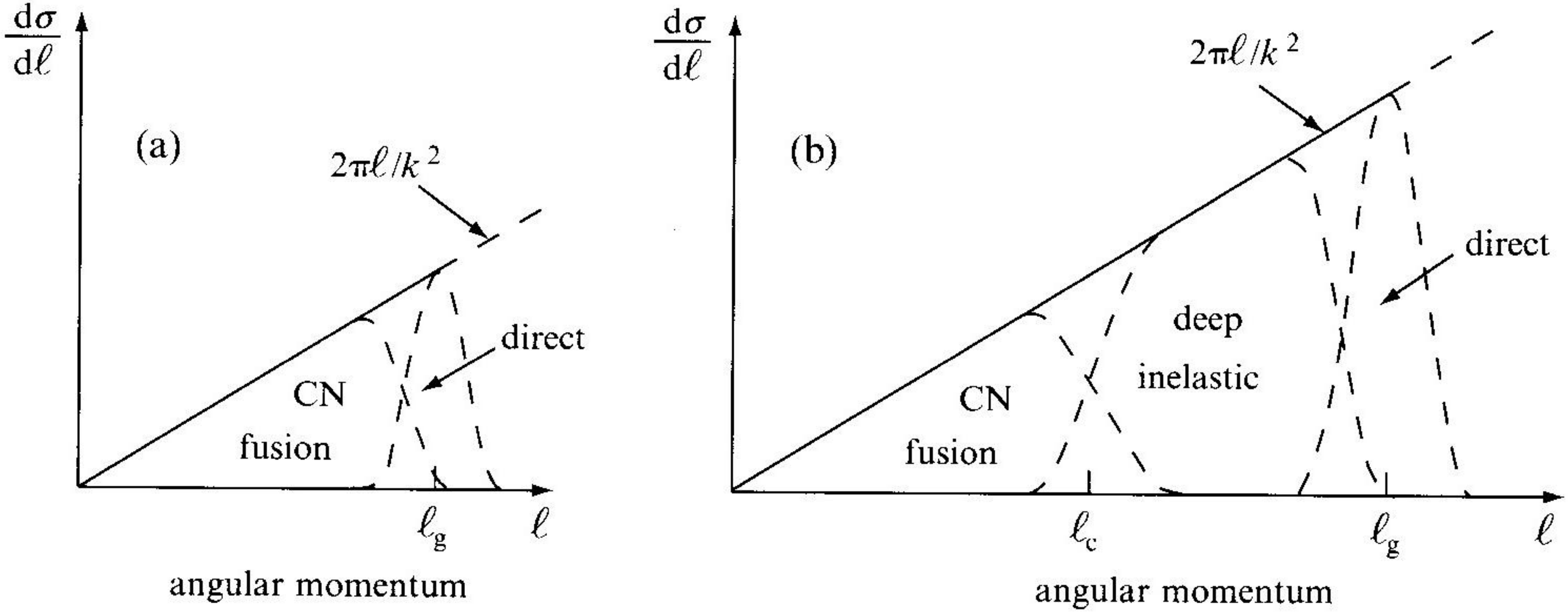
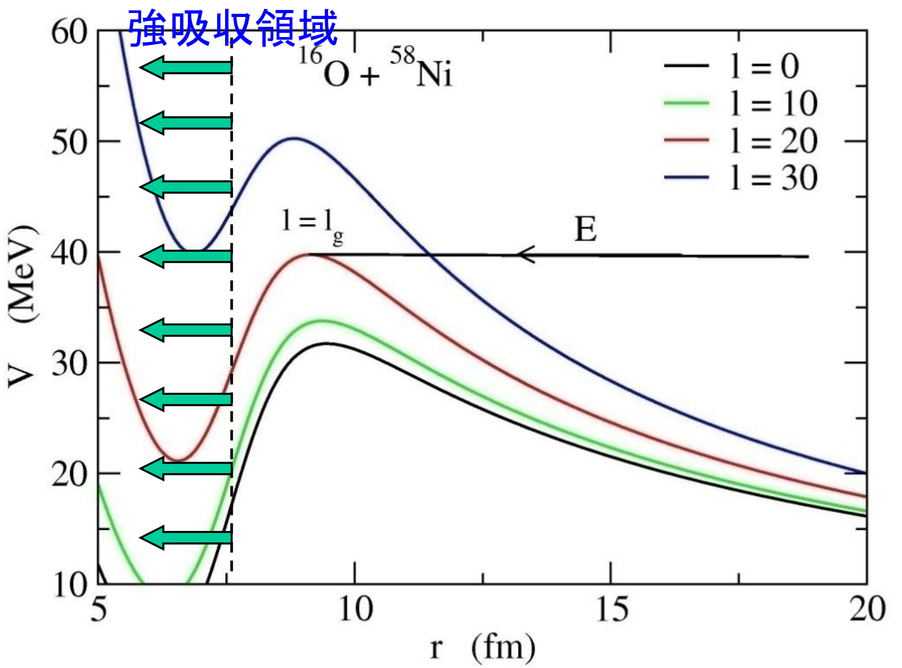
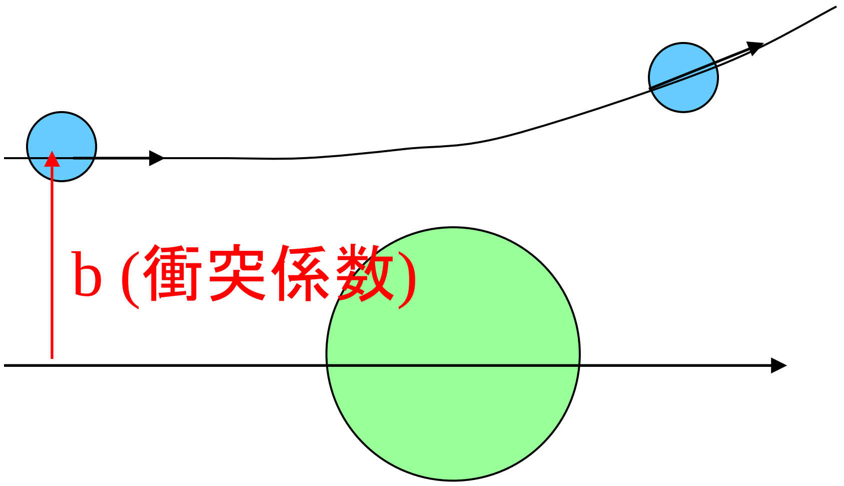


Figure 4.18 Schematic decomposition of the total heavy-ion reaction cross section into contributions from different partial waves when (a) the grazing angular momentum (quantum number ℓ_g) is below the critical angular momentum (quantum number ℓ_c) that can be carried by the compound nucleus, and (b) when ℓ_g exceeds ℓ_c. In both (a) and (b) the straight line is obtained from Equation (4.3) and the dashed areas indicate regions in which different types of heavy-ion nuclear reaction mechanisms predominate.

Taken from J.S. Lilley, "Nuclear Physics"

核融合反応に対する古典的な模型





$l < l_g$: 古典的に強吸収領域に到達

$$l_{cl} = kb \qquad k = \sqrt{2\mu E/\hbar^2}$$

$$\Rightarrow \quad b_g = l_g/k$$

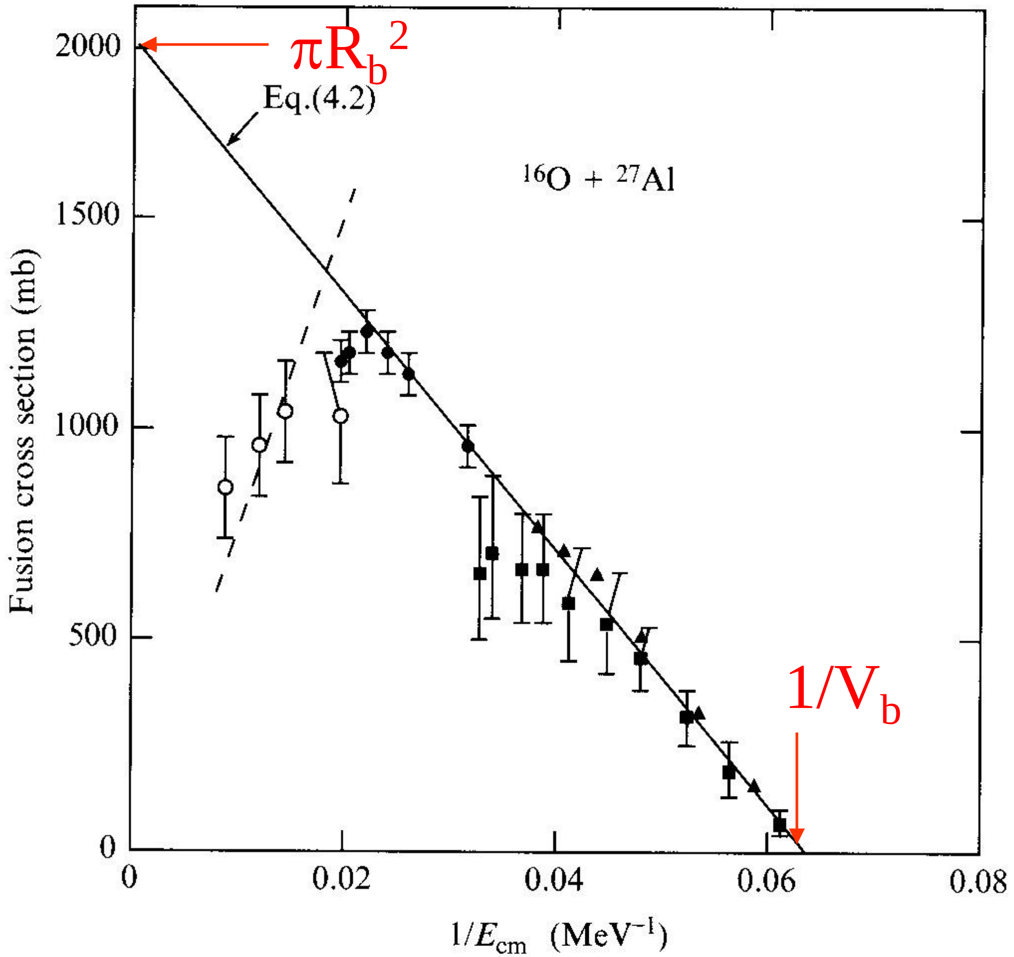
$$\boxed{\sigma^{cl} = 2\pi \int_0^{b_g} b\,db = \pi\, b_g^2}$$

$$V_b + \frac{(kb_g)^2\hbar^2}{2\mu R_b^2} = E$$

$$\boxed{\sigma^{cl}_{\mathrm{fus}}(E) = \pi R_b^2 \left(1 - \frac{V_b}{E}\right)}$$

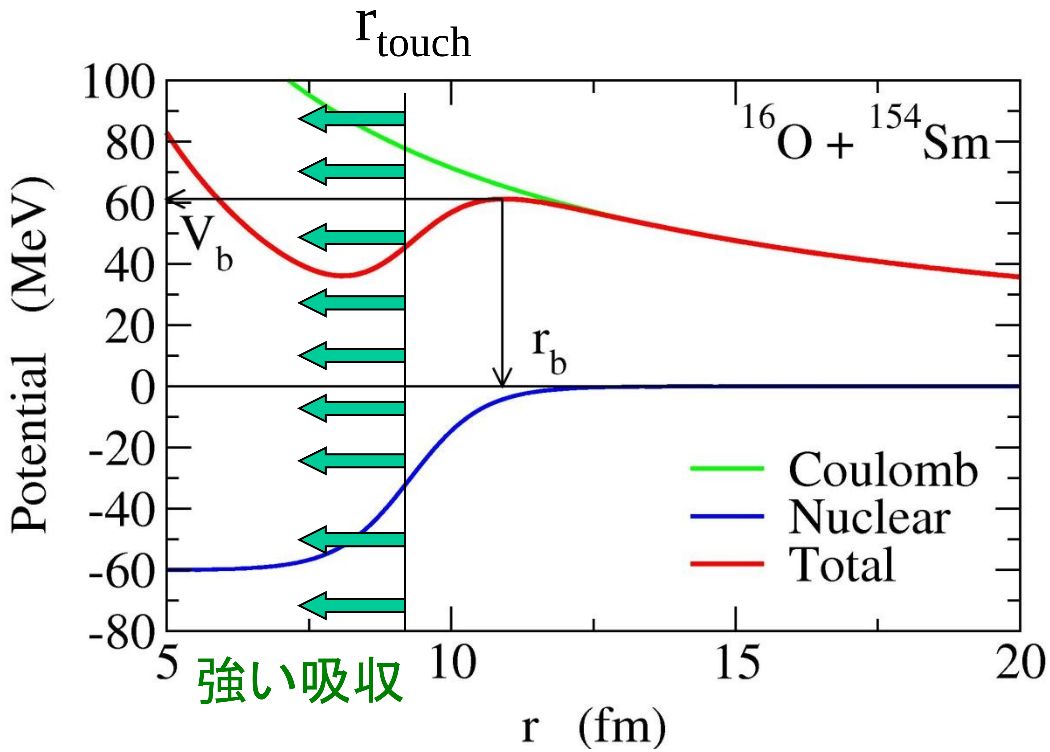
$$\sigma_{\mathrm{fus}}^{cl}(E) = \pi R_b^2 \left(1 - \frac{V_b}{E}\right)$$

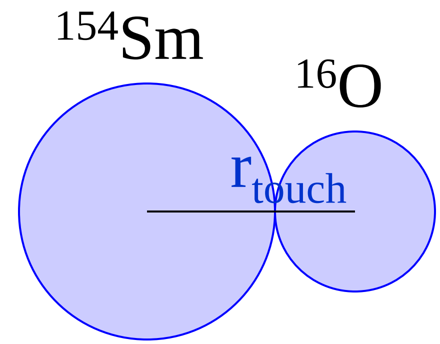
⟹ 古典的な核融合反応断面積は *1/E* に比例する



Taken from J.S. Lilley, "Nuclear Physics"

核融合反応と量子トンネル効果





一度接触すると自動的に複合核を形成（強吸収の仮定）

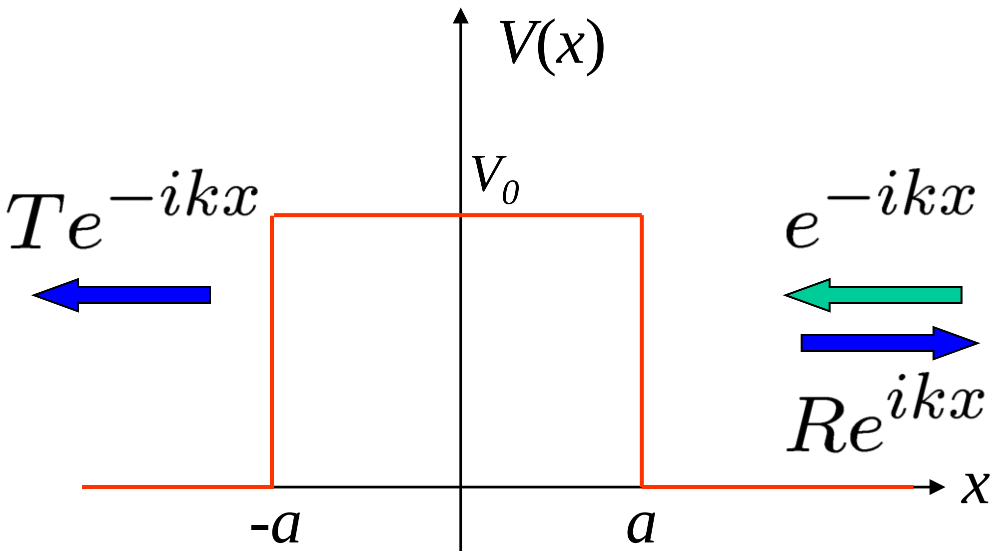
核融合の確率
＝r_{touch} に到達する確率

障壁の透過確率

$$\sigma_{\text{fus}}(E) = \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) P_l(E)$$

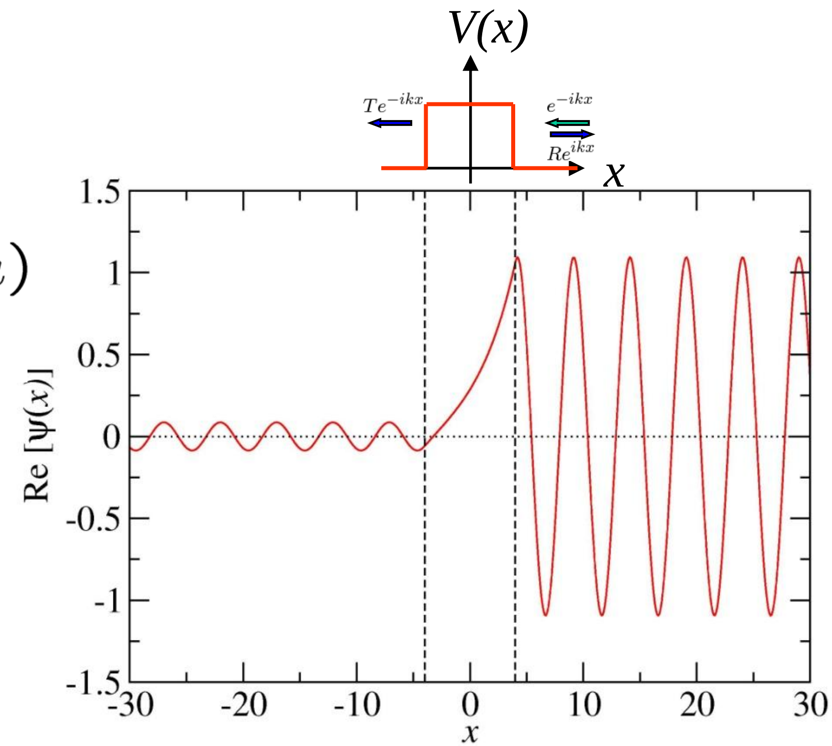
低エネルギーでは核融合反応はトンネル効果で起きる！

量子トンネル現象



$$
\begin{aligned}
\psi(x) &= T\,e^{-ikx} && (x \le -a) \\
&= A\,e^{-\kappa x} + B\,e^{\kappa x} && (-a < x < a) \\
&= e^{-ikx} + R\,e^{ikx} && (x \ge a)
\end{aligned}
$$

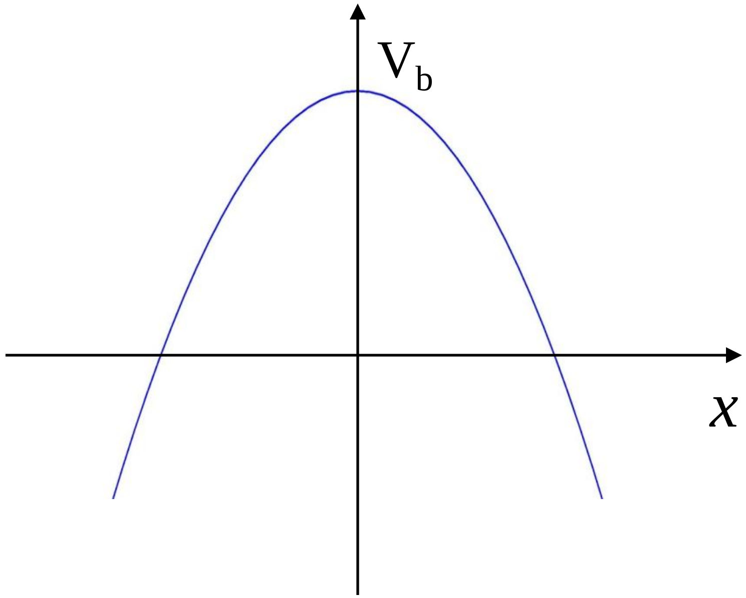
$$
\begin{aligned}
k &= \sqrt{2mE/\hbar^2} \\
\kappa &= \sqrt{2m(V_0 - E)/\hbar^2}
\end{aligned}
$$



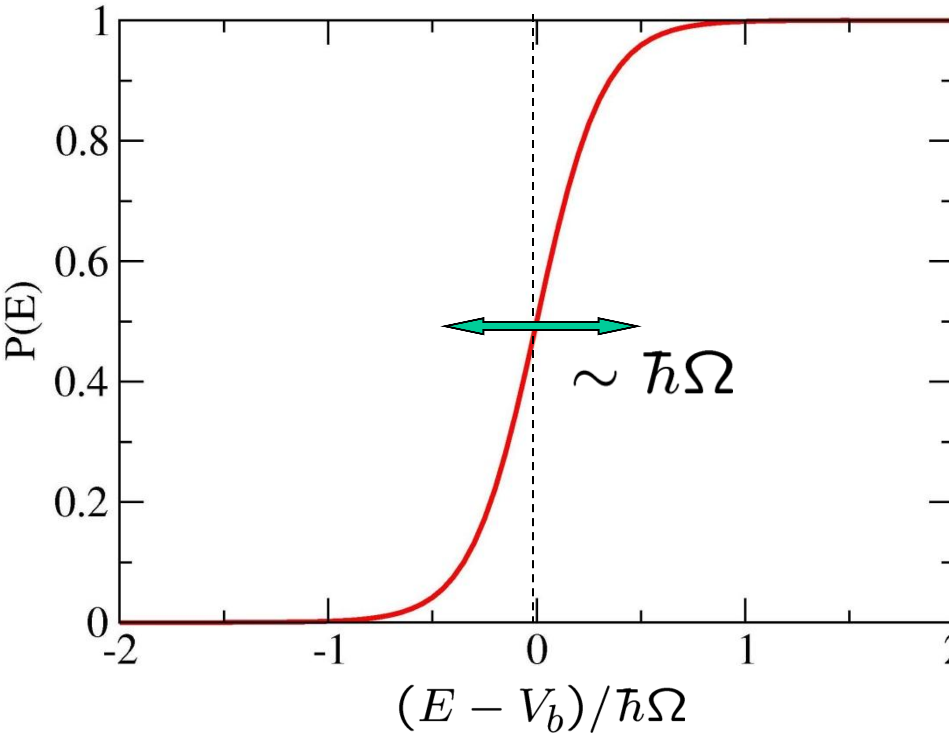
トンネル確率： $P(E) = |T|^2$

放物線障壁だと……..

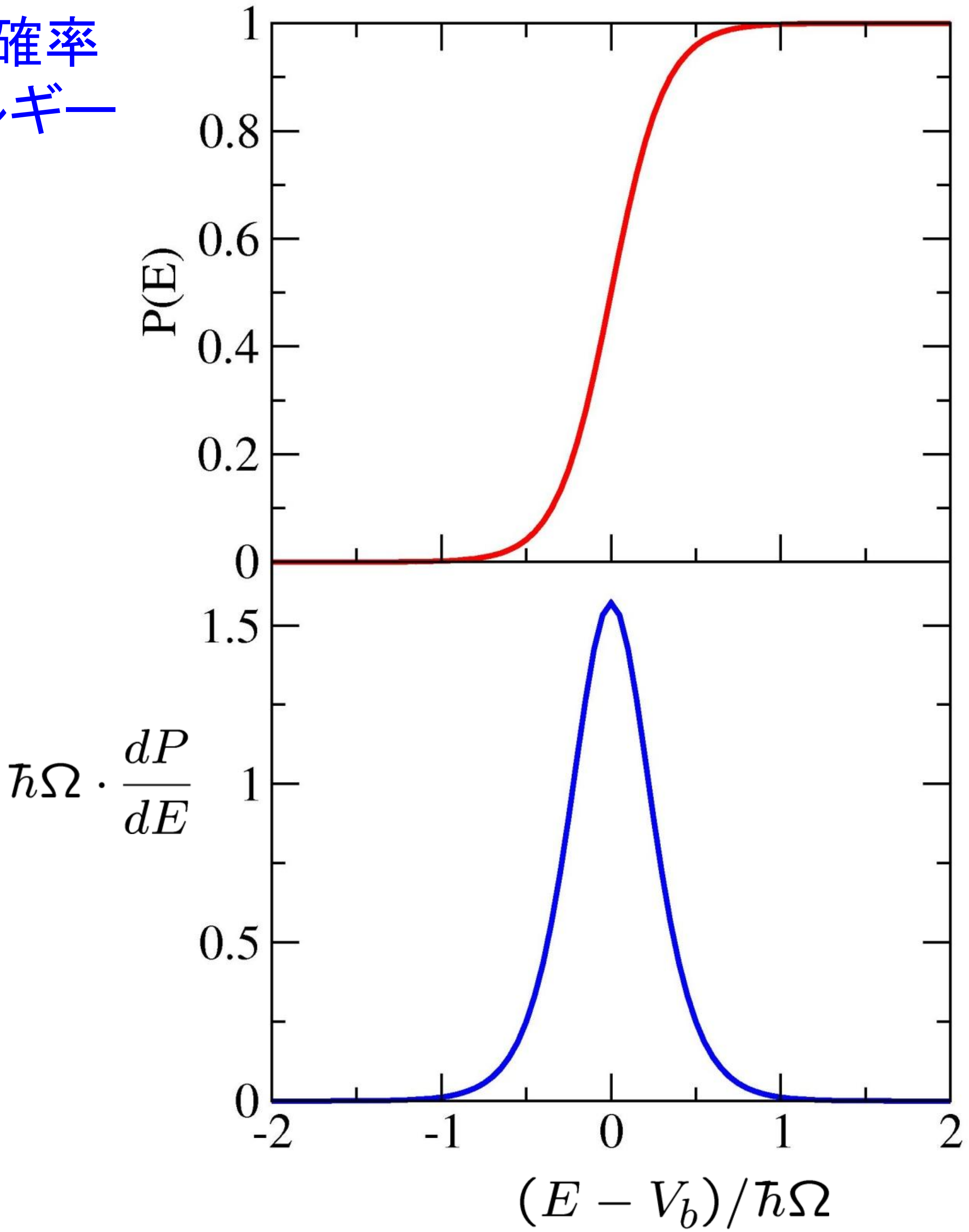
$$V(x) = V_b - \frac{1}{2} m \Omega^2 x^2$$



$$\boxed{P(E) = \frac{1}{1 + \exp\left[\frac{2\pi}{\hbar\Omega}(V_b - E)\right]}}$$



トンネル確率
のエネルギー
微分

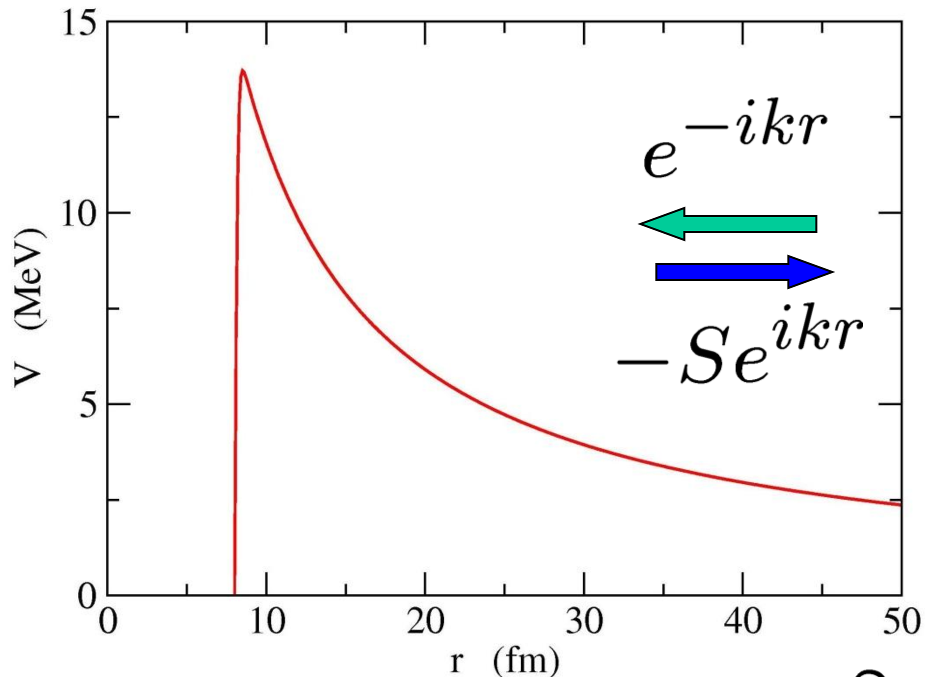


(note) 古典極限

$$P(E) = \theta(E - V_b)$$
$$dP/dE = \delta(E - V_b)$$

（参考）球対称３次元ポテンシャルの場合

$$\psi(\boldsymbol{r}) \to \frac{i}{2k}\sum_l (2l+1)\, i^l\, \frac{1}{r}\left[e^{-i(kr-l\pi/2)} - S_l e^{i(kr-l\pi/2)}\right] P_l(\cos\theta)$$



$-S_l \sim R$（反射係数） $\Longrightarrow$ $P = |T|^2 = 1 - |S_l|^2$

$$\boxed{\sigma_{\mathrm{abs}} = \frac{\pi}{k^2}\sum_l (2l+1)(1-|S_l|^2) = \frac{\pi}{k^2}\sum_l (2l+1)P_l}$$

ポテンシャル模型：成功と失敗

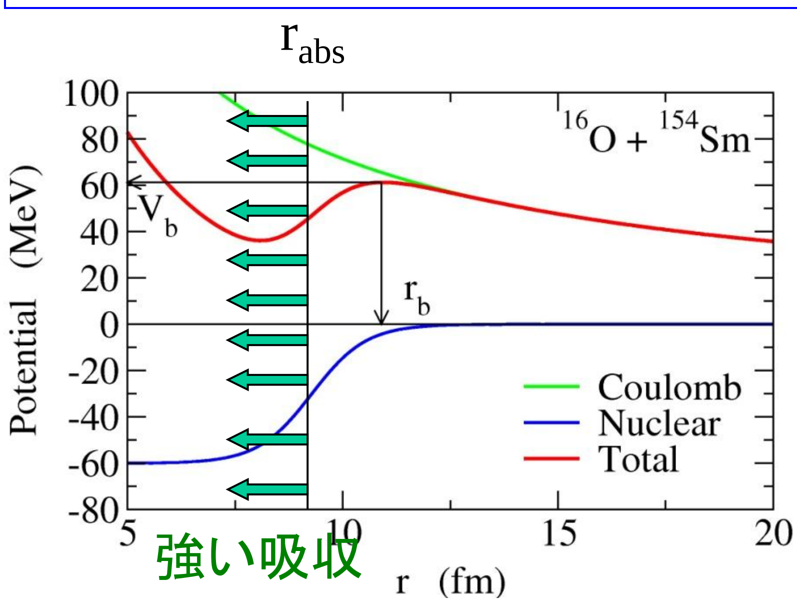
$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2}+V(r)+\frac{l(l+1)^2}{2\mu r^2}-E\right]u_l(r)=0$$

遠方での境界条件: $u_l(r) \to H_l^{(-)}(kr) - S_l\, H_l^{(+)}(kr)$

核融合反応断面積: $\sigma_{\rm fus} = \frac{\pi}{k^2}\sum_l (2l+1)P_l$

複合核の平均角運動量: $\langle l \rangle = \sum_l l(2l+1)P_l / \sum_l (2l+1)P_l$

$$P_l = 1 - |S_l|^2$$



内側での境界条件:

<u>（吸収ポテンシャルを使う場合）</u>

$$V(r) = V_R(r) - iW(r)$$

$$u_l(r) \sim r^{l+1}$$

（参考）Wong の公式

C.Y. Wong, Phys. Rev. Lett. 31 ('73)766

$$\sigma_{\rm fus}(E) = \frac{\pi}{k^2}\sum_l (2l+1)P_l(E)$$

i) クーロン障壁を放物線で近似　$V(r) \sim V_b - \frac{1}{2}\mu\Omega^2 r^2$

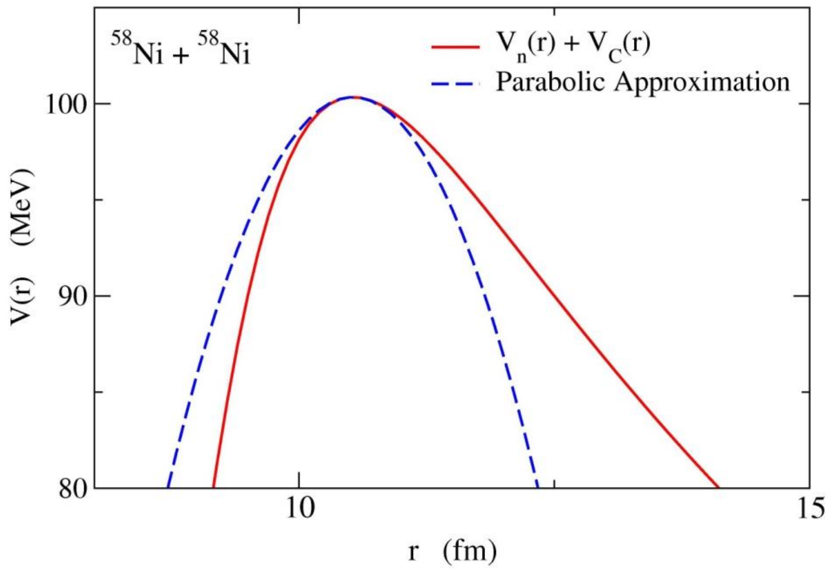
$$\Rightarrow\quad P_0(E) = 1\Big/\left(1+\exp\left[\frac{2\pi}{\hbar\Omega}(V_b - E)\right]\right)$$

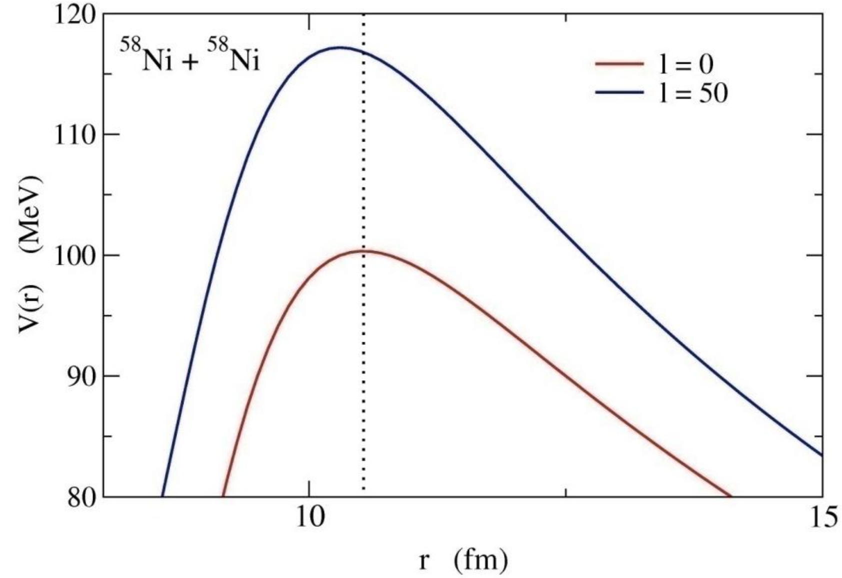
ii) 角運動量 *l* の透過確率を角運動量 *l=0* の透過確率を用いて近似

$$P_l(E) \sim P_0\left(E - \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu R_b^2}\right)$$

（曲率及び障壁の位置が
角運動量 *l* に依らないと仮定）

iii) *l* の和を積分に置き換える





$$\boxed{\sigma_{\text{fus}}(E) = \frac{\hbar\Omega}{2E} R_b^2 \log\left[1 + \exp\left(\frac{2\pi}{\hbar\Omega}(E - V_b)\right)\right]}$$

