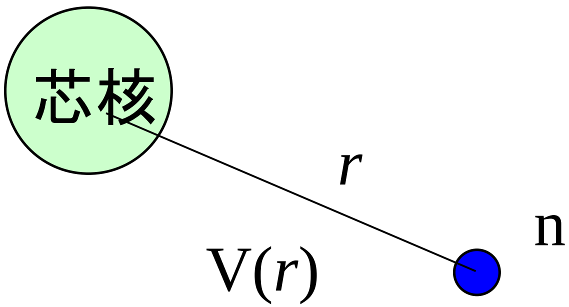
変形した不安定核

－束縛状態
－共鳴状態
－結合チャンネル系の共鳴状態
－ Feschbach 共鳴

束縛状態：変形ハロー核

これまで、芯核は球形として最外殻中性子の一粒子運動を議論してきた:

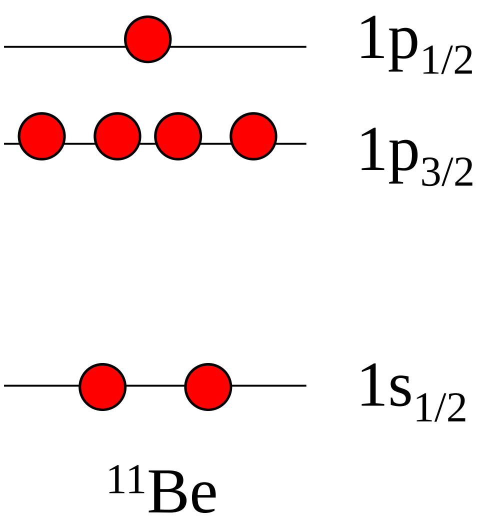


相対運動のハミルトニアン

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V(r)$$

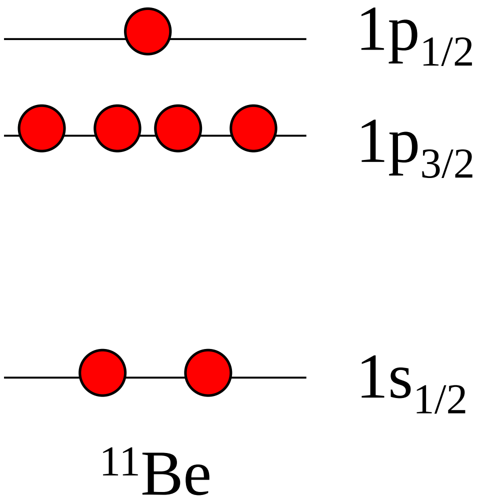
球形のポテンシャル

これを ^{11}Be にあてはめると:



^{11}Be の基底状態は $I^{\pi} = 1/2^{-}$

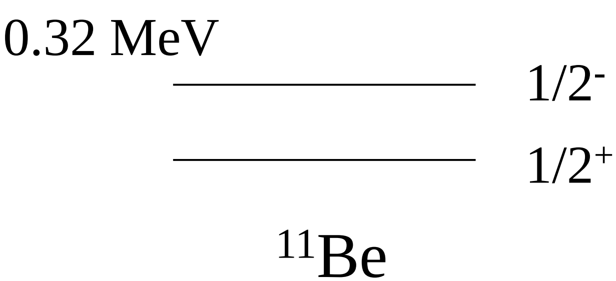
球形ポテンシャルの準位 (^{11}Be)



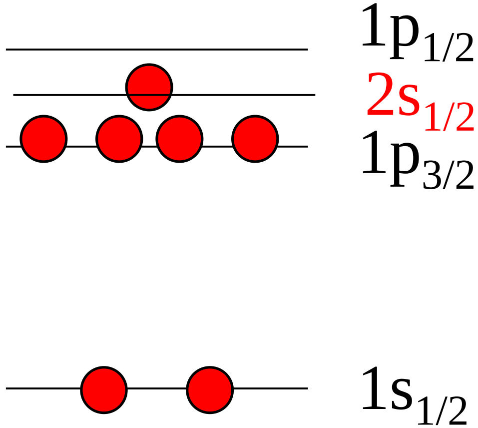
^{11}Be の基底状態は $I^{\pi} = 1/2^{-}$

とても不自然

実際の ^{11}Be の準位



?



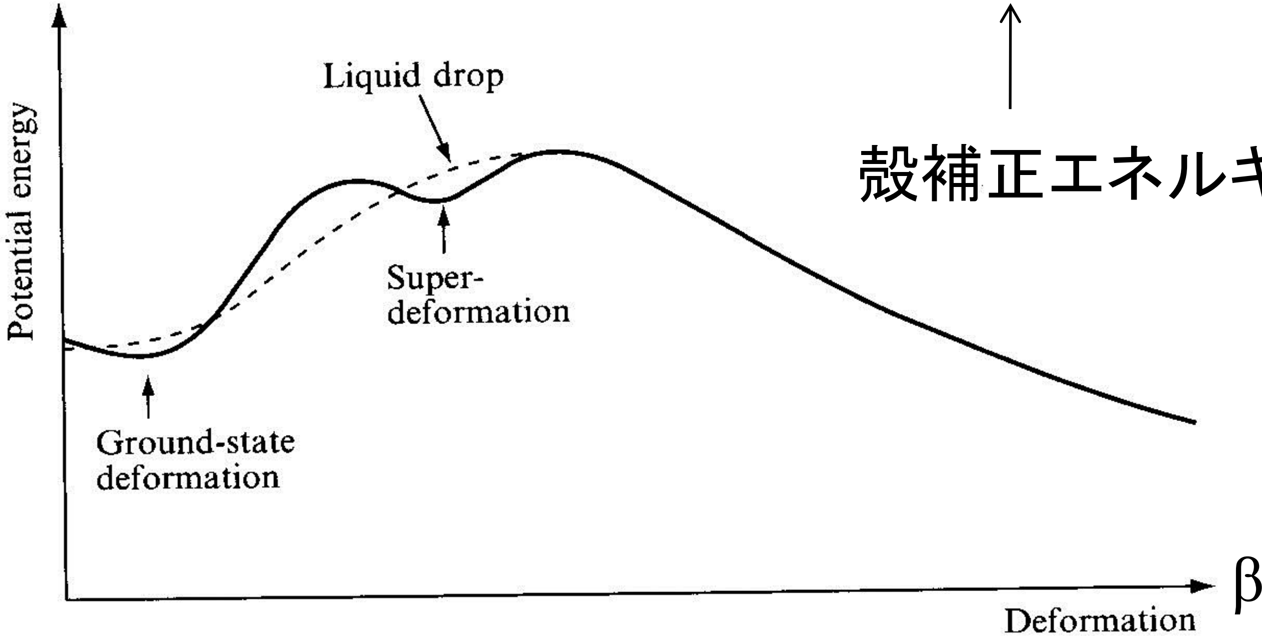
"parity inversion"

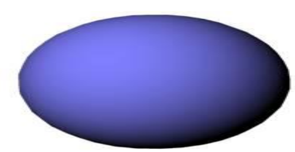
^{11}Be は変形している? ⟶ 変形したポテンシャル中の一粒子運動

(復習)殻補正と原子核の変形

$$E(\beta) = E_{LDM}(\beta) + E_{\text{shell}}(\beta)$$

殻補正エネルギー:魔法数の起源



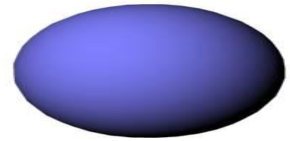


液滴模型のみ → 常に球形が基底状態

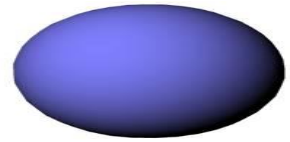
殻補正 → 変形状態が基底状態になる場合がある

＊対称性の自発的破れ

変形の証拠



変形の証拠



^{154}Sm　のスペクトル

cf. 剛体の回転エネルギー(古典力学)

0.903 (MeV)	8^+
0.544	6^+
0.267	4^+
0.082	2^+
0	0^+

^{154}Sm

$$E = \frac{1}{2}\mathcal{J}\omega^2 = \frac{I^2}{2\mathcal{J}}$$

$$(I = \mathcal{J}\omega,\ \ \omega = \dot{\theta})$$

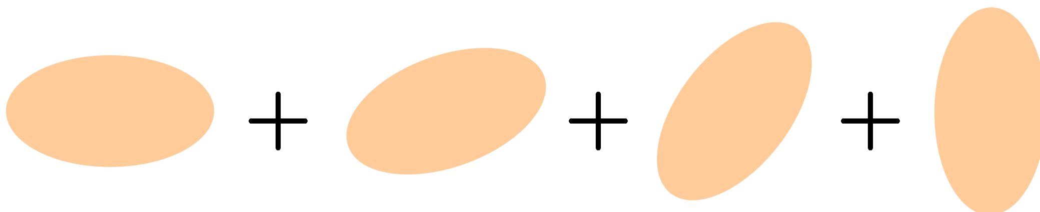
^{154}Sm は変形している

$$\boxed{E_I \sim \frac{I(I+1)\hbar^2}{2\mathcal{J}}}$$

(参考) 0^+ 状態とは?

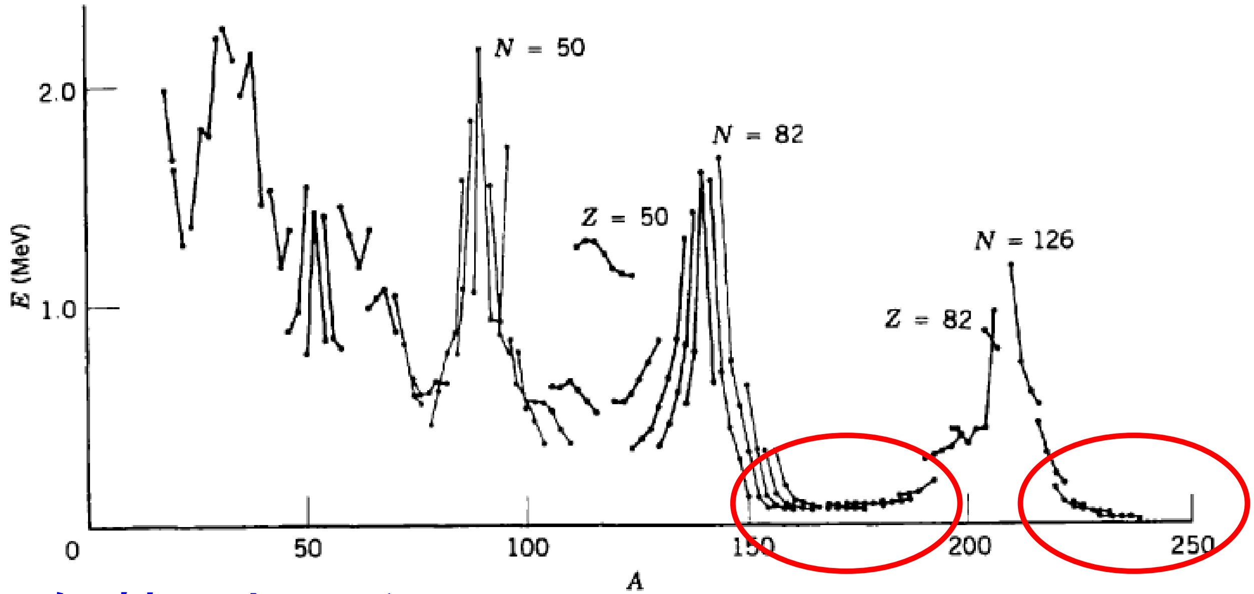
0^+: 空間異方性がない(「球形」)

