$$\psi(r) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{ik\cdot r}$$

periodic b.c. $\psi(x+L) = \psi(x)$

$\rightarrow e^{ik_x L} = 1 \rightarrow k_x = \frac{2\pi}{L} n_x$

$\downarrow d^3 n = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 d^3 k$

▨ Fermi-Gas 模型

$$N = 2 \times \int_0^{k_F} \frac{V}{(2\pi)^3} d^3 k = 2 \times 4\pi \int_0^{k_F} k^2 dk \cdot \frac{V}{(2\pi)^3}$$

$$= 2 \times \frac{4\pi}{3} k_F^3 \cdot \frac{V}{(2\pi)^3} = \frac{k_F^3}{3\pi^2} \cdot V$$

or $k_F = \left(3\pi^2 \frac{N}{V}\right)^{1/3}$.

average energy : $$\bar{E} = \frac{\int_0^{k_F} \frac{k^2 \hbar^2}{2m} d^3 k}{\int_0^{k_F} d^3 k} = \frac{\frac{4\pi}{2m} \cdot \frac{1}{5} k_F^5 \hbar^2}{\frac{4}{3}\pi k_F^3}$$

$$= \frac{3}{5} \frac{k_F^2 \hbar^2}{2m} = \frac{3}{5} \varepsilon_F$$

∘ 白色わい星

小さな恒星($M < 1.4 M_\odot$)

→ 核融合の燃料がなくなると重力崩壊

→ ある程度縮むと電子の縮退圧とつり合い安定

$V\downarrow \quad \varepsilon_F \nearrow \quad (\bar{E} \nearrow)$

半径 r の星の全エネルギー：

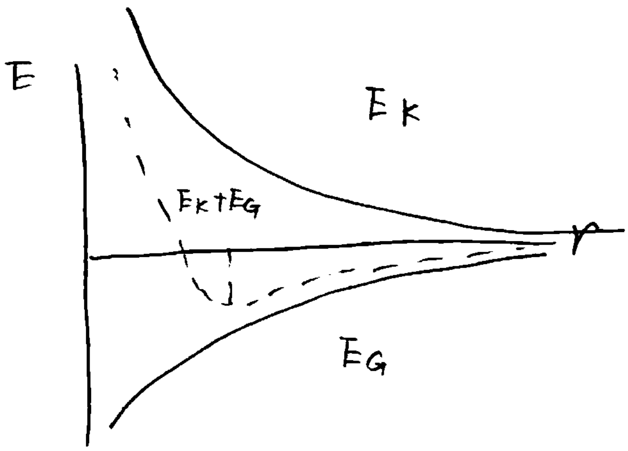
重力エネルギー：　$E_G = -\frac{3}{5} G \frac{M^2}{r}$

$$\left.\begin{array}{lll} \chi \cdot N & コ & の陽子 \\ (1-\chi)\cdot N & コ & の中性子 \\ \chi \cdot N & コ & の電子 \end{array}\right\}$$ からなる星

$$E_K = E_e + E_p + E_n \sim E_e = \frac{3}{5}\varepsilon_{F,e} \times \chi N$$

$$= \frac{3}{5}\chi N \cdot \frac{\hbar^2}{2m_e}\left(3\pi^2 \cdot \frac{\chi N}{V}\right)^{2/3}$$

$$= \frac{3}{5}\chi N \cdot \frac{\hbar^2}{2m_e}\left(3\pi^2 \cdot \frac{\chi N}{\frac{4}{3}\pi r^3}\right)^{2/3} = \frac{3}{5}\frac{\chi N}{r^2}\cdot\frac{\hbar^2}{2m_e}\left(\frac{9\pi}{4}\chi N\right)^{2/3}$$



$$E(r) = E_K + E_G$$

$$= \frac{\alpha}{r^2} - \frac{\beta}{r}$$

$$\alpha = \frac{3}{5}\chi N \cdot \frac{\hbar^2}{2m_e}\left(\frac{9\pi}{4}\chi N\right.$$

$$\beta = \frac{3}{5} G M^2$$

平衡点：　$0 = \frac{dE}{dr} = -\frac{\alpha}{r^3} + \frac{\beta}{r^2} \rightarrow r = \frac{\alpha}{\beta}$

$$= \frac{\chi N}{G M^2}\cdot\frac{\hbar^2}{2m_e}$$

$$\times \left(\frac{9\pi}{4}\chi\right.$$

$$\frac{\hbar^2 c^2}{2 m_e c^2} = \frac{197^2\ \mathrm{MeV}^2 \cdot \mathrm{fm}^2}{2 \times 0.5\ \mathrm{MeV}}$$

$$= 38809\ \mathrm{MeV} \cdot \mathrm{fm}^2 = 38809\ \mathrm{MeV} \times 10^{-30}\ \mathrm{m}^2$$

$N \sim 10^{57}$, $x = \frac{1}{2}$

$$\rightsquigarrow \quad r = \frac{x}{G \times N m_N^2} \cdot \frac{\hbar^2}{2 m_e} \left(\frac{9\pi}{4} \cdot x N \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$G = 6.7 \times 10^{-11}\ \mathrm{J \cdot m \cdot kg^{-2}}$$
$$m_N = 1.67 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}$$
$$1\ \mathrm{MeV} = 1.602 \times 10^{-13}\ \mathrm{J}$$

$$= \frac{0.5}{6.7 \times 10^{-11} \times 10^{57} \times 1.67^2 \times 10^{-54}} \cdot 38809 \times 10^{-30}$$

$$\times 1.602 \times 10^{-13} \times \left(\frac{9\pi}{4} \cdot 0.5 \cdot 10^{57} \right)^{2/3}$$

$$= 1663 \times 2.32 \times 10^{8} \cdot 10^{-30} \cdot 10^{-13} \cdot 10^{38}$$

$$= 3858 \times 10^{3}\ \mathrm{m}$$
$$= 3858\ \mathrm{km}$$

$$M = 1.67 \times 10^{-27} \times 10^{57} = 1.67 \times 10^{30}\ \mathrm{kg}$$

密度： $\rho = \dfrac{1.67 \times 10^{30}}{\frac{4}{3}\pi r^3} = 6.9 \times 10^{9}\ \mathrm{kg/m^3}$

cf. 太陽： 半径 696,200 km
重さ 1.98×10^{30} kg
平均密度 1411 $\mathrm{kg/m^3}$