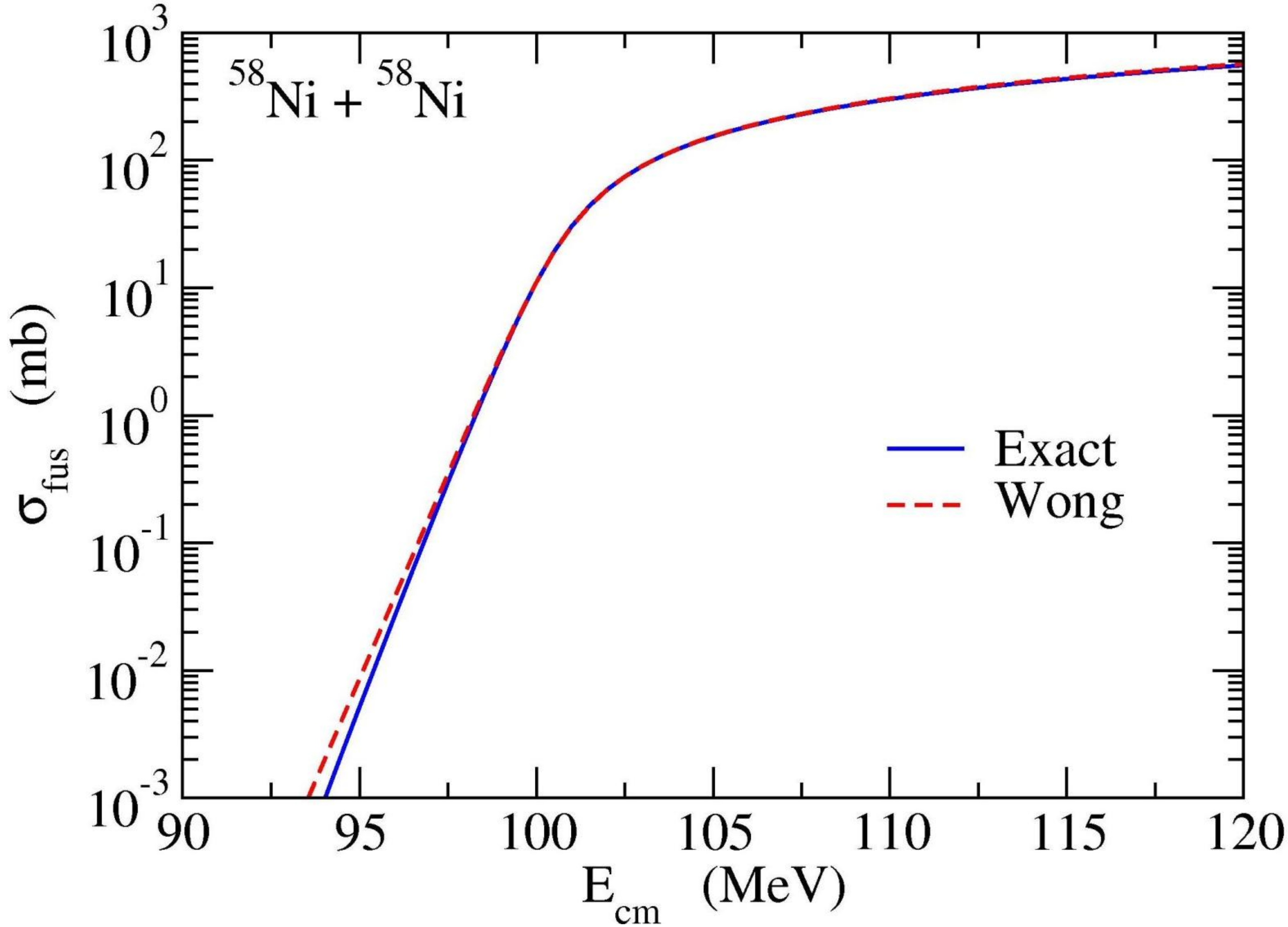
(note) $E \gg V_b$ の時 $1 \ll \exp\left(\frac{2\pi}{\hbar\Omega}(E - V_b)\right)$

$$\Longrightarrow \sigma_{\text{fus}}(E) \sim \pi R_b^2 \left(1 - \frac{V_b}{E}\right) = \sigma_{\text{fus}}^{cl}(E)$$

(note)

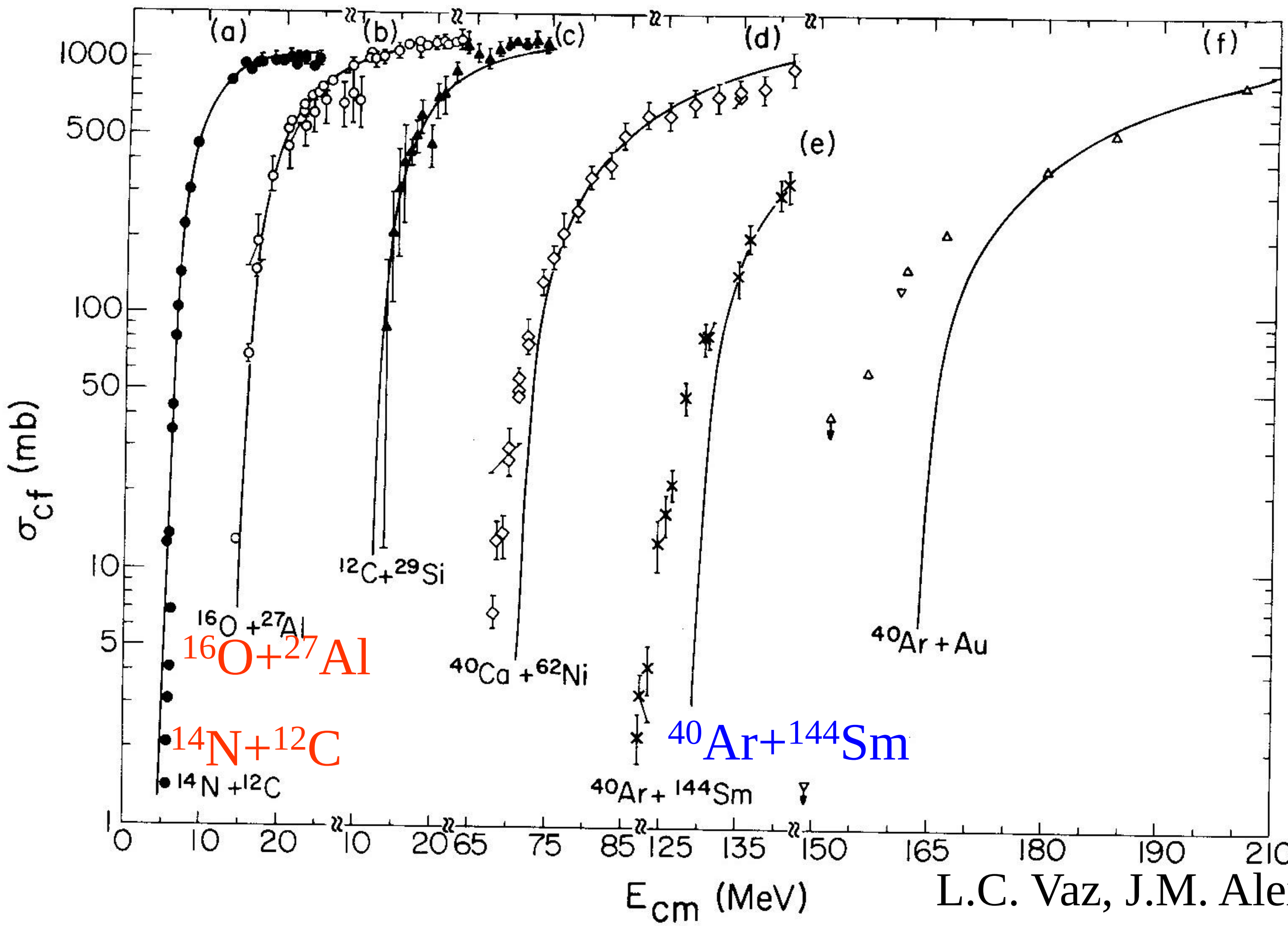
$$\boxed{\frac{d(E\sigma_{\text{fus}})}{dE} = \frac{\pi R_b^2}{1 + \exp\left[\frac{2\pi}{\hbar\Omega}(V_b - E)\right]} = \pi R_b^2 \cdot P_{l=0}(E)}$$

$$\sigma_{\mathrm{fus}}(E) = \frac{\hbar\Omega}{2E} R_b^2 \log\left[1 + \exp\left(\frac{2\pi}{\hbar\Omega}(E - V_b)\right)\right]$$



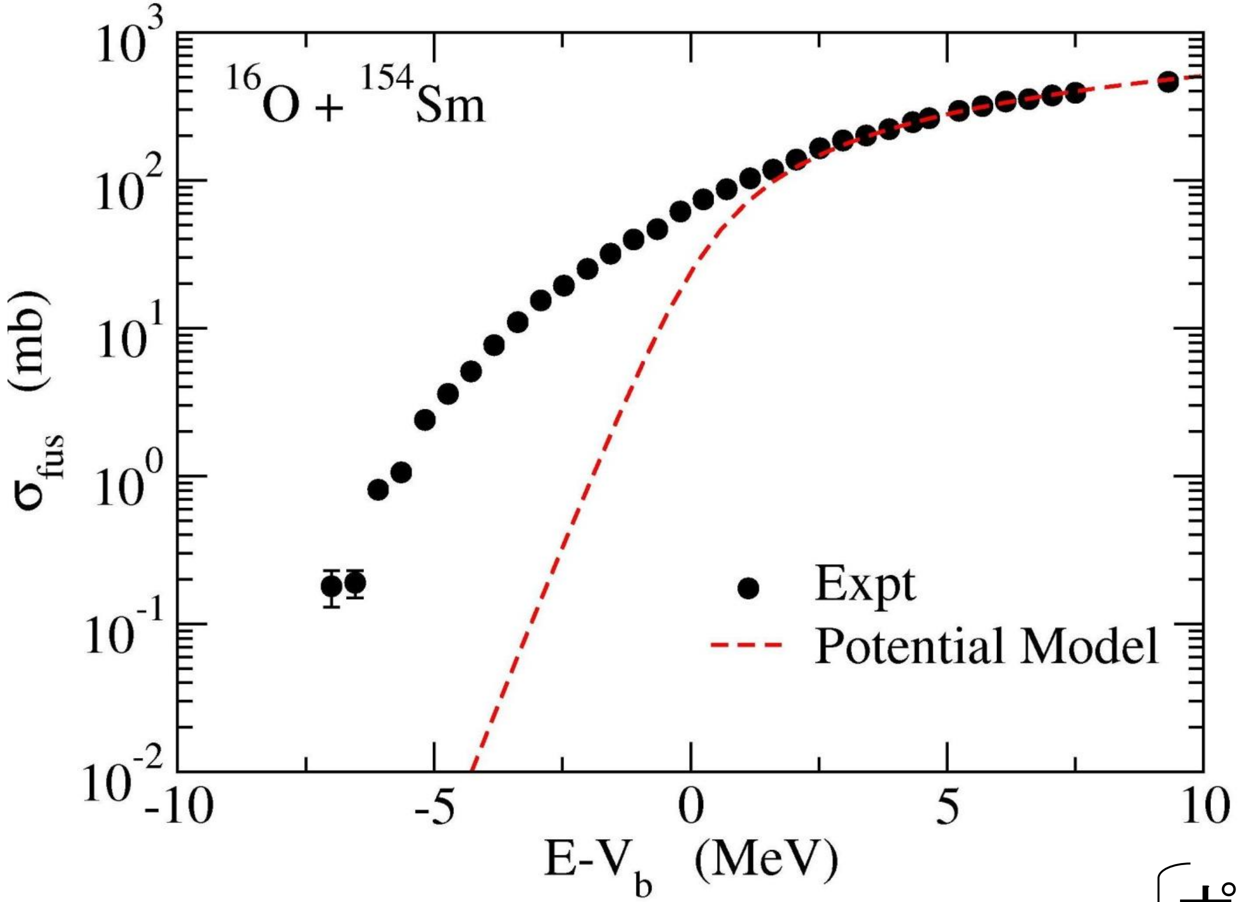
ポテンシャル模型と実験データの比較

エネルギーに依存しない静的なポテンシャルによる核融合反応断面積



L.C. Vaz, J.M. Alexander, and G.R. Satchler, Phys. Rep. 69('81)373

- 比較的軽い系では実験データを再現
- 系が重くなると過小評価(低エネルギー)



ポテンシャル模型:

$E > V_b$ では大体データを再現

$E < V_b$ では核融合断面積を過小に評価

何が原因？

ポテンシャルが不十分？
他の要因？

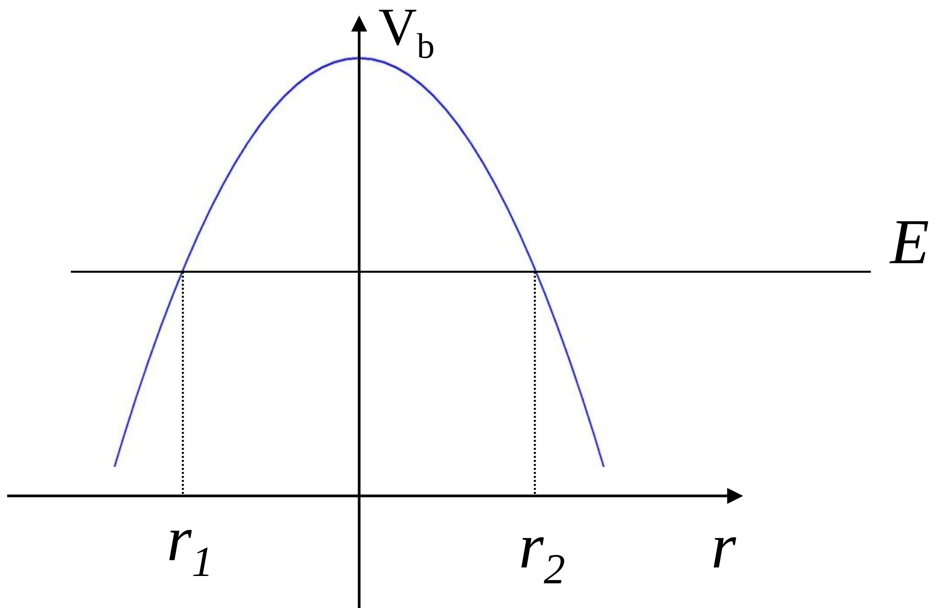
Potential Inversion

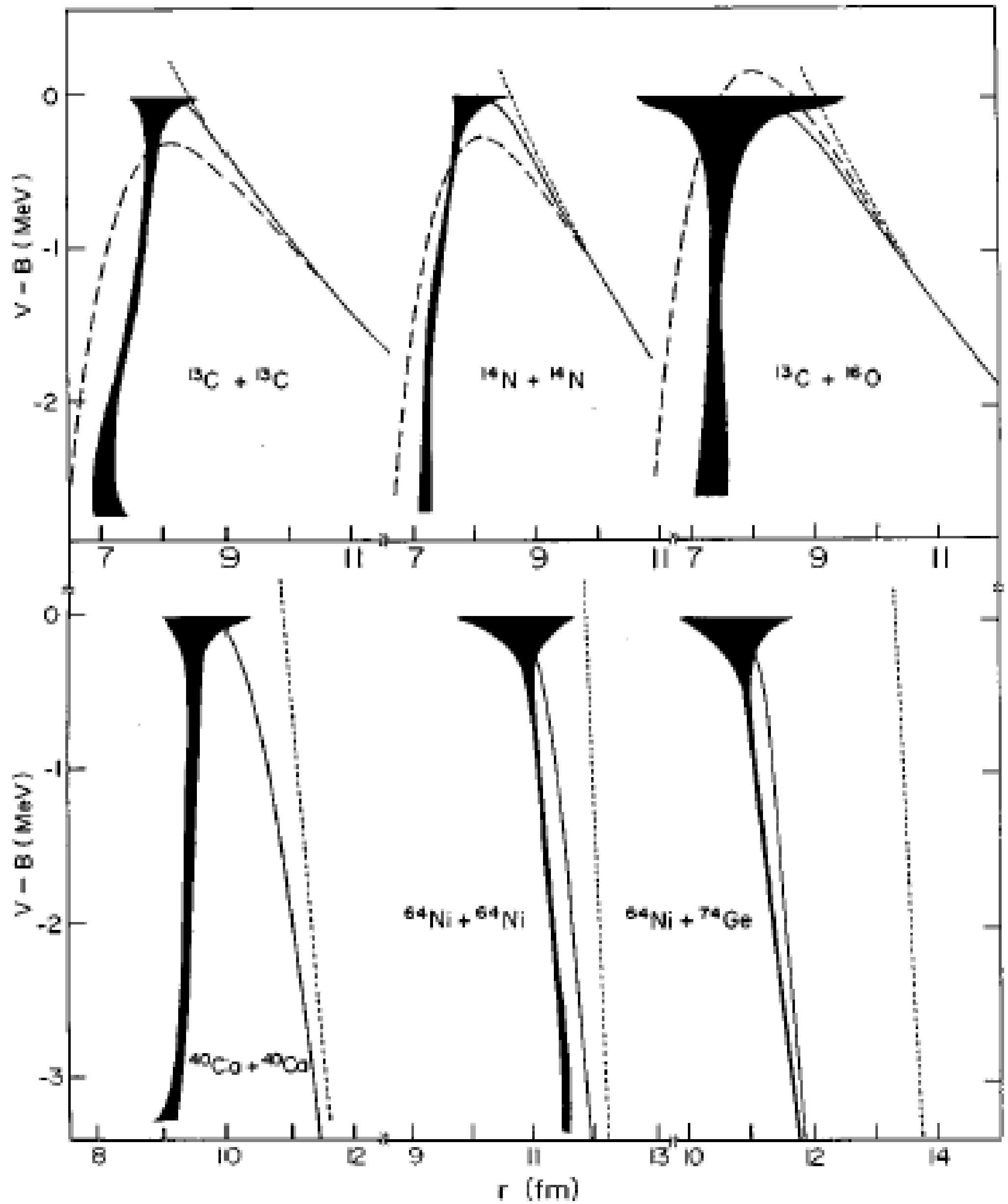
$$P_0(E) = \frac{1}{\pi R_b^2}\frac{d(E\sigma_{\rm fus})}{dE}$$

(note)

$$P_0(E) = 1/[1+e^{2S_0(E)}],\ \ S_0(E) = \int_{r_1}^{r_2} dr\,\sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2}(V(r)-E)}$$

$$\boxed{t(E) \equiv r_2 - r_1 = -\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{\hbar^2}{2\mu}}\int_E^{V_b}\frac{\frac{dS_0(E')}{dE'}}{\sqrt{E'-E}}\,dE'}$$





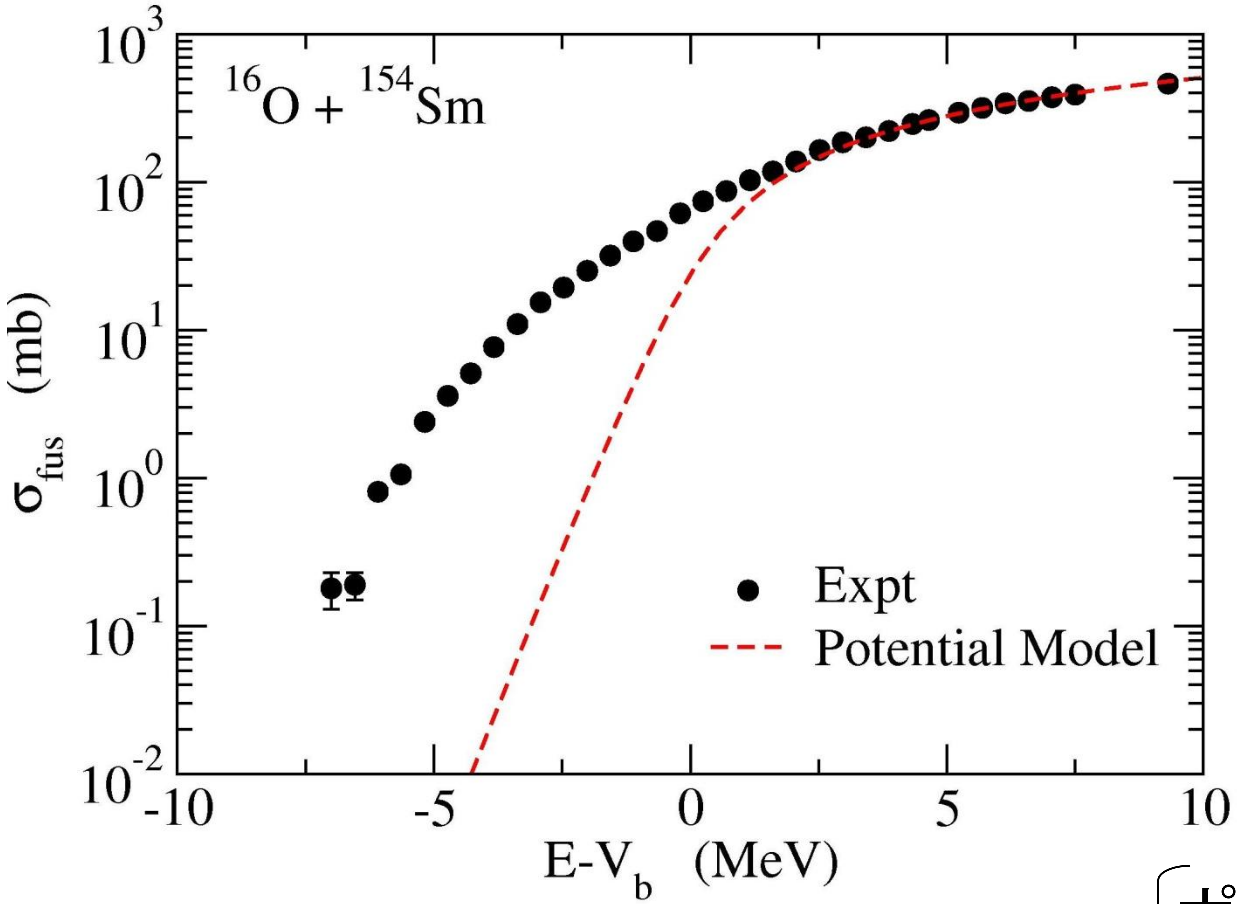
$$P_0(E) = \frac{1}{\pi R_b^2}\frac{d(E\sigma_{\rm fus})}{dE}$$

Balantekin et al. ('83):
E-indep, local, single-ch.
ポテンシャル模型を仮定

非物理的なポテンシャル

A.B. Balantekin, S.E. Koonin, and
J.W. Negele, PRC28('83)1565

エネルギーに依存しない静的なポテンシャルによる核融合反応断面積



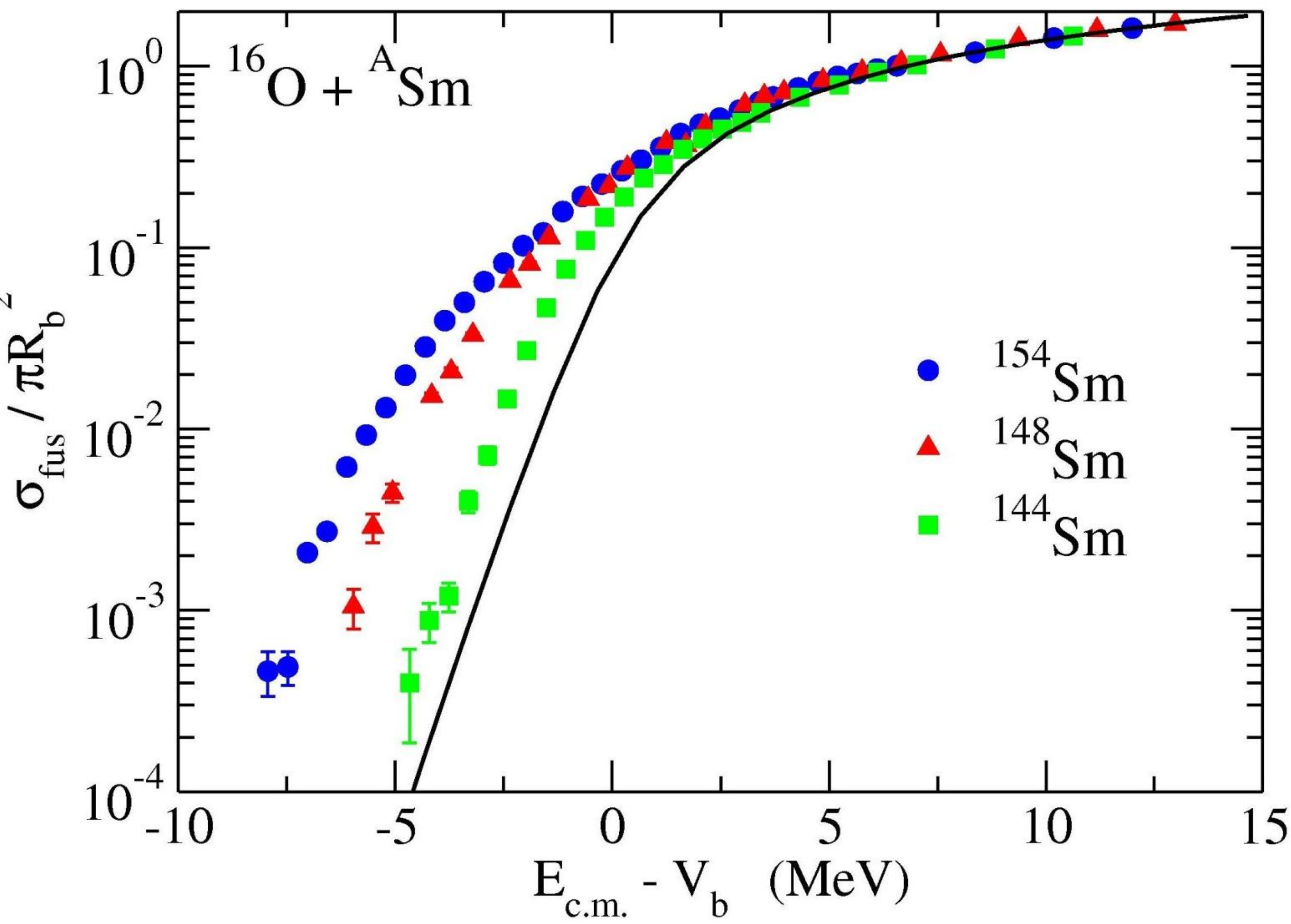
$E > V_b$ では大体データを再現

$E < V_b$ では核融合断面積を過小に評価

何が原因？

~~ポテンシャルが不十分？~~
他の要因？

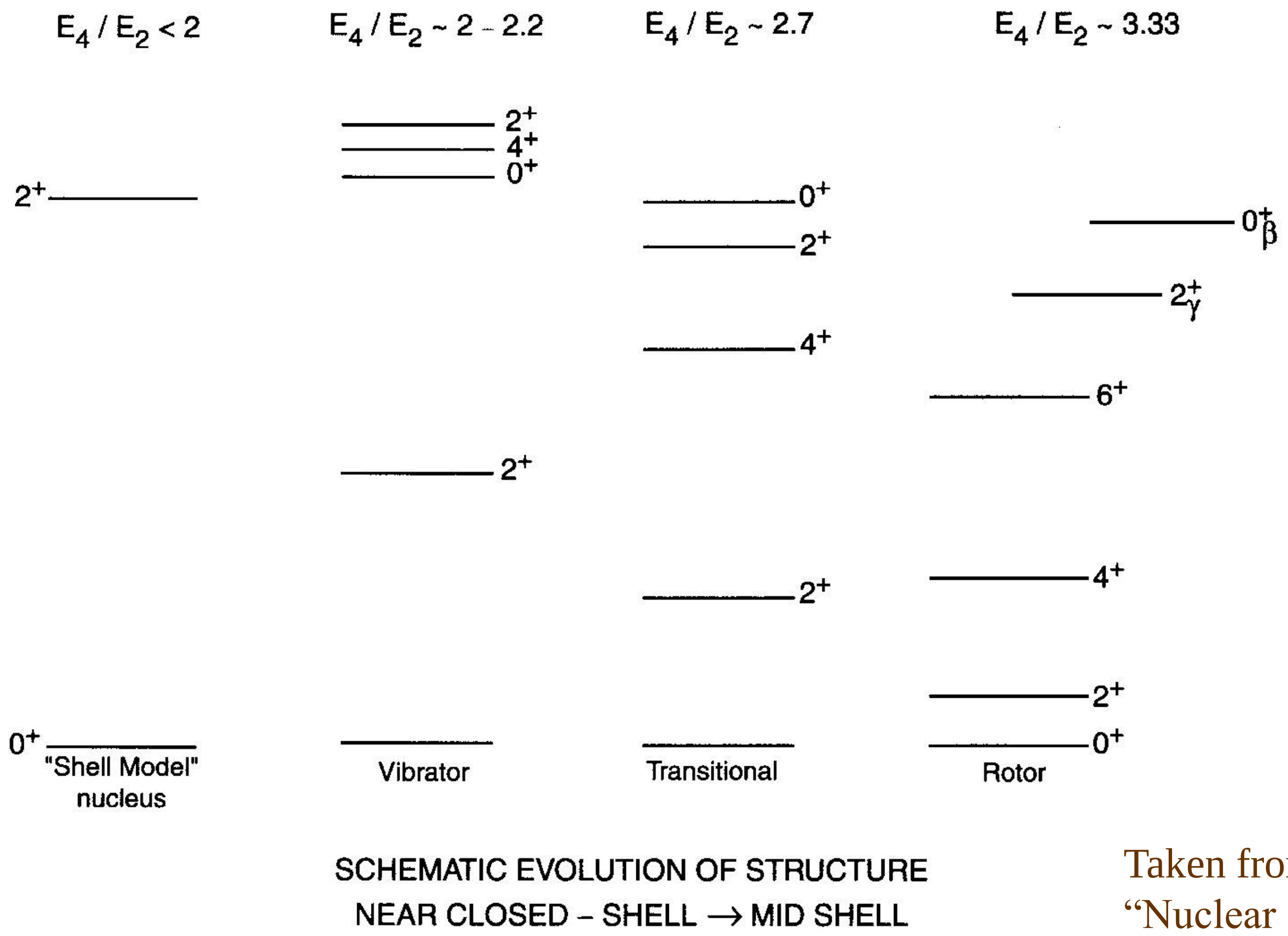
核融合断面積の標的核依存性



$E < V_b$ において強い標的核依存性

原子核の低励起集団運動

偶々核の低エネルギーに現れる励起状態は集団励起状態であり、対相関と殻構造を強く反映する。



Taken from R.F. Casten, "Nuclear Structure from a Simple Perspective"

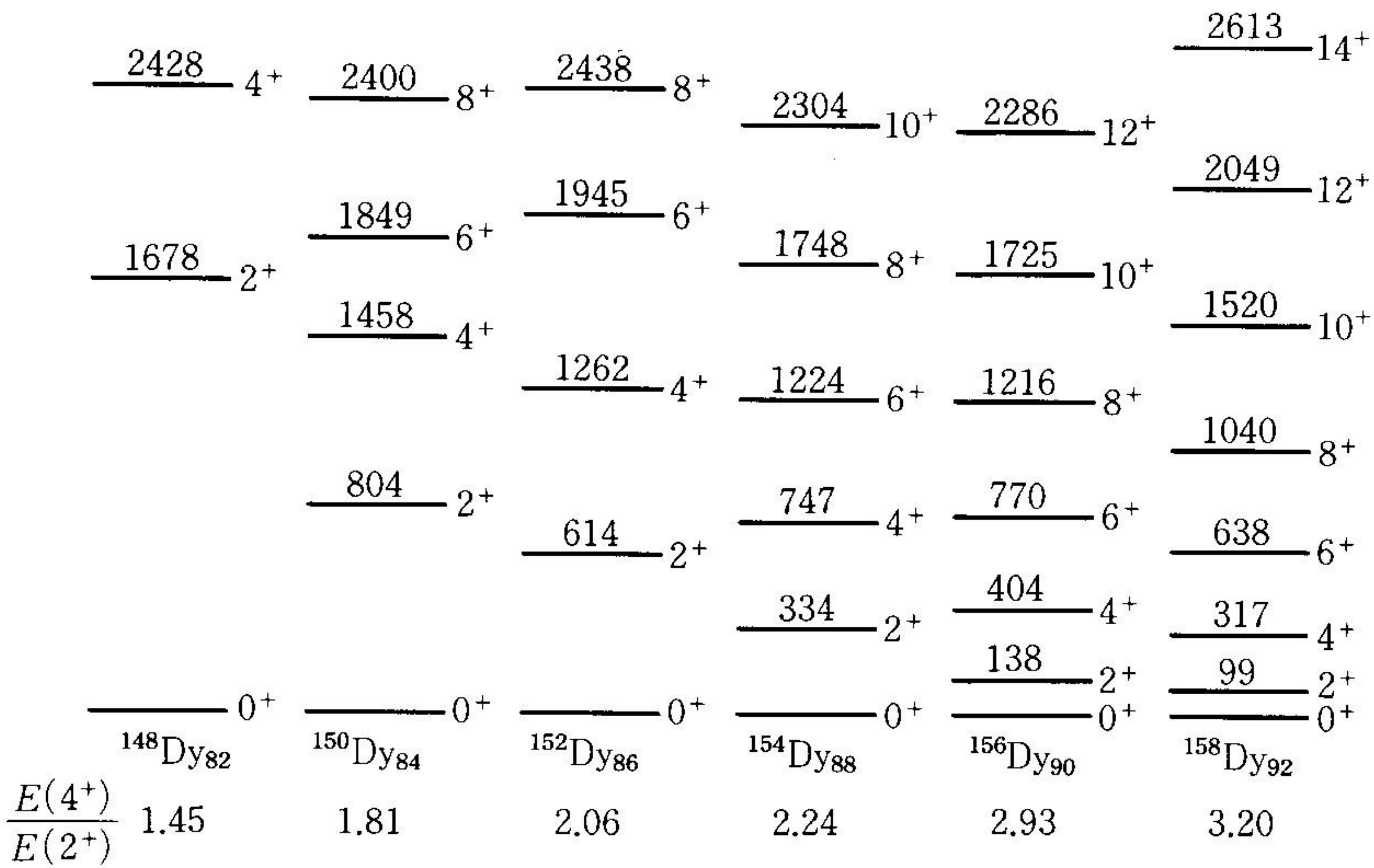


図 3-4 Dy アイソトープの低励起スペクトル．励起エネルギーの単位は keV．

市村、坂田、松柳
「原子核の理論」より

核融合反応に対する集団励起の影響: 回転の場合

エネルギー・スケールの比較

$$V(r) \sim V_b - \frac{1}{2}\mu\Omega^2 r^2$$

$$\begin{cases} \text{トンネル運動:} & E_{\rm tun} \sim \hbar\Omega \sim 3.5\ \text{MeV (クーロン障壁の曲率)} \\ \text{回転運動:} & E_{\rm rot} \sim E_{2+} \sim 0.08\text{MeV} \end{cases}$$

$$E_{\rm tun} \gg E_{\rm rot} = I(I+1)\hbar^2/2\mathcal{J} \to 0$$

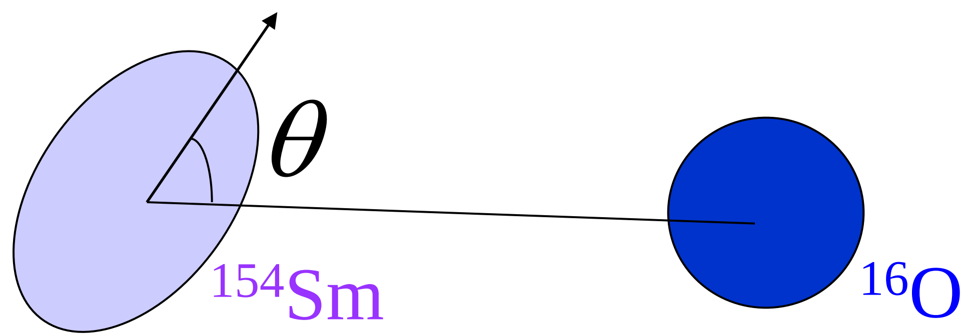
$$\mathcal{J} \to \infty$$

^{154}Sm の方向は反応中にほとんど変化しない

(note)
反応の初期は基底状態
(0^+ 状態)

⇒

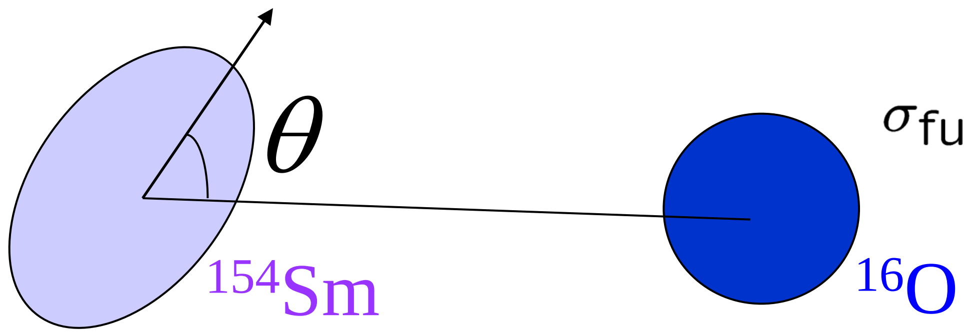
あらゆる方向が等確率
で混ざっている



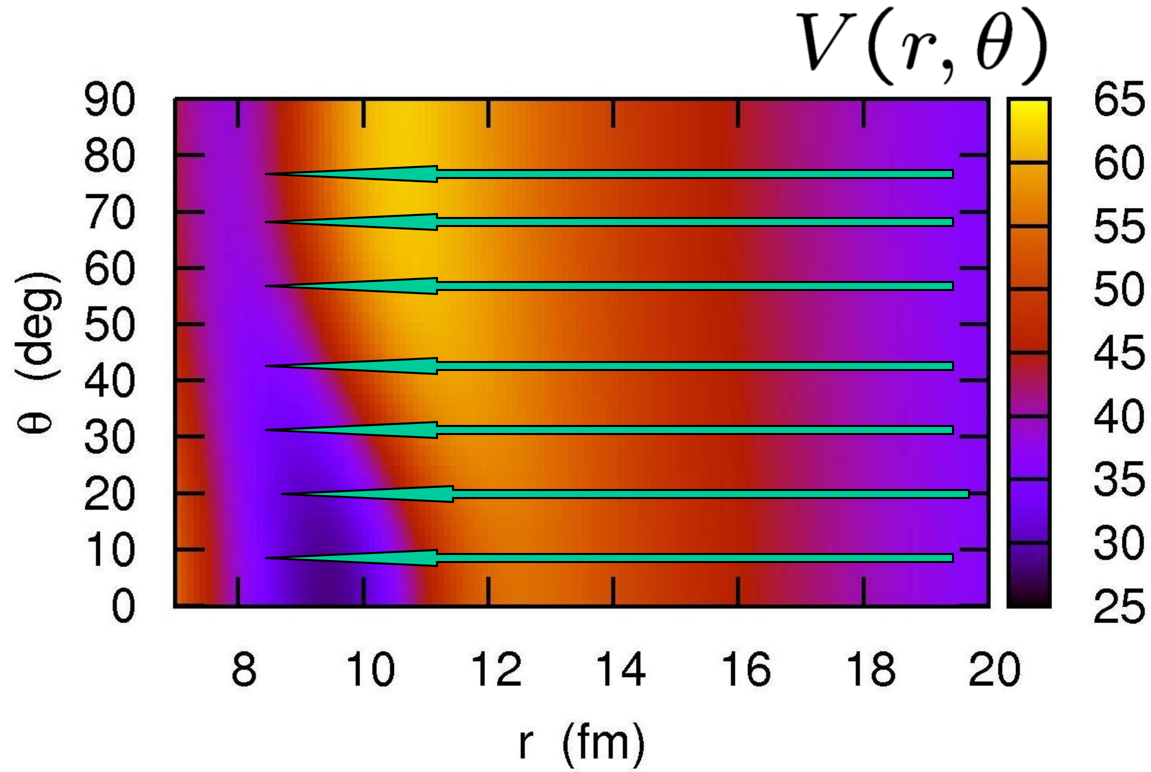
$$\boxed{\sigma_{\rm fus}(E) = \int_0^1 d(\cos\theta)\sigma_{\rm fus}(E;\theta)}$$