→ すべての向きを同等に混ぜればよい



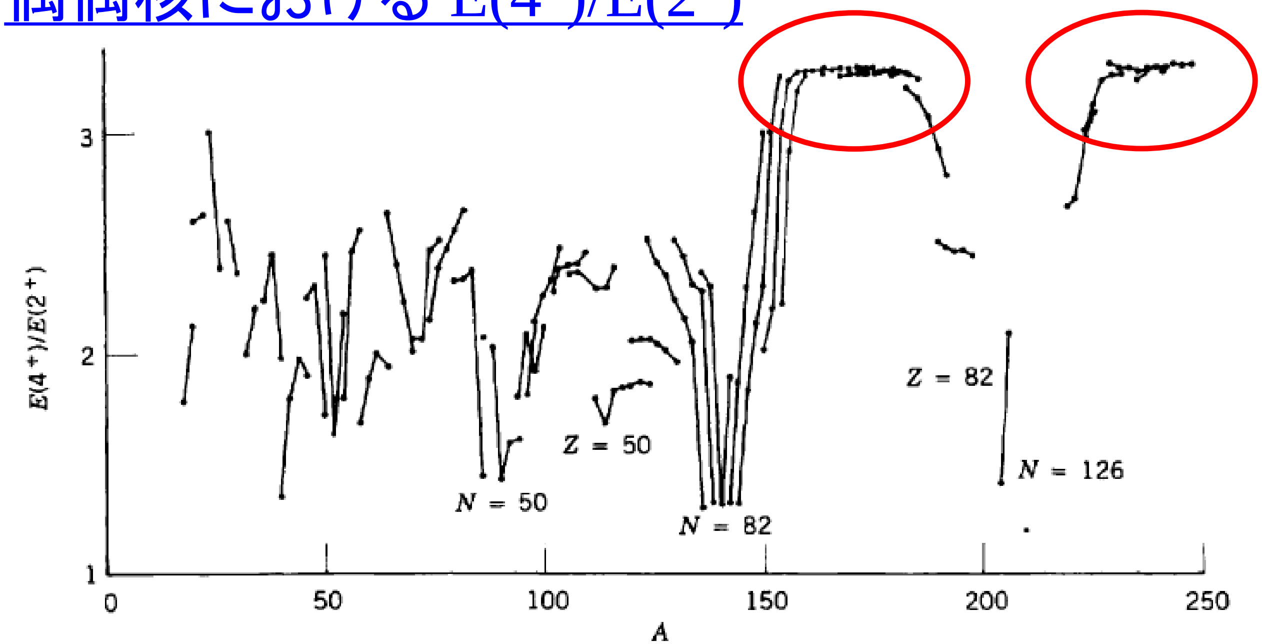
cf. 平均場近似＋角運動量射影

偶偶核の 2^+ 状態のエネルギー



変形核

偶偶核における $E(4^+)/E(2^+)$



変形核なら

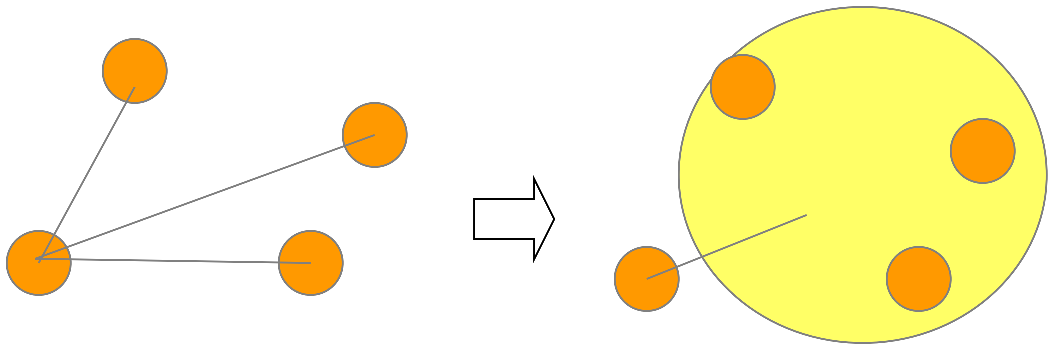
$E(4^+)/E(2^+) \sim 3.3$

球形核なら

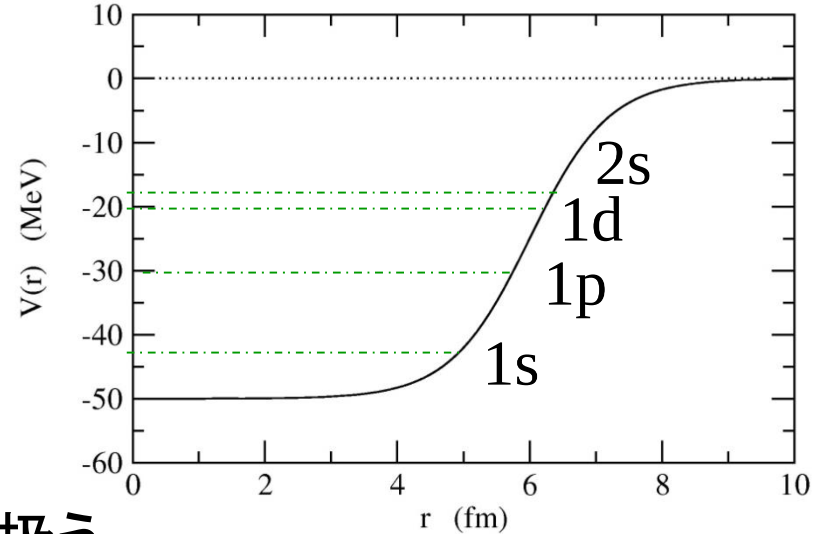
$E(4^+)/E(2^+) \sim 2$

K.S. Krane, "Introductory Nuclear Physics"

平均場近似と変形核



Woods-Saxon ポテンシャル



他の核子との相互作用を平均的に取り扱う

⇒ 有効ポテンシャル中の一体問題

← ポテンシャルはエネルギーが最小となるように決める（変分原理の考え方）

$$V(\boldsymbol{r}) \sim \int v(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}'$$

＋反対称化の効果

Hartree-Fock 法と対称性

$$\begin{aligned} H &= -\sum_{i=1}^{A}\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j}^{A} v(\boldsymbol{r}_i,\boldsymbol{r}_j) \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^{A}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_i^2 + V_{\mathrm{HF}}(i)\right)}_{h_{\mathrm{HF}}} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i,j}^{A} v(\boldsymbol{r}_i,\boldsymbol{r}_j) - \sum_i V_{\mathrm{HF}}(i)}_{V_{\mathrm{res}}} \end{aligned}$$

2体力→1体場に近似

残留相互作用

Slater 行列式

$$\Psi_{\mathrm{HF}}(1,2,\cdots,A) = \mathcal{A}[\psi_1(1)\psi_2(2)\cdots\psi_A(A)]$$

⇐ h_{HF} の固有状態。ただし、H の固有状態ではない。

$\boxed{\Psi_{\mathrm{HF}} : H \text{ の持つ対称性を必ずしも持つ必要はない。}}$

“対称性が破れた解”

“対称性の自発的破れ”

対称性の破れ

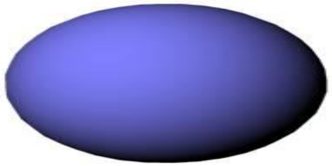
利点: 独立粒子の単純な描像を保ったまま主要な多体相関を取り入れることができる

不利な点: 実験と比べるためには（原理的には）破れた対称性を回復する必要がある。

→ 角運動量射影法、粒子数射影法

- 並進対称性: HF では常に破れる
- 回転対称性

変形解



エネルギーを最適化するように原子核の形が自動的に決まる

変形ポテンシャル中の一粒子運動

変形Woods-Saxon ポテンシャル

$$\boxed{\begin{aligned} V(r,\theta) &= -V_0/[1+\exp((r-R_0-R_0\beta_2 Y_{20}(\theta))/a)] \\ &\sim V_0(r) - \beta_2 R_0 \frac{dV_0}{dr} Y_{20}(\theta) + \cdots \end{aligned}}$$

ポテンシャルが回転対称性を持たない

$\longrightarrow$ 角運動量がいい量子数にならない
（保存しない）

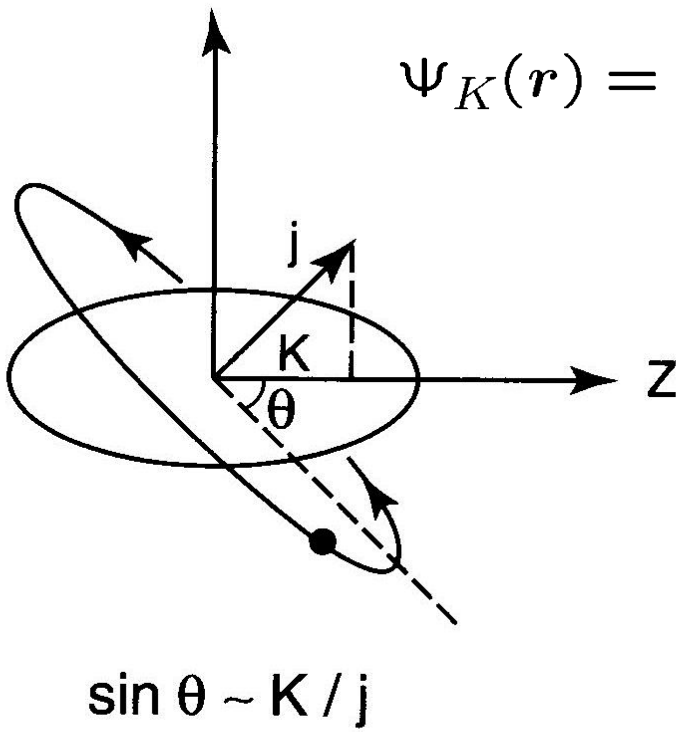
一般的には（ポテンシャルが軸対称の場合には）、

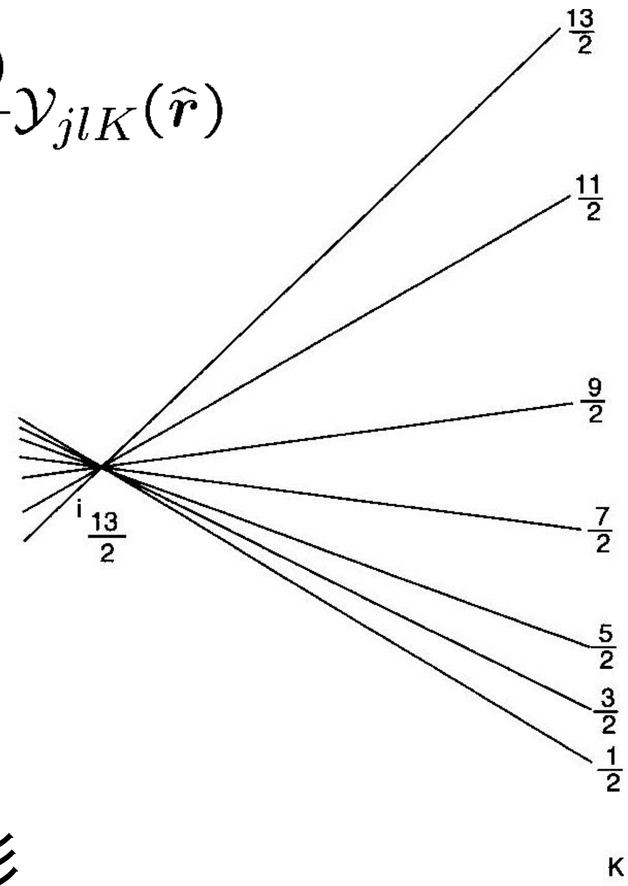
$$\Psi_K(\boldsymbol{r}) = \sum_{j,l} \frac{u_{jlK}(r)}{r} \mathcal{Y}_{jlK}(\hat{\boldsymbol{r}})$$

K は角運動量ベクトル $\boldsymbol{j}$ の z 軸への射影

幾何学的解釈

$$\Psi_K(\boldsymbol{r}) = \sum_{j,l} \frac{u_{jlK}(r)}{r} \mathcal{Y}_{jlK}(\hat{\boldsymbol{r}})$$