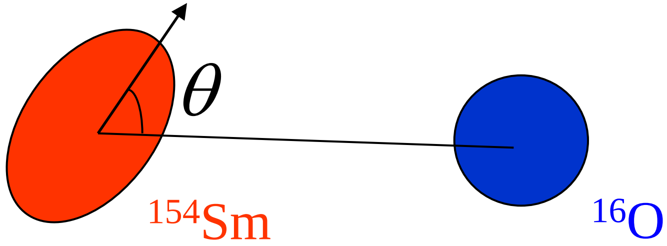
Effect of collective excitation on σ_{fus}: rotational case

The orientation angle of ^{154}Sm does not change much during fusion

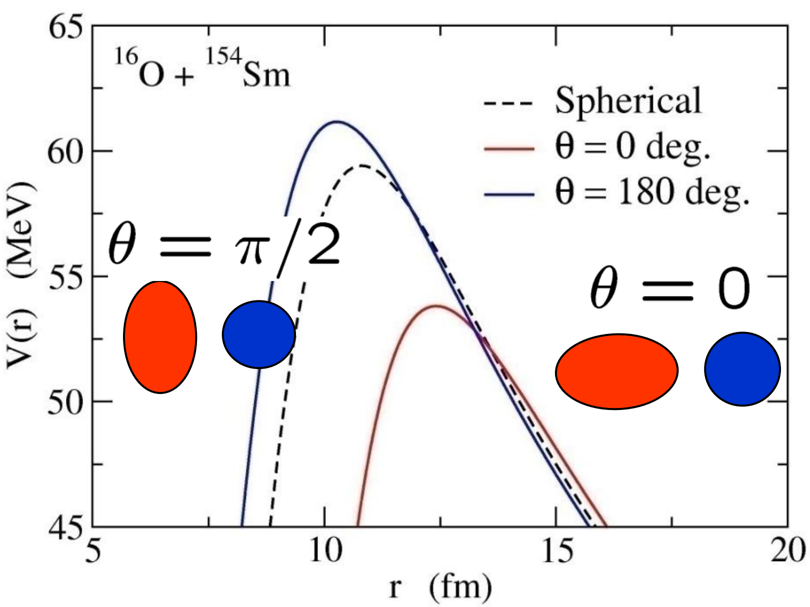


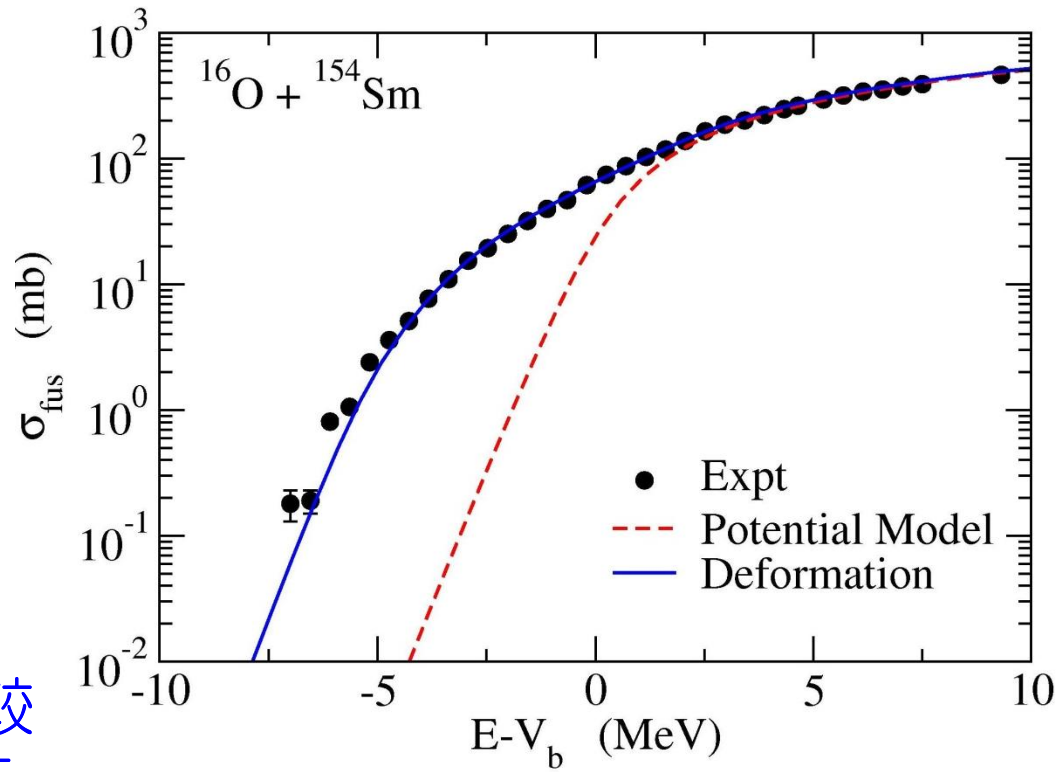
$$\sigma_{\rm fus}(E) = \int_0^1 d(\cos\theta)\sigma_{\rm fus}(E;\theta)$$





$$\sigma_{\text{fus}}(E) = \int_0^1 d(\cos\theta)\sigma_{\text{fus}}(E;\theta)$$





$\theta = 0$ では引力の核力が比較的遠方から働くため障壁が下がる。

$\theta = \pi/2$ はその逆。近づかないと引力が働かないため障壁は上がる。

変形の効果：核融合断面積が 10~100 倍増大

⟹ 核融合反応：核構造に対する興味深いプローブ

演習問題６

変形した原子核の核融合反応の Fortran プログラム:

http://www.nucl.phys.tohoku.ac.jp/~hagino/lecture2/deffus.f

$^{16}O+^{154}Sm$ 反応に対するインプット・ファイル:

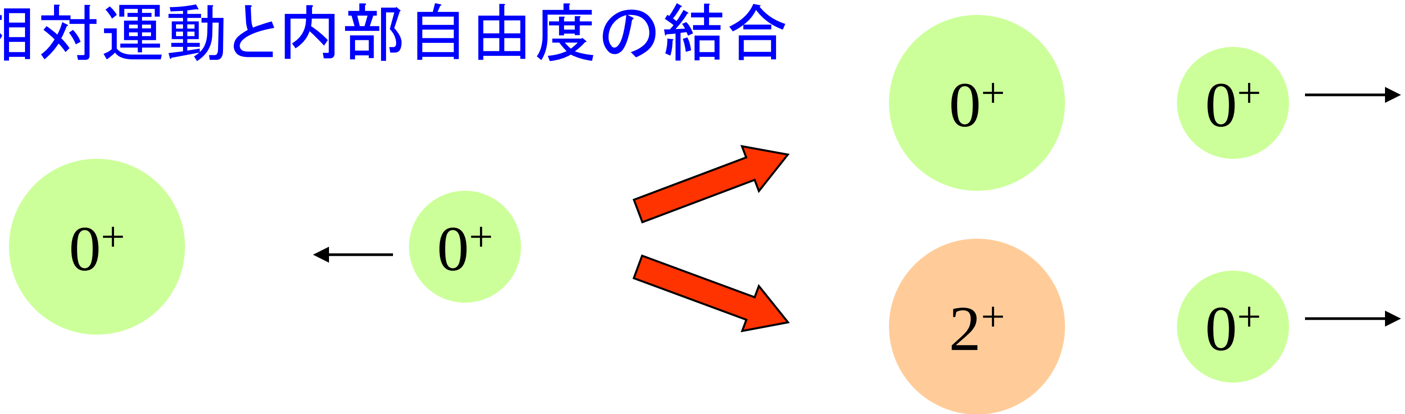
http://www.nucl.phys.tohoku.ac.jp/~hagino/lecture2/deffus.inp

実際にプログラムを動かしてみて、
* beta2=0.322 と beta2=0 でどのくらい核融合反応断面積が違うのか
* beta2=0.322 の場合、orientation の数を変えるとどうなるか?

を確認せよ。

より量子的な取り扱い：結合チャンネル法

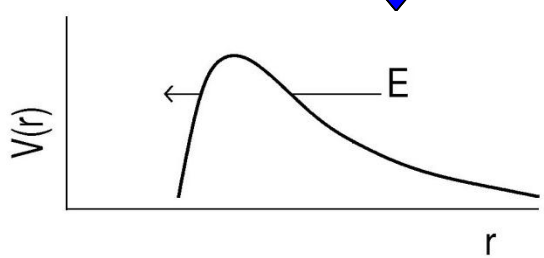
相対運動と内部自由度の結合

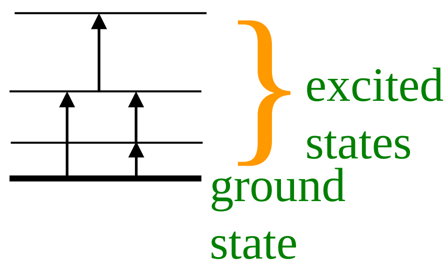


エントランス・チャンネル

励起チャンネル

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V_0(r) + H_0(\xi) + V_{\rm coup}(\boldsymbol{r},\xi)$$





$$H_0(\xi)\phi_k(\xi) = \epsilon_k\,\phi_k(\xi)$$

$$\boxed{\Psi(\boldsymbol{r},\xi) = \sum_k \psi_k(\boldsymbol{r})\phi_k(\xi)}$$

$$\left\{\begin{aligned} H &= -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V_0(r) + H_0(\xi) + V_{\mathrm{coup}}(\boldsymbol{r},\xi) \\ \Psi(\boldsymbol{r},\xi) &= \sum_k \psi_k(\boldsymbol{r})\phi_k(\xi) \end{aligned}\right.$$

$$H_0(\xi)\phi_k(\xi) = \epsilon_k\,\phi_k(\xi)$$

Schroedinger equation: $(H-E)\Psi(\boldsymbol{r},\xi) = 0$

$$\langle\phi_k| \longrightarrow$$

$$\langle\phi_k|H-E|\Psi\rangle = 0$$

or

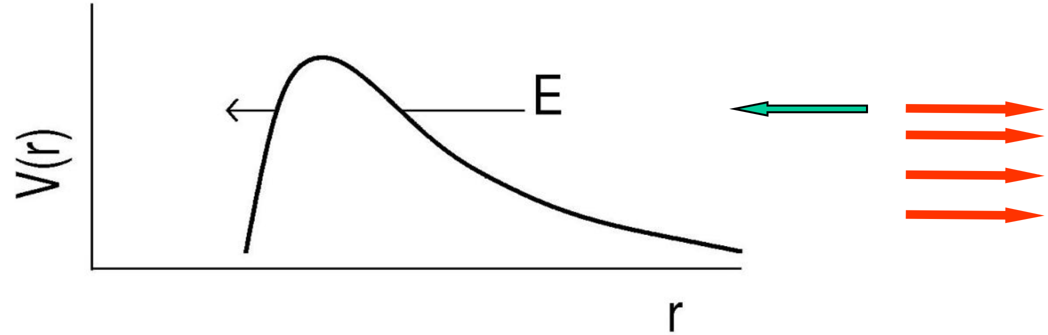
$$\boxed{\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V_0(r) + \epsilon_k - E\right]\psi_k(\boldsymbol{r}) + \sum_{k'}\langle\phi_k|V_{\mathrm{coup}}|\phi_{k'}\rangle\psi_{k'}(\boldsymbol{r}) = 0}$$

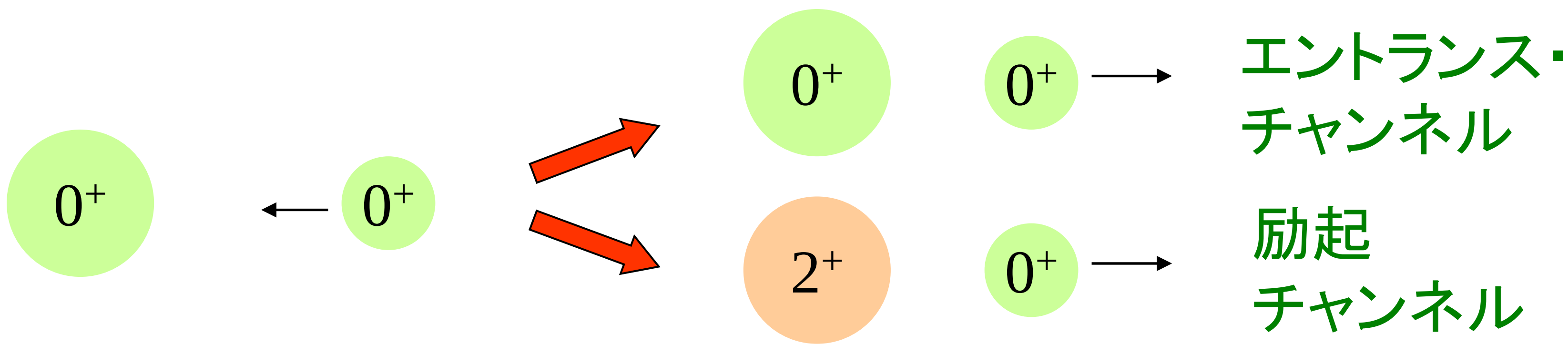
結合チャンネル方程式

＊より正確には、角運動量の合成

$$\Psi(\boldsymbol{r},\xi) = \sum_k \psi_k(\boldsymbol{r})\phi_k(\xi) = \sum_{n,l,I}\frac{u_{nlI}(r)}{r}[Y_l(\hat{\boldsymbol{r}})\phi_{nI}(\xi)]^{(JM)}$$

境界条件



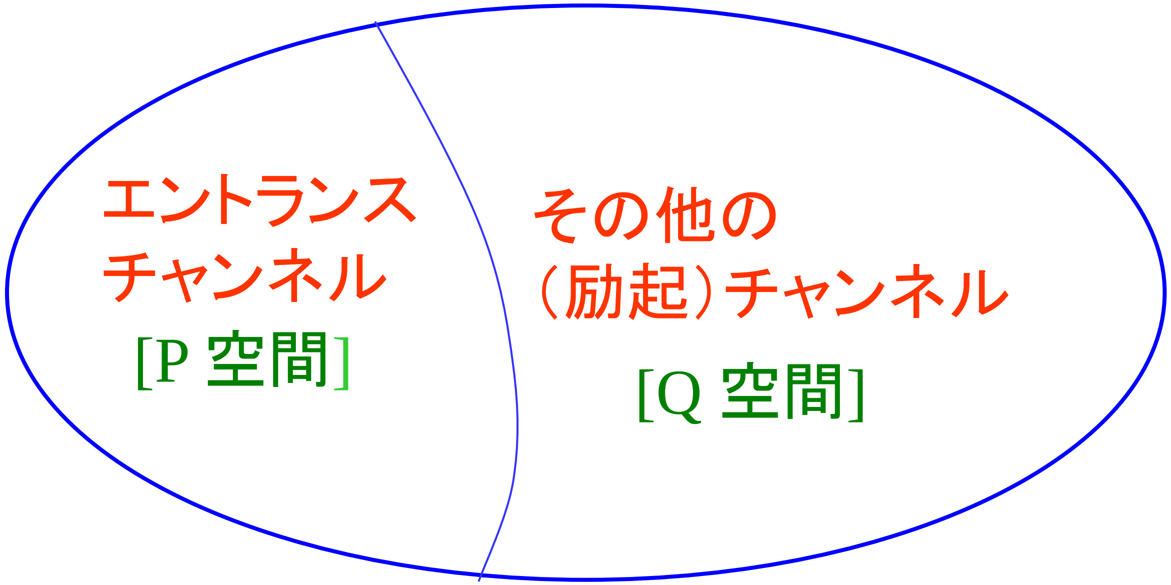


$$\Psi(\boldsymbol{r},\xi) = \sum_{n,l,I} \frac{u_{nlI}(r)}{r}[Y_l(\hat{\boldsymbol{r}})\phi_{nI}(\xi)]^{(JM)}$$

$$\boxed{u_{nlI}(r) \to H_l^{(-)}(k_{nI}r)\delta_{n,n_i}\delta_{l,l_i}\delta_{I,I_i} - \sqrt{\frac{k_0}{k_{nI}}}\,S_{nlI}\,H_l^{(+)}(k_{nI}r)}$$

$$P_l(E) = 1 - \sum_{nI}|S_{nlI}|^2 \qquad \sigma_{\mathrm{fus}}(E) = \frac{\pi}{k^2}\sum_l (2l+1)P_l(E)$$

(note) Dynamical Polarization Potential



考えている全ヒルベルト空間（概念図）

Q 空間を「消去」して P 空間に射影

→ P 空間（エントランス・チャンネル）に対する effective potential (dynamical polarization potential)

エネルギー依存、non-local、複素ポテンシャル

⟺ 光学ポテンシャル V_{opt}

例：2チャンネル問題

$$\left[\underbrace{-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2}+\frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2}+V_0(r)}_{\equiv\,\hat{h}_l}+\begin{pmatrix} 0 & F(r) \\ F(r) & \epsilon \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} u_0(r) \\ u_1(r) \end{pmatrix}=E\begin{pmatrix} u_0(r) \\ u_1(r) \end{pmatrix}$$

or

$$\begin{cases} \hat{h}_l\,u_0(r)+F(r)u_1(r) = E\,u_0(r) & (1) \\ \hat{h}_l\,u_1(r)+F(r)u_0(r) = (E-\epsilon)u_1(r) & (2) \end{cases}$$

(2) $\Longrightarrow$ $$u_1(r)=-\int_0^\infty dr'\,G^{(+)}(r,r';E-\epsilon)F(r')u_0(r')$$

$$G^{(+)}(r,r';E-\epsilon)=\left(\frac{1}{\hat{h}_l-(E-\epsilon)+i\eta}\right)_{r,r'}$$

$$\boxed{\hat{h}_l\,u_0(r)-F(r)\int_0^\infty dr'\,G^{(+)}(r,r';E-\epsilon)F(r')u_0(r')=E\,u_0(r)}$$

例：2チャンネル問題（続き）

$$\underbrace{\hat{h}_l\, u_0(r) - F(r)\int_0^\infty dr'\, G^{(+)}(r,r';E-\epsilon)F(r')u_0(r')}_{} = E\, u_0(r)$$

$$= \int_0^\infty dr'\, V_{\mathrm{DPP}}(r,r')u_0(r')$$

$$\boxed{V_{\mathrm{DPP}}(r,r') = -F(r)\, G^{(+)}(r,r';E-\epsilon)F(r')}$$

$$\begin{aligned} G^{(+)}(r,r';E) &= \left(\frac{1}{\hat{h}_l - E + i\eta}\right)_{r,r'} \\ &= -\frac{2\mu}{\hbar^2}\cdot\frac{f_l(kr_<)\,\tilde{h}_l^{(+)}(kr_>)}{W} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_l &\to \sin(kr - l\pi/2 + \delta_l) && \text{(regular solution)} \\ \tilde{h}_l &\to \exp[i(kr - l\pi/2 + \delta_l)] && \text{(outgoing solution)} \\ W &= f_l'\,\tilde{h}_l - f_l\,\tilde{h}_l' = k && \text{(Wronskian)} \end{aligned}$$

より一般的には: Feshbach formalism（参考図書を参照のこと）

結合チャンネル法のまとめ

$$
\begin{cases}
H = -\dfrac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V_0(r) + H_0(\xi) + V_{\rm coup}(\boldsymbol{r},\xi) \\[2ex]
\Psi(\boldsymbol{r},\xi) = \displaystyle\sum_{n,l,I} \frac{u_{nlI}(r)}{r}[Y_l(\hat{\boldsymbol{r}})\phi_{nI}(\xi)]^{(JM)}
\end{cases}
$$

$$H_0(\xi)\phi_{nIm_I}(\xi) = \epsilon_{nI}\,\phi_{nIm_I}(\xi)$$

$$\langle [Y_l\phi_{nI}]^{(JM)}|H - E|\Psi\rangle = 0$$

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} + V_0(r) - E + \epsilon_{nI}\right] u_{nlI}(r) \\
&\qquad + \sum_{n'l'I'} \langle [Y_l\phi_{nI}]^{(JM)}|V_{\rm coup}(r)|[Y_{l'}\phi_{n'I'}]^{(JM)}\rangle\, u_{n'l'I'}(r) = 0
\end{aligned}
}
$$

$$
\boxed{
u_{nlI}(r) \to H_l^{(-)}(k_{nI}r)\delta_{n,n_i}\delta_{l,l_i}\delta_{I,I_i} - \sqrt{\frac{k_0}{k_{nI}}}\,S_{nlI}\,H_l^{(+)}(k_{nI}r)
}
$$

$$P_l(E) = 1 - \sum_{nI}|S_{nlI}|^2$$

$$\sigma_{\rm fus}(E) = \frac{\pi}{k^2}\sum_l (2l+1)P_l(E)$$

結合チャンネル方程式の2通りの解き方

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V_0(r) + H_0(\xi) + V_{\rm coup}(\boldsymbol{r},\xi)$$

$$H_0(\xi)\phi_k(\xi) = \epsilon_k\,\phi_k(\xi)$$

1) 連立（2階）微分方程式を解く

$$\Psi(\boldsymbol{r},\xi) = \sum_k \psi_k(\boldsymbol{r})\phi_k(\xi)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V_0(r) + \epsilon_k - E\right]\psi_k(\boldsymbol{r}) + \sum_{k'}\langle\phi_k|V_{\rm coup}|\phi_{k'}\rangle\psi_{k'}(\boldsymbol{r}) = 0$$

2) 時間発展方程式を解く（半古典近似）

$$H_r = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V_0(r)$$ を用いて $r(t)$ の軌道を決定

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle = [H_0(\xi) + V_{\rm coup}(r(t),\xi)]|\Psi(t)\rangle$$

を $|\Psi(t)\rangle = \sum_k a_k(t)|\phi_k(\xi)\rangle$ と展開して解く

結合チャンネル方程式の2通りの解き方

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V_0(r) + H_0(\xi) + V_{\mathrm{coup}}(\boldsymbol{r},\xi)$$

2) 時間発展方程式を解く(半古典近似)

$$H_r = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V_0(r)$$ を用いて $r(t)$ の軌道を決定

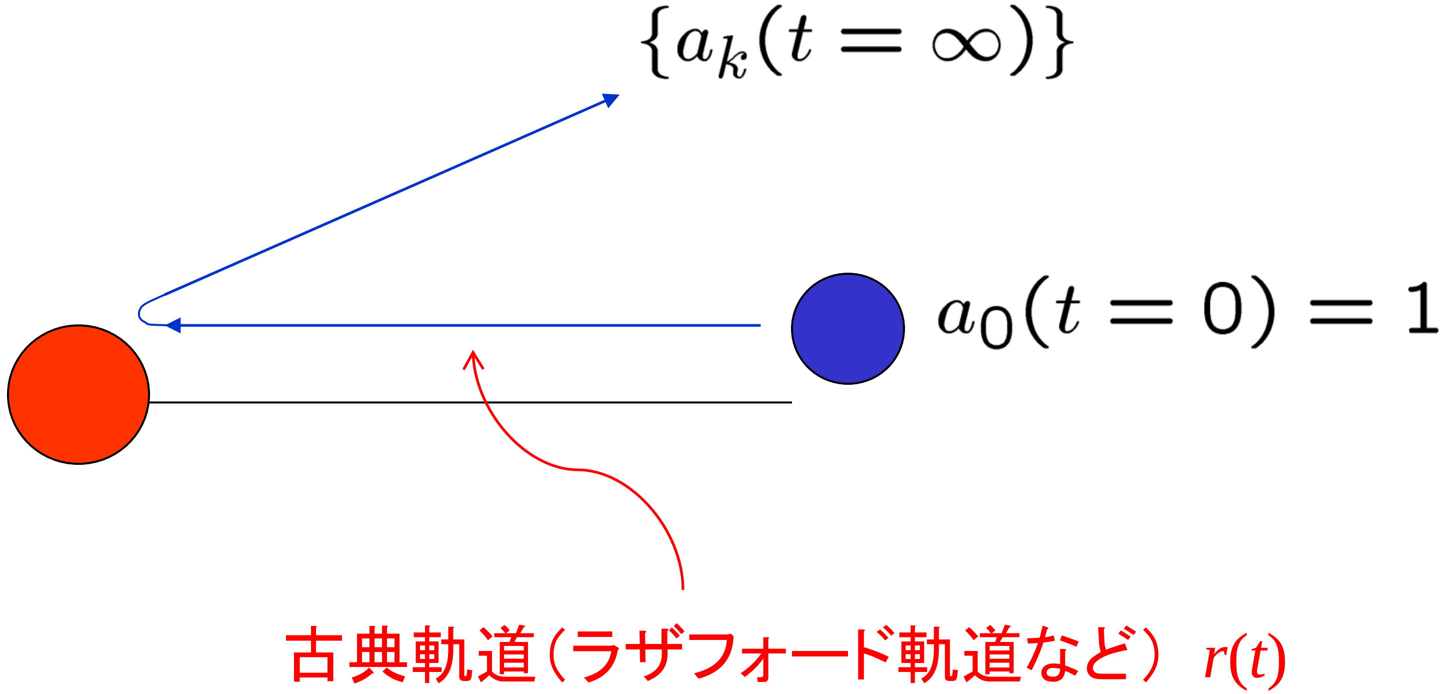
$$\Rightarrow \quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle = [H_0(\xi) + V_{\mathrm{coup}}(r(t),\xi)]|\Psi(t)\rangle$$

を $|\Psi(t)\rangle = \sum_k a_k(t)|\phi_k(\xi)\rangle$ と展開して解く

$$\boxed{i\hbar\,\dot{a}_k(t) = \epsilon_k a_k(t) + \sum_{k'} a_{k'}(t)\langle\phi_k|V_{\mathrm{coup}}(t)|\phi_{k'}\rangle}$$

●1階の微分方程式なので、計算が楽(より多くのチャンネルを入れることができる)。 ⟶ クーロン励起への応用多数

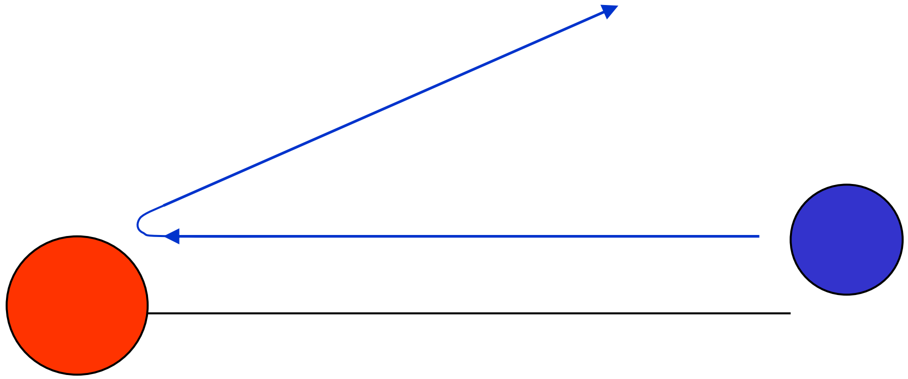
●ただし、トンネルが関係する計算は不得手。



反応が終わった後、k 状態にある確率：

$$P_k = |a_k(t=\infty)|^2$$

原子核の励起状態の性質



原子核同士を衝突させて標的核を励起させる

入射核との相互作用に
標的核がどのように応答するか？

標準的なアプローチ：結合チャンネル法を用いた解析

- 非弾性散乱の断面積
- 弾性散乱の断面積
- 核融合反応断面積

S 行列　S_{nlI}

Coupling Potential: Collective Model

$$R(\theta,\phi) = R_T\left(1+\sum_\mu \alpha_{\lambda\mu}Y^*_{\lambda\mu}(\theta,\phi)\right)$$

(note) rotating frame への座標変換($\hat{\boldsymbol{r}} = 0$):

$$\sum_\mu \alpha_{\lambda\mu}Y^*_{\lambda\mu}(\theta,\phi) \to \sqrt{\frac{2\lambda+1}{4\pi}}\alpha_{\lambda 0}$$

➢振動励起の場合

$$\begin{cases} \alpha_{\lambda\mu} = \dfrac{\beta_\lambda}{\sqrt{2\lambda+1}}(a^\dagger_{\lambda\mu} + (-)^\mu a_{\lambda\mu}) \\ H_0 = \hbar\omega_\lambda \sum_\mu a^\dagger_{\lambda\mu}a_{\lambda\mu} \end{cases}$$

➢回転励起の場合

Body-fixed 系への座標変換:

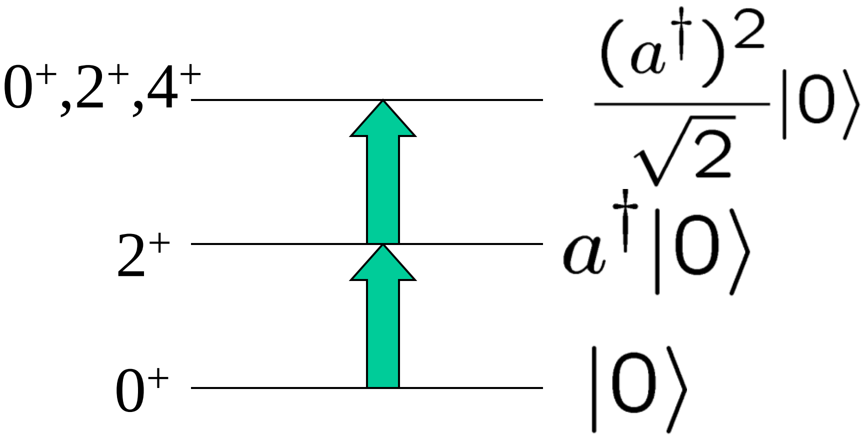
$$\begin{cases} \alpha_{\lambda\mu} = \sqrt{\dfrac{4\pi}{2\lambda+1}}\beta_\lambda Y_{\lambda\mu}(\theta_d,\phi_d) \\ H_0 = \dfrac{I(I+1)\hbar^2}{2\mathcal{J}} \end{cases}$$

(軸対称変形の場合)

いずれの場合も $\beta_\lambda = \dfrac{4\pi}{3Z_T R_T^\lambda}\sqrt{\dfrac{B(E\lambda)\uparrow}{e^2}}$

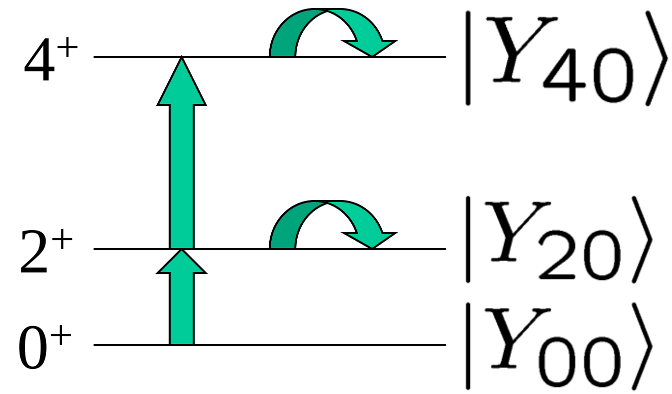
Vibrational coupling

$$\hat{O} = \frac{\beta}{\sqrt{4\pi}}(a + a^\dagger)$$



Rotational coupling

$$\hat{O} = \beta Y_{20}(\theta)$$



$$\begin{pmatrix} 0 & F & 0 \\ F & \epsilon & \sqrt{2}F \\ 0 & \sqrt{2}F & 2\epsilon \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & F & 0 \\ F & \epsilon + \frac{2\sqrt{5}}{7}F & \frac{6}{7}F \\ 0 & \frac{6}{7}F & \frac{10\epsilon}{3} + \frac{20\sqrt{5}}{77}F \end{pmatrix}$$

$$F = \frac{\beta}{\sqrt{4\pi}}$$

Deformed Woods-Saxon model:

$$\begin{aligned} V_{WS}(r) &= -\frac{V_0}{1+\exp[(r-R_0)/a]} \\ &= -\frac{V_0}{1+\exp[(r-R_P-R_T)/a]} \end{aligned}$$

$$R_T \to R_T\left(1+\sum_{\mu}\alpha_{\lambda\mu}Y^*_{\lambda\mu}(\theta,\phi)\right)$$

$$\boxed{V_{WS}(\boldsymbol{r}) = -\frac{V_0}{1+\exp[(r-R_0-R_T\,\alpha_\lambda\cdot Y_\lambda(\hat{\boldsymbol{r}}))/a]}}$$

結合チャンネル方程式：２つの極限

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2}+\frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2}+V_0(r)-E+\epsilon_{nI}\right]u_{nlI}(r)$$
$$+\sum_{n'l'I'}\langle[Y_l\phi_{nI}]^{(JM)}|V_{\rm coup}(r)|[Y_{l'}\phi_{n'I'}]^{(JM)}\rangle\,u_{n'l'I'}(r)=0$$

$$u_{nlI}(r)\to H_l^{(-)}(k_{nI}r)\delta_{n,n_i}\delta_{l,l_i}\delta_{I,I_i}-\sqrt{\frac{k_0}{k_{nI}}}\,S_{nlI}\,H_l^{(+)}(k_{nI}r)$$

$$P_l(E)=1-\sum_{nI}|S_{nlI}|^2 \qquad \sigma_{\rm fus}(E)=\frac{\pi}{k^2}\sum_l(2l+1)P_l(E)$$

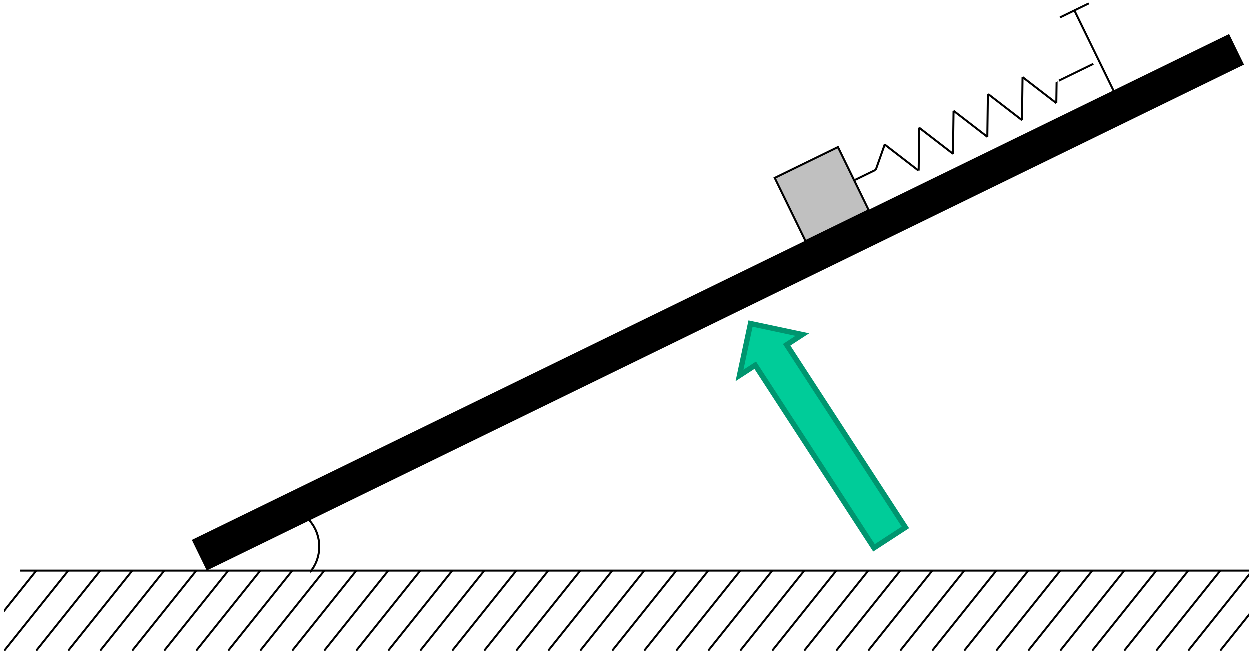
数値的に結合チャンネル方程式を解いて核融合反応断面積を計算

$\Rightarrow$ 結果を解釈（理解）するために2つの極限を考えてみよう

- ϵ_{nI}: 非常に大きい場合（断熱極限） *Adiabatic limit*
- ϵ_{nI}: ゼロの極限（瞬間極限） *Sudden limit*

２つの自由度の時間スケールの差を考える

わかりやすい例：斜面上におかれたバネの問題



ゆっくりと斜面を動かすか、瞬間的に動かすか

２つの極限: (i) 断熱極限

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V_0(r) + H_0(\xi) + V_{\rm coup}(\boldsymbol{r},\xi)$$

相対運動が内部運動に比べて非常にゆっくりしている場合

相対運動の典型的なエネルギー・スケールが内部運動の
エネルギー・スケールにくらべて非常に小さい場合

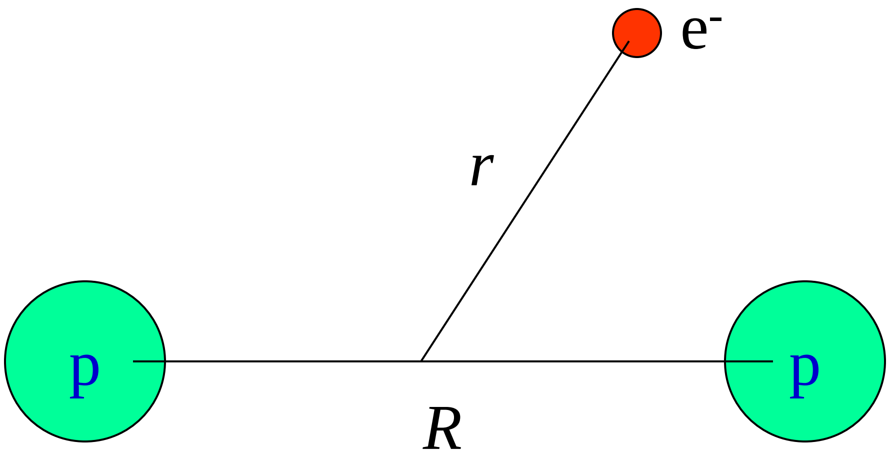
$$\hbar\Omega \ll \epsilon$$

（障壁の曲率 v.s. 内部自由度の励起エネルギー）

$$[H_0(\xi) + V_{\rm coup}(\boldsymbol{r},\xi)]\varphi_0(\xi;\boldsymbol{r}) = \epsilon_0(r)\,\varphi_0(\xi;\boldsymbol{r})$$

$$\boxed{H_0(\xi) + V_{\rm coup}(\boldsymbol{r},\xi) \to \epsilon_0(r)}$$

c.f. 水素分子に対する Born-Oppenheimer 近似



$$[T_R + T_r + V(r,R)]\Psi(r,R) = E\Psi(r,R)$$

1. まず陽子が止まっているとして電子の運動を考える

$$[T_r + V(r,R)]u_n(r;R) = \epsilon_n(R)u_n(r;R)$$

2. $\varepsilon_n(R)$ を R に関して最小化する
Or 2'. ポテンシャル $\varepsilon_n(R)$ 中の陽子間の運動を考える

$$[T_R + \epsilon_n(R)]\phi_n(R) = E\phi_n(R)$$

Adiabatic Potential Renormalization

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V_0(r) + H_0(\xi) + V_{\rm coup}(\boldsymbol{r},\xi)$$

When ε is large,

$$\boxed{H_0(\xi) + V_{\rm coup}(\boldsymbol{r},\xi) \to \epsilon_0(r)}$$

where

$$[H_0(\xi) + V_{\rm coup}(\boldsymbol{r},\xi)]\varphi_0(\xi;\boldsymbol{r}) = \epsilon_0(r)\,\varphi_0(\xi;\boldsymbol{r})$$

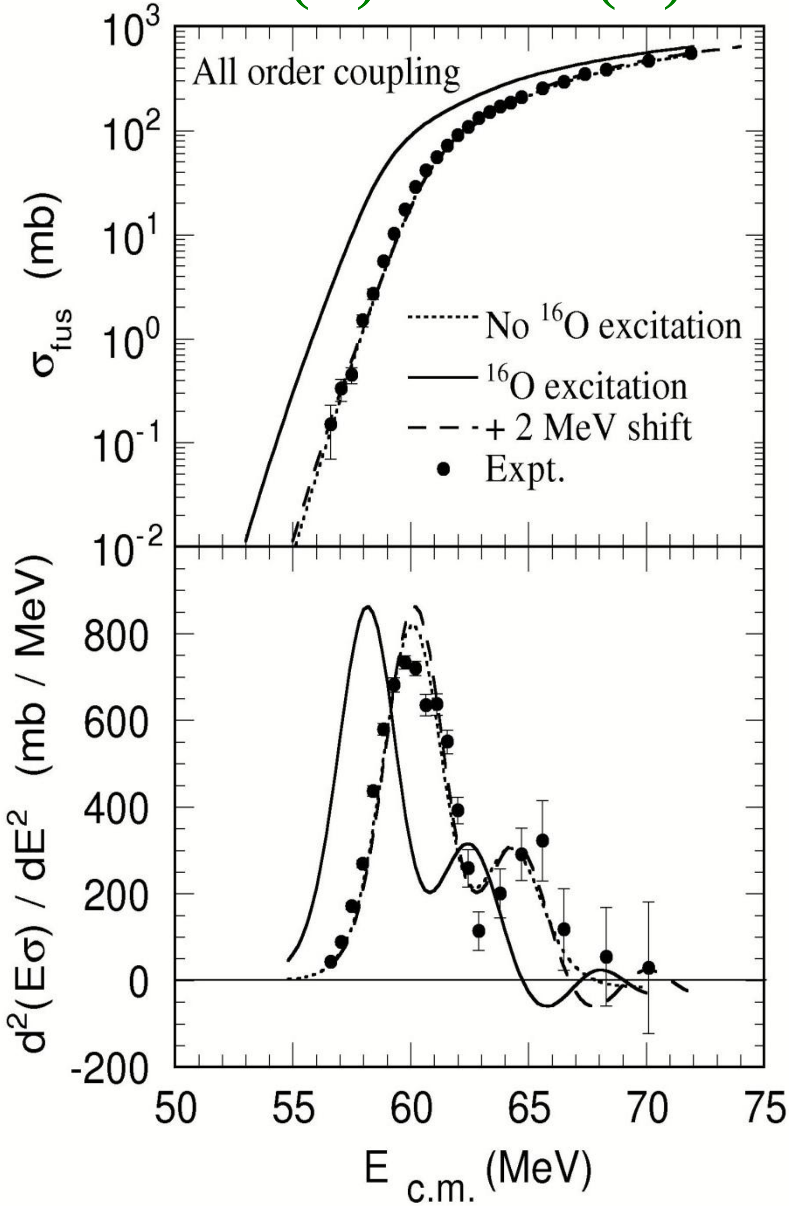
Fast intrinsic motion

→ Adiabatic potential renormalization

$$V_{\rm ad}(r) = V_0(r) + \epsilon_0(r)$$

Giant Resonances, $^{16}O(3^-)$ [6.31 MeV]

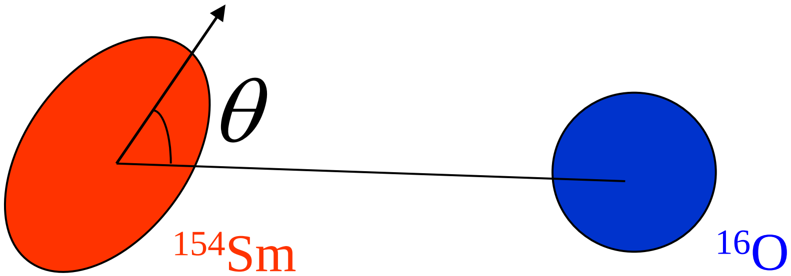
$^{16}O(3^-) + {}^{144}Sm(3^-)$



K.H., N. Takigawa, M. Dasgupta,
D.J. Hinde, J.R. Leigh, PRL79('99)2014

２つの極限: (ii) 瞬間極限

$$\epsilon \to 0$$



$$\epsilon_I = I(I+1)\hbar^2/2\mathcal{J}$$

$$\mathcal{J} \to \infty$$

$$\sigma_{\rm fus}(E) = \int_0^1 d(\cos\theta)\sigma_{\rm fus}(E;\theta)$$

Coupled-channels:

$$\begin{pmatrix} 0 & f(r) & 0 \\ f(r) & \frac{2\sqrt{5}}{7}f(r) & \frac{6}{7}f(r) \\ 0 & \frac{6}{7}f(r) & \frac{20\sqrt{5}}{77}f(r) \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{diagonalize}} \begin{pmatrix} \lambda_1(r) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2(r) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3(r) \end{pmatrix}$$

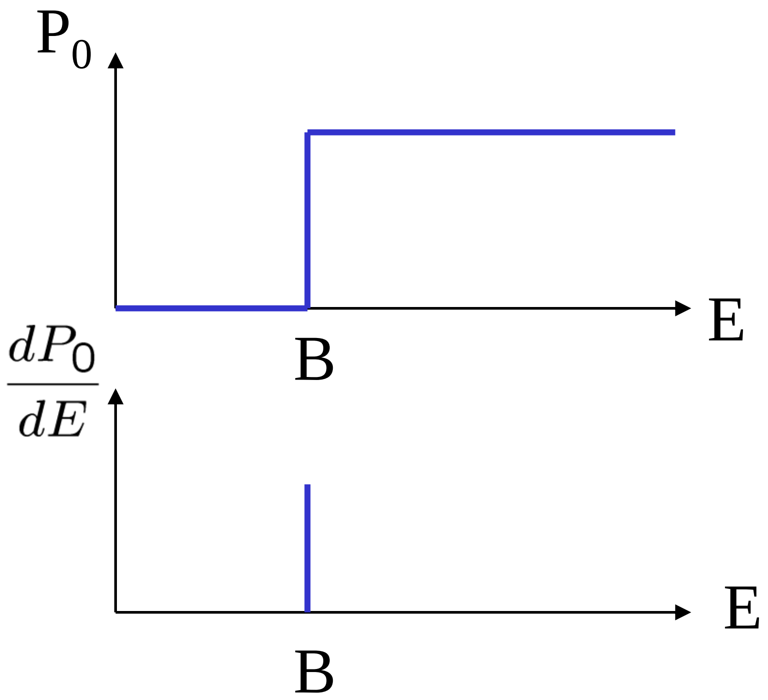
$$\Rightarrow \quad P(E) = \sum_i w_i \, P(E; V_0(r) + \lambda_i(r))$$

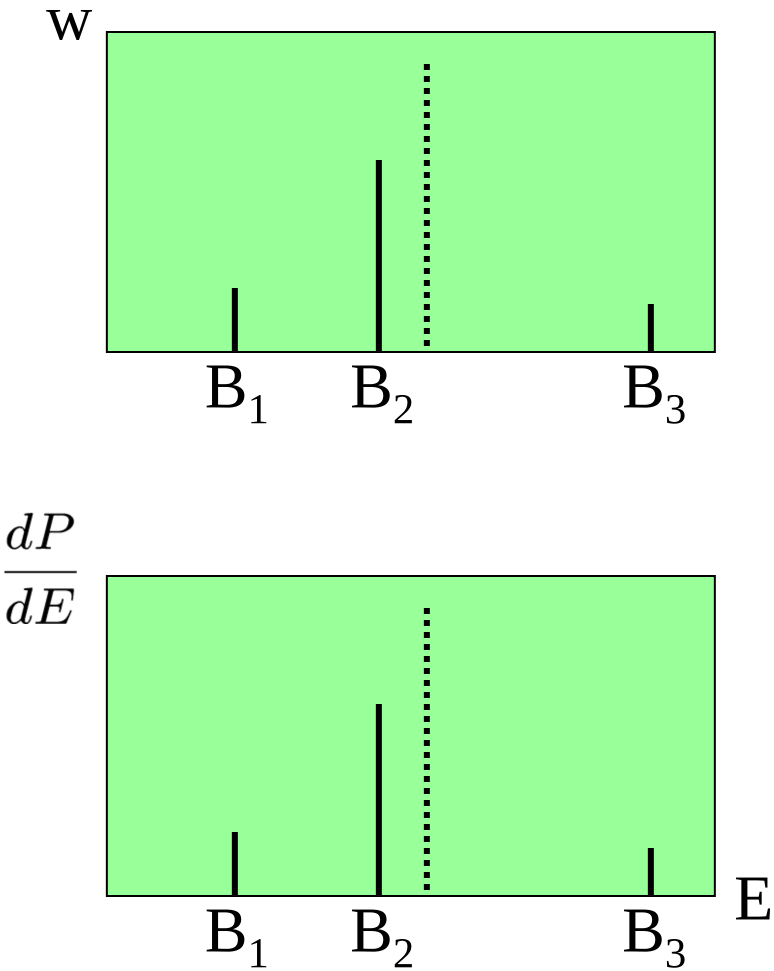
Slow intrinsic motion

→ Barrier Distribution

障壁分布

$$P(E) = \sum_i w_i \, P(E; V_0(r) + \lambda_i(r))$$



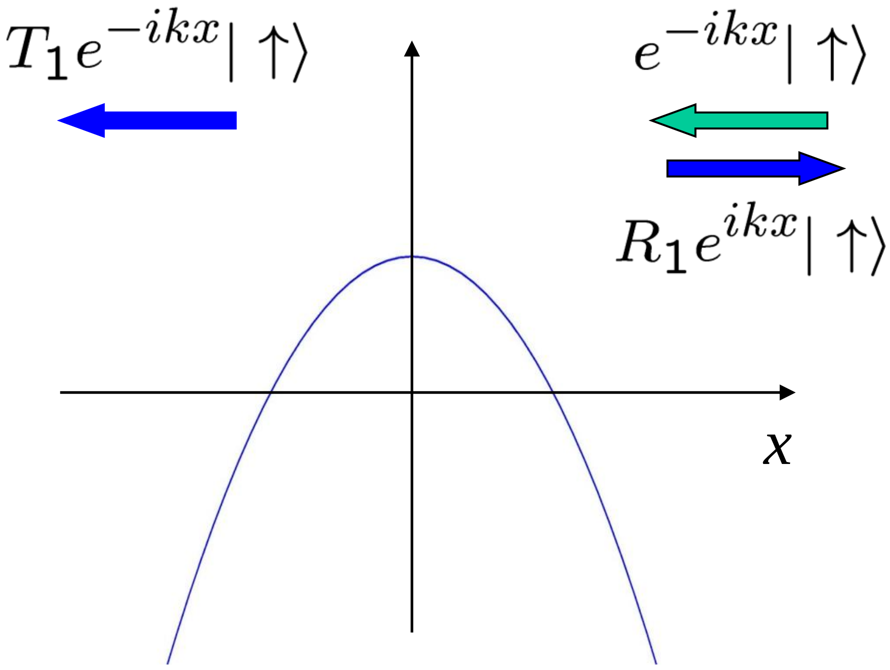


障壁分布:スピン・ハミルトニアンを用いて概念を理解する

ハミルトニアン(例1): $$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V_0(x) + \hat{\sigma}_z \cdot V_s(x)$$

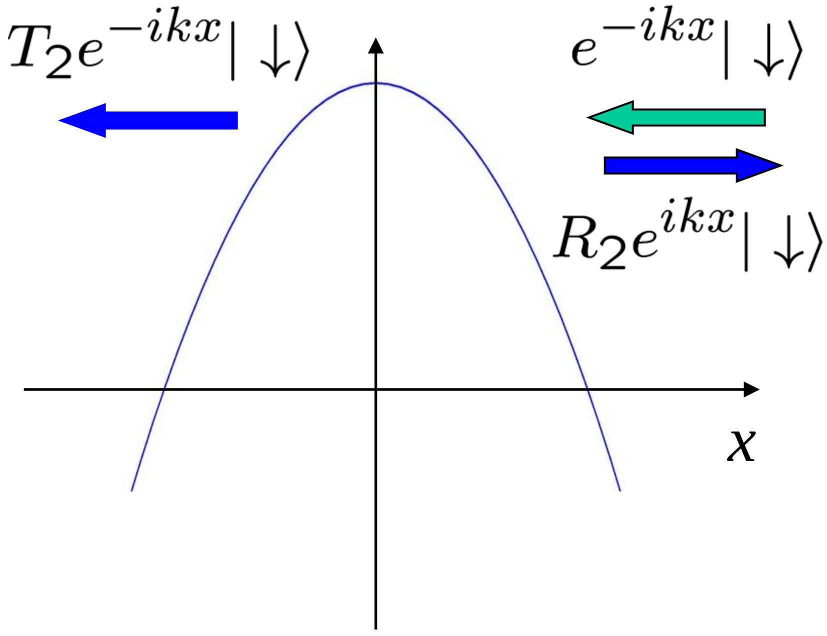
$$\hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Spin-up の場合



$$V_1(x) = V_0(x) + V_s(x)$$

Spin-down の場合



$$V_2(x) = V_0(x) - V_s(x)$$

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V_0(x) + \hat{\sigma}_z \cdot V_1(x)$$

波動関数（一般形）: $\Psi(x) = \psi_1(x)\,|\uparrow\rangle + \psi_2(x)\,|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix}$

$x \to \pm\infty$ での漸近形:

$$\Psi(x) \to \begin{pmatrix} C_1(e^{-ikx} + R_1 e^{ikx}) \\ C_2(e^{-ikx} + R_2 e^{ikx}) \end{pmatrix} \quad (x \to \infty)$$

$$\to \begin{pmatrix} C_1 T_1 e^{-ikx} \\ C_2 T_2 e^{-ikx} \end{pmatrix} \quad (x \to -\infty)$$

$$|C_1|^2 + |C_2|^2 = 1$$

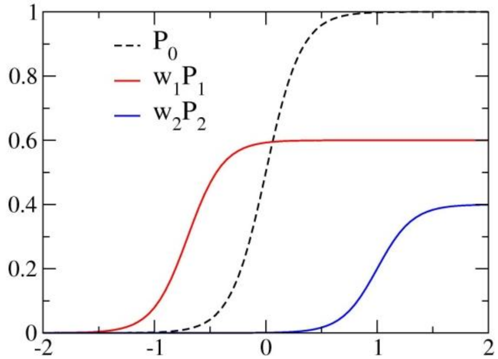
（C_1とC_2の値は粒子のスピン状態により定まる）

トンネル確率＝$\dfrac{(\,x = -\infty \text{ でのフラックス})}{(x = \infty \text{ での入射内向きフラックス})}$

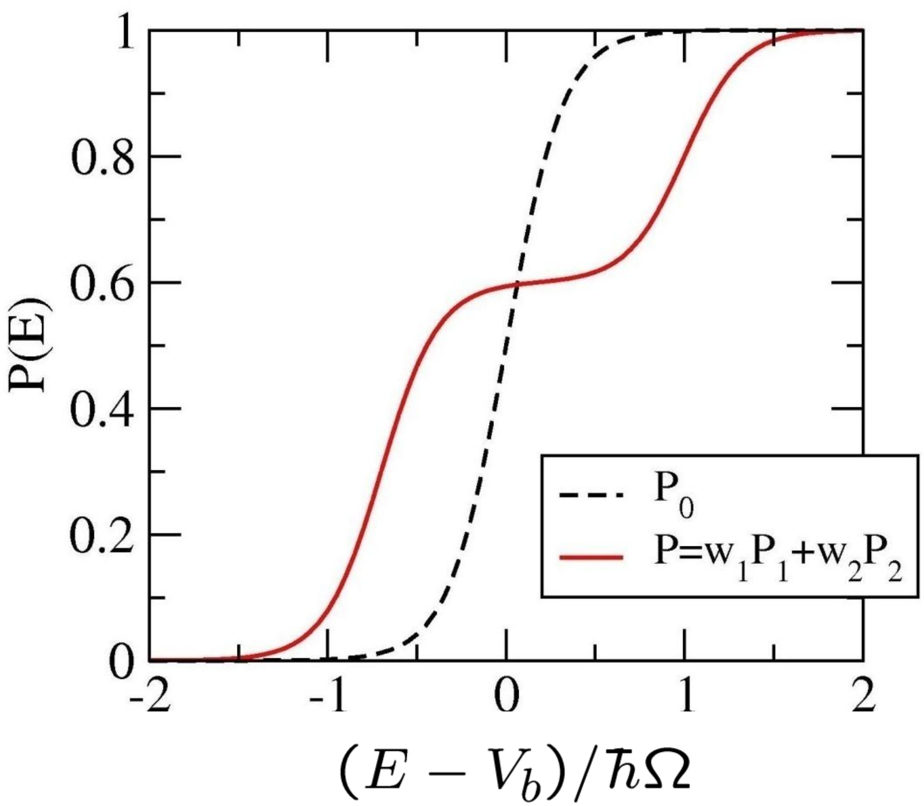
$$P(E) = \frac{|C_1T_1|^2 + |C_2T_2|^2}{|C_1|^2 + |C_2|^2} = |C_1|^2 P_1(E) + |C_2|^2 P_2(E) \equiv w_1 P_1(E) + w_2 P_2(E)$$

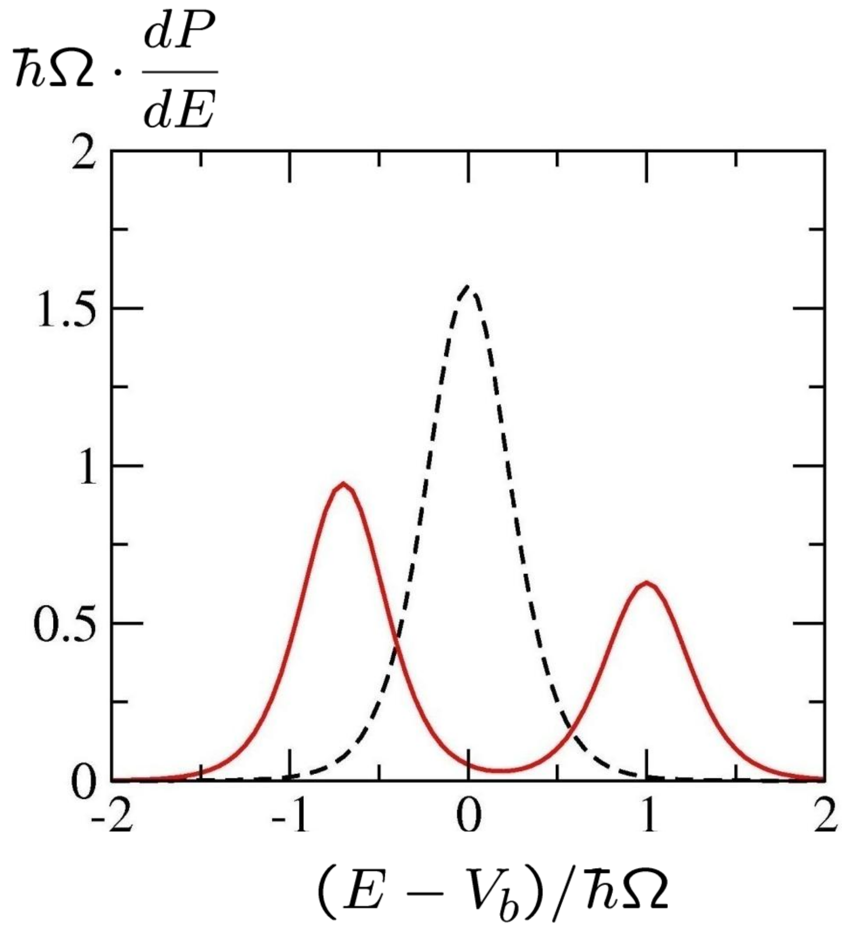
$$P(E) = w_1 P_1(E) + w_2 P_2(E)$$

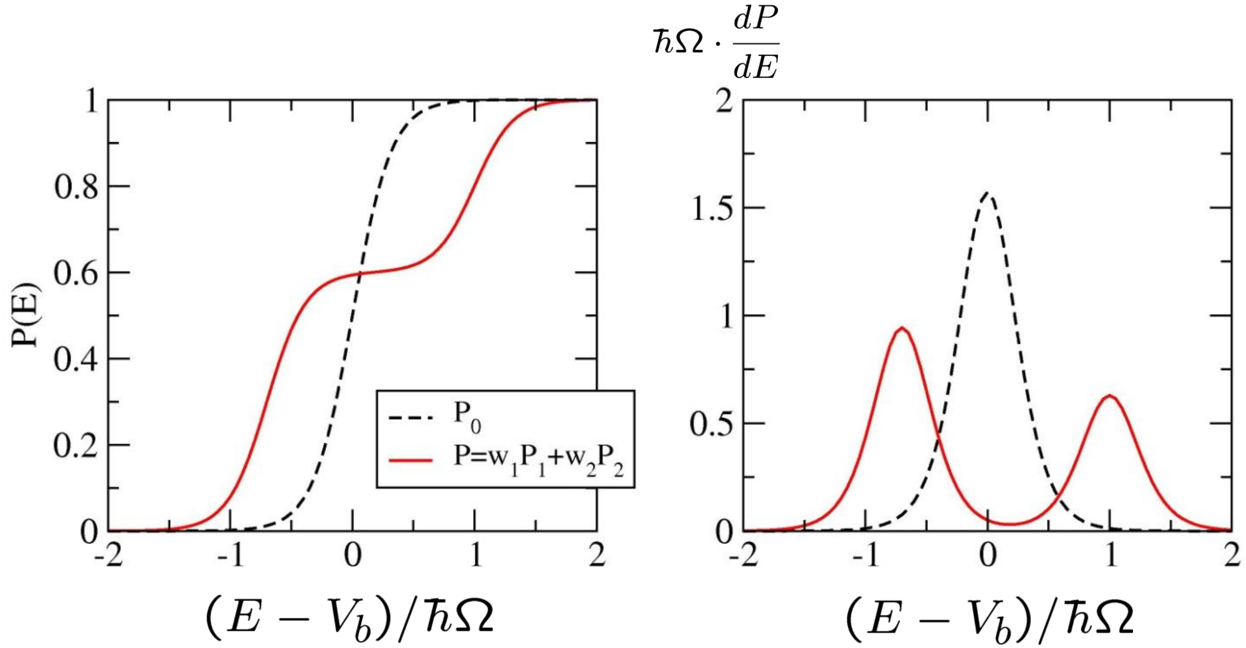
トンネル確率は2つの障壁のトンネル確率の加重平均になる



$$\begin{cases} V_1(x) = V_0(x) + V_s(x) & \Longleftarrow \quad |\uparrow\rangle \\ V_2(x) = V_0(x) - V_s(x) & \Longleftarrow \quad |\downarrow\rangle \end{cases}$$







- トンネル確率は $E < V_b$ で増大、$E > V_b$ で減少
- dP/dE は一山が二山に分かれる → 「障壁が分布する」
- dP/dE のピークの位置は各障壁の高さに対応
- ピークの値は重み因子に比例する

$$
\begin{aligned}
P(E) &= w_1 P_1(E) + w_2 P_2(E) \\
\frac{dP}{dE} &= w_1 \frac{dP_1}{dE} + w_2 \frac{dP_2}{dE}
\end{aligned}
$$

ハミルトニアン（例2）：非対角結合項がある場合

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V_0(x) + \hat{\sigma}_x \cdot F(x) \qquad \hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} [\hat{t} + V_0(x)]\psi_1(x) + F(x)\psi_2(x) = E\psi_1(x) \\ [\hat{t} + V_0(x)]\psi_2(x) + F(x)\psi_1(x) = E\psi_2(x) \end{aligned}}$$

$$\phi_\pm(x) = [\psi_1(x) \pm \psi_2(x)]/\sqrt{2}$$

$$[\hat{t} + V_0(x) \pm F(x)]\phi_\pm(x) = E\phi_\pm(x)$$

反応の初期にスピン・アップの状態にあったとすると

$$\boxed{P(E) = \frac{1}{2}[P(E; V_0 + F) + P(E; V_0 - F)]}$$

ハミルトニアン（例3）: より一般の場合

$$
\begin{aligned}
H &= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V_0(x) - \epsilon\sigma_z + \hat{\sigma}_x \cdot F(x) \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V_0(x) + \begin{pmatrix} -\epsilon & F(x) \\ F(x) & \epsilon \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
U(x)\begin{pmatrix} -\epsilon & F(x) \\ F(x) & \epsilon \end{pmatrix} U^\dagger(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1(x) & 0 \\ 0 & \lambda_2(x) \end{pmatrix}
$$

x dependent

$$
\boxed{P(E) = \sum_i w_i(E)\, P(E; V_0(x) + \lambda_i(x))}
$$

E dependent

K.H., N. Takigawa, A.B. Balantekin, PRC56('97)2104 $w_i(E) \sim \text{constant}$

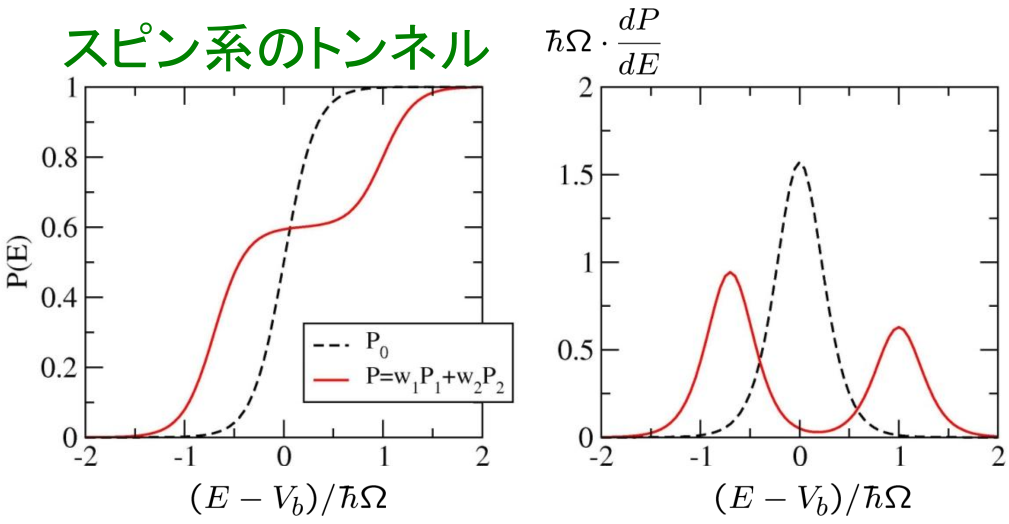
(note) 断熱極限: $\epsilon \to \infty$ ⟹ $w_i(E) = \delta_{i,0}$

Sub-barrier Fusion と障壁分布法

- 低エネルギー核融合反応はトンネル効果で起きる
- 結合チャンネルの効果は多数の障壁の分布として理解できる
- 核融合反応断面積は多数の障壁の平均

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathrm{fus}}(E) &= \int_0^1 d(\cos\theta)\sigma_{\mathrm{fus}}(E;\theta) \\ &= \frac{\pi}{k^2}\sum_l (2l+1)\left[\int_0^1 d(\cos\theta)P_l(E;\theta)\right]\end{aligned}$$

スピン系のトンネル



障壁の分布の様子は透過確率の微分をとるとはっきりと目に見える

⟹ 核融合反応断面積を用いて同様のことはできないか？

1つの考慮すべき点：実験で測られるのは核融合断面積であって透過確率ではない。

$$P_{l=0}(E) \simeq \frac{1}{\pi R_b^2} \cdot \frac{d(E\sigma_{\rm fus})}{dE}$$

$$\boxed{D_{\rm fus}(E) \equiv \frac{d^2(E\sigma_{\rm fus})}{dE^2} \simeq \pi R_b^2 \frac{dP_{l=0}}{dE}}$$

（核融合障壁分布）

N. Rowley, G.R. Satchler, P.H. Stelson, PLB254('91)25

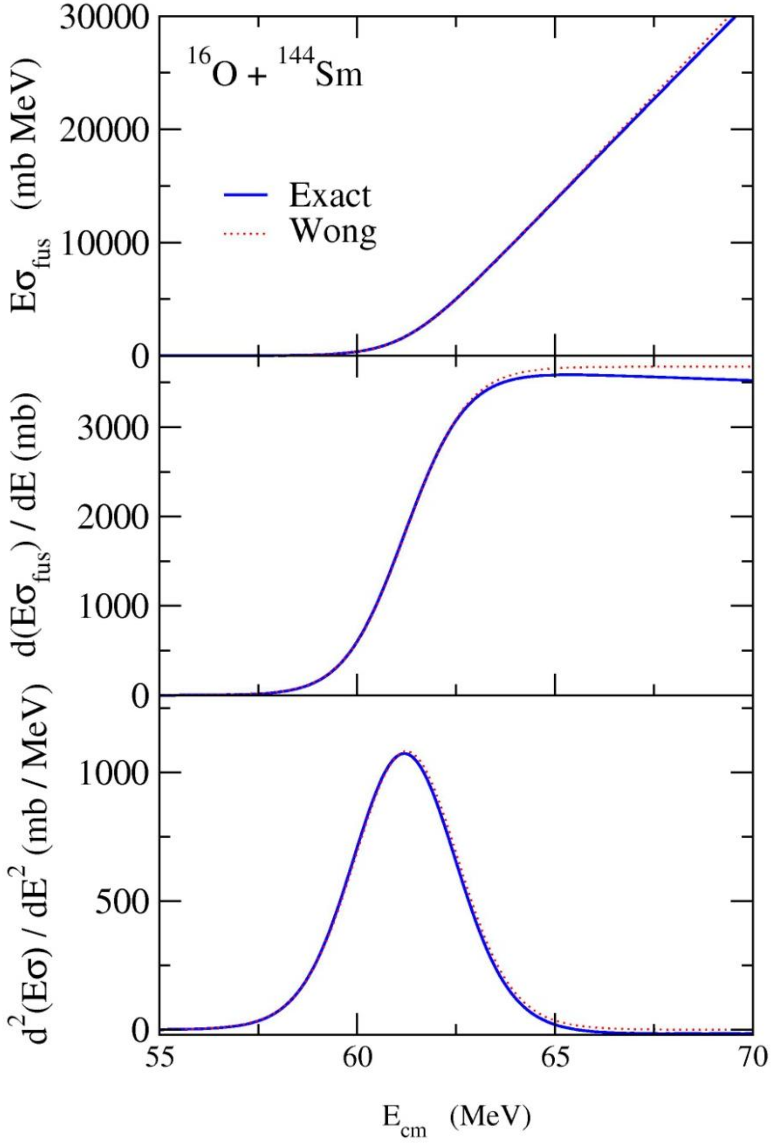
(note) 古典的な核融合反応断面積

$$\sigma_{\rm fus}^{cl}(E) = \pi R_b^2 \left(1 - \frac{V_b}{E}\right) \theta(E - V_b)$$

$$\frac{d}{dE}[E\sigma_{\rm fus}^{cl}(E)] = \pi R_b^2\, \theta(E - V_b) = \pi R_b^2\, P_{cl}(E)$$

$$\frac{d^2}{dE^2}[E\sigma_{\rm fus}^{cl}(E)] = \pi R_b^2\, \delta(E - V_b)$$

Fusion Test Function



Classical fusion cross section:

$$\sigma_{\text{fus}}^{cl}(E) = \pi R_b^2\left(1-\frac{V_b}{E}\right)\theta(E-V_b)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{d}{dE}[E\sigma_{\text{fus}}^{cl}(E)] &= \pi R_b^2\,\theta(E-V_b)\\ &= \pi R_b^2\,P_{cl}(E)\\ \frac{d^2}{dE^2}[E\sigma_{\text{fus}}^{cl}(E)] &= \pi R_b^2\,\delta(E-V_b)\end{aligned}}$$

Tunneling effect

$\longrightarrow$ smears the delta function

Fusion test function:

- Symmetric around $E=V_b$
- Centered on $E=V_b$
- Its integral over E is πR_b^2
- Has a relatively narrow width

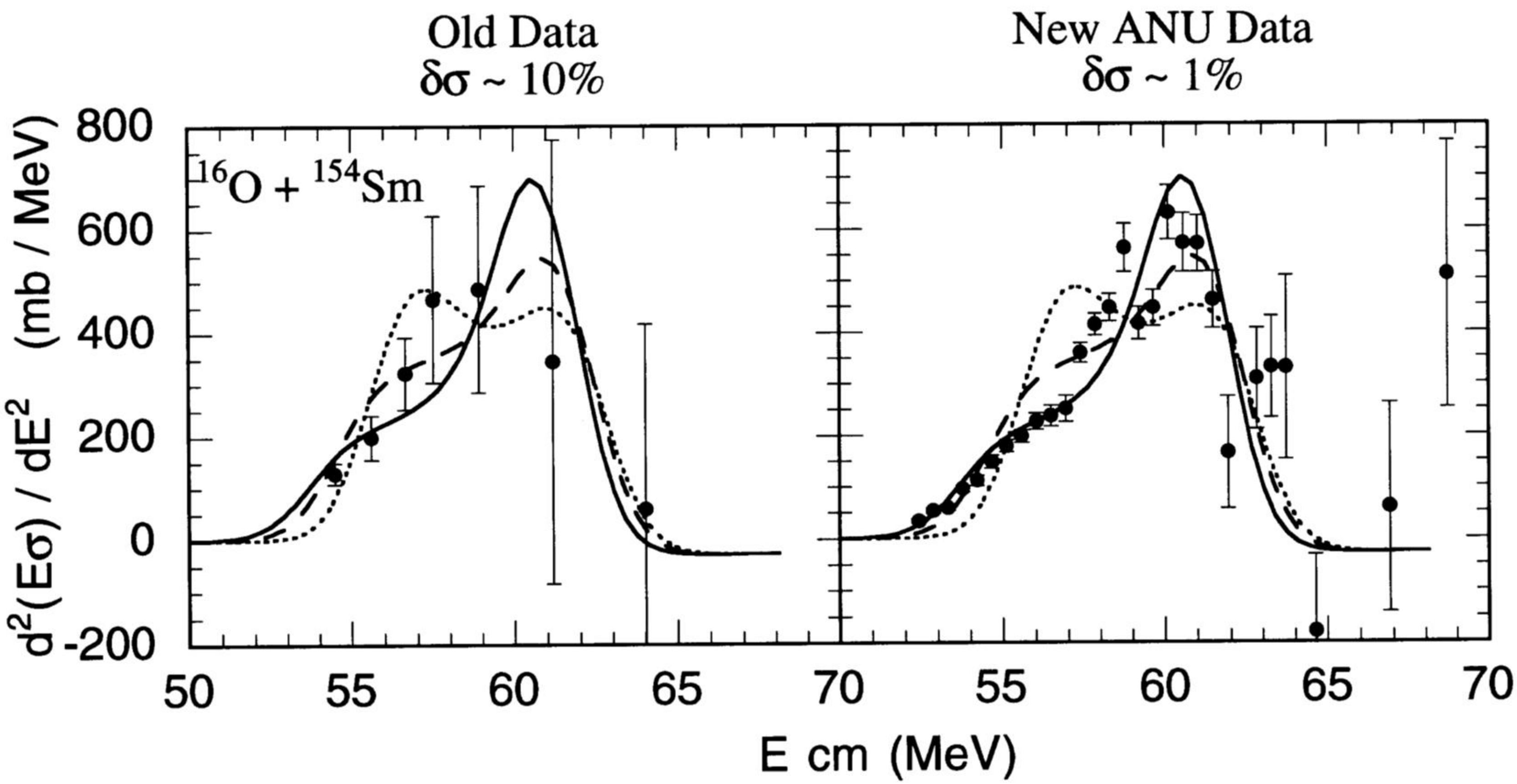
$(\sim 0.56\hbar\Omega)$

障壁分布測定

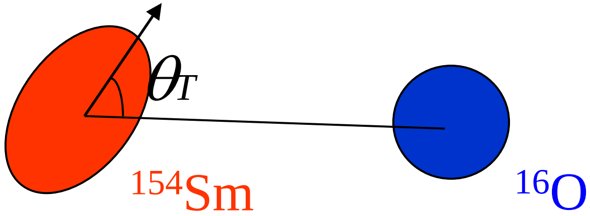
核融合障壁分布　$D_{\rm fus}(E) = \dfrac{d^2(E\sigma)}{dE^2}$