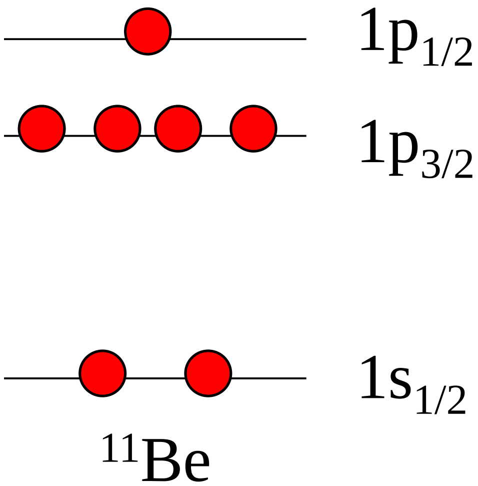


- K は角運動量ベクトルの z 軸への射影
- 核子の軌道は角運動量ベクトルに垂直な平面内
- プロレート変形の場合、小さな K ほど長軸に沿って運動

  →より引力を感じてエネルギーが下がる。
- 大きな K は短軸に沿って運動し、エネルギーを損する。

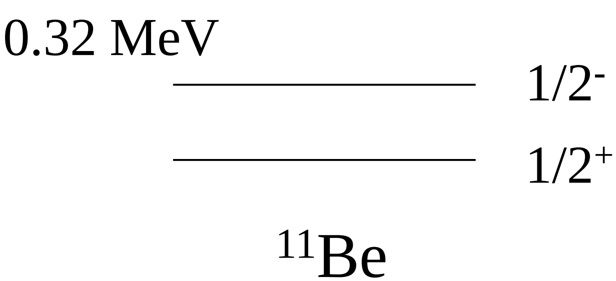
^{11}Be の問題に戻ると……

球形ポテンシャルの準位

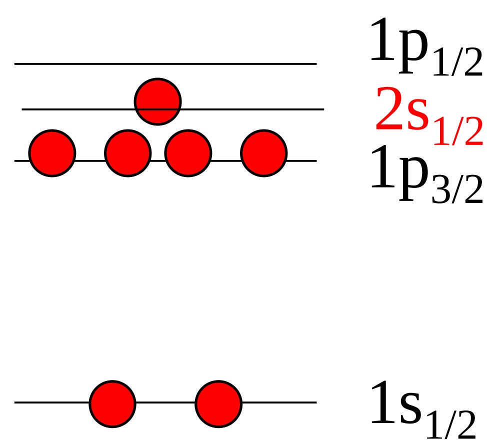


^{11}Be の基底状態は $I^{\pi} = 1/2^{-}$

実際の ^{11}Be の準位

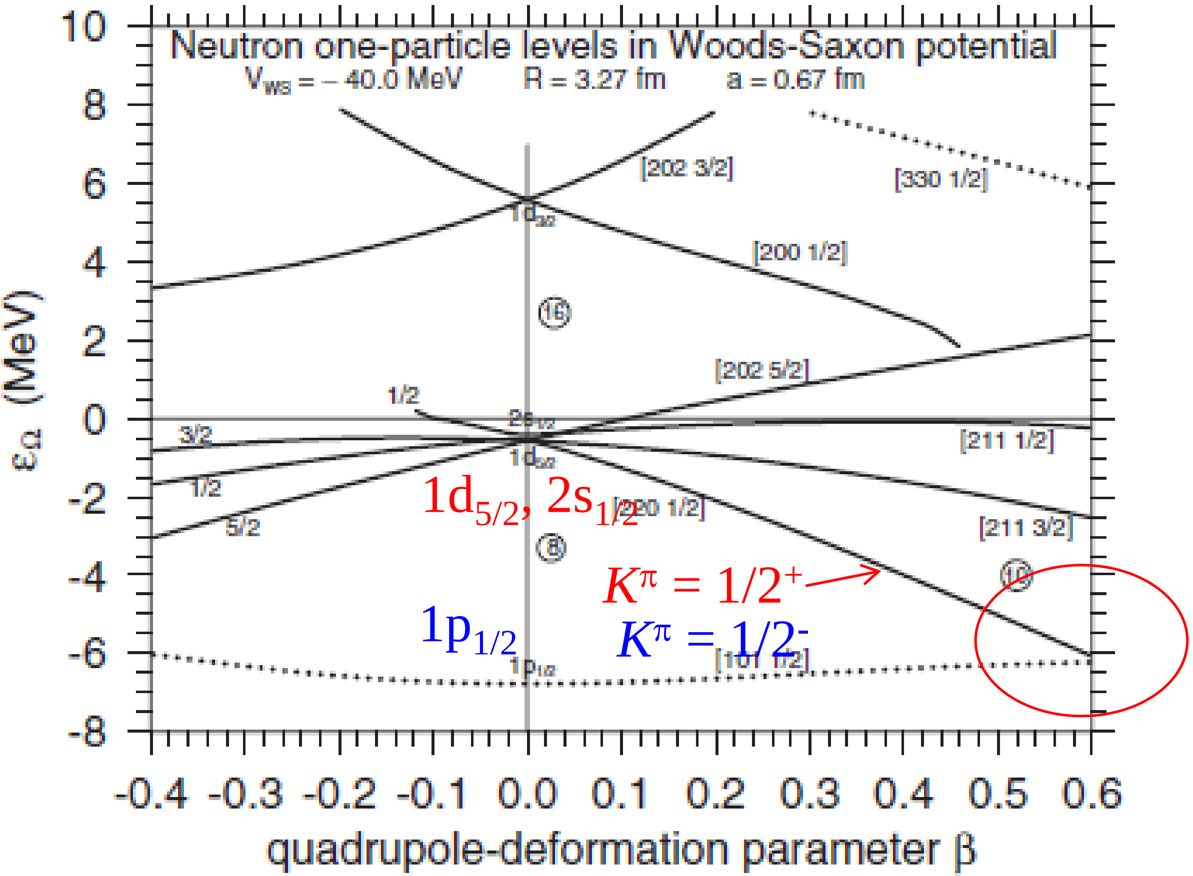


?



“parity inversion”

変形の効果で^{11}Be の準位構造は説明できるか?



変形度が大きくなると正パリティ状態と負パリティ状態が確かに逆転する

I. Hamamoto, J. Phys. G37(‘10)055102

（参考）^{10}Be の回転励起（有限の励起エネルギー）を取り入れた結合チャンネル計算：

H. Esbensen, B.A. Brown, H. Sagawa, PRC51(‘95)1274

F.M. Nunes, I.J. Thompson, R.C. Johnson, NPA596(‘96)171

s-wave dominance 現象

変形核では様々な l の成分が混ざる:

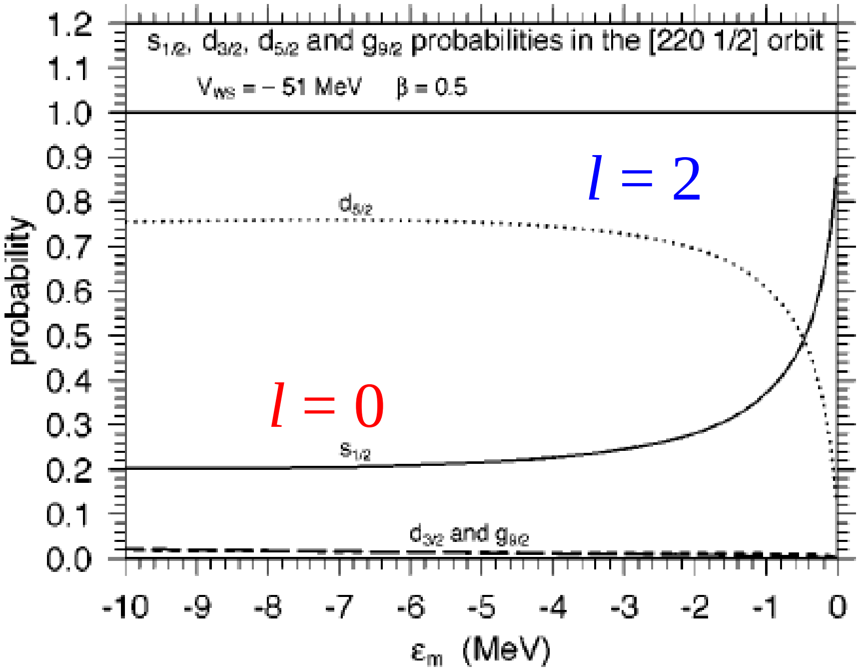
$$\Psi_{K^\pi=0^+}(\boldsymbol{r}) = R_0(r)Y_{00}(\hat{\boldsymbol{r}}) + R_2(r)Y_{20}(\hat{\boldsymbol{r}}) + R_4(r)Y_{40}(\hat{\boldsymbol{r}}) + \cdots$$

束縛が弱くなると、どんなに小さな変形においても、$l = 0$ の項が主要項になる。

（束縛エネルギーがゼロの極限では $l = 0$ の成分が 100%）

ポテンシャルが変形していても波動関数は球形になる

T. Misu, W. Nazarewicz, and S. Aberg, NPA614(‘97)44



I. Hamamoto, PRC69(‘04)041306(R)

s-wave dominance 現象

$$\Psi_K(\boldsymbol{r}) = \sum_l R_l(r) Y_{lK}(\hat{\boldsymbol{r}})$$

（簡単のために ls はナシ）

$$\Longrightarrow \boxed{P_l = \frac{\int r^2 R_l(r)^2 dr}{\sum_{l'} \int r^2 R_{l'}(r)^2 dr}}$$

(note)

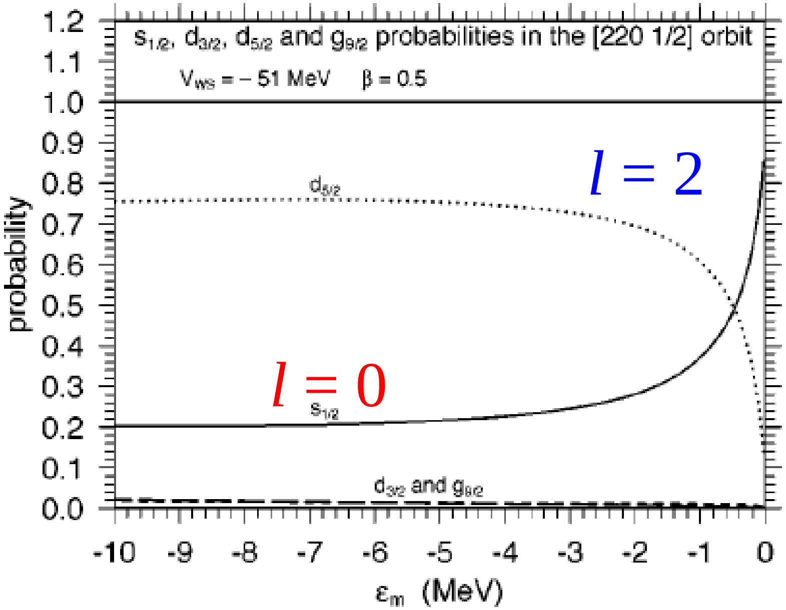
$$\int_0^\infty r^{n+2} dr\, R_l(r) R_{l'}(r) \propto \begin{cases} |\epsilon|^{(l+l'-n-1)/2} & (n > l + l' - 1) \\ -\frac{1}{2} \ln|\epsilon| & (n = l + l' - 1) \\ \text{const.} & (n < l + l' - 1) \end{cases}$$