２階微分をとるために非常に高精度の実験データが必要

（９０年代初頭）

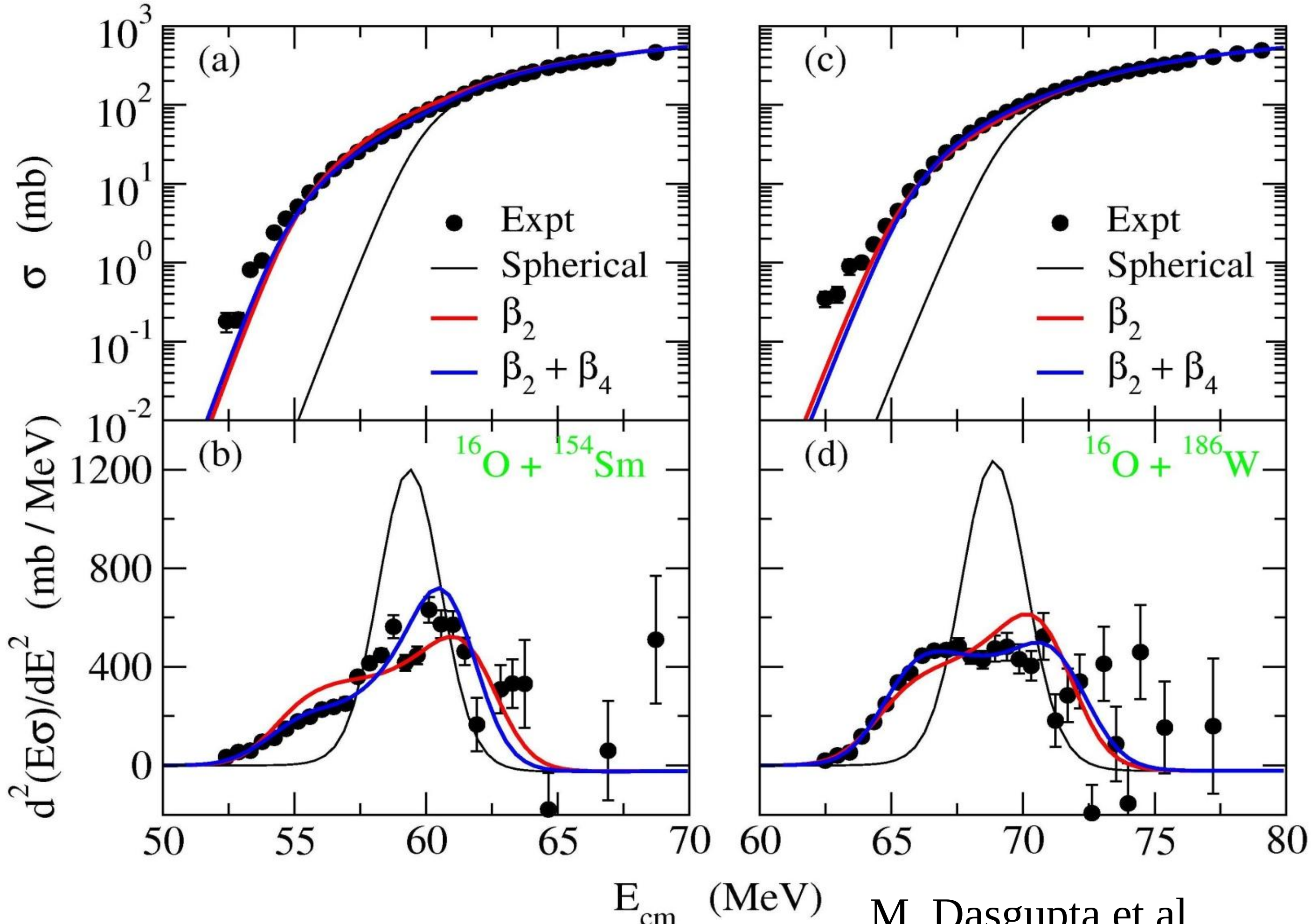


Experimental Barrier Distribution



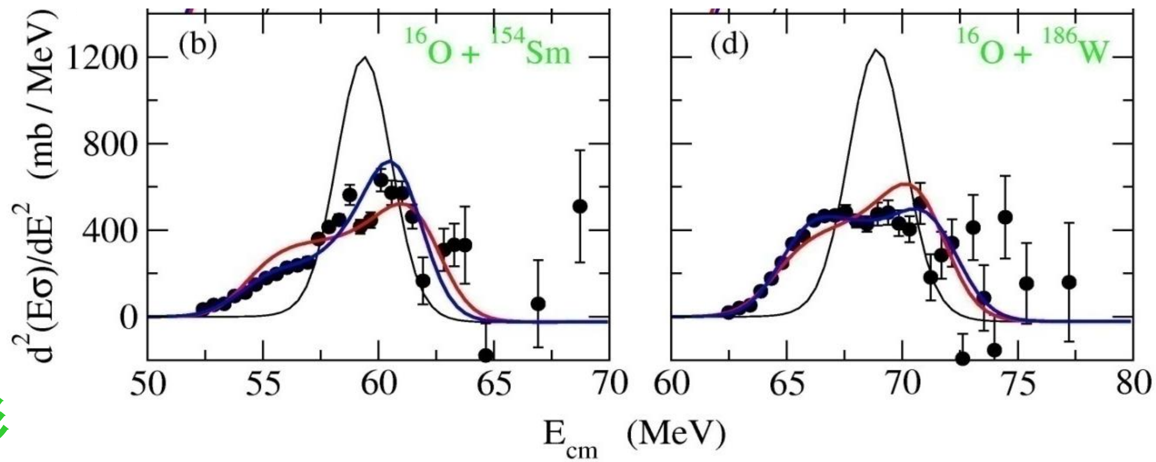
Requires high precision data

$$\sigma_{\text{fus}}(E) = \int_0^1 d(\cos\theta_T)\sigma_{\text{fus}}(E;\theta_T)$$



M. Dasgupta et al.,
Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. 48('98)401

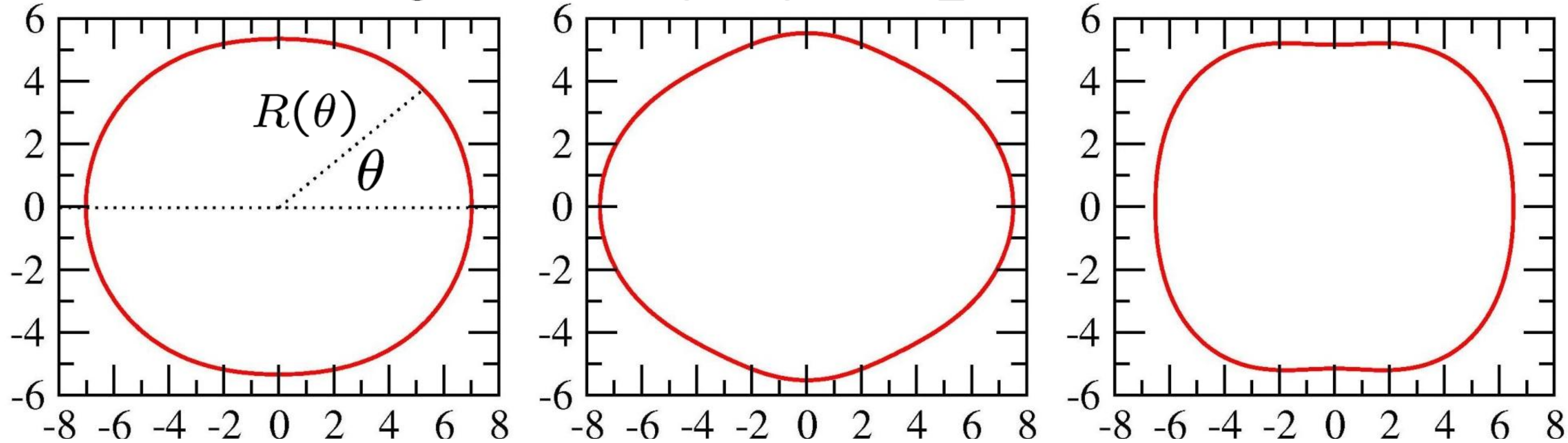
障壁分布を通じて原子核の形を視る



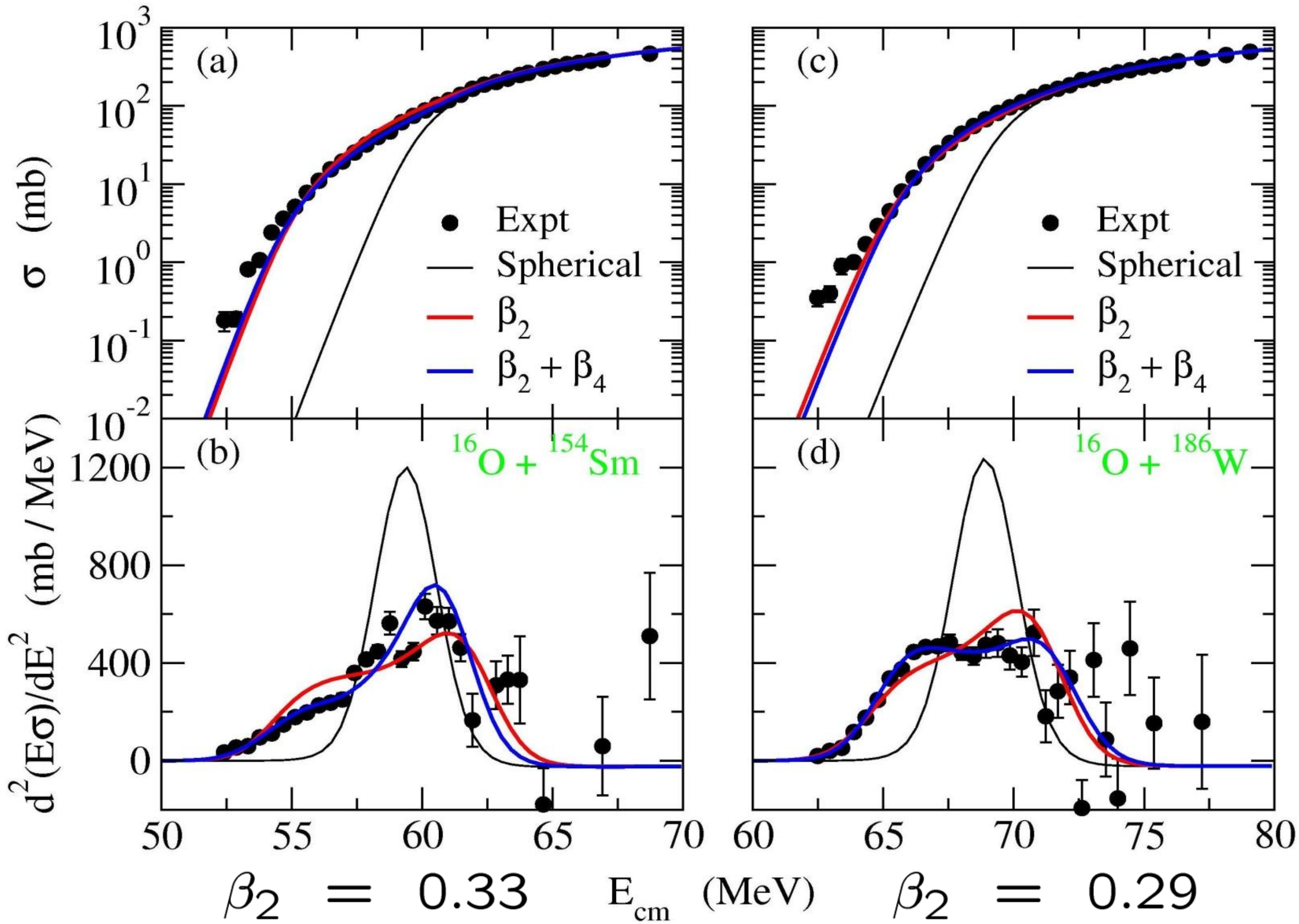
原子核の形

$$R(\theta) = R_0(1 + \beta_2 Y_{20}(\theta) + \beta_4 Y_{40}(\theta) + \cdots)$$

$$R_0 = 5.9 \text{ (fm)}, \quad \beta_2 = 0.3$$



$\beta_4 = 0$ $\beta_4 = 0.1$ $\beta_4 = -0.1$



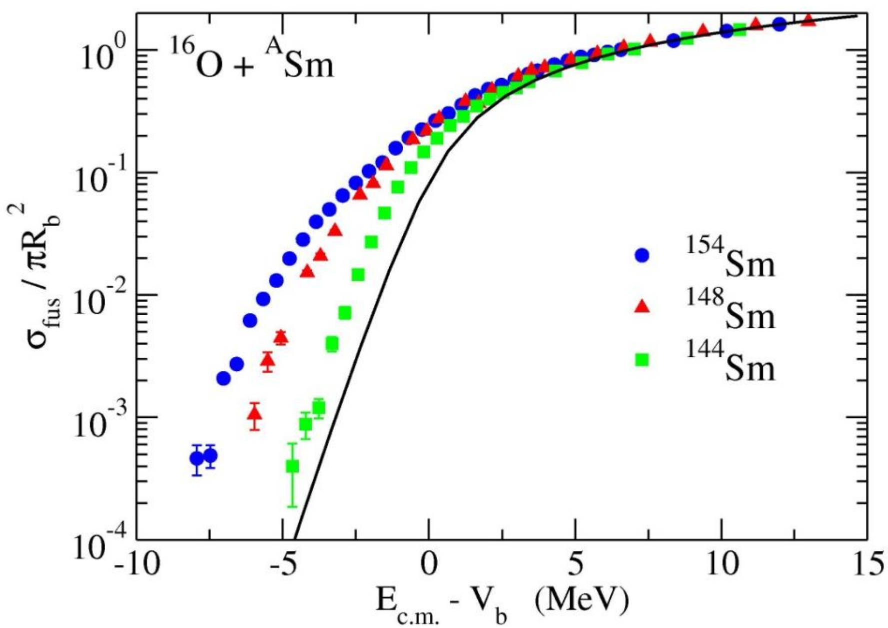
$\beta_2 = 0.33$ $\beta_2 = 0.29$

$\beta_4 = +0.05$ $\beta_4 = -0.03$

障壁分布をとることによって、β_4による違いがかなりはっきりと目に見える！

→ 原子核に対する量子トンネル顕微鏡としての核融合反応

障壁分布法の意義



核融合反応断面積

非常に強い指数関数的エネルギー依存性

核構造の詳細による違いが見えずらい

断面積を別の方法でプロットする: 核融合障壁分布

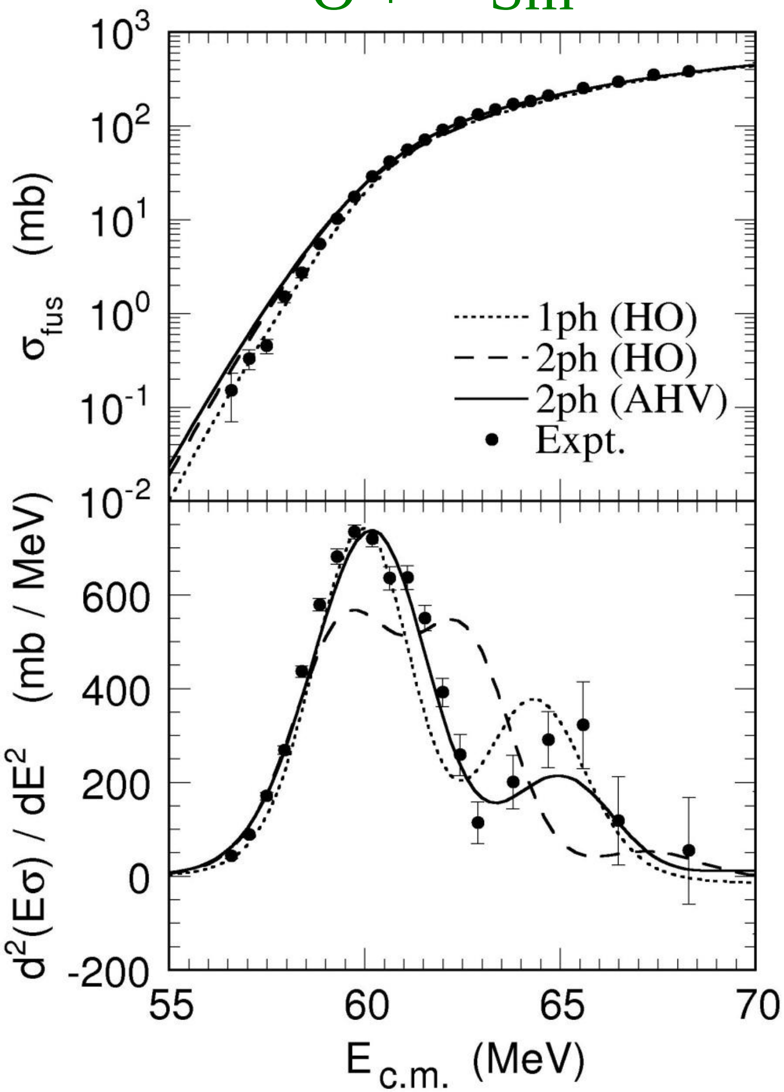
$$\boxed{D_{\mathrm{fus}}(E) = \frac{d^2(E\sigma)}{dE^2}}$$

N. Rowley, G.R. Satchler, P.H. Stelson, PLB254('91)25

→ 核構造の詳細に敏感な関数

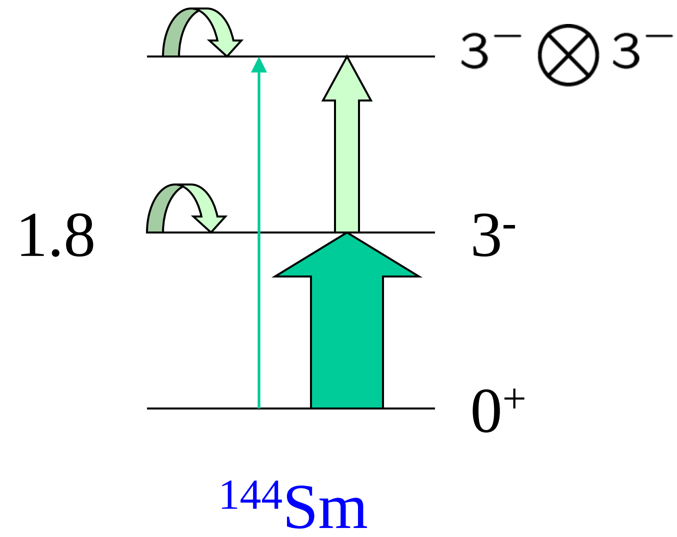
球形振動核の例

$^{16}O + ^{144}Sm$



K.Hagino, N. Takigawa, and S. Kuyucak, PRL79('97)2943

Octupole 振動の非調和性



Quadrupole moment:

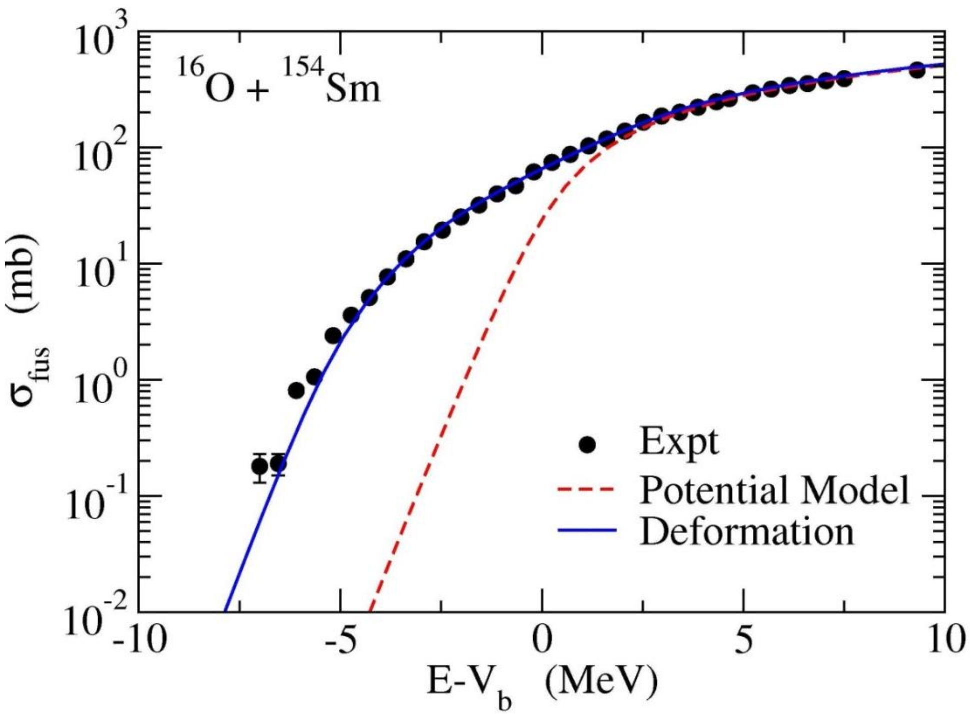
$$Q(3^-) = -0.70 \pm 0.02\mathrm{b}$$

演習問題 7

演習問題6と同じ設定で、核融合障壁分布を計算し、図にプロットせよ。

実際には、2階微分を差分に置き換える。
実験データとの比較をするためには、$\Delta E_{\mathrm{cm}} = 2$ MeV を使えばよい。

不安定核を用いた核融合反応

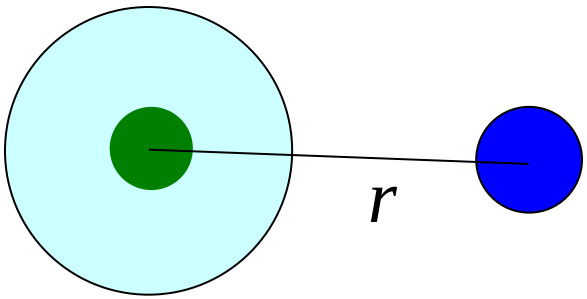


安定核の核融合反応では、原子核間相対運動と散乱核の内部自由度(内部励起)が結合することで、核融合反応断面積が増大(トンネル領域)

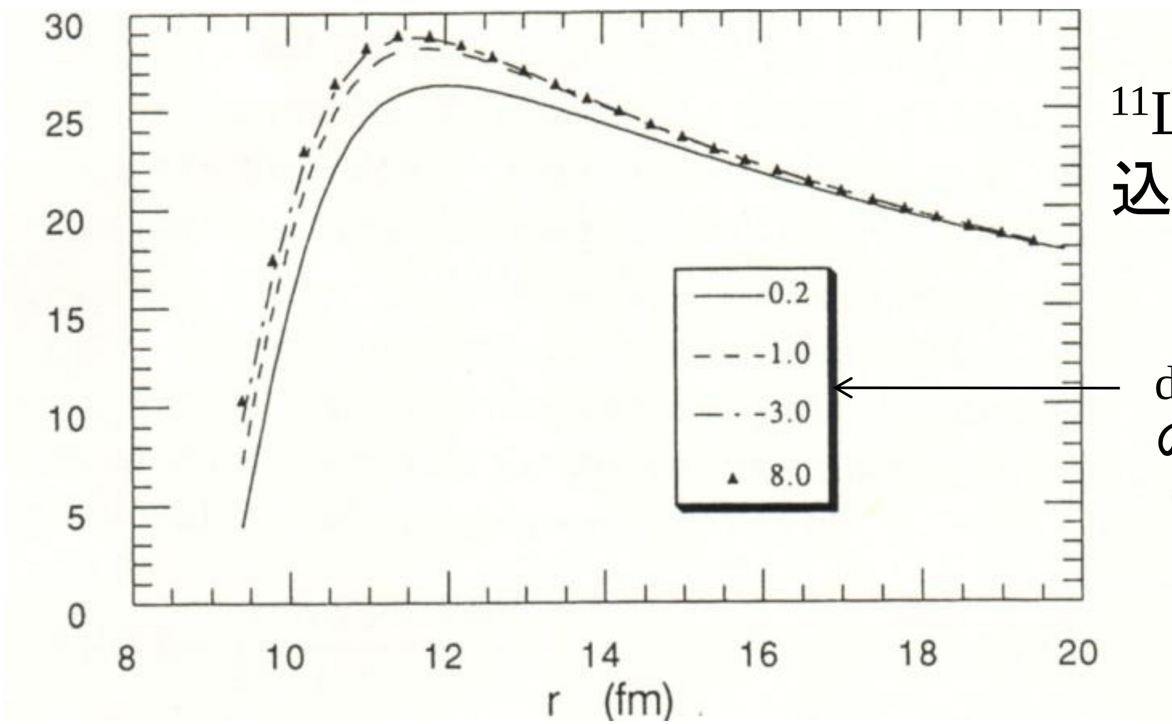
不安定核(弱束縛核)を用いるとどうなるか?
核融合反応断面積は増大? 変化なし? 減少?

2つの効果

1. ハロー構造による重イオン間ポテンシャルの低下 ➡ 核融合反応断面積の増大



ハロー → 広がった密度分布
→ 遠方から核力（引力）がはたらく



$^{11}Li+^{208}Pb$ に対する2重畳み込みポテンシャル

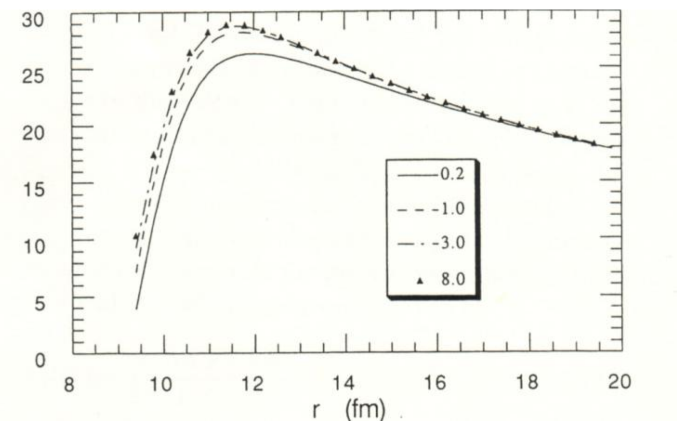
dineutron クラスターの分離エネルギー

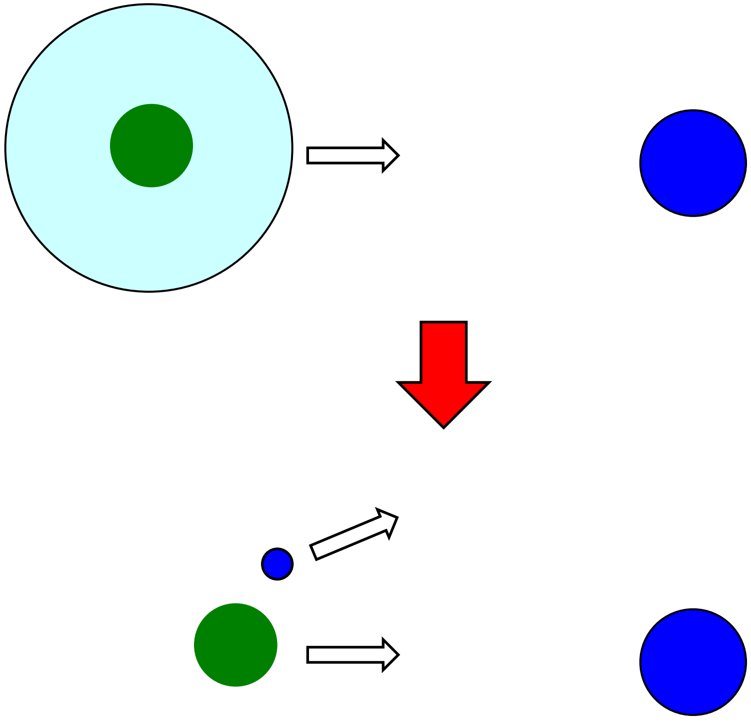
N. Takigawa and H. Sagawa, PLB265('91)23

2つの効果

1. ハロー構造による重イオン間ポテンシャルの低下
2. 分解（breakup）の効果

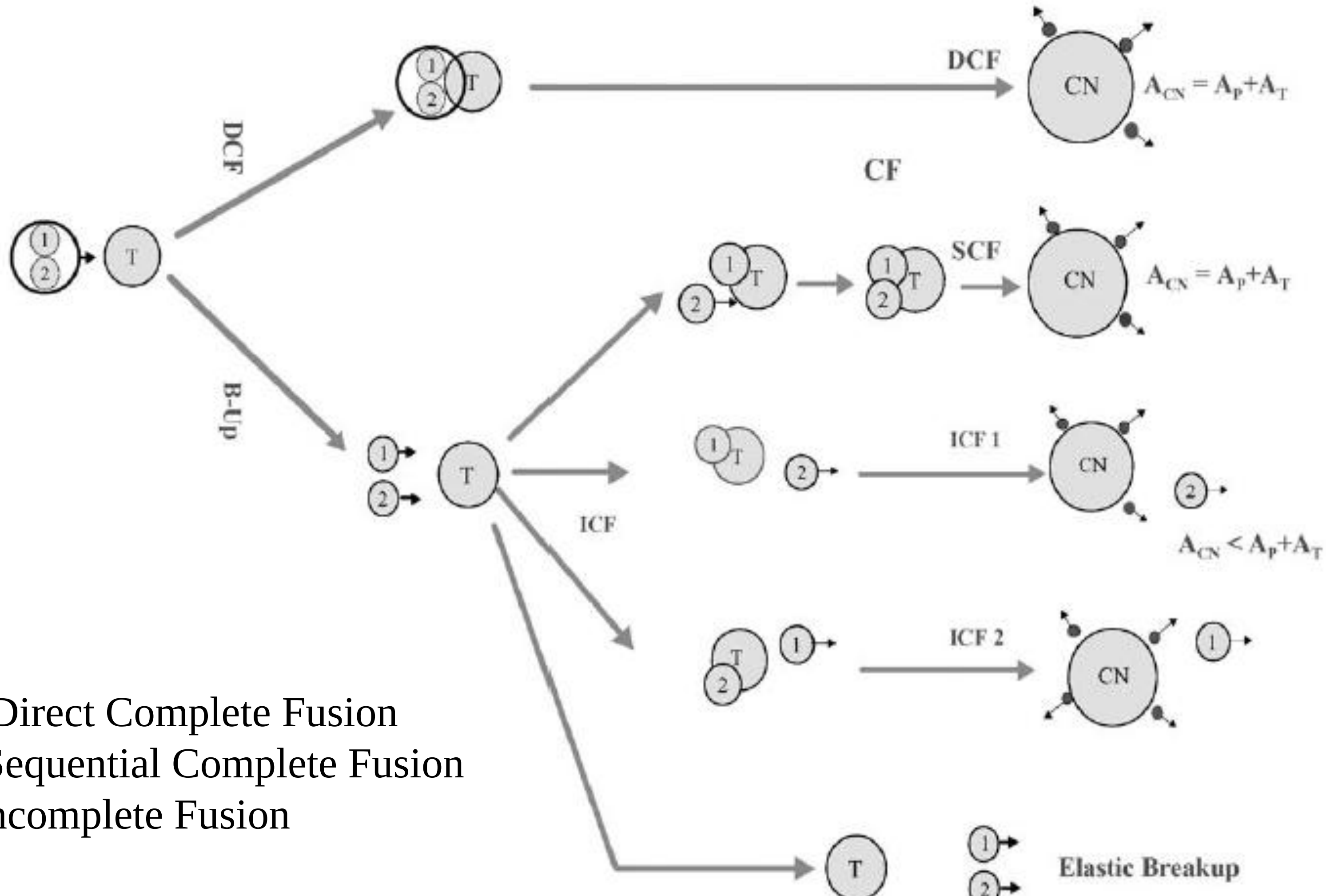
これはあまり自明ではない





- 分解すると障壁の低下がなくなるので核融合反応断面積は減少?
- 安定核と同様、結合チャンネル効果により断面積は増大?
- もっと複雑な分解の動的な効果?

複雑な反応プロセス

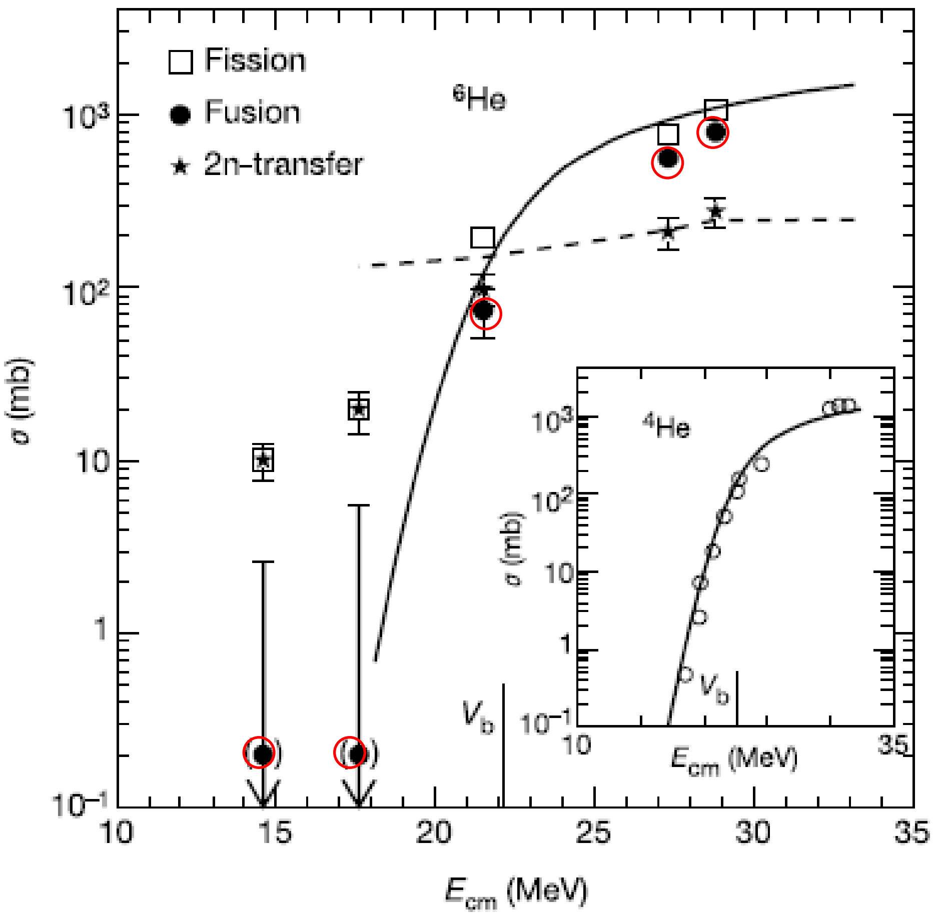


DCF=Direct Complete Fusion
SCF=Sequential Complete Fusion
ICF=Incomplete Fusion

L.F. Canto, P.R.S. Gomes, R. Donangelo, and M.S. Hussein, Phys. Rep. 424('06)1

実際の実験データ

^{6}He + ^{238}U



R. Raabe et al., Nature 431 (‘04)823

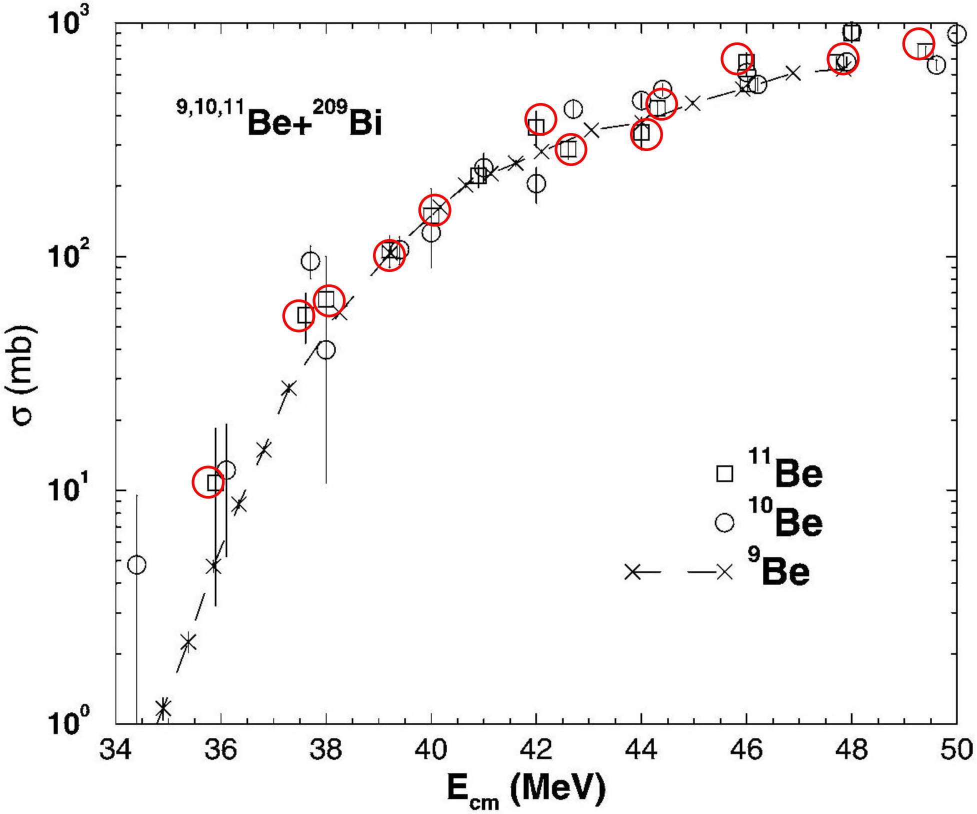
- 核融合反応断面積は、ポテンシャル模型の予測と矛盾していない（ように見える）

ポテンシャルの低下による
増幅と分解の効果による減少
が打ち消しあい?