T. Misu, W. Nazarewicz, and S. Aberg, NPA614('97)44

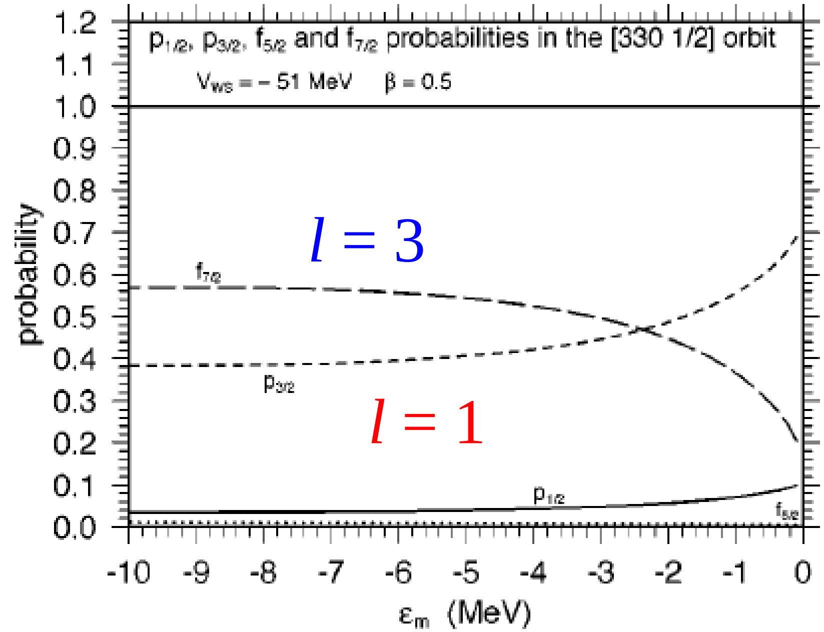
$\Longrightarrow$ $\int r^2 R_l(r)^2 dr$ は $l = 0$ で発散、他は有限

$$\boxed{P_l \sim \frac{\int r^2 R_l(r)^2 dr}{\int r^2 R_{l=0}(r)^2 dr} = \delta_{l,0}}$$

s-wave dominance 現象



I. Hamamoto, PRC69(‘04)041306(R)

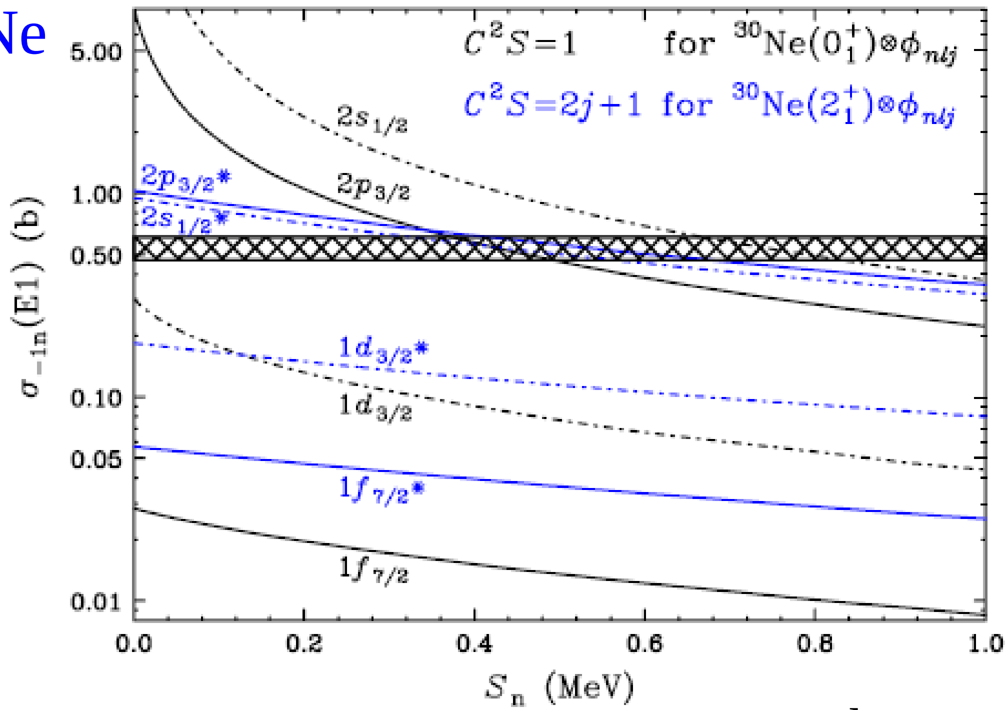


$l = 1$ の成分も同様に弱束縛で増大（但し 100% にはならない）

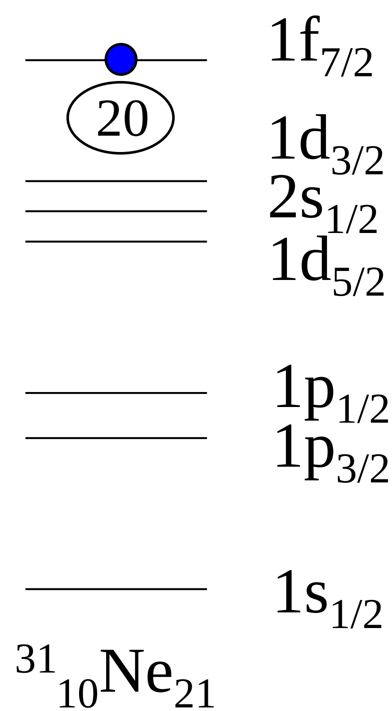
➡ 変形したハロー核の可能性: ^{31}Ne

変形ハロー核

^{31}Ne



T. Nakamura et al.,
PRL103(‘09)262501



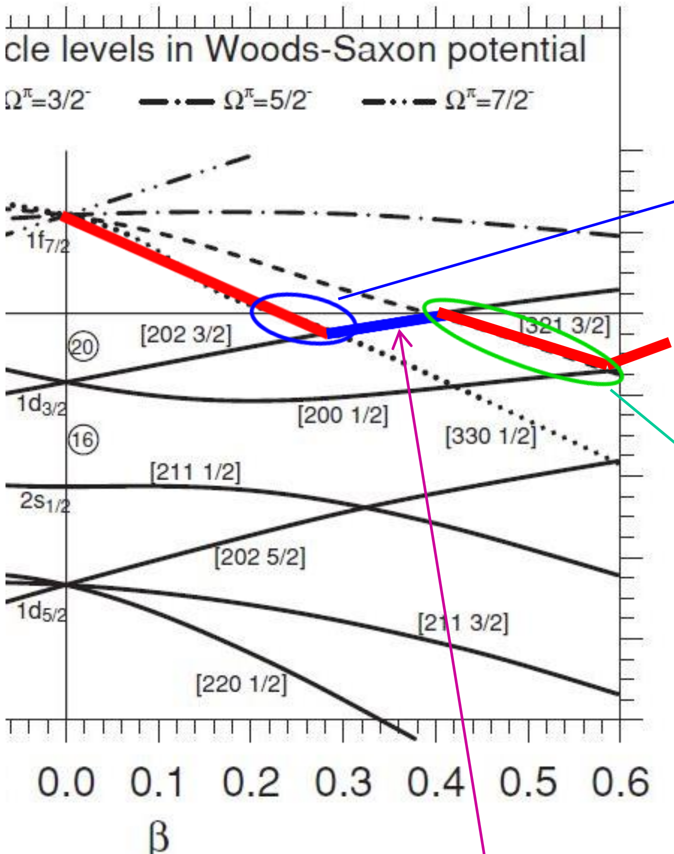
大きなクーロン分解反応の断面積

→ ハロー構造を示唆

^{31}Ne がハロー構造を持つためには球形だとダメ (f 波なので)

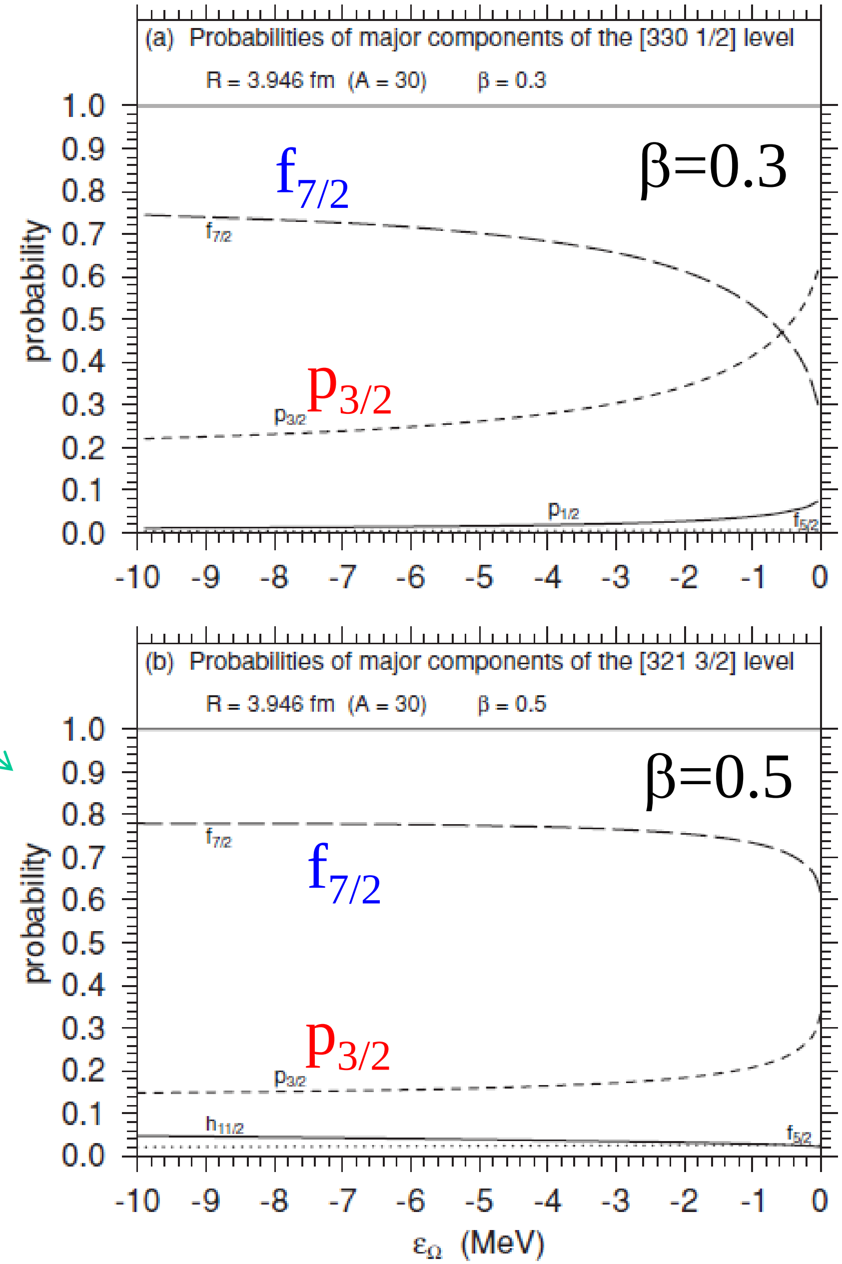
→ 変形?

Nilsson 模型による解析 [I. Hamamoto, PRC81('10)021304(R)]