- 大きな2中性子移行反応の断面積

実際の実験データ

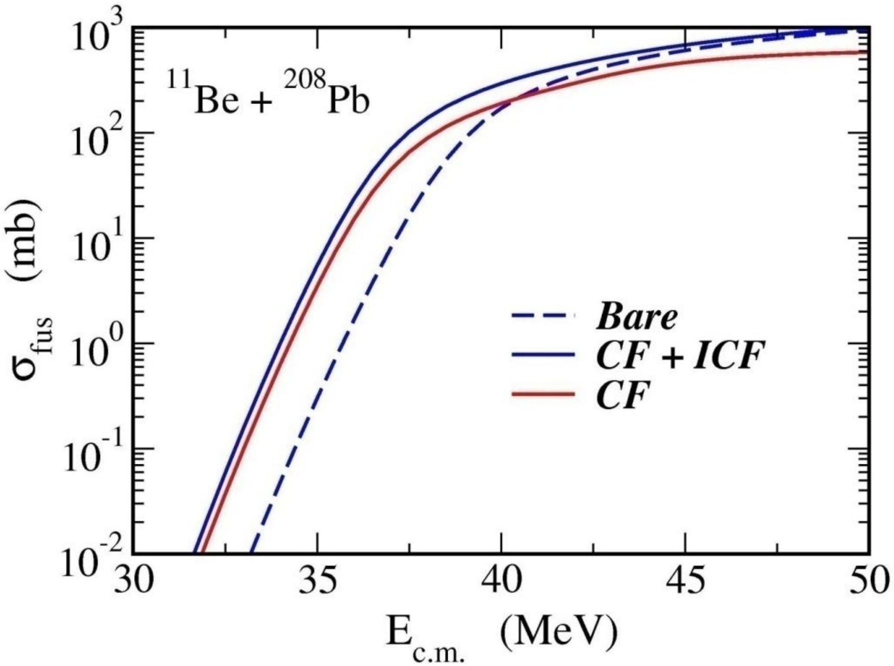
^{9,10,11}Be + 209Bi



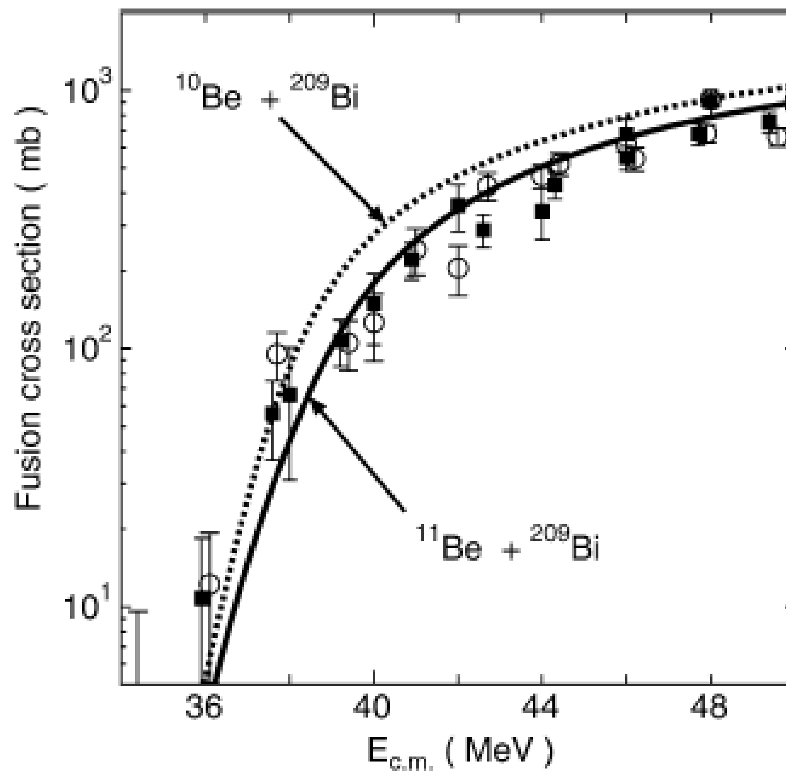
^{11}Be は特に変わった振る舞いをしない

C. Signorini et al., NPA735 ('04) 329

理論計算では、連続状態の効果と移行反応の効果をきちんと取り入れる必要がある。（中々大変。）



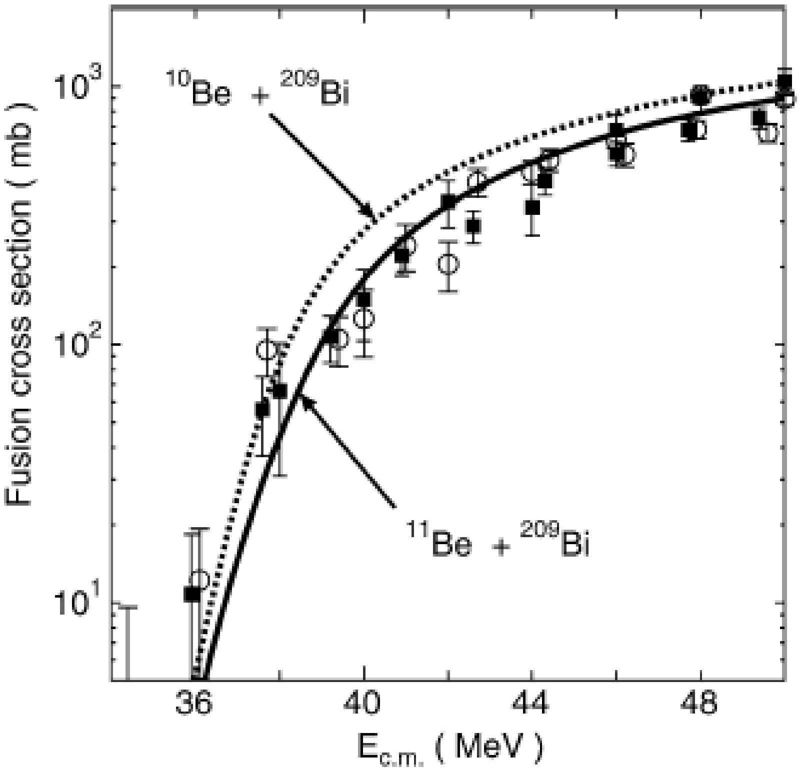
CDCC的な計算
ただし連続状態間の結合なし

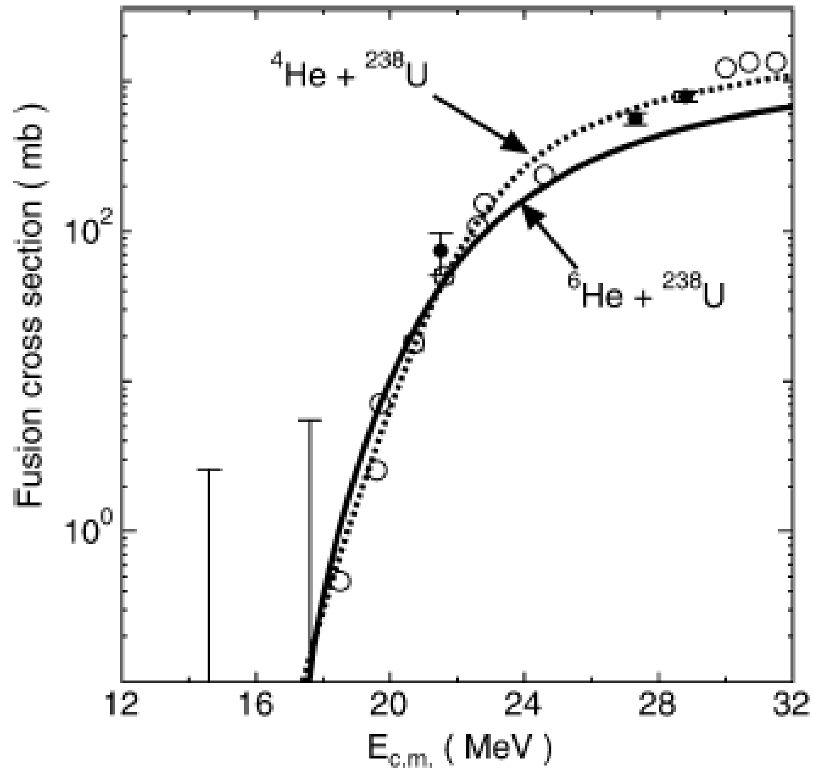


時間依存アプローチ
分解、移行の効果は
自動的に入る

K. Hagino, A. Vitturi, C.H. Dasso, and S.M. Lenzi, Phys. Rev. C61 (’00) 037602

M. Ito, K. Yabana, T. Nakatsukasa, and M. Ueda, PLB637(‘06)53





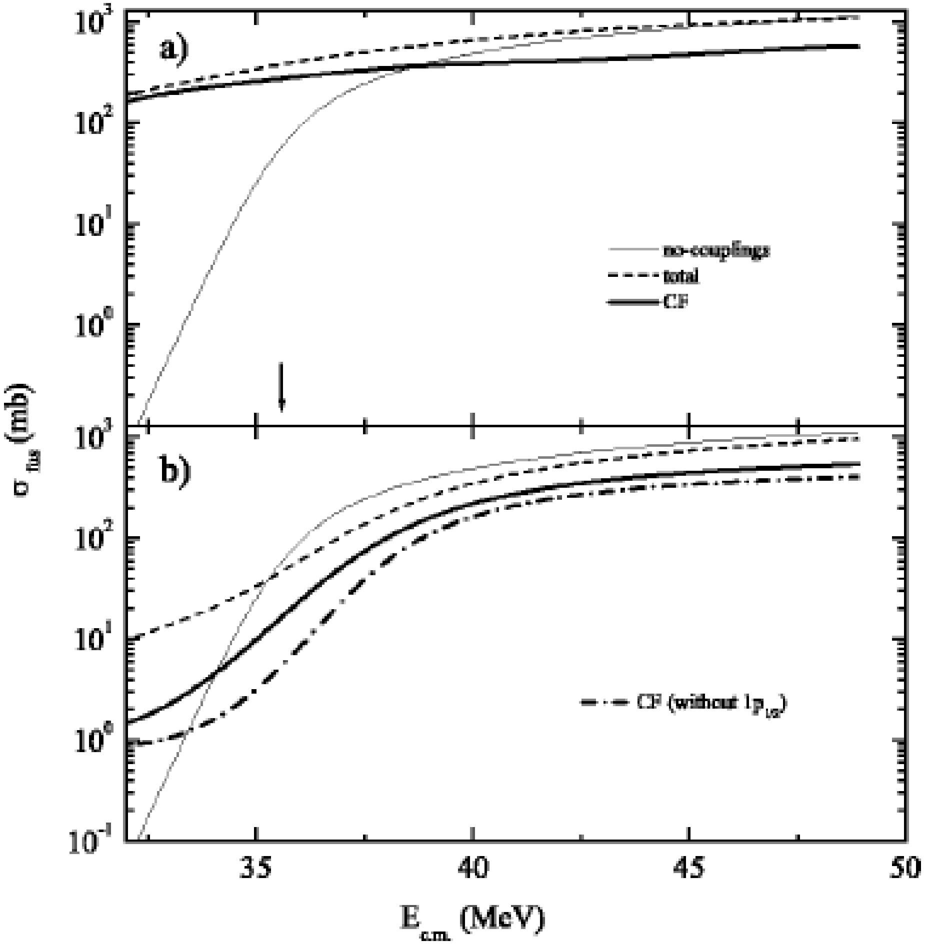
時間依存アプローチ
分解、移行の効果は
自動的に入る

（dineutron クラスター模型）

M. Ito, K. Yabana, T. Nakatsukasa, and M. Ueda, PLB637(‘06)53

（参考）連続状態間結合の効果

$^{11}Be + ^{208}Pb$



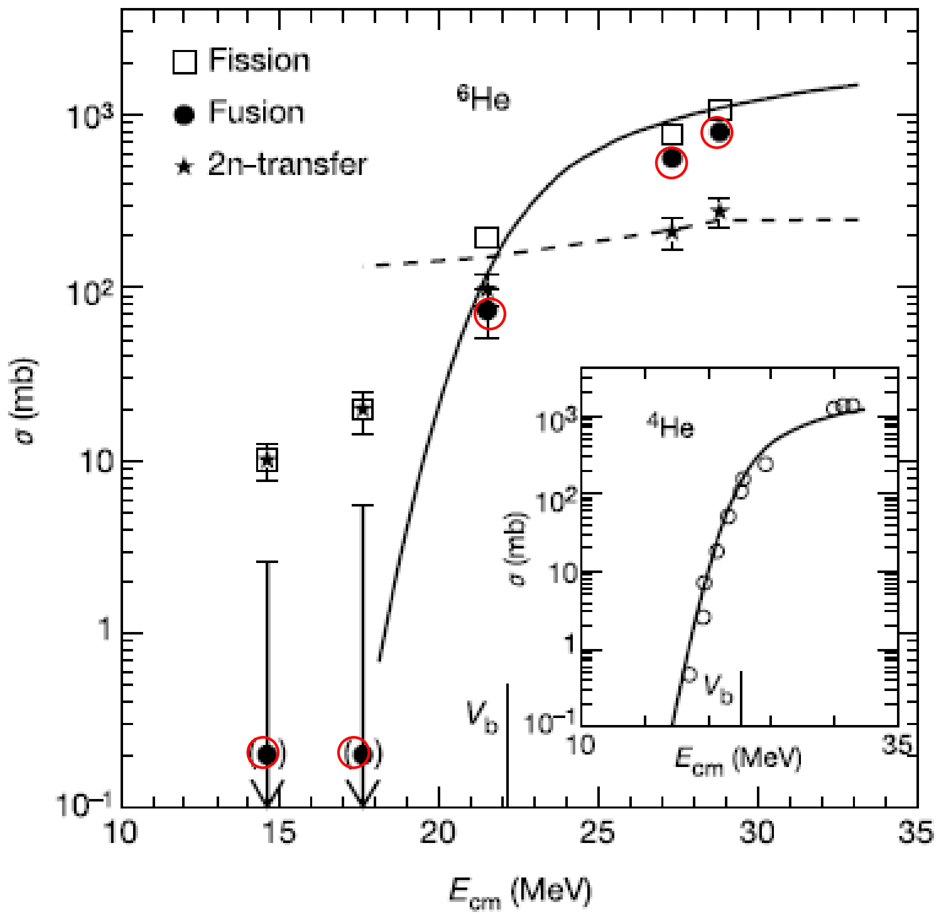
連続状態間結合なし

連続状態間結合あり

A. Diaz-Torres and I.J. Thompson, PRC65('02)024606

（補足）

^{6}He + ^{238}U



R. Raabe et al., Nature 431 ('04)823

➢核融合反応断面積は、ポテンシャル模型の予測と矛盾していない（ように見える）

⇩

ポテンシャルの低下による
増幅と分解の効果による減少
が打ち消しあい?

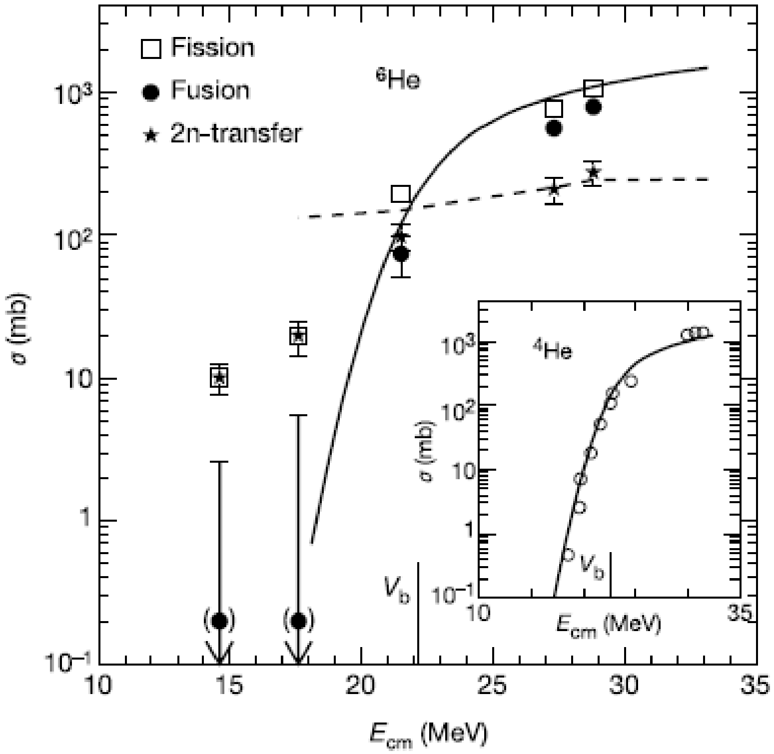
⬆

もっとエネルギーが低くなると
どうなるか?
（まだ解決していない）

cf. P.R.S. Gomes, L.F. Canto, J. Lubian, and M.S. Hussein, arXiv: 1009.0573

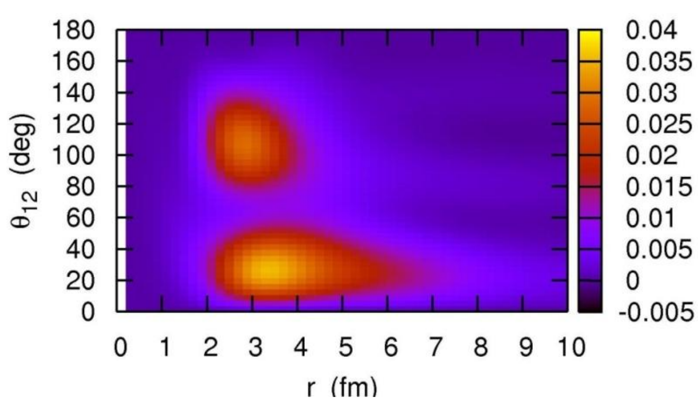
対移行反応

^{6}He + ^{238}U



大きな 2n 移行断面積

中性子過剰核の反応では
（分解に加えて）
核子移行がキーワードの一つ



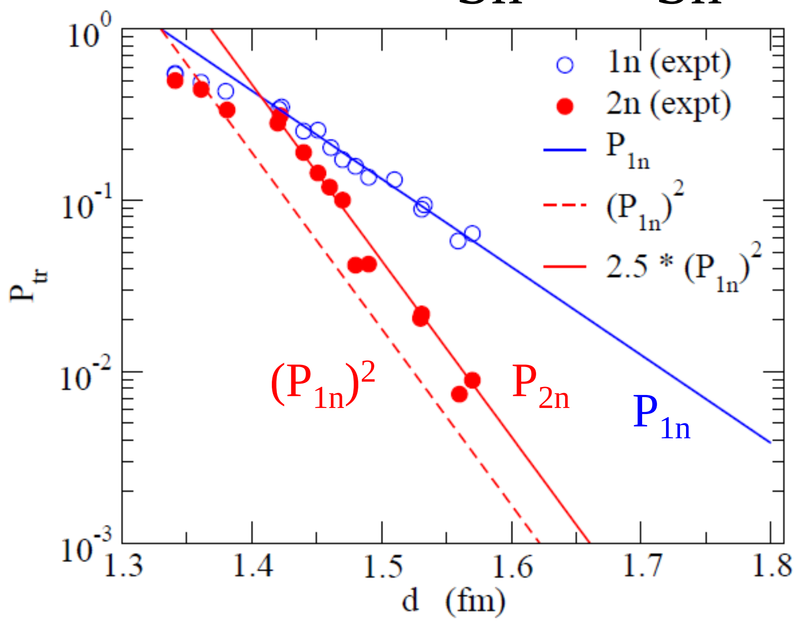
特に双中性子相関との関係で
対移行反応は今後ますます
重要な研究課題

対相関と対移行反応

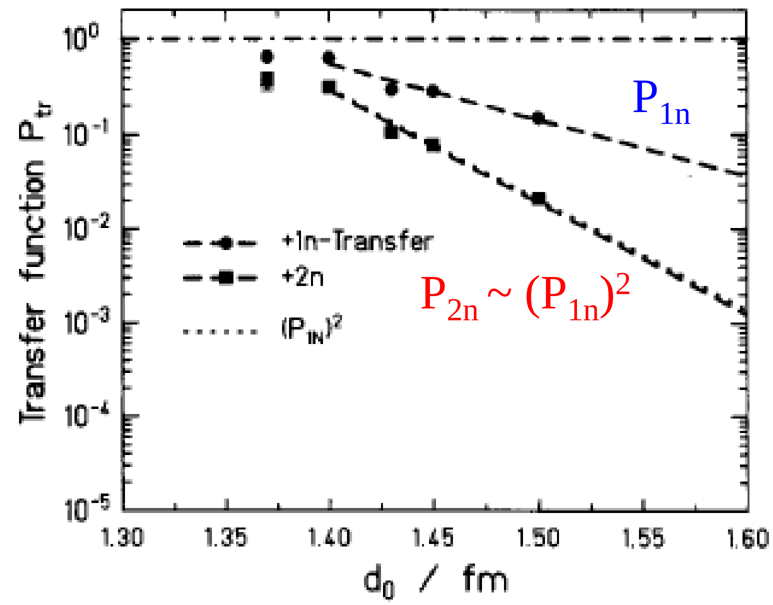
対移行反応の確率は対相関を強く反映する

対移行の確率：　$P_{\text{tr}} \sim \dfrac{d\sigma_{\text{tr}}}{d\sigma_R}$

^{112}Sn + ^{120}Sn



^{144}Sm + ^{208}Pb

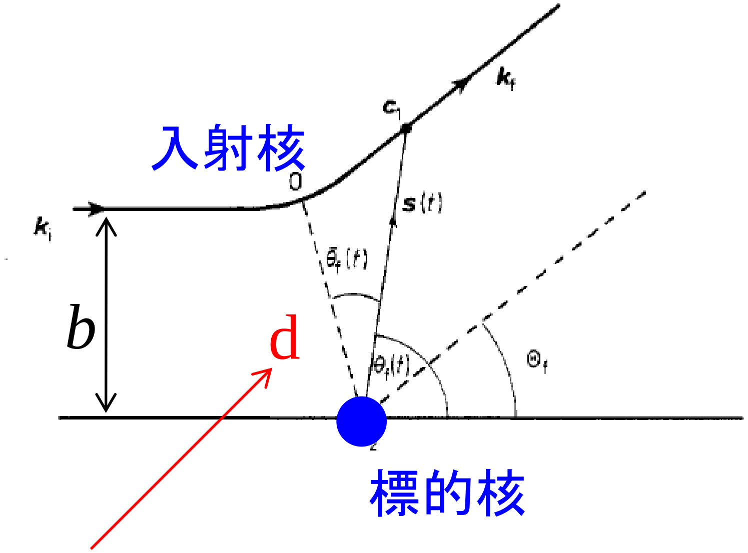


W. von Oertzen et al., Z. Phys. A326(‘87)463　　J. Speer et al., PLB259(‘91)422

$R_{\text{min}} = d\,(A_P^{1/3} + A_T^{1/3})$　はラザフォード軌道の最近接距離

（補足）ラザフォード軌道

＊高田健次郎先生
「インターネットセミナー」
2-5-A章が分かりやすい



クーロン力

$$V_c(r) = \frac{Z_P Z_T e^2}{r}$$

による古典的な軌道

最近接距離 (the distance of closest approach)

$$d = \frac{Z_P Z_T e^2}{2E}\left[1 + \sqrt{1 + \cot^2\frac{\theta}{2}}\right]$$

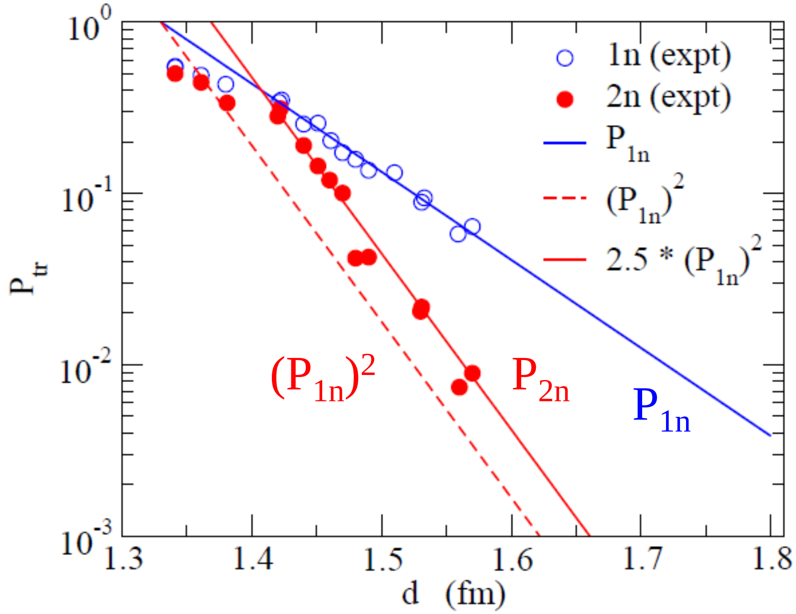
θ は散乱角

最近接距離は入射エネルギー E と散乱角 θ の関数

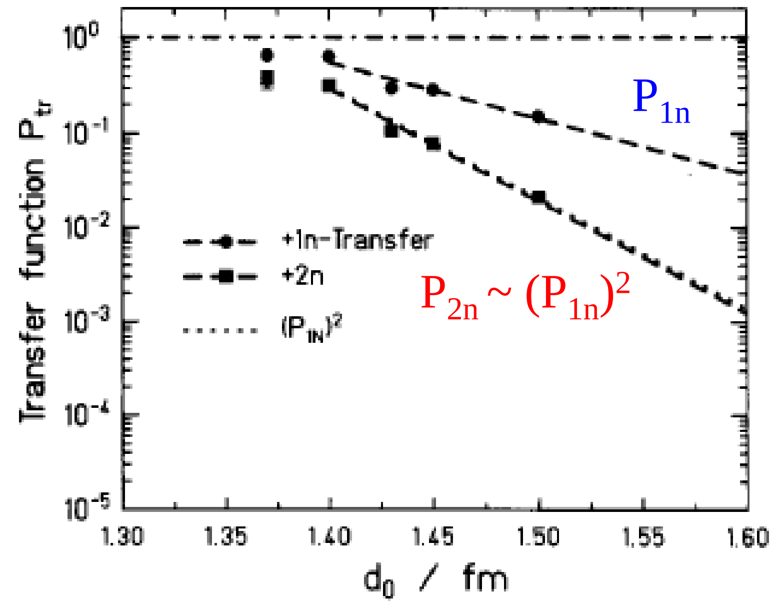
対相関と対移行反応

対移行反応の確率は対相関を強く反映する

$^{112}Sn + ^{120}Sn$



$^{144}Sm + ^{208}Pb$



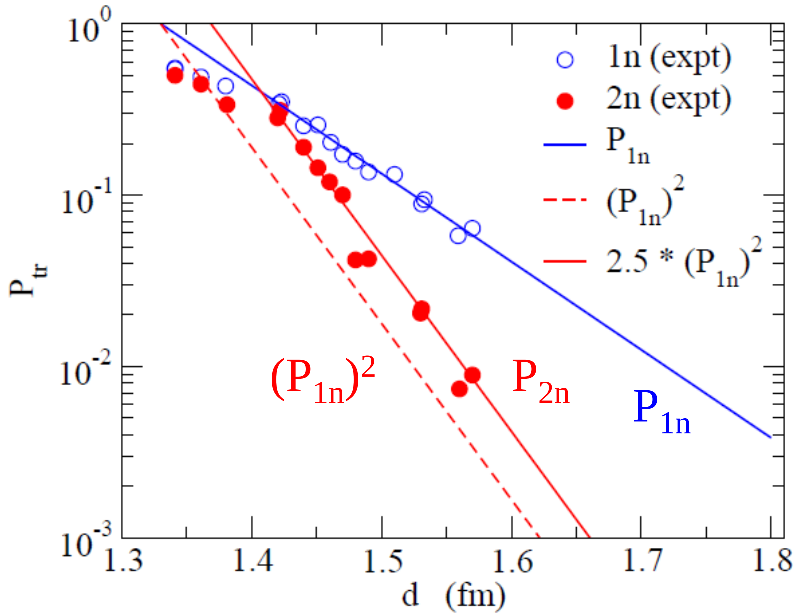
- $^{112}Sn + ^{120}Sn$ 反応では、単純な $(P_{1n})^2$ に比べて2中性子移行確率が増大
- 対相関が働かない(セミ)魔法数の原子核は2中性子移行確率の増大は見られない

2中性子移行確率は対相関に敏感

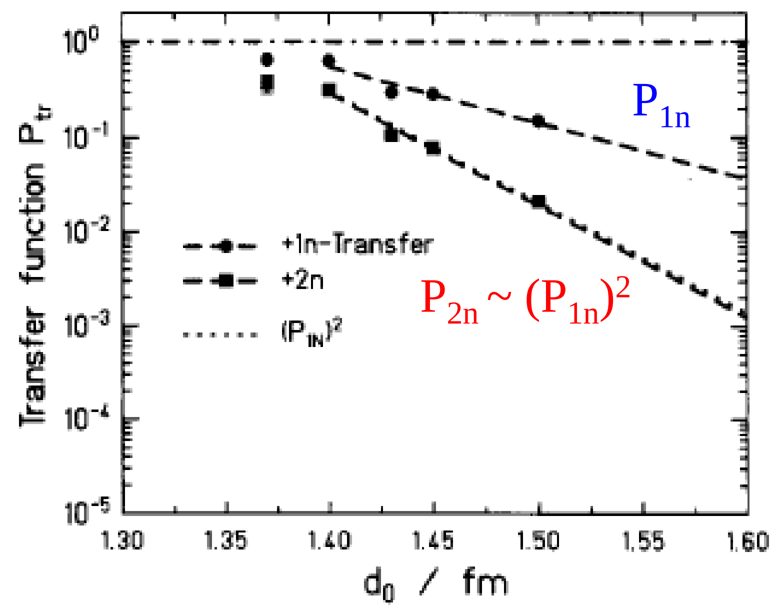
対相関と対移行反応

対移行反応の確率は対相関を強く反映する

$^{112}Sn + ^{120}Sn$



$^{144}Sm + ^{208}Pb$



（注）ペアリングの強い系でも $1n$ 移行の方が $2n$ 移行に比べて
とても多い

^{62}Ni + ^{206}Pb 多中性子移行反応

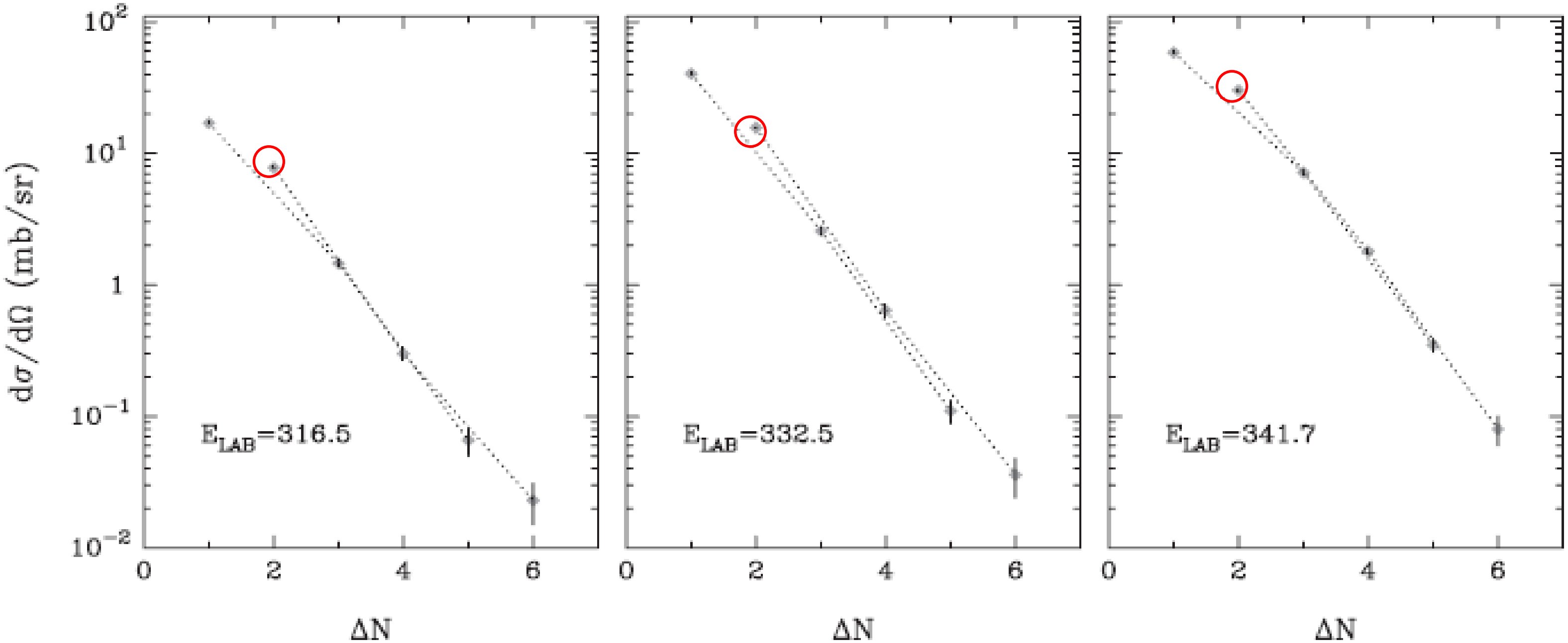


Figure 38. Results for the one- to six-neutron transfers from the reaction ^{62}Ni + ^{206}Pb at different energies covering overlap parameters up to d_0 = 1.4 fm. The small enhancement of the two-neutron transfer can be seen. The deviation of the higher-order transfers from the exponential fall-off defined by the 1n transfer defines here the enhancement factor EF (see also figures 23 and 46).

W. von Oertzen and A. Vitturi,
Rep. Prog. Phys. 64('01)1247

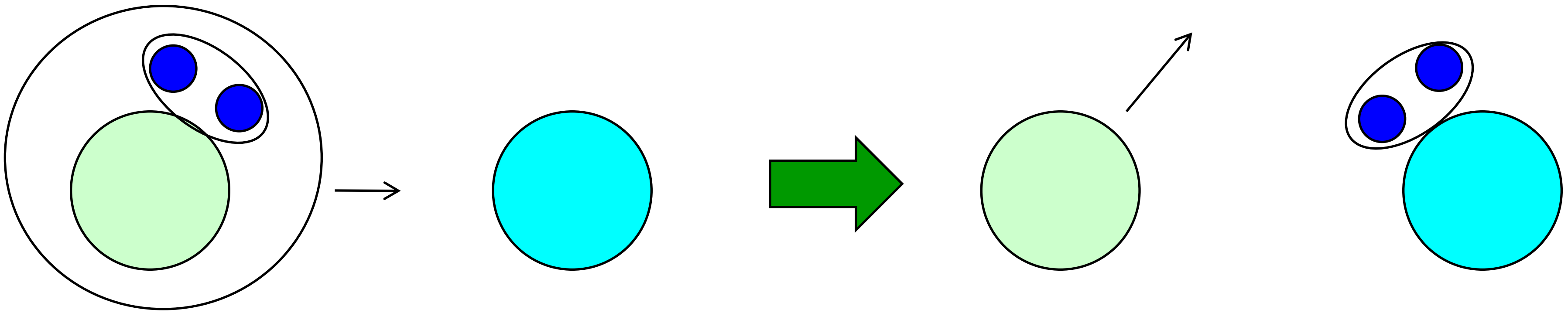
2n 移行確率の増大

⟺ di-neutron 相関との関係は?