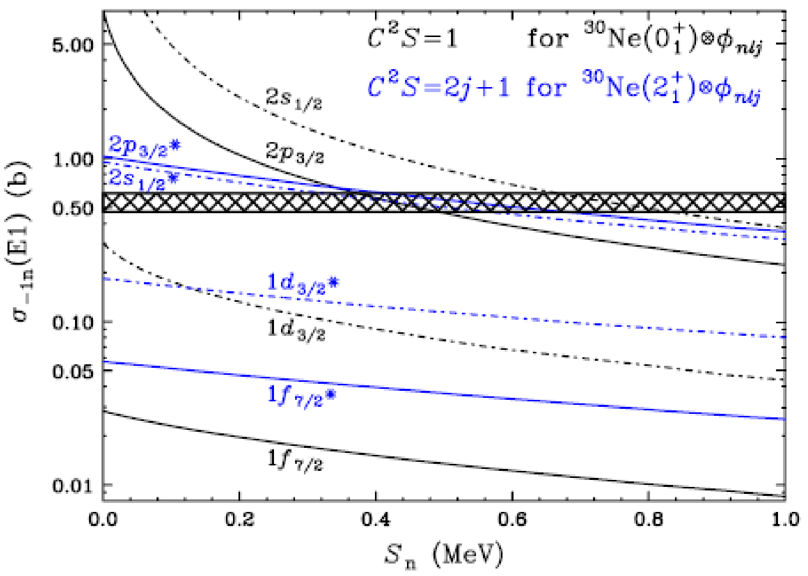


21st neutron

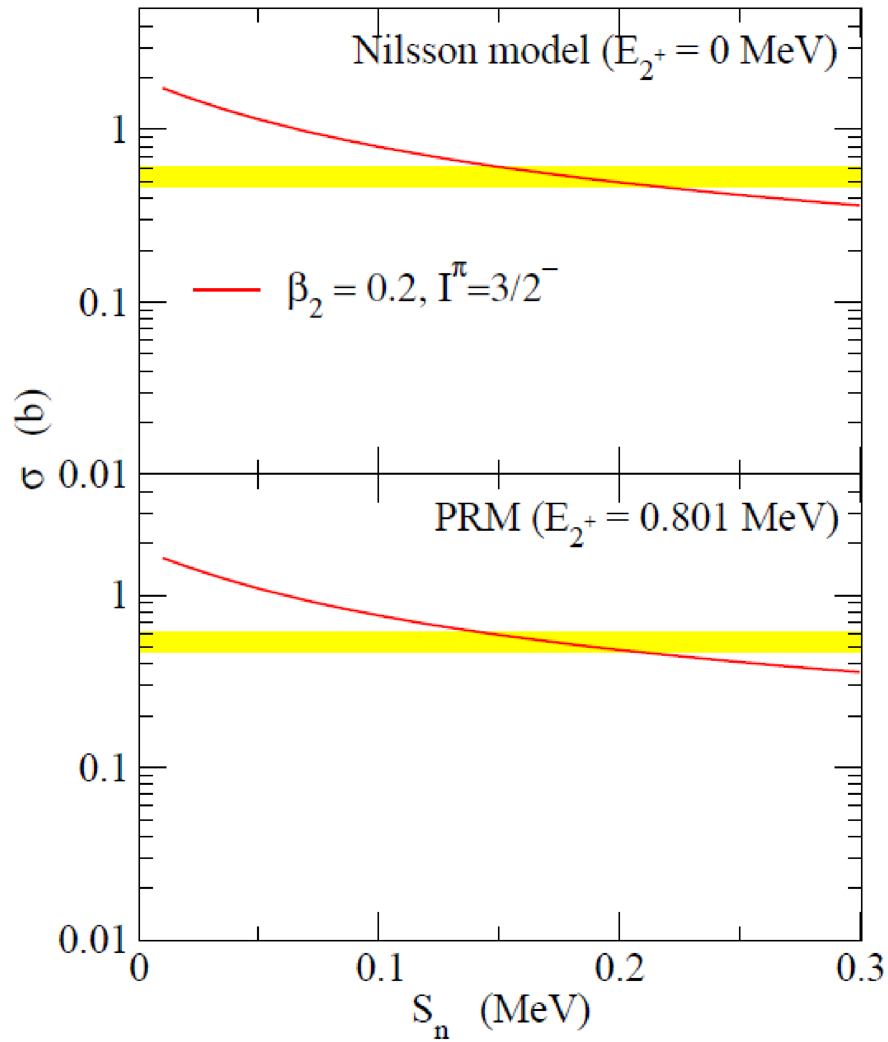
non-halo
$(\Omega^\pi = 3/2^+)$



^{31}Ne



T. Nakamura et al.,
PRL103(‘09)262501



大きなクーロン分解反応の
断面積

E_{2+} (^{30}Ne) = 0.801(7) MeV

P. Doornenbal et al.,
PRL103(‘09)032501

S_n (^{31}Ne) = 0.29 +/- 1.64 MeV

Y. Urata, K.H., and H. Sagawa,
PRC83(‘11)041303(R)

結合チャンネル系の共鳴状態

変形ポテンシャル中での一粒子波動関数:

$$\Psi(\boldsymbol{r}) = \sum_l \frac{u_l(r)}{r} Y_{lK}(\hat{\boldsymbol{r}})$$

（ここでも簡単のため
ls はナシ）

異なる性質を持ついろいろな項の重ね合わせ

$$\langle Y_{lK}|H - E|\Psi\rangle = 0$$

$$\boxed{\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} - E\right] u_l(r) + \sum_{l'} \langle Y_{lK}|V|Y_{l'K}\rangle\, u_{l'}(r) = 0}$$

結合チャンネル方程式

結合チャンネル系の共鳴状態

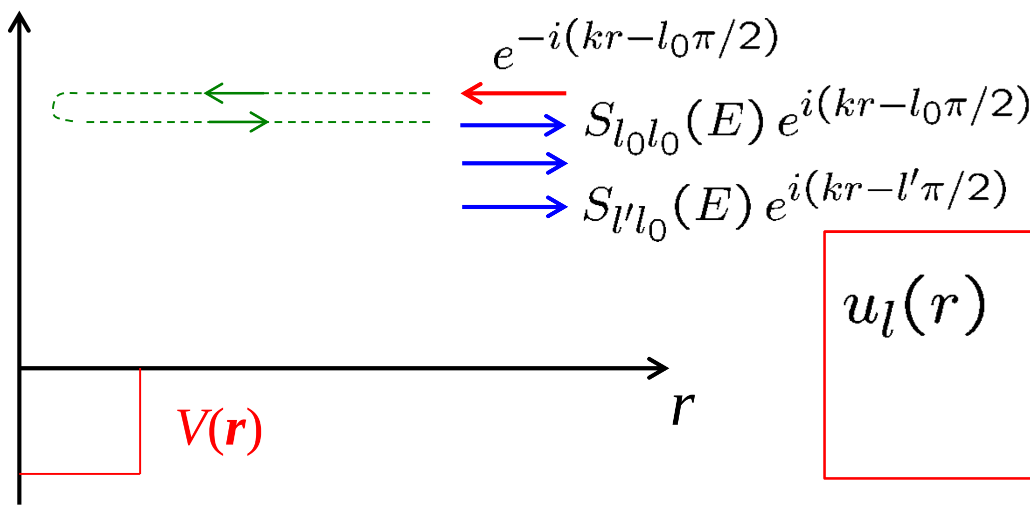
変形ポテンシャル中での一粒子波動関数:　$\Psi(\boldsymbol{r}) = \sum_l \frac{u_l(r)}{r} Y_{lK}(\hat{\boldsymbol{r}})$

$\langle Y_{lK} | H - E | \Psi \rangle = 0$

$$\boxed{\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} - E\right] u_l(r) + \sum_{l'} \langle Y_{lK}|V|Y_{l'K}\rangle\, u_{l'}(r) = 0}$$

結合チャンネル方程式

散乱状態



$$\boxed{\begin{aligned} u_l(r) \quad \to \quad & e^{-i(kr-l\pi/2)}\delta_{l,l_0} \\ & - S_{ll_0}(E)\, e^{i(kr-l\pi/2)} \end{aligned}}$$

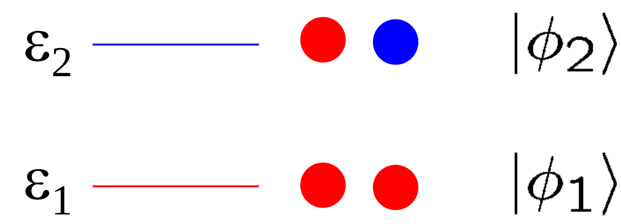
ある l_0 で入射して、l が変わって出ていく

結合チャンネル系の共鳴状態

より一般的には、

$$\Psi(\boldsymbol{r},\xi) = \sum_{n,l} \frac{u_{nl}(r)}{r}[Y_l(\hat{\boldsymbol{r}})\phi_n(\xi)]^{(JM)}$$

各内部状態に対する相対運動の波動関数の重ね合わせ



異なる内部状態（エネルギーが違ってもよい）

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2}+\frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}+\epsilon_n-E\right]u_{nl}(r)+\sum_{n'l'}\langle[Y_l\phi_n]^{(JM)}|V|[Y_{l'}\phi_{n'}]^{(JM)}\rangle\, u_{n'l'}(r)=0$$

結合チャンネル方程式

$$u_{nl}(r) \to e^{-i(kr-l\pi/2)}\delta_{nl,n_0l_0} - \sqrt{\frac{k_{n_0}}{k_n}}\, S_{nl,n_0l_0}(E)\, e^{i(kr-l\pi/2)}$$

ある (n_0, l_0) で入射して、(n, l) が変わって出ていく

Eigen-phase sum

single-channel: $S(E) = \mathrm{e}^{2i\delta(E)}$

$\Longrightarrow$ 同様のことを結合チャンネル系で出来るか? $\leftarrow$ S が行列: S_{ij}

Eigen-phase sum

A.U. Hazi, PRA19('79)920
K.H. and N. Van Giai, NPA735 ('04) 55

single-channel: $S(E) = e^{2i\delta(E)}$

⇨ 同様のことを結合チャンネル系で出来るか? ← S が行列: S_{ij}

S行列を対角化:

$$(U^\dagger S U)_{aa'} = e^{2i\delta_a}\delta_{a,a'} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta \equiv \sum_a \delta_a}$$

(固有位相)

(固有位相和)

cf. 一般化された Breit-Wigner の式:

$$S_{\alpha\beta} = e^{2i\phi_\alpha}\,\delta_{\alpha,\beta} - i\frac{\sqrt{\Gamma_\alpha\Gamma_\beta}}{E - E_R + i\Gamma/2}\,e^{i(\phi_\alpha+\phi_\beta)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta(E) = \tan^{-1}\frac{\Gamma}{2(E_R - E)} + \Delta_0(E)}$$

single-channel の場合と同様の振る舞い

固有チャンネル表示

ref. D. Loomba et al., JCP75 ('81) 4546

$$\Psi_{n_0}(r) = \sum_n \frac{u_n(r)}{r}|n\rangle$$

と表記を簡単にして書く

↑
入射チャンネル

$$u_n(r) \to e^{-i(kr-l_n\pi/2)}\delta_{n,n_0} - \sqrt{\frac{k_{n_0}}{k_n}}\,S_{nn_0}(E)\,e^{i(kr-l_n\pi/2)}$$

固有チャンネル:

$$\boxed{\tilde{\Psi}_a(\boldsymbol{r}) \equiv \sum_{n_0}\Psi_{n_0}(r)U_{n_0a} = \sum_n \frac{\tilde{u}_{na}(r)}{r}|n\rangle}$$

$$(U^\dagger SU)_{aa'} = e^{2i\delta_a}\delta_{a,a'}$$

$\varepsilon_n = 0$（断熱近似）の場合には

$$\boxed{\tilde{u}_{na}(r) \to \left(e^{-i(kr-l_n\pi/2)} - e^{2i\delta_a}\,e^{i(kr-l_n\pi/2)}\right)U_{na}}$$

single-channel の場合と同様の振る舞い

固有チャンネル表示

ref. D. Loomba et al., JCP75 ('81) 4546

$$u_n(r) \to e^{-i(kr-l_n\pi/2)}\delta_{n,n_0} - \sqrt{\frac{k_{n_0}}{k_n}}\, S_{nn_0}(E)\, e^{i(kr-l_n\pi/2)}$$

固有チャンネル:

$$\boxed{\tilde{\Psi}_a(\boldsymbol{r}) \equiv \sum_{n_0} \Psi_{n_0}(\boldsymbol{r}) U_{n_0 a} = \sum_n \frac{\tilde{u}_{na}(r)}{r}\,|n\rangle}$$

$$(U^\dagger S U)_{aa'} = e^{2i\delta_a}\delta_{a,a'}$$

$\varepsilon_n = 0$（断熱近似）の場合には

$$\boxed{\tilde{u}_{na}(r) \to \left(e^{-i(kr-l_n\pi/2)} - e^{2i\delta_a}\, e^{i(kr-l_n\pi/2)}\right) U_{na}}$$

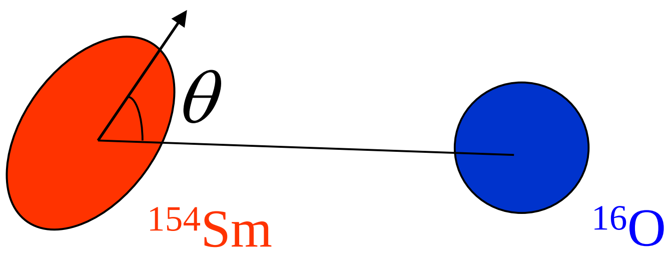
single-channel の場合と同様の振る舞い

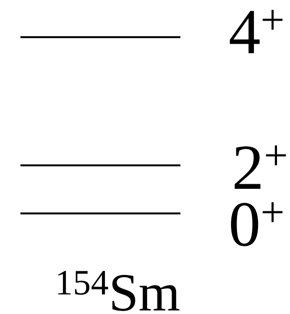
＊もし、特定の a が共鳴的振る舞いをすれば、その固有チャンネルを「共鳴状態」とみなすことができる。

（補足）重イオン反応における固有状態

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \sum_l \frac{u_I(r)}{r} Y_{J0}(\hat{\boldsymbol{r}})|\phi_I\rangle$$

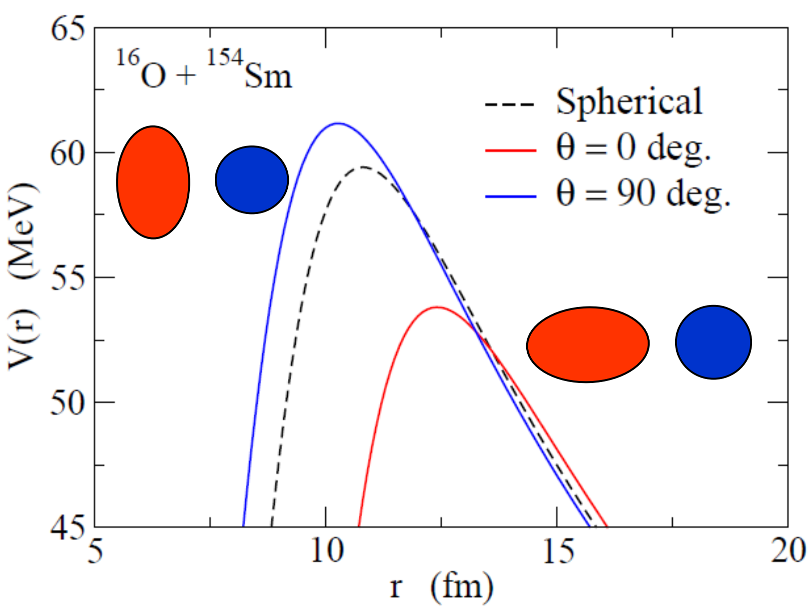
- 物理的チャンネル：回転子の角運動量状態 (I)
- 固有チャンネル：角度を固定した状態





$V(r,\theta)$
ポテンシャルは r と θ の関数

$$\boxed{\sigma_{\rm fus}(E) = \int_0^1 d(\cos\theta)\sigma_{\rm fus}(E;\theta)}$$



固有チャンネルごとに
（すなわち θ をとめて）
問題を考えた方がわかり
やすい。

結合チャンネル系のガモフ状態

固有チャンネル:

$$\tilde{\Psi}_a(\boldsymbol{r}) \equiv \sum_{n_0} \Psi_{n_0}(\boldsymbol{r}) U_{n_0 a} = \sum_n \frac{\tilde{u}_{na}(r)}{r} |n\rangle$$

$$(U^\dagger S U)_{aa'} = e^{2i\delta_a} \delta_{a,a'}$$

$\varepsilon_n = 0$（断熱近似）の場合には

$$\boxed{\tilde{u}_{na}(r) \to \left(e^{-i(kr - l_n\pi/2)} - e^{2i\delta_a}\, e^{i(kr - l_n\pi/2)}\right) U_{na}}$$

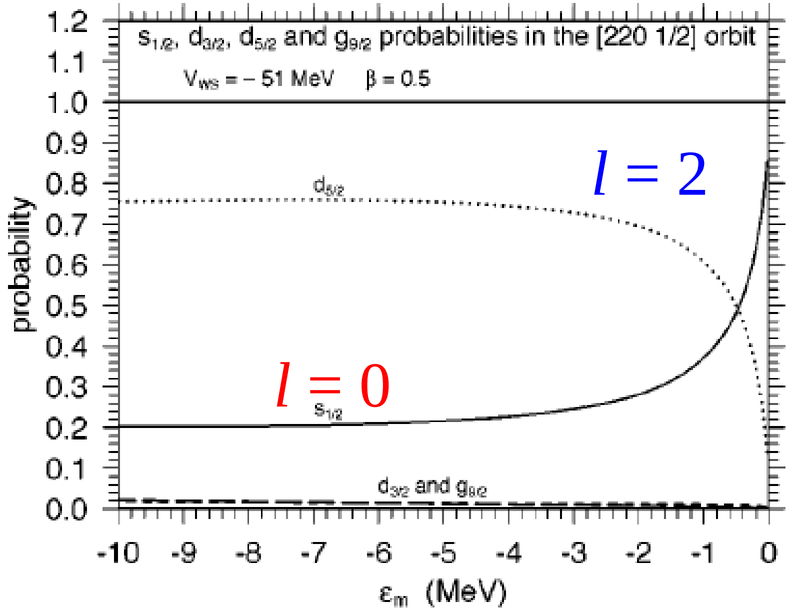
$e^{2i\delta_a}$ がある複素 E で極を持てば、全てのチャンネルで外向きの波

$$\boxed{\tilde{u}_{na}(r) \to -e^{2i\delta_a}\, e^{i(kr - l_n\pi/2)} U_{na}}$$

結合チャンネル系のガモフ状態

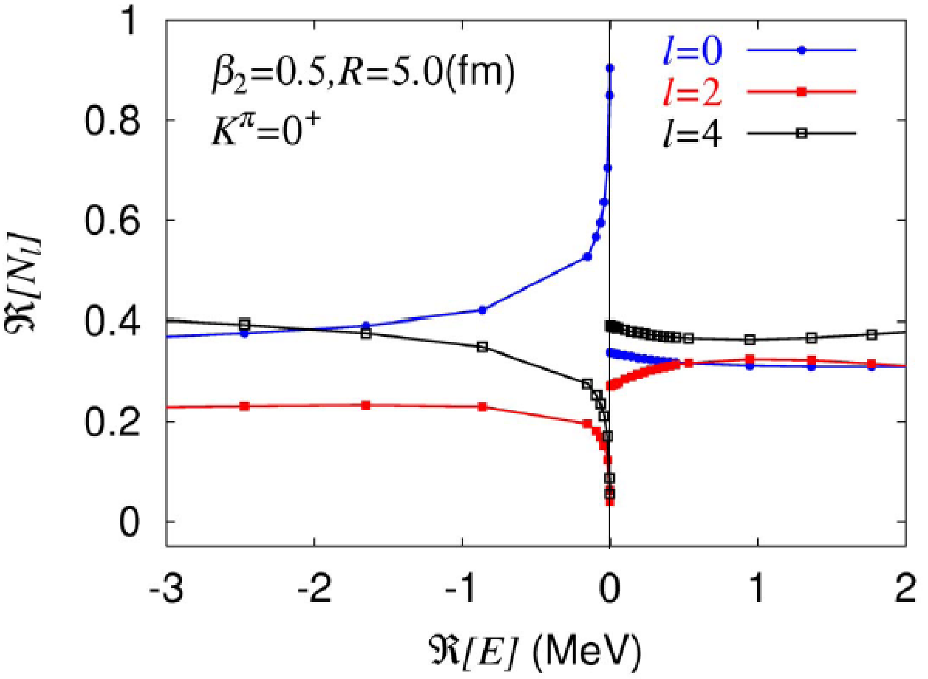
* 断熱近似が成り立たない場合には、 $\tilde{S}_{ij} \equiv \sqrt{\dfrac{k_j}{k_i}}\, S_{ij}$ を対角化

s-wave dominance 現象と共鳴状態



I. Hamamoto, PRC69(‘04)041306(R)

変形した共鳴(ガモフ)状態
の各成分



$$\tilde{\Psi}_a(\boldsymbol{r}) = \sum_n \frac{\tilde{u}_{na}(r)}{r}|n\rangle$$

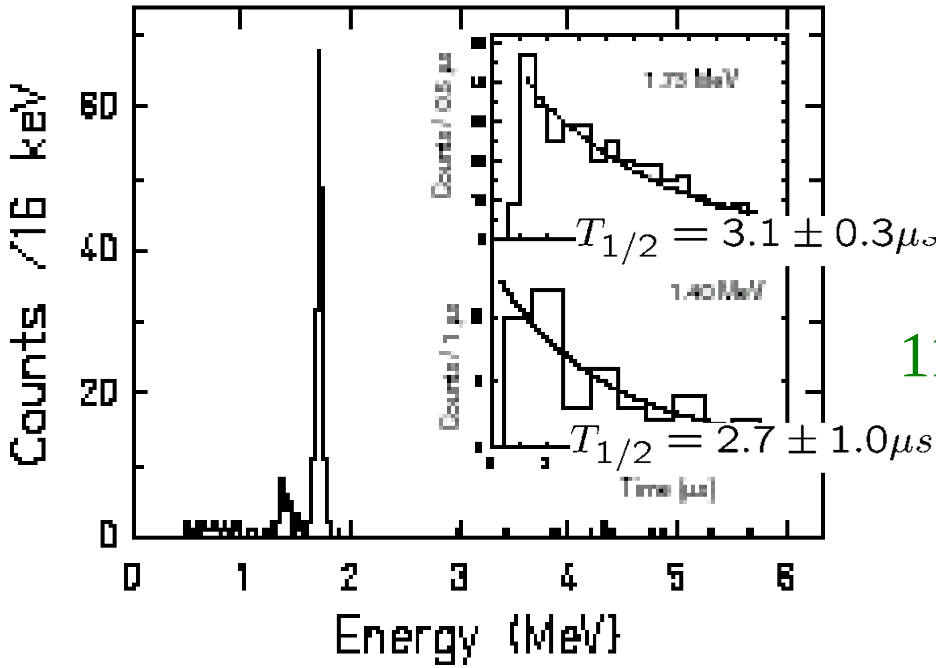
$$N_n \equiv \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^\infty dr\, e^{-\epsilon r^2}\,[\tilde{u}_n(r)]^2$$

s-wave dominance は
共鳴状態に連続的につながる
わけではない

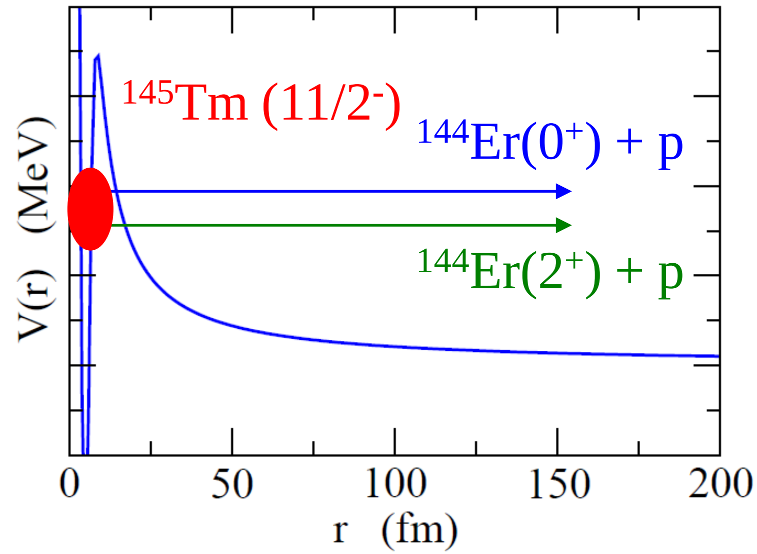
K. Yoshida and K. Hagino,
PRC72 (‘05) 064311

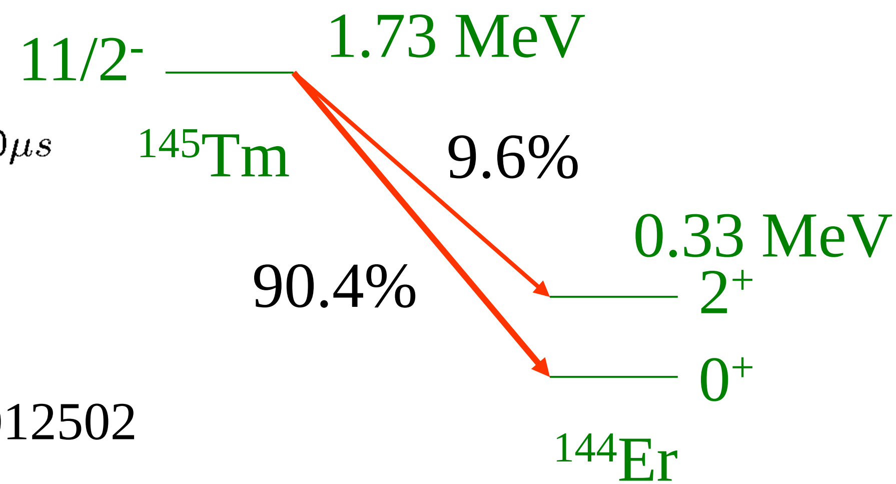
陽子放出崩壊の微細構造

陽子放出核: ^{145}Tm
(Oak Ridge group)