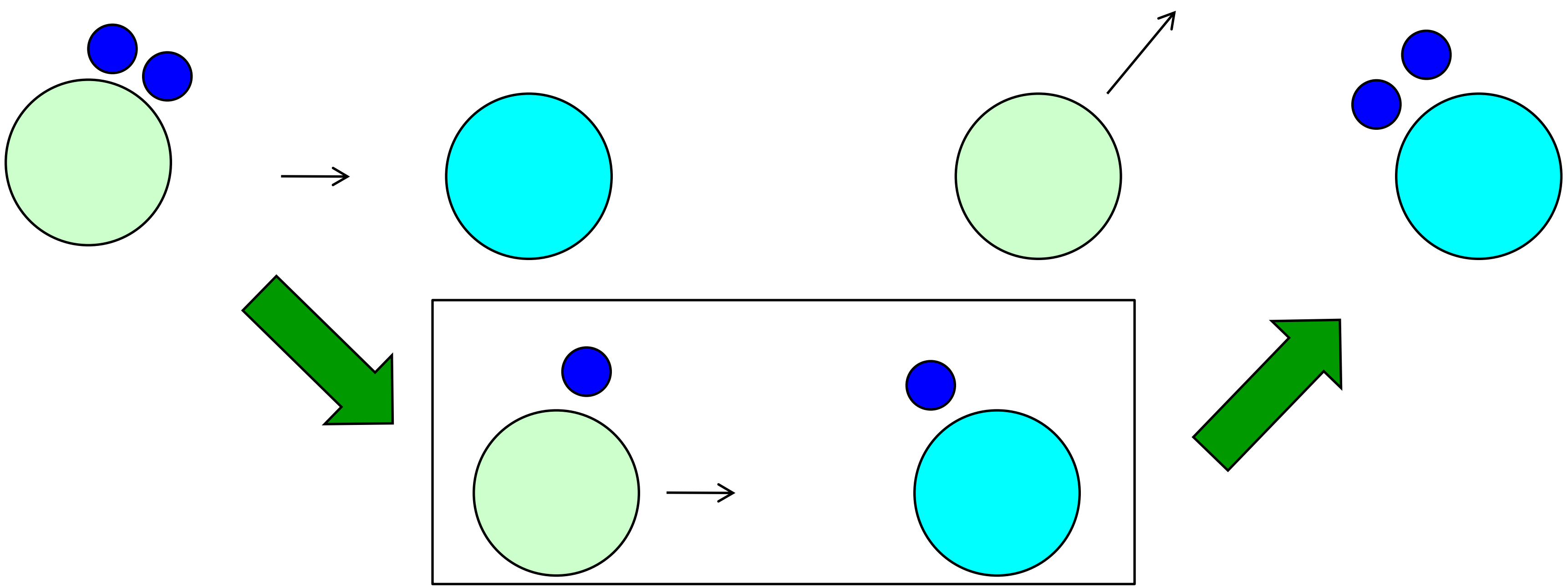
⟶ これからの課題

1ステップか2ステップか?

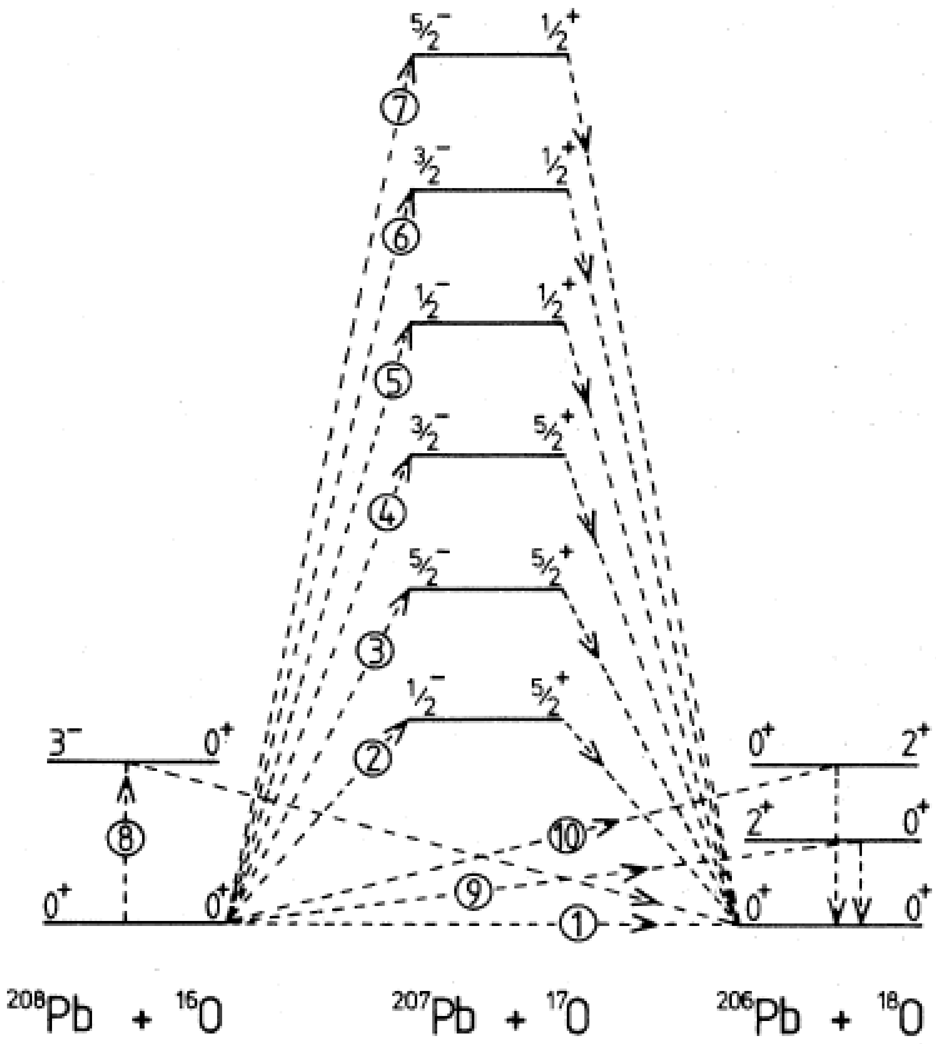
1ステップ（simultaneous/direct）

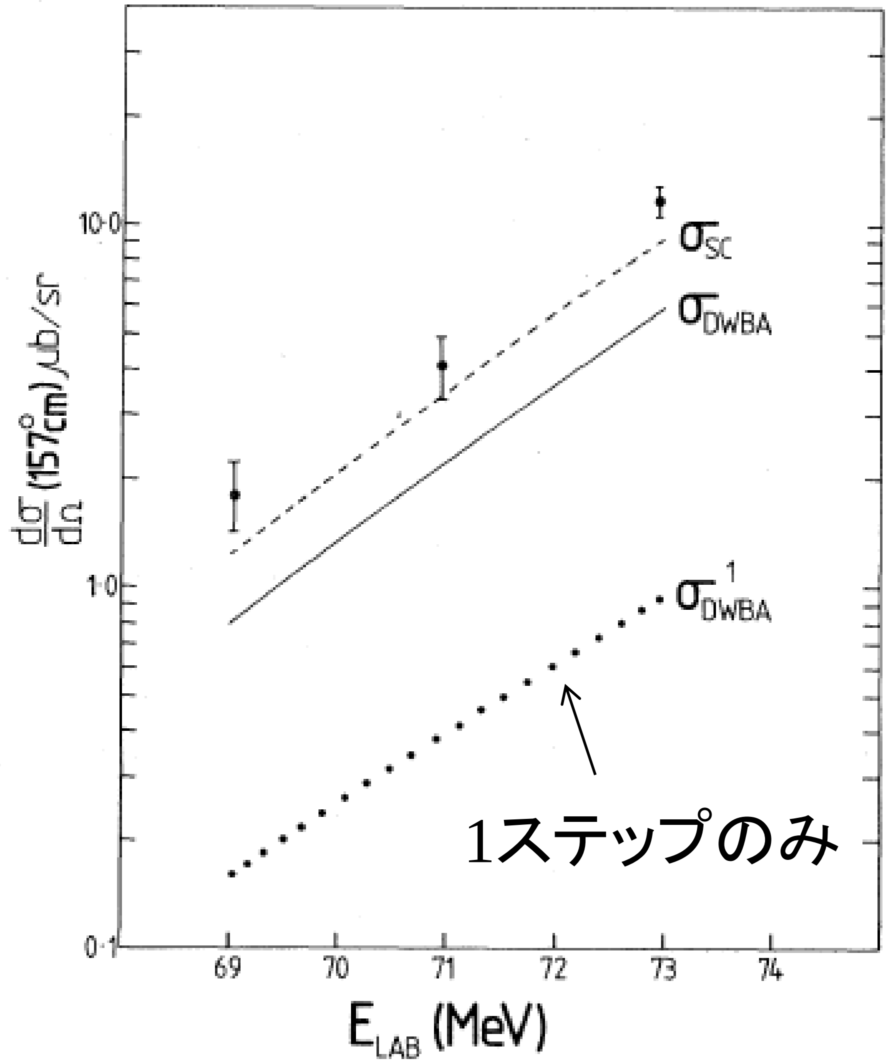


2ステップ（sequential）:



1ステップか2ステップか?





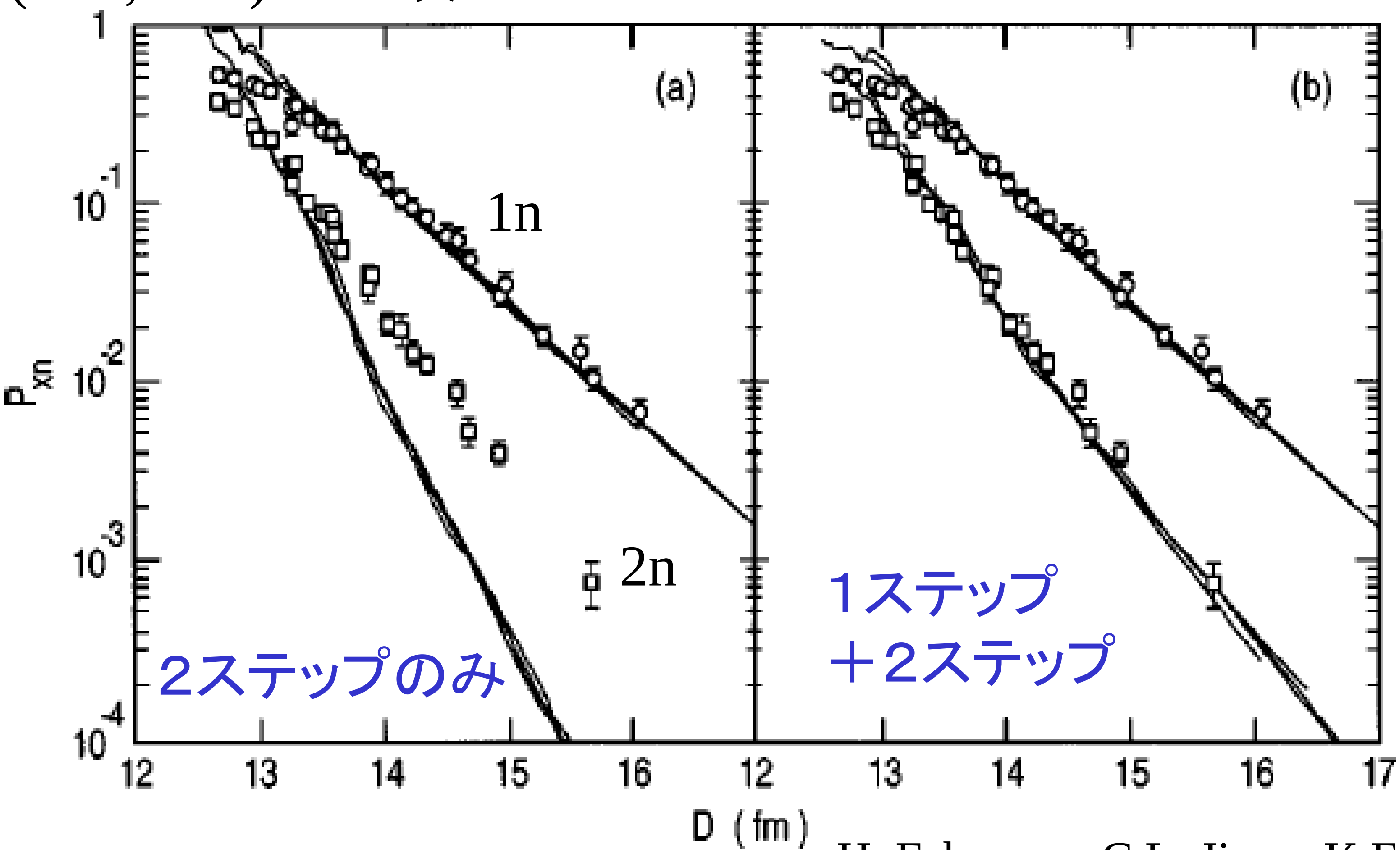
M.A. Franey et al.,
PRL41('78)837

1ステップのみの計算はデータを全く再現しない

⟶ 2ステップ過程の重要性

1ステップか2ステップか?

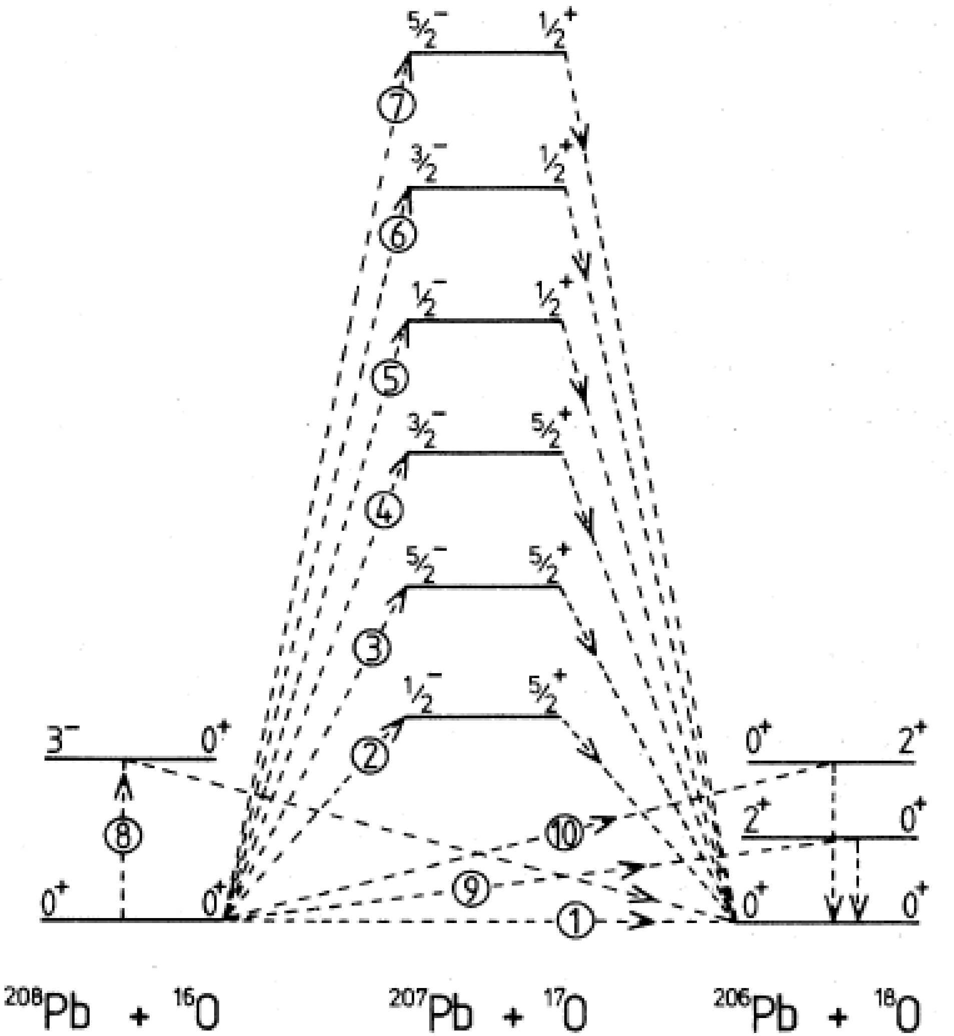
$^{124}Sn(^{58}Ni, ^{60}Ni)^{122}Sn$ 反応



H. Esbensen, C.L. Jiang, K.E. Rehm, PRC57('98)2401

1ステップと2ステップの両方が重要

中性子過剰核を用いた対移行反応



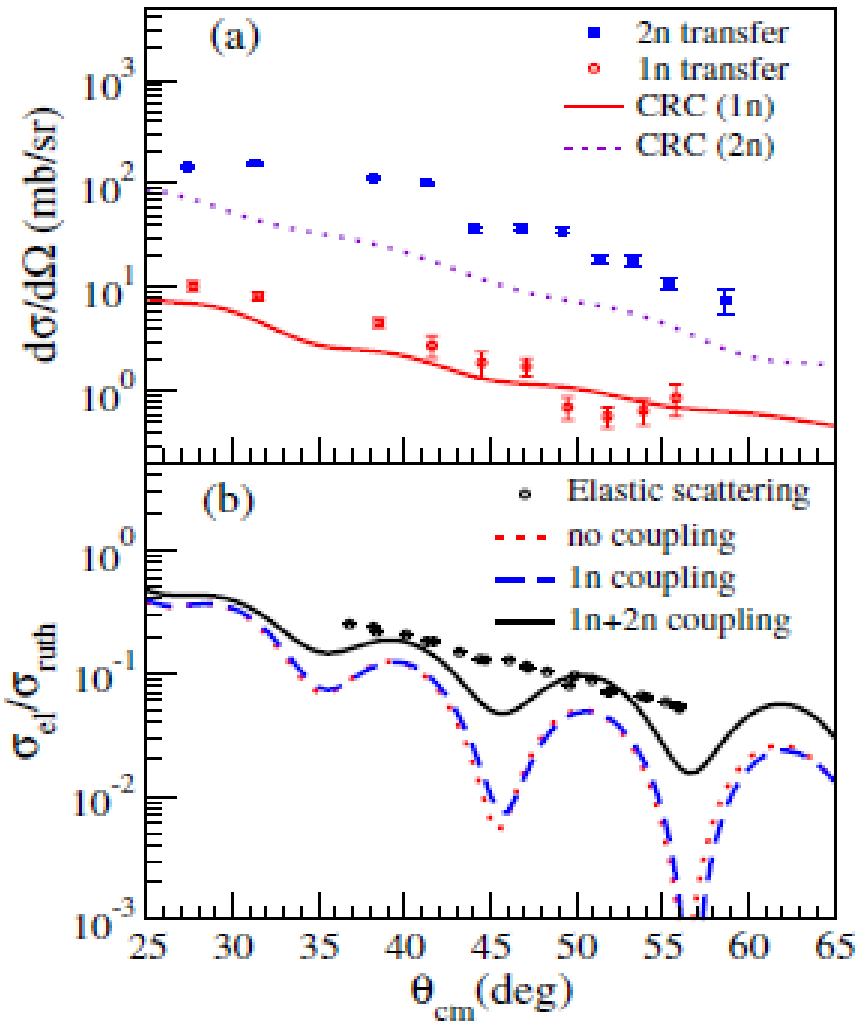
中性子過剰核を用いると、
中間状態(の多くが)非束縛

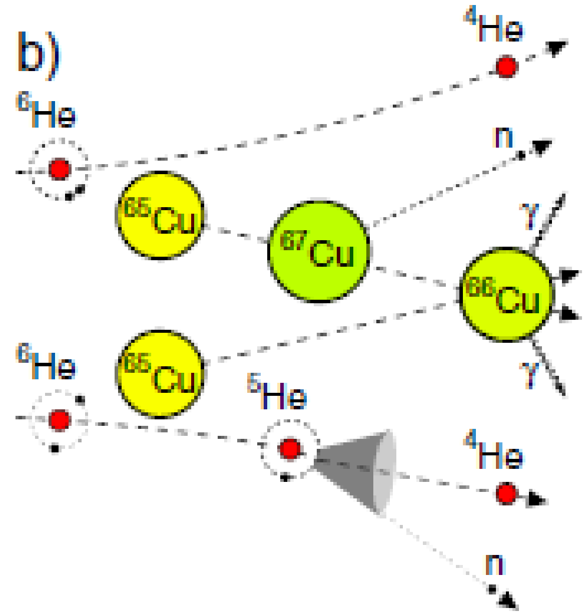
反応機構はどう変わる?

これからの課題

ボロミアン核の対移行反応：実験データ (i)

^{6}He + ^{65}Cu (GANIL)





E_{lab} = 22.6 MeV

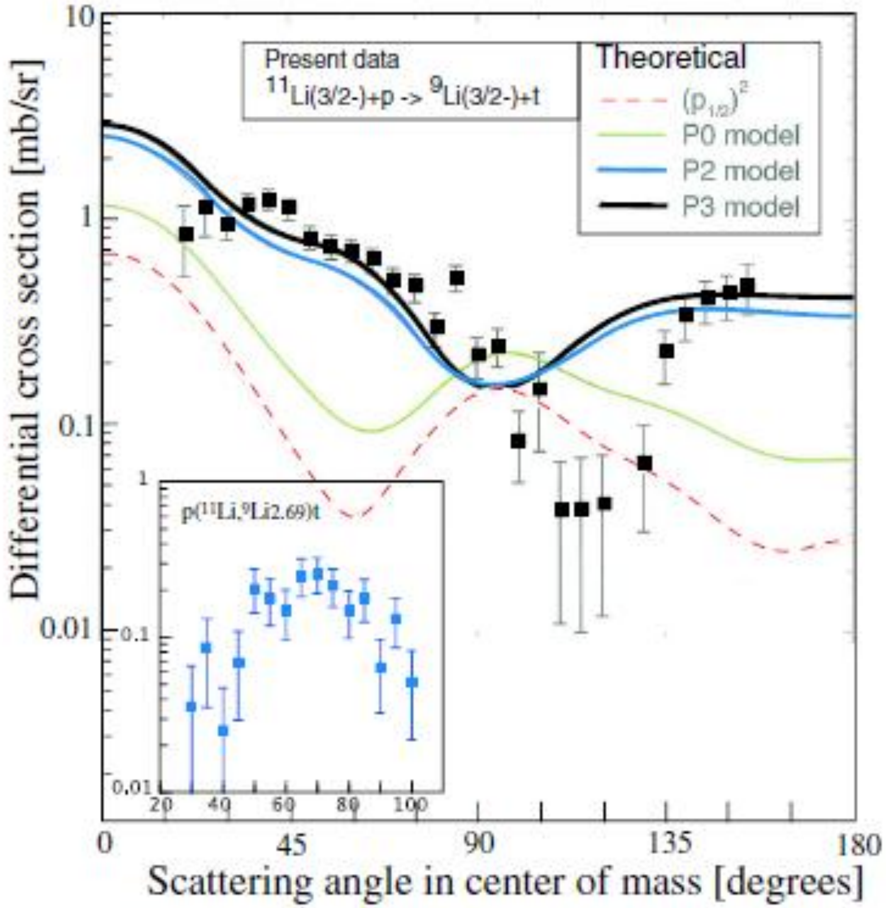
n と α の角度相関を見ることによって 1n 移行と 2n 移行を分離（1n 移行は ^{5}He の分解から n が出るので n と α が強く相関）

- 1n 移行に比べて 2n 移行が主
- これはボロミアン核の特徴（安定核では 1n 移行が主）

A. Chatterjee et al., PRL101(’08)032701

ボロミアン核の対移行反応：実験データ (ii)

^{1}H(^{11}Li,^{9}Li)^{3}H (TRIUMF)



- 相関なしの計算は実験データを再現せず
- $(s_{1/2})^2$ の割合が 31% (P2 model), 45% (P3 model) のモデルでは前方領域をよく再現。
- ただし、後方の合いはいまいち。（光学ポテンシャル?中間状態?）

↑

中間状態として ^{10}Li の 1/2+ 状態と 1/2- 状態

$E_{\rm lab}$ = 3 MeV/A

I. Tanihata et al., PRL100(‘08)192502

(参考)代理反応

中性子移行反応は原子力の観点からも重要

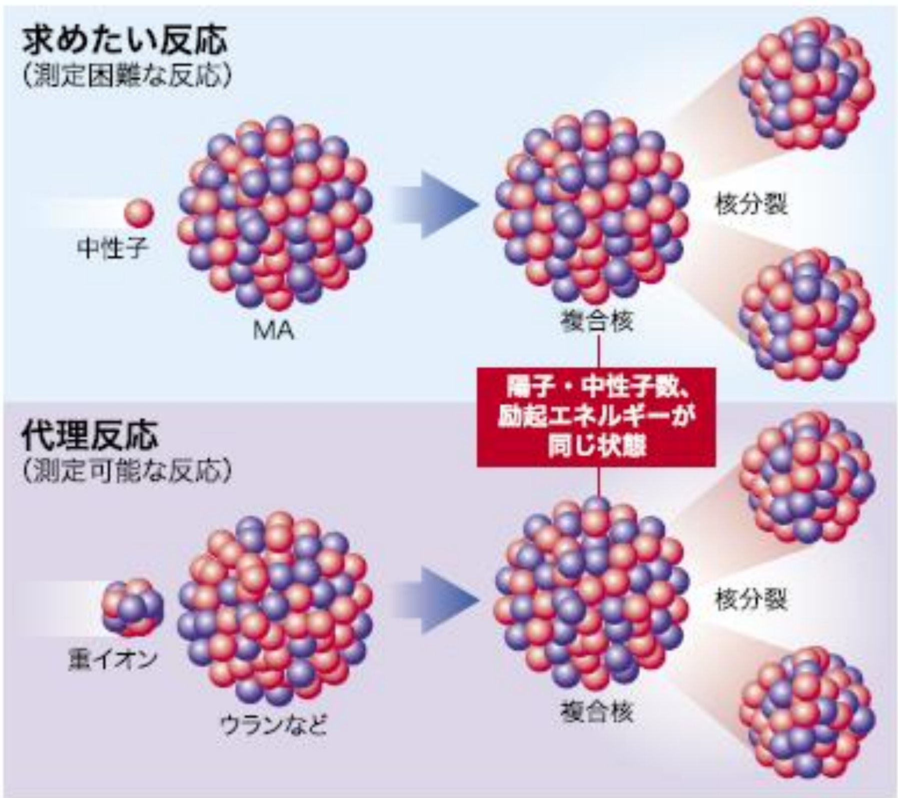
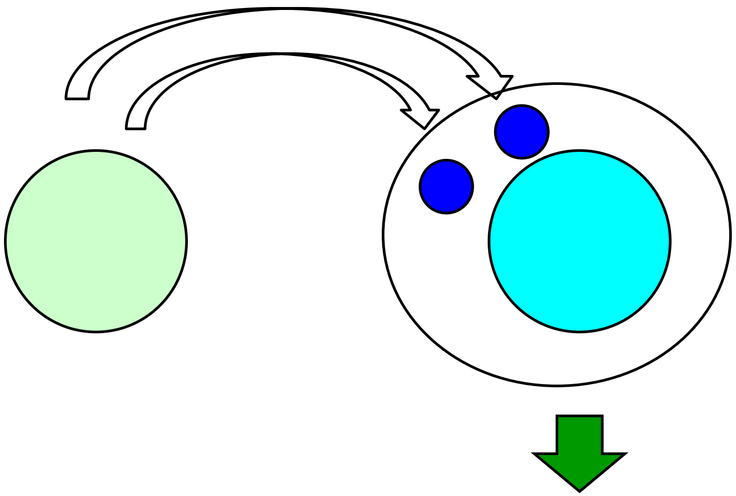


図1 代理反応

http://asrc.jaea.go.jp/15panhu/kagaku/32kagaku/32interview.pdf

中性子誘起核分裂 (n,f) を
中性子移行反応を用いて摸擬
(代理反応)



核分裂

中性子誘起核分裂の間接測定

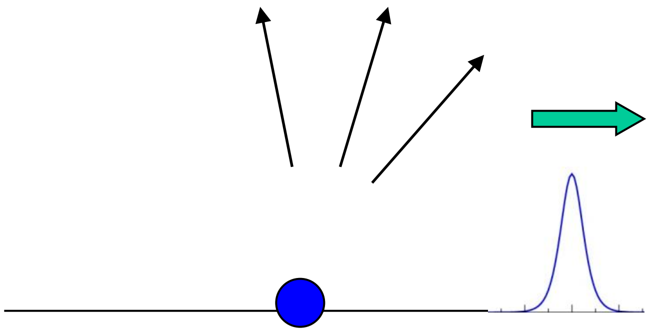
千葉敏氏を中心に JAEA でプロジェクトが進行中

弾性散乱の最近の話題２つ

(i) Threshold Anomaly

反応プロセス

- 弾性散乱
- 非弾性散乱
- 粒子移行
- 複合粒子形成（核融合）



弾性フラックスの減少（吸収）

光学ポテンシャル

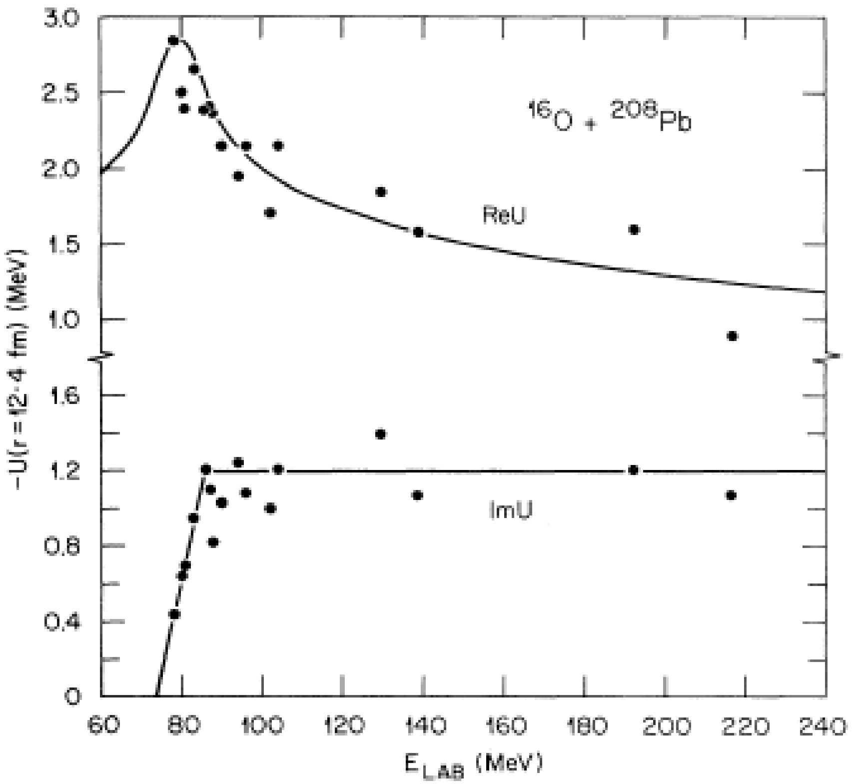
$$\boxed{V_{\mathrm{opt}}(\boldsymbol{r}) = V(\boldsymbol{r}) - iW(\boldsymbol{r}) \qquad (W > 0)}$$

光学ポテンシャルのエネルギー依存性は?

(i) Threshold Anomaly

$^{16}O+^{208}Pb$

角度分布を再現する
現象論的光学ポテンシャル



M.A. Nagarajan, C.C. Mahaux, and G.R. Satchler, PRL54('85)1136

- 光学ポテンシャルの虚部はクーロン障壁を境に急激に減少
- 実部も同じエネルギーで増大

↓

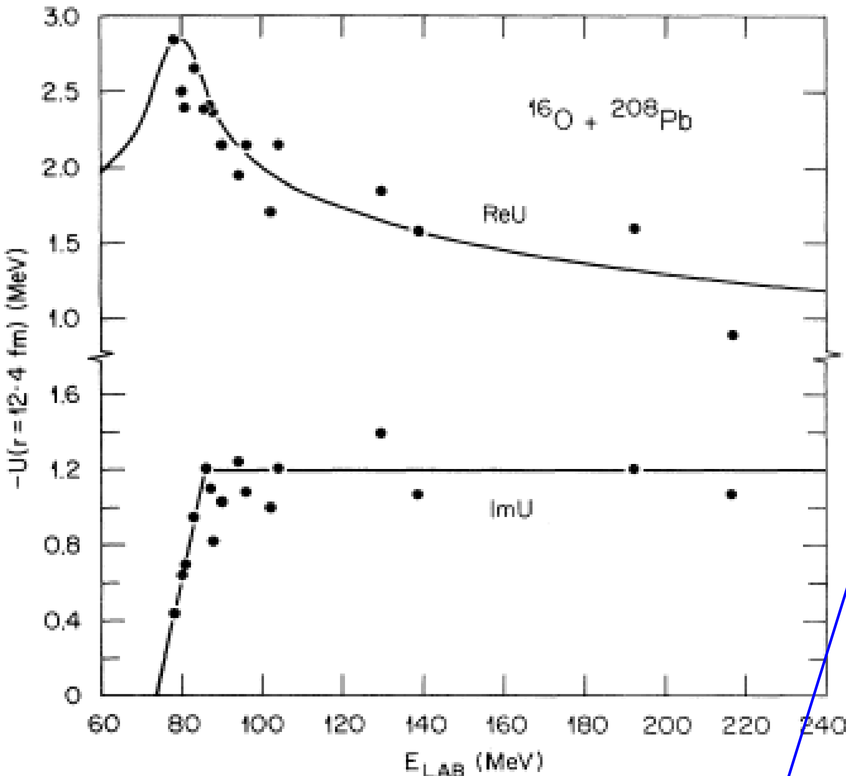
虚部が減少するのは理解しやすい
(クーロン障壁のため実効的に他チャンネルが閉じるから)
実部の振る舞いはよくわからない??