M. Karny,…., K.H., et al., PRL90 ('03) 012502





芯励起を入れて共鳴状態(ガモフ状態)をつくる
:結合チャンネルの問題

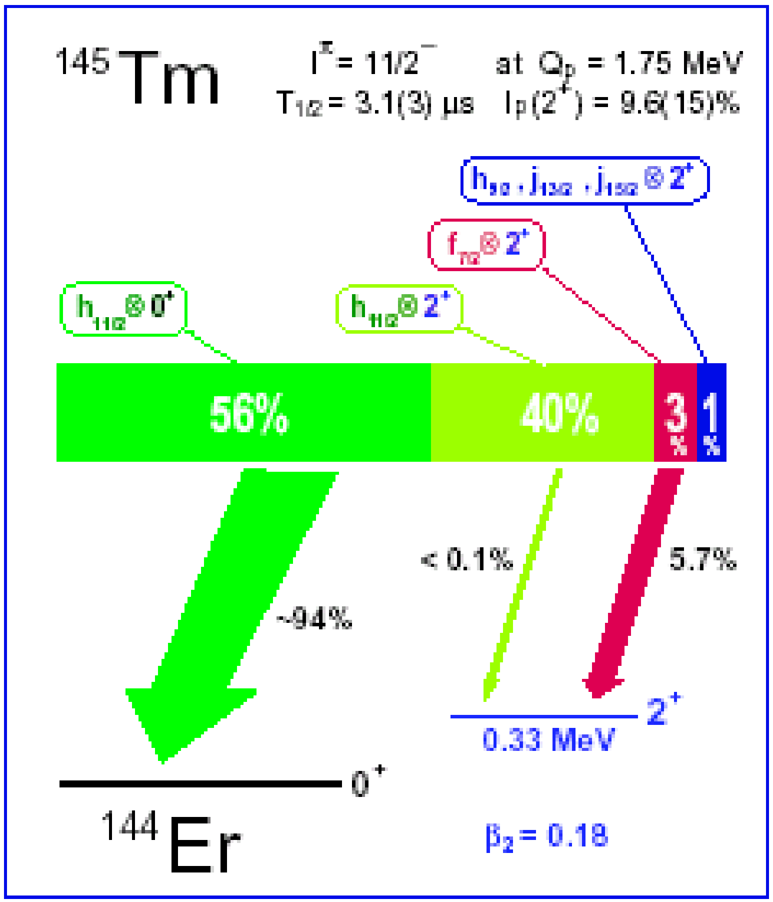
$$\Psi(\boldsymbol{r},\xi) = \sum_{n,j,l} \frac{u_{njl}(r)}{r} [\mathcal{Y}_{jl}(\hat{\boldsymbol{r}})\phi_n(\xi)]^{(JM)}$$

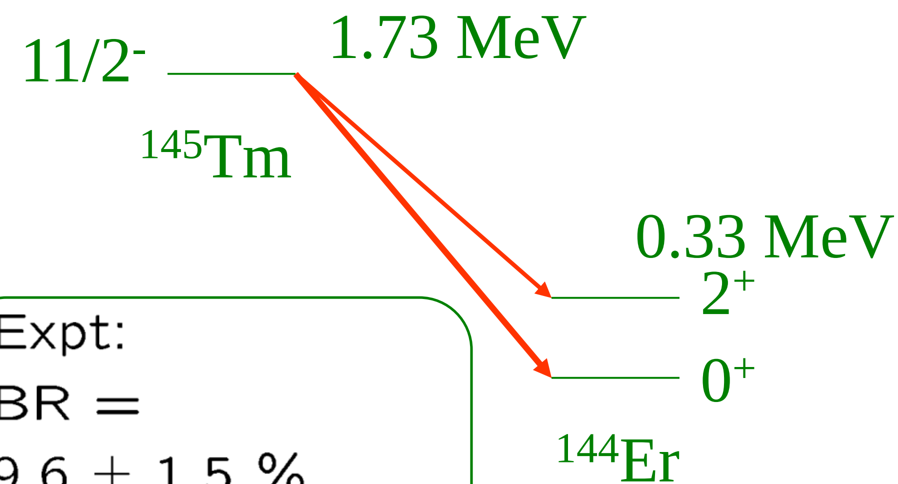
陽子放出崩壊の微細構造

M. Karny,…., K.H., et al., PRL90 ('03) 012502

$$\Psi(r,\xi) = \sum_{n,j,l} \frac{u_{njl}(r)}{r} [\mathcal{Y}_{jl}(\hat{r})\phi_n(\xi)]^{(JM)}; \qquad u_{njl}(r) \to \mathcal{N}_{njl} e^{i(kr - l\pi/2)}$$

$\phi_n(\xi)$: ^{144}Er(0^+) and ^{144}Er(2^+) ; collective vibration





Expt:
BR =
9.6 ± 1.5 %
$T_{1/2}$=3.1 ± 0.3 μs

Calc.
$T_{1/2}$=3.0 ± 0.4 μs
I_p=5.7 ± 0.3 %

Feschbach 共鳴

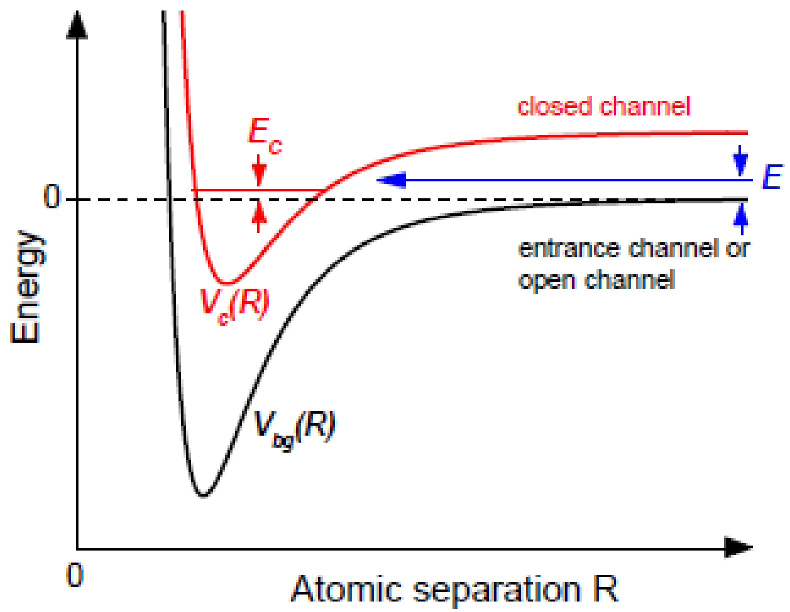
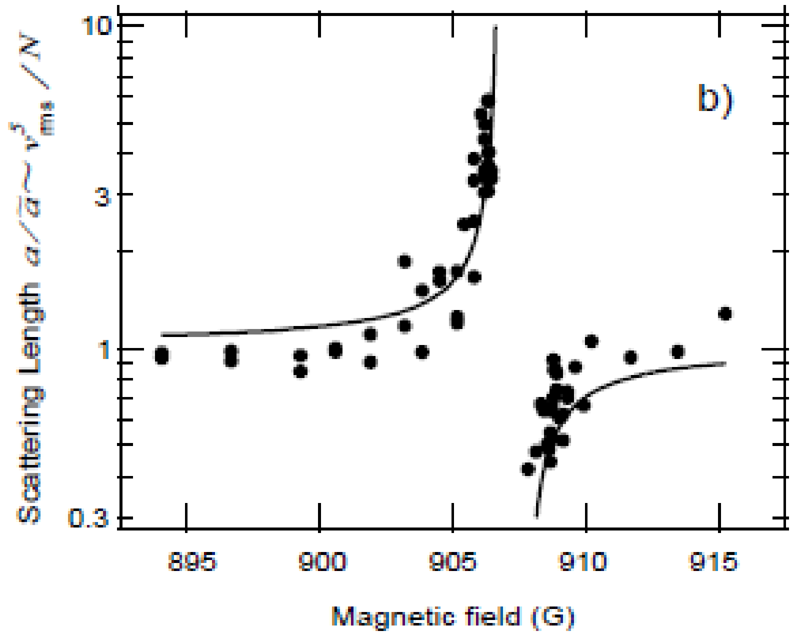


FIG. 1 Basic two-channel model for a Feshbach resonance. The phenomenon occurs when two atoms colliding at energy E in the entrance channel resonantly couple to a molecular bound state with energy E_c supported by the closed channel potential. In the ultracold domain, collisions take place near zero-energy, $E \to 0$. Resonant coupling is then conveniently realized by magnetically tuning E_c near 0, if the magnetic moments of the closed and open channel differ.

$E \sim 0$ 近傍における散乱長

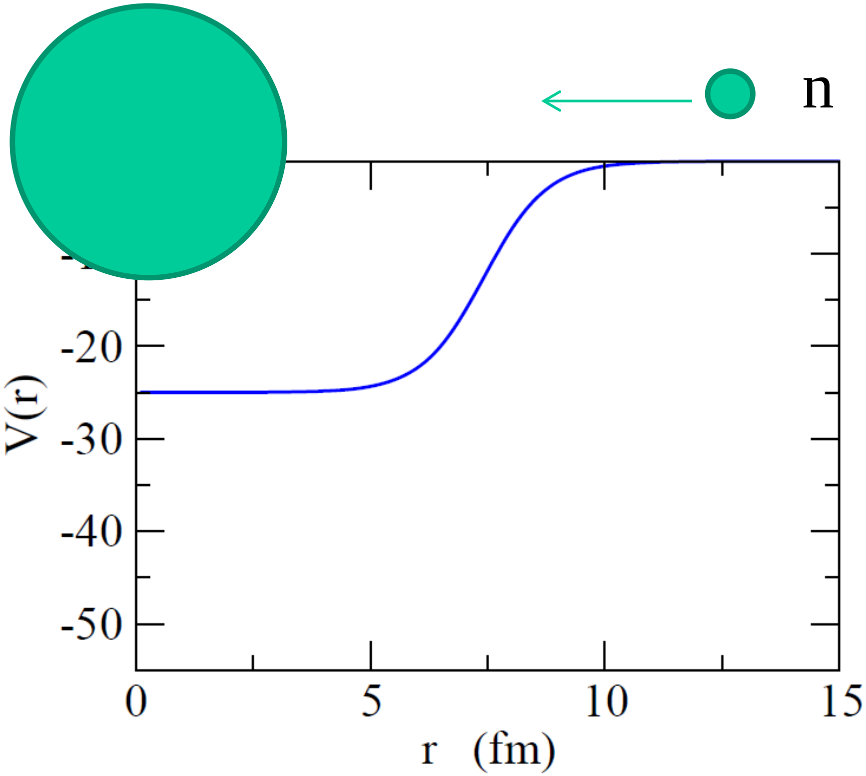


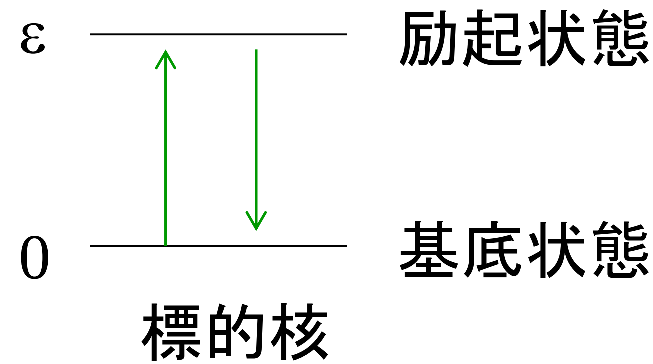
↓

超冷却分子への応用

C. Chin, R. Grimm, P. Julienne, and E. Tiesinga, RMP82 (‘10) 1225

A toy model : 中性子 s-波散乱に対する2チャンネル模型



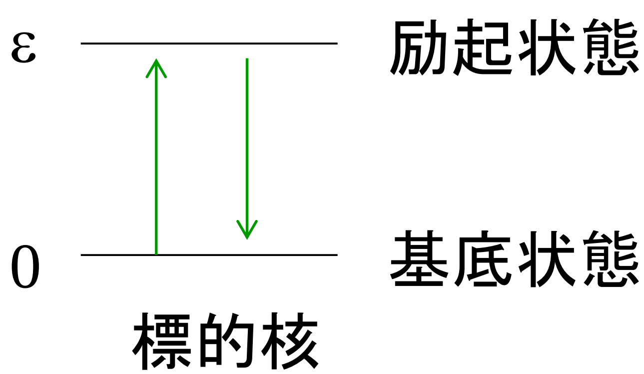


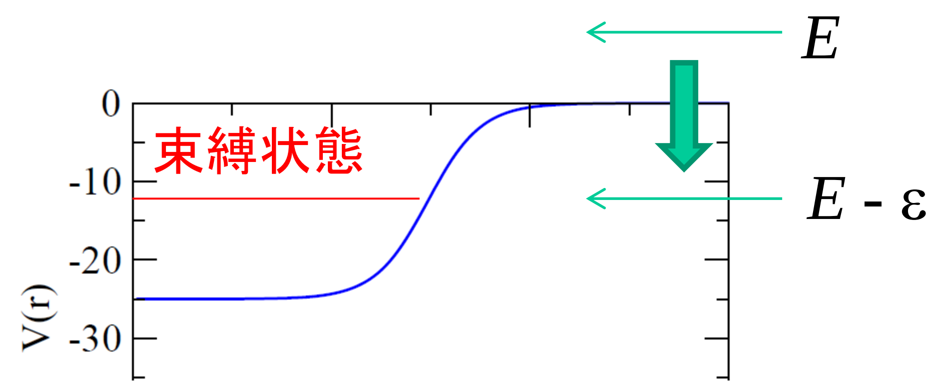
$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2}+V(r)-E\right]\begin{pmatrix} u_1(r) \\ u_2(r) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & F(r) \\ F(r) & \epsilon \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1(r) \\ u_2(r) \end{pmatrix}=0$$

$$\begin{aligned} u_1(r) &\to e^{-ik_1 r} - S_{00}\, e^{ik_1 r} \\ u_2(r) &\to -\sqrt{\frac{k_1}{k_2}}\, S_{10}\, e^{ik_2 r} \end{aligned}$$