↓

"Threshold Anomaly" とよばれた

(i) Threshold Anomaly

$^{16}O+^{208}Pb$



M.A. Nagarajan, C.C. Mahaux, and G.R. Satchler, PRL54('85)1136

- 光学ポテンシャルの虚部はクーロン障壁を境に急激に減少
- 実部も同じエネルギーで増大

↓

"Threshold Anomaly" とよばれた

分散関係 (dispersion relation) で説明できることを示した。

$$\Delta V(E) = \frac{P}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{W(E')}{E'-E}dE'$$

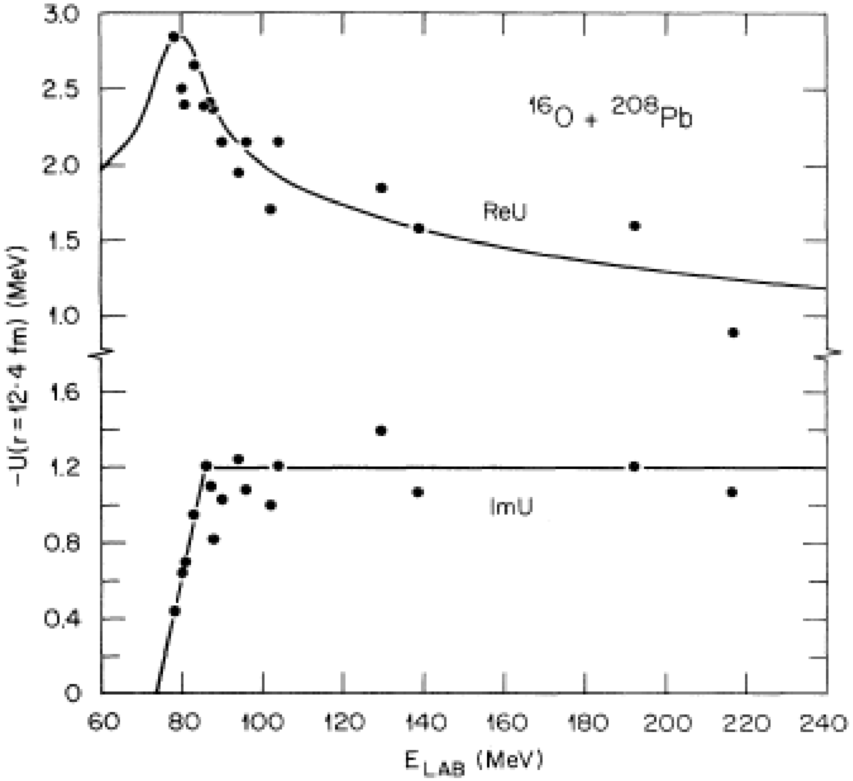
実部と虚部は互いに関連している

↓

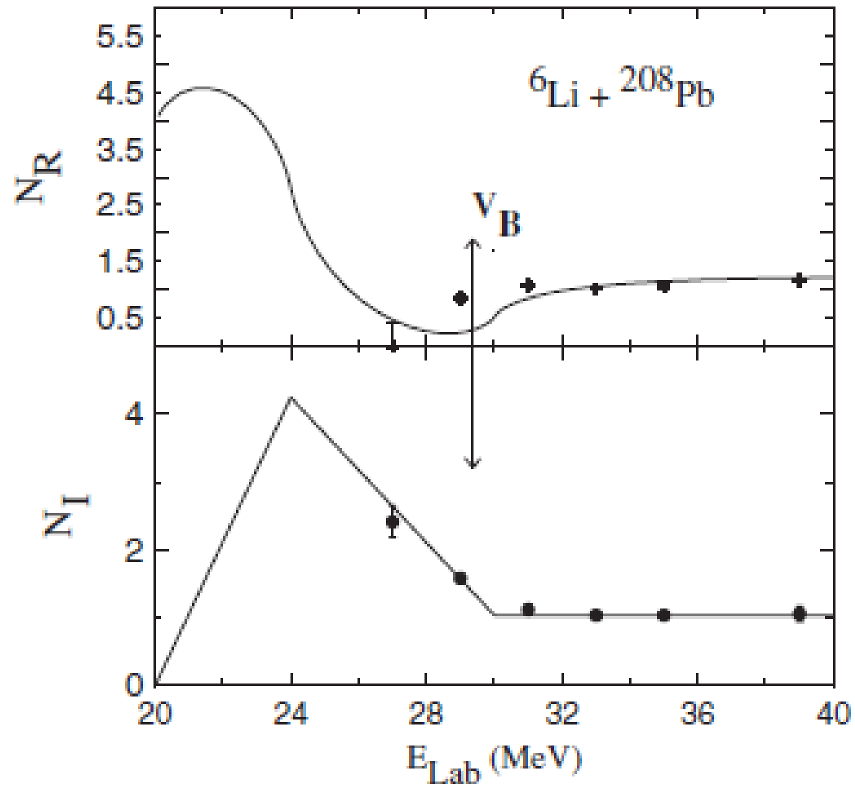
もはや anomaly ではなくなった。
(名前だけが残った。)

(i) Threshold Anomaly

$^{16}O+^{208}Pb$



$^{6}Li+^{208}Pb$



分解過程が重要となる反応系
では振る舞いが全く異なる

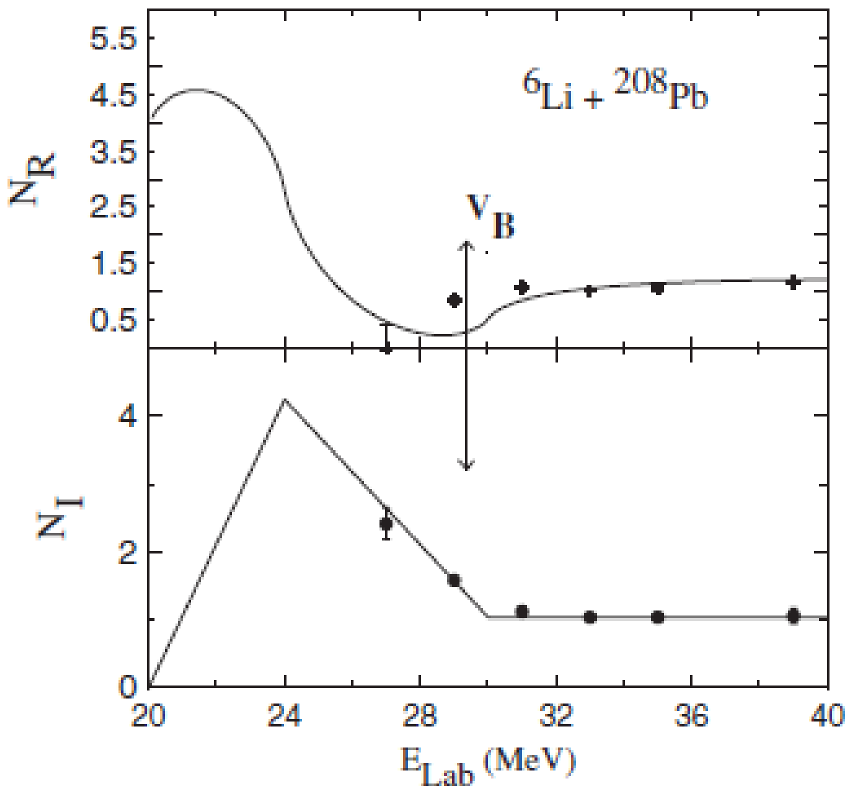
分解チャンネルはクーロン
障壁以下でも閉じない

→ Breakup Threshold Anomaly

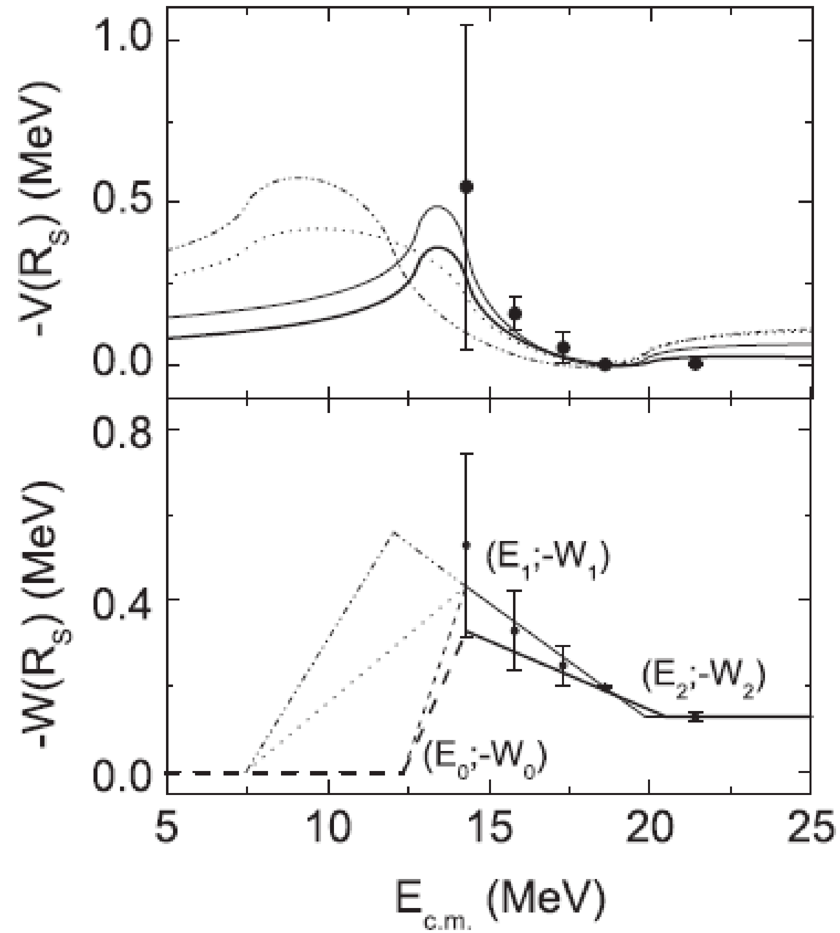
M.S. Hussein et al., PRC73('06)044610

(i) Threshold Anomaly

^{6}Li+^{208}Pb



^{6}He+^{209}Bi



分解過程が重要となる反応系
では振る舞いが全く異なる

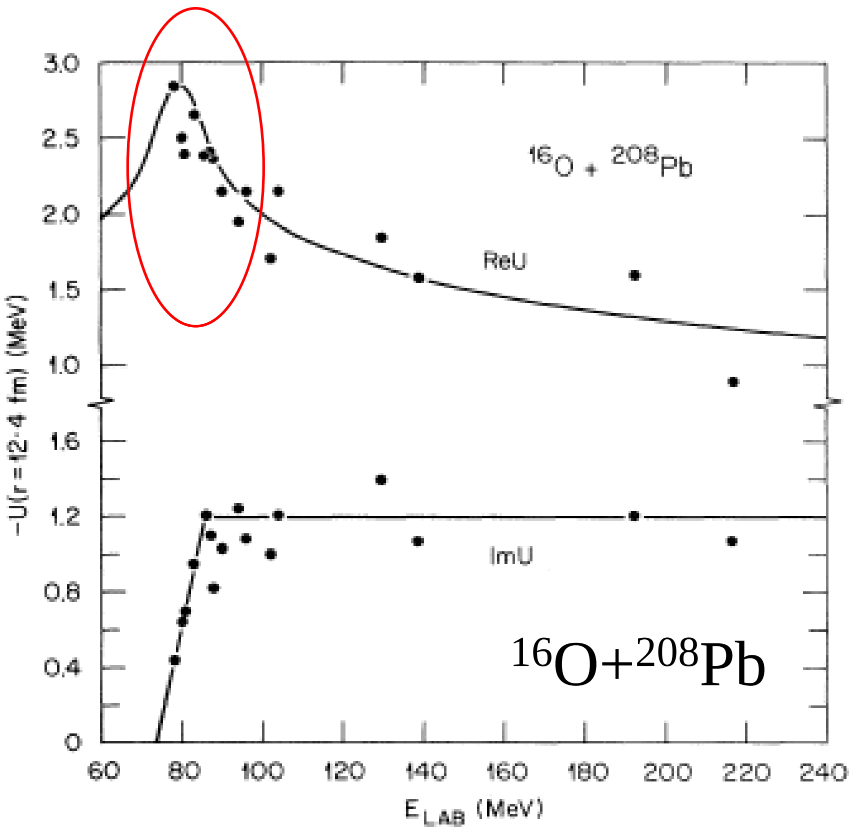
→ Breakup Threshold Anomaly

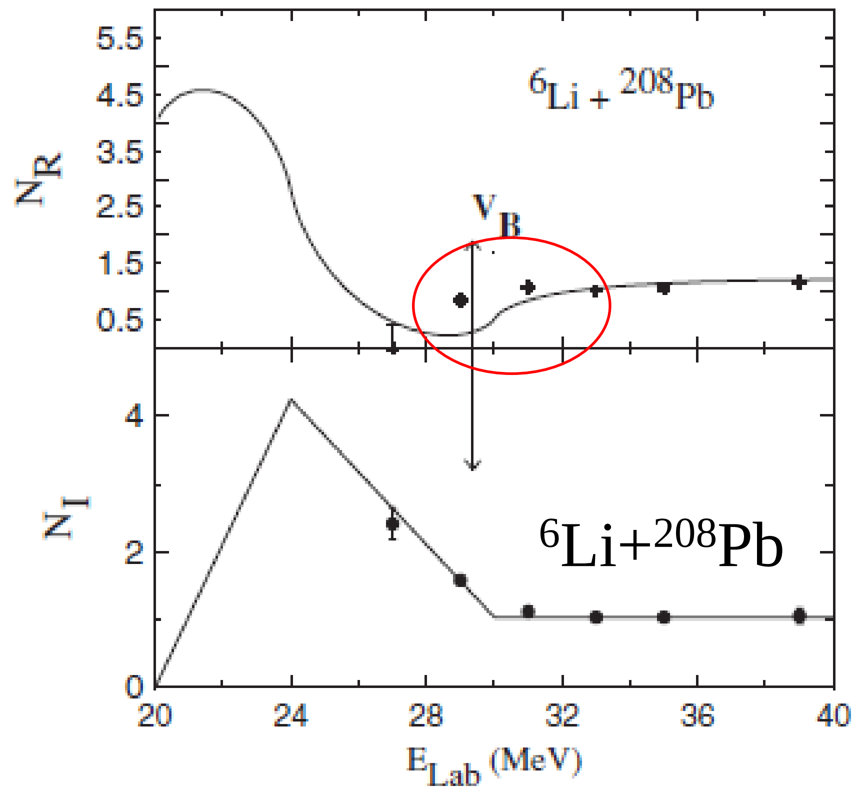
M.S. Hussein et al., PRC73(‘06)044610

A.R. Garcia et al., PRC76(‘07)067603

中性子過剰核でも同様の
振る舞い(特に虚部)

(i) Threshold Anomaly （補足）核融合反応との関係





⇩

通常の非弾性励起の場合、
ポテンシャルは深くなる

⇩

核融合反応断面積は増大

⇩

分解反応との結合の場合、
ポテンシャルは浅くなる

⇩

核融合反応断面積は減少

(i) Threshold Anomaly （補足）核融合反応との関係

通常の非弾性励起の場合、
ポテンシャルは深くなる

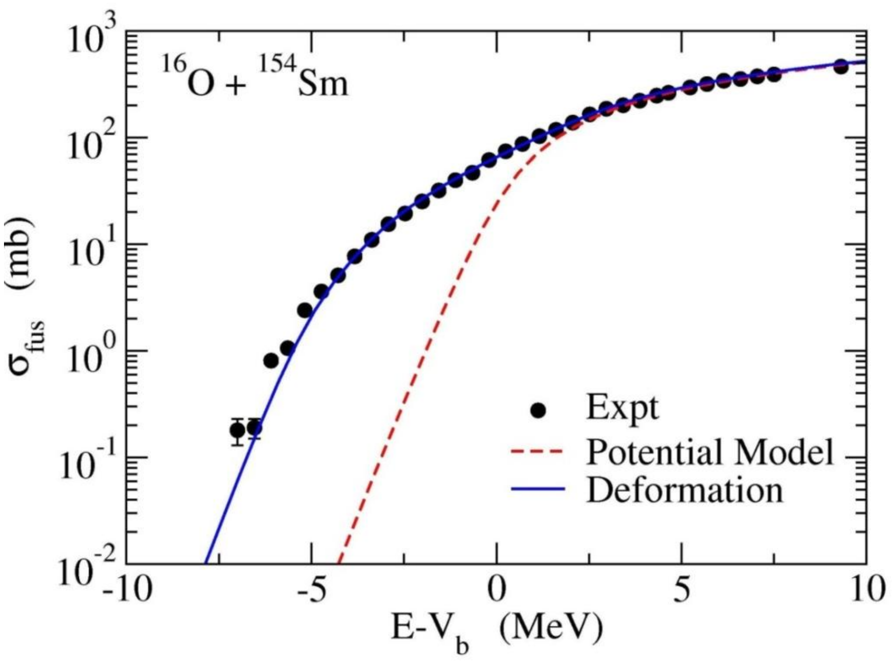
⇩

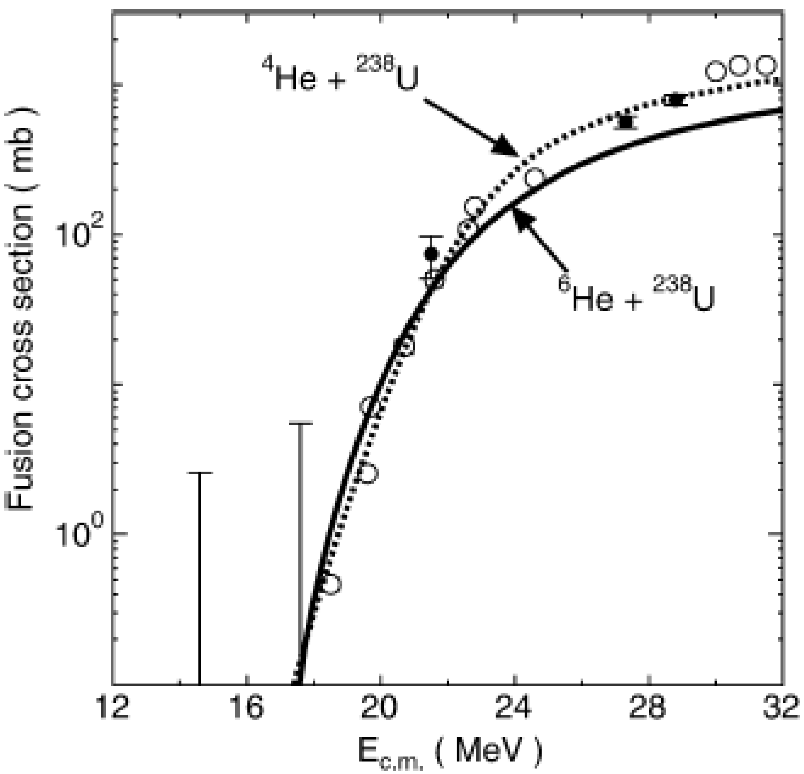
核融合反応断面積は増大

分解反応との結合の場合、
ポテンシャルは浅くなる

⇩

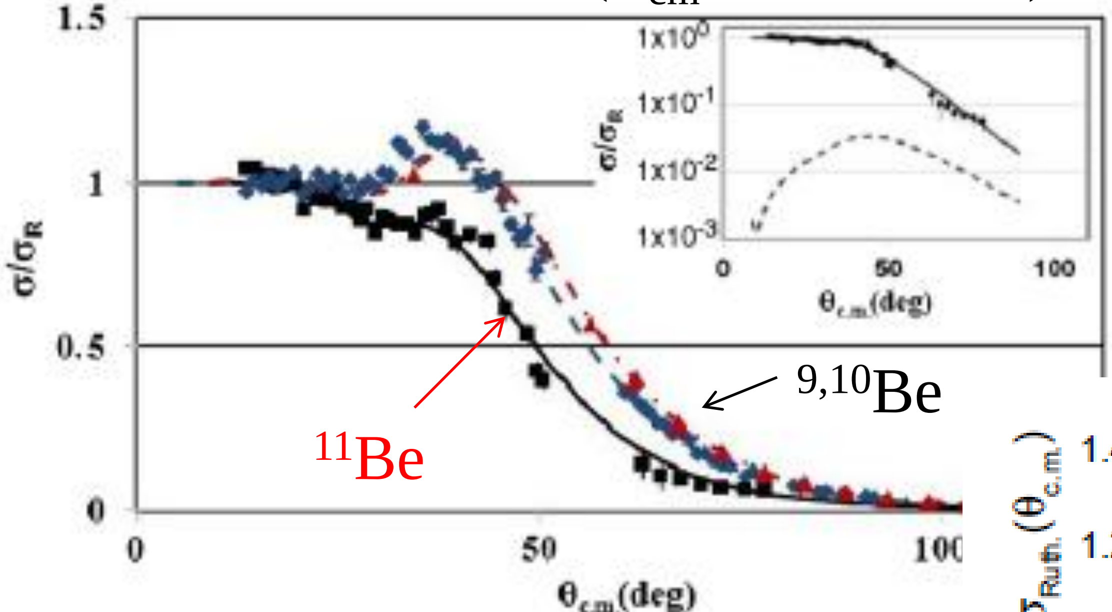
核融合反応断面積は減少





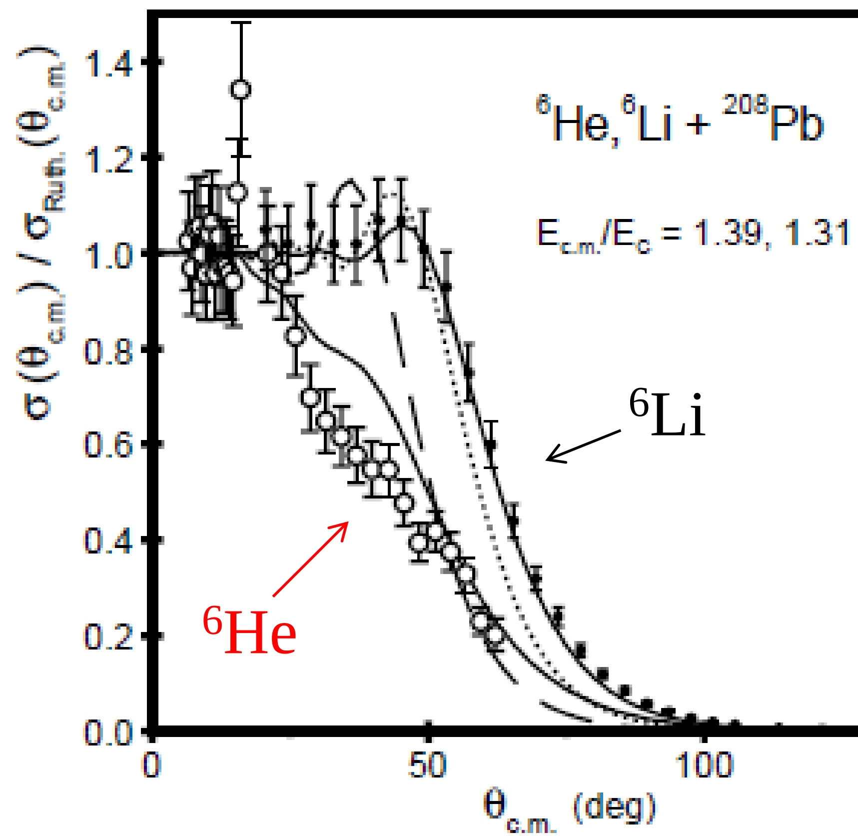
(ii) ハロー核の弾性散乱

$^{9,10,11}Be + ^{64}Zn$ (E_{cm} = 24.5 MeV)



A. Di Pietro et al.,
PRL105(‘10)022701

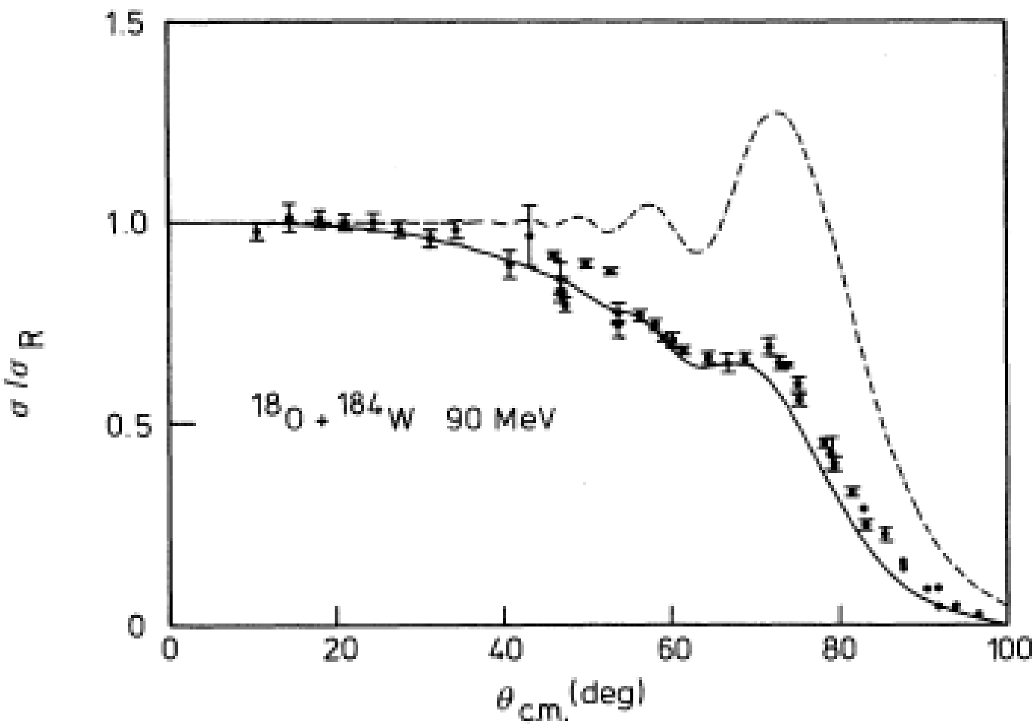
K. Rusek et al.,
PRC67(‘03)041604(R)

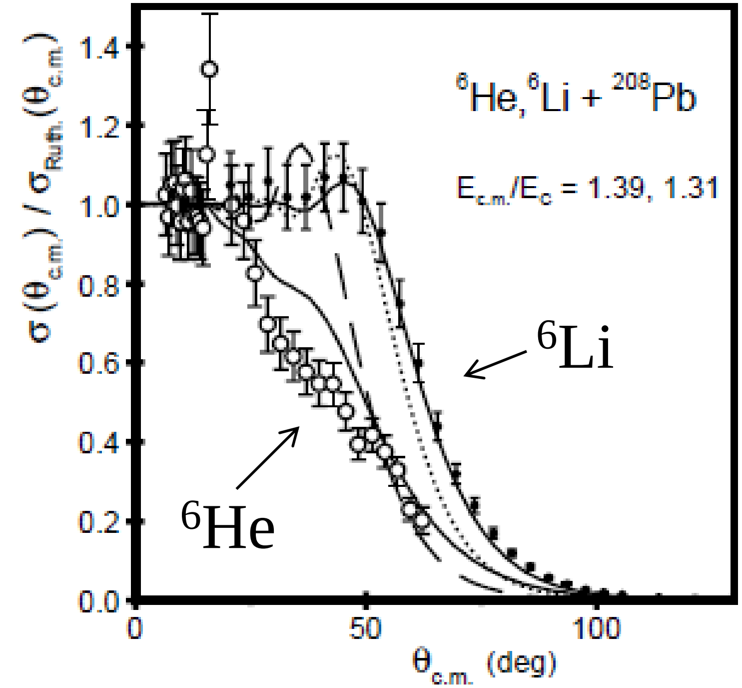


ハロー核を用いると弾性散乱
の断面積が大きく減少

(ii) ハロー核の弾性散乱

同様の弾性散乱断面積の減少
（フレネル・パターンからの大きなずれ）は
安定な変形核ではすでによく知られていた





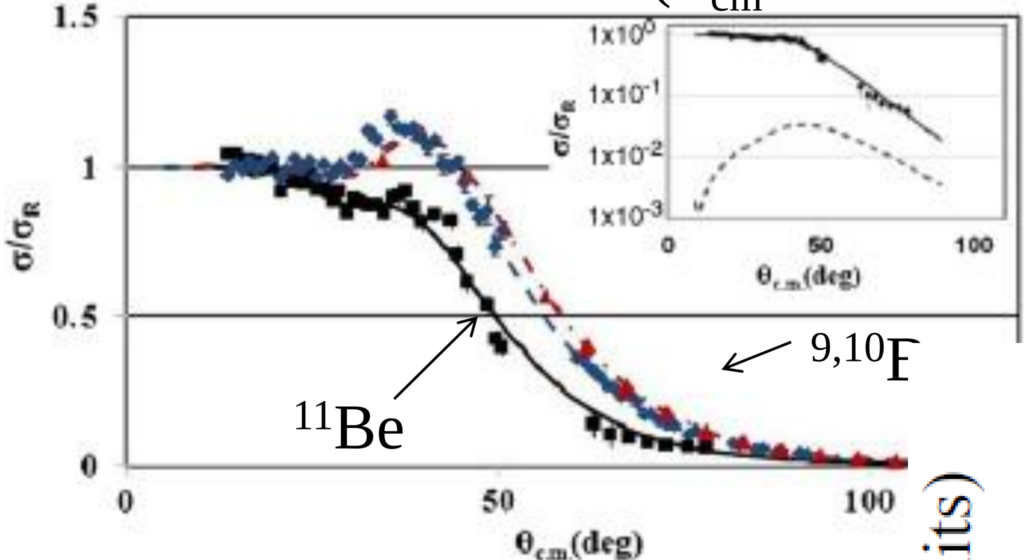
N. Takigawa, F. Michel,
A.B. Balantekin, G. Reidemeister,
PRC44('91)477

回転励起のエネルギーは小 ⟶ （クーロン）励起されやすい

long range な吸収ポテンシャルを導入することにより角度分布が
説明される (W.G. Love, T. Terasawa, G.R. Satchler, NPA291('77)183)

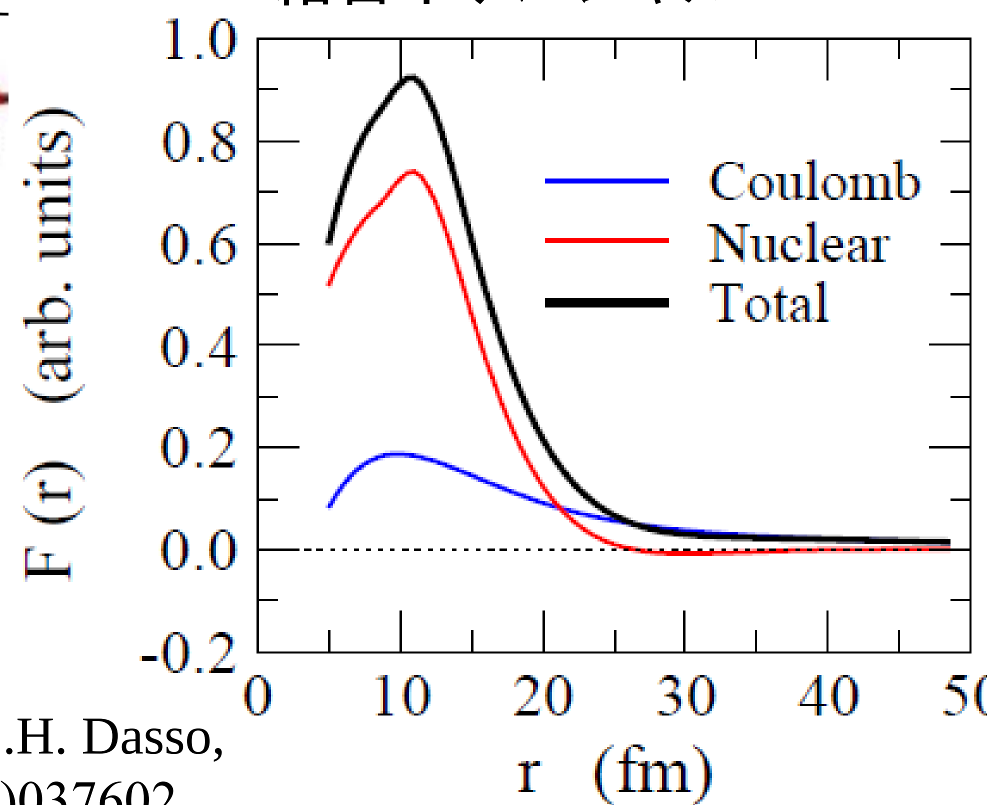
(ii) ハロー核の弾性散乱

$^{9,10,11}Be + ^{64}Zn$ $(E_{cm} = 24.5$ MeV)



$^{11}Be + ^{208}Pb$ 反応
$2s_{1/2}$ から $E_c = 0.9$ MeV に
ある $p_{3/2}$ 状態への
結合ポテンシャル

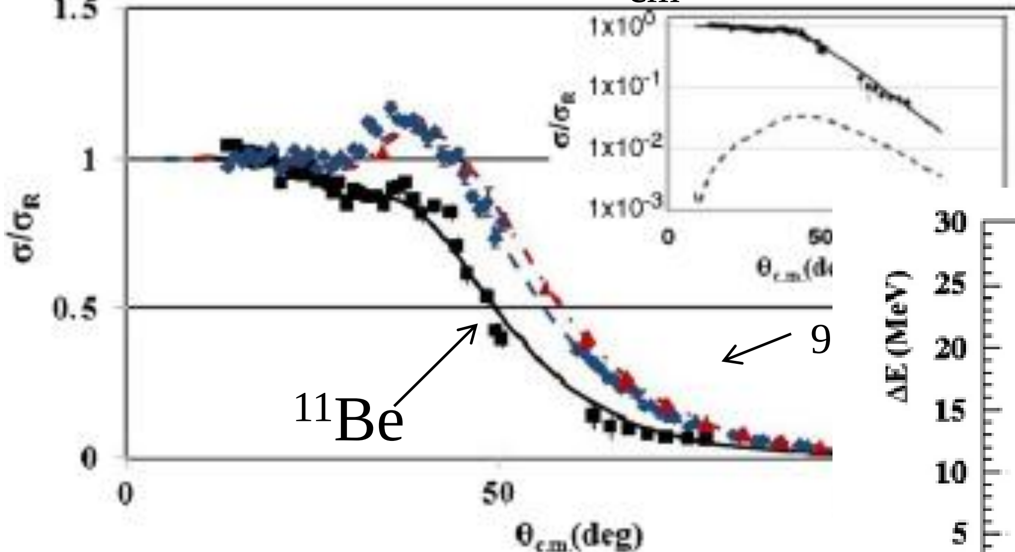
^{11}Be の分解チャンネルとの
結合ポテンシャルも同様に
long range



K. Hagino, A. Vitturi, C.H. Dasso,
S.M. Lenzi, PRC61('00)037602

(ii) ハロー核の弾性散乱

$^{9,10,11}Be + ^{64}Zn$ (E_{cm} = 24.5 MeV)



A. Di Pietro et al.,
PRL105('10)022701

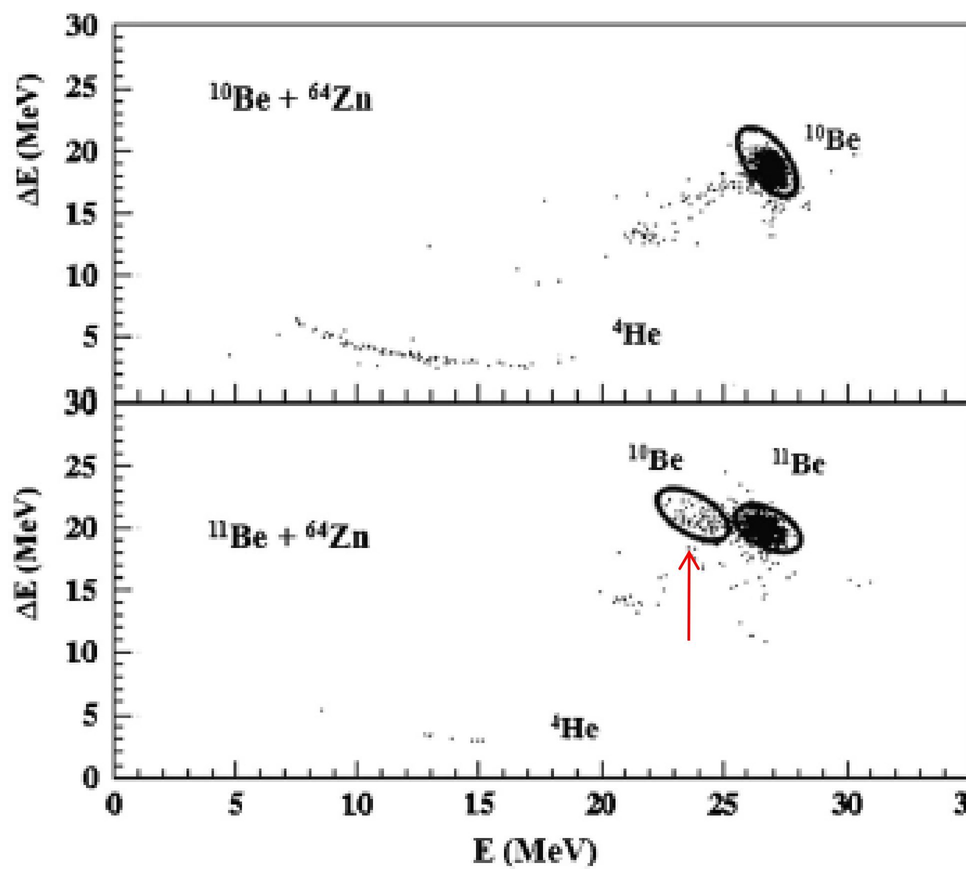


FIG. 2. ΔE-E scatter plots for the reactions $^{10}Be + ^{64}Zn$ (top) and $^{11}Be + ^{64}Zn$ (bottom), at $\theta = 35°$.

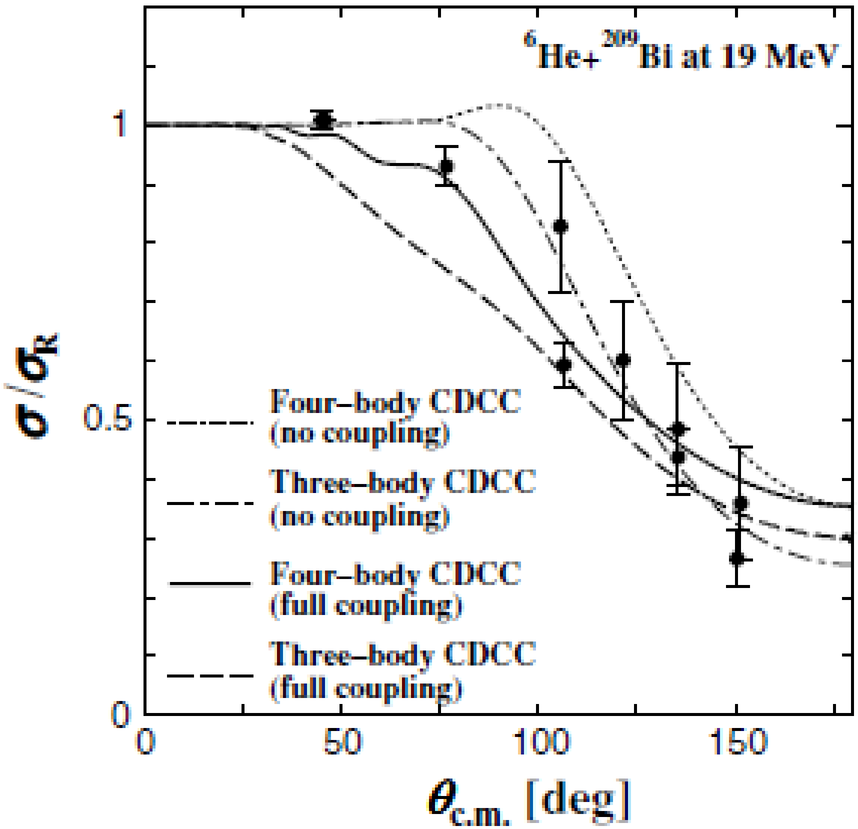
反応断面積:

σ_R = 1090 mb (^{9}Be)

1260 mb (^{10}Be)

2730 mb (^{11}Be)

CDCC 計算



分解を入れると
フレネルからのずれ

T. Matsumoto, T. Egami, K. Ogata, Y. Iseri, M. Kamimura, and M. Yahiro, PRC73(‘06)051602(R)