($k_2 = i\kappa_2$ for $E < \varepsilon$)

A toy model : 中性子 s-波散乱に対する2チャンネル模型





$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2}+V(r)-E\right]\begin{pmatrix} u_1(r) \\ u_2(r) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & F(r) \\ F(r) & \epsilon \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1(r) \\ u_2(r) \end{pmatrix}=0$$

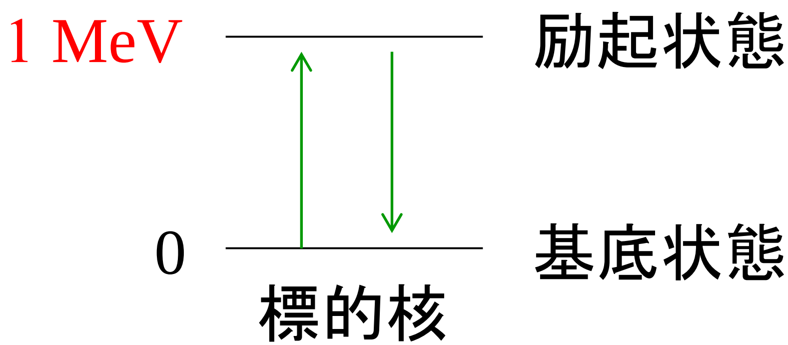
V(r): Woods-Saxon (V_0=23.03 MeV, R_0 = 4.5 fm, a = 0.63 fm)

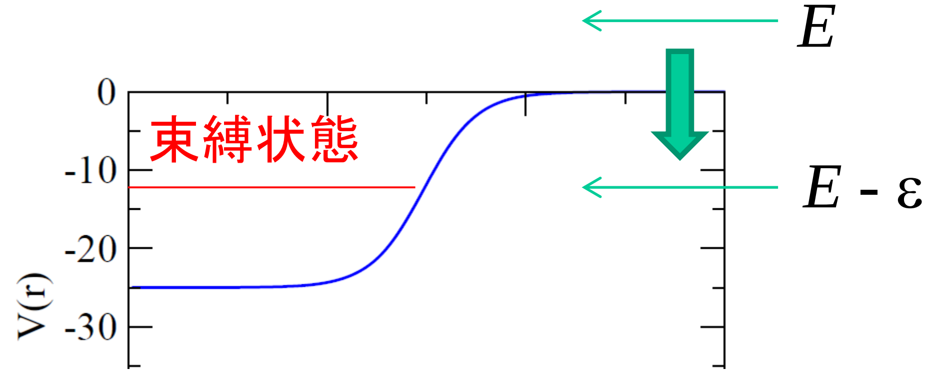
→ -14.8 MeV と -0.506 MeV に2つの束縛状態

$$F(r)=-\frac{\beta}{\sqrt{4\pi}}R_0\frac{dV}{dr}$$

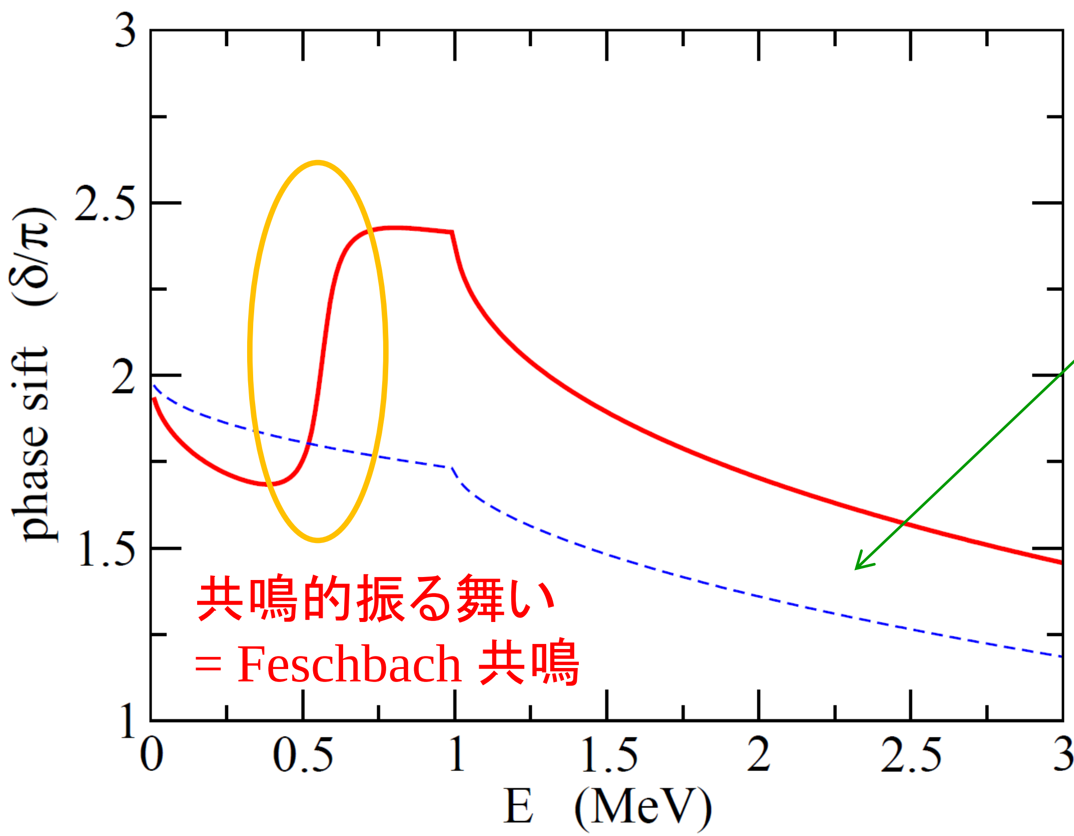
β = 0.1, ε = 1 MeV

⇒ 入射エネルギーが E=0.494 MeV のとき、標的核が励起すると
相対運動のエネルギーは E = -0.506 MeV になる。

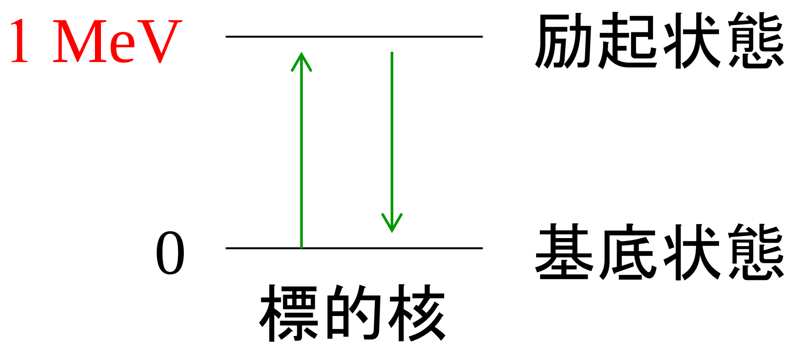


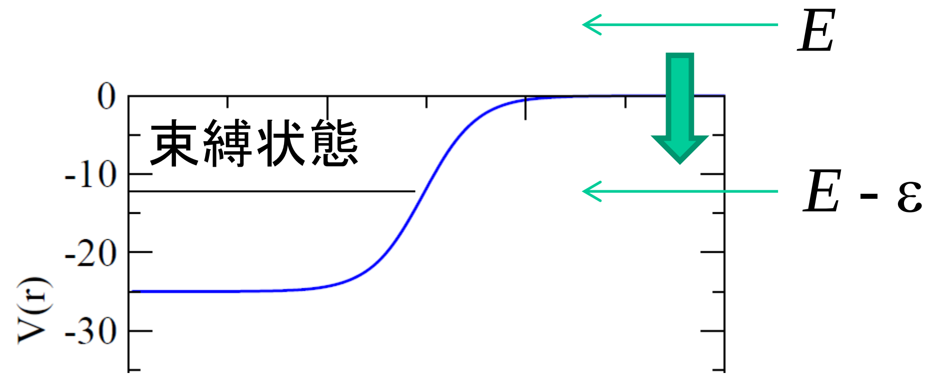


V(r) → -14.8 MeV と -0.506 MeV に束縛状態

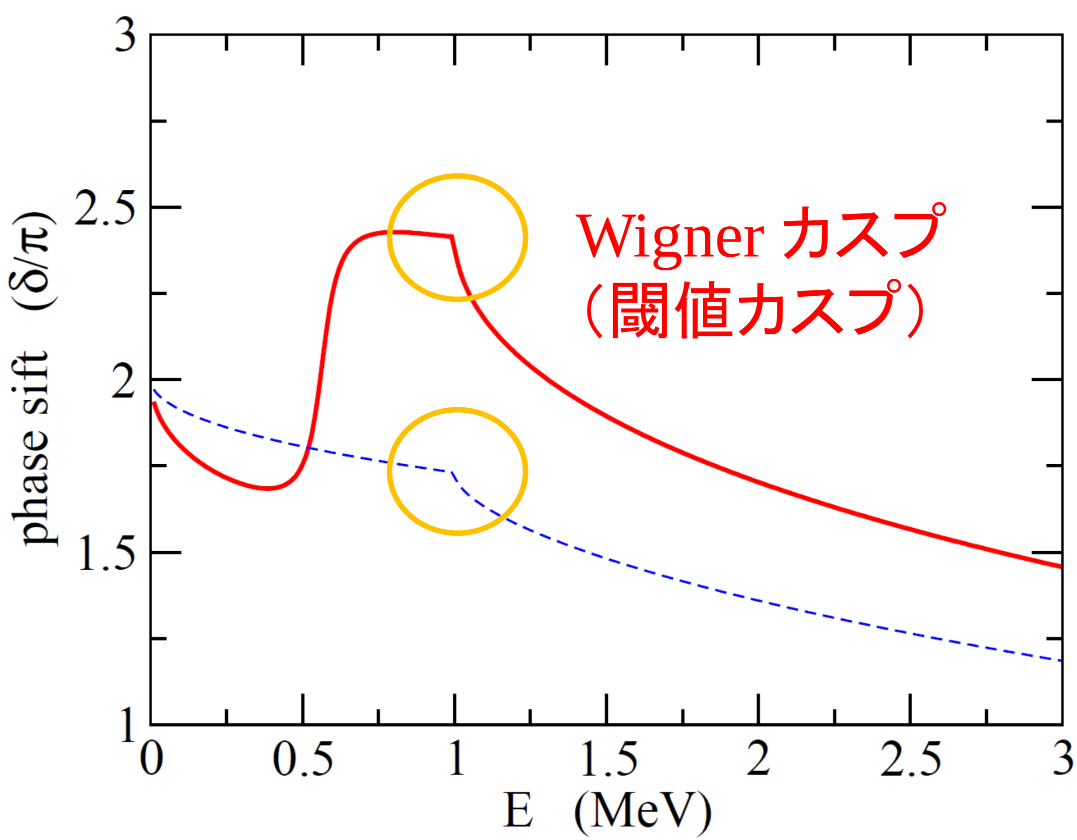


束縛状態が
-9.58 MeV と
-29.79 MeV
にあるときは
共鳴的振る舞い
を示さない





V(r) → -14.8 MeV と -0.506 MeV に束縛状態



E.P. Wigner,
Phys. Rev. 73 (‘48) 1002

ハドロン分光
実験でも出てくる