四 γ崩壊について

1. 電磁場との相互作用

多体のハミルトニアン

$$H = \sum_i \frac{\mathbb{P}_i^2}{2m} + \sum_{i<j} v_{ij}$$

$$\longrightarrow \quad H = \sum_{i\in p} \frac{1}{2m}\left(\mathbb{P}_i - \frac{e}{c}\mathbb{A}(\mathbf{r},t)\right)^2 + \sum_{i\in n}\frac{\mathbb{P}_i^2}{2m}$$

$$+ \sum_{i<j} v_{ij} + H_{em}$$

(note) $m\ddot{\mathbf{r}} = e\left[\mathbb{E}(\mathbf{r},t) + \frac{1}{c}\mathbb{v}\times\mathbb{B}(\mathbf{r},t)\right]$

"minimum principle"

Coulomb ゲージ $\quad \nabla\cdot A(\mathbf{r},t) = 0, \quad \phi = 0$

$$\mathbb{B} = \nabla \times A$$

$$\mathbb{E} = -\frac{1}{c}\dot{A} - \cancel{\nabla\phi} \rightarrow 0$$

$$\nabla^2 A - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0$$

$$H_{em} = \frac{1}{8\pi}\int d\mathbf{r}\,\left(|\mathbb{B}|^2 + |\mathbb{E}|^2\right)$$

$$= \frac{1}{8\pi}\int d\mathbf{r}\,\left(\frac{1}{c^2}|\dot{A}|^2 + |\nabla\times A|^2\right)$$

$$H = \sum_{i=1}^{Z} \frac{1}{2m}\left(\mathbb{P}_i - \frac{e}{c}\mathbb{A}\right)^2 + \sum_{i=1}^{N} \frac{\mathbb{P}_i^2}{2m} + \sum_{i<j} V_{ij} + H_{em}$$

$$= \sum_{i=1}^{A} \frac{\mathbb{P}_i^2}{2m} + \sum_{i<j} V_{ij} + H_{em}$$

$$\underbrace{- \frac{1}{2m} \cdot \frac{e}{c} \sum_{i=1}^{Z} \left(\mathbb{P}_i \cdot \mathbb{A} + \mathbb{A} \cdot \mathbb{P}_i\right) + \frac{Z e^2}{2mc^2} \mathbb{A}^2}_{H_{int}}$$

$$H_{int} = - \frac{e}{2mc} \sum_i \left(\cancelto{0}{\frac{\hbar}{i}(\nabla_i \cdot \mathbb{A})} + 2\mathbb{A} \cdot \mathbb{P}_i \right) + \frac{Z e^2}{2mc^2} \mathbb{A}^2$$

$$\sim \frac{-e}{mc} \sum_{i=1}^{Z} \mathbb{A} \cdot \mathbb{P}_i$$

$$|\Phi_{IM}\rangle |0\rangle$$

$$\downarrow \rightsquigarrow h\nu$$

$$|\Phi_{I'M'}\rangle |1\rangle$$

フェルミの Golden Rule :

$$T = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle \Phi_{I'M'} | H_{int} | \Phi_{IM} \rangle \right|^2 \frac{dn}{dE}.$$

2. ベクトル・ポテンシャル

Coulomb gauge : $\nabla^2 A - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} A = 0$

$A \sim A e^{\pm i\omega t}$ を仮定

↓ $(\nabla^2 + k^2) A = 0 \qquad (\omega = ck)$

正則な解 : $j_L(kr) Y_{LM_L}(\hat{r})$

(自由粒子の波動関数と同じ)

フォトン : スピン 1 $\qquad (e_{M_S} \; : \; M_S = 0, \pm 1)$

フォトンの全角運動量 : $\vec{I} = \vec{L} + \vec{S}$, z 成分 I_M

↓

$$j_L(kr) [Y_L(\hat{r}) e]^{(IM_I)}$$

$$= \sum_{M_L M_I} j_L(kr) \langle L M_L 1 M_S | I M_I \rangle Y_{LM_L}(\hat{r}) e_{M_S}$$

I を指定したとき可能なLは $L = I, I\pm 1$.

→ 縦波条件 $\nabla \cdot A = 0$ を満たすように
線形結合をとる。

$$\mathbb{A}_{MkIM_I}(\mathbb{r}) = \eta\, j_I(kr)\,[Y_I(\hat{r})\,\mathbb{e}]^{(IM_I)}$$

$$= \frac{\eta}{\sqrt{I(I+1)}} \cdot \frac{\hbar}{i}\,(\mathbb{r}\times\nabla)\, j_I(kr)\, Y_{IM_I}(\hat{r})$$

$$\mathbb{A}_{EkIM_I} = \frac{i}{k}\,(\nabla \times \mathbb{A}_{MkIM_I}(\mathbb{r}))$$

$$= -\frac{\eta}{\sqrt{I(I+1)}}\,\frac{1}{k}\left\{\nabla\left(Y_{IM_I}(\hat{r})\frac{\partial}{\partial r}(r\, j_I(kr))\right) + k^2\,\mathbb{r}\, j_I(kr)\, Y_{IM_I}(\hat{r})\right\}$$

(note) $\vec{L}\, Y_{Im}(\hat{r}) = \sqrt{I(I+1)}\,[Y_I\,\mathbb{e}]^{(Im)}$

(note) $\mathbb{P}\cdot(\mathbb{r}\times\mathbb{P}) = \varepsilon_{ijk}\,\underbrace{P_k\, r_i}_{r_i P_k - i\hbar\delta_{ik}}\, P_j = \mathbb{r}\cdot(\mathbb{P}\times\mathbb{P}) = 0.$

$\boxed{\text{(note)}}$ パリティによる変化:

$$\Pi\, \mathbb{A}_{MkIM_I} = (-)^I\, \mathbb{A}_{MkIM_I}$$

$$\Pi\, \mathbb{A}_{EkIM_I} = (-)^{I+1}\, \mathbb{A}_{EkIM_I}.$$

◦第2量子化

$$A(r,t) = \sum_{\lambda=E,M} \sum_{kIM_I} \left\{ a^{\dagger}_{\lambda kIM_I} A_{\lambda kIM_I}(r) e^{-i\omega t} + c.c. \right\}$$

$$n = \sqrt{\frac{4\pi\hbar ck}{R}}$$ ととると (Rは箱の半径)

$$H_{em} = \sum_{\lambda kIM_I} \hbar\omega \left(a^{\dagger}_{\lambda kIM_I} a_{\lambda kIM_I} + \frac{1}{2} \right)$$

3. 電磁遷移確率

・状態密度

$$0 = j_I(k_n R) \sim \frac{1}{k_n R} \sin\left(k_n R - \frac{I}{2}\pi\right)$$

↓

$$k_n R = n\pi + \frac{I\pi}{2} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

↓

$$\frac{dn}{dE} = \frac{1}{\hbar c \Delta k} = \frac{1}{\hbar c} \cdot \frac{R}{\pi}$$

↓

$$T_{fi}(E, kIM_I) = \frac{2\pi}{\hbar} \cdot \overbrace{\cancel{\frac{4\pi\hbar c k}{R}} \cdot \cancel{\frac{1}{\hbar c}} \cdot \cancel{\frac{R}{\pi}}}^{= \frac{8\pi k}{\hbar}}$$

$$\times \left| \langle f | \frac{e}{kmc} \left(\nabla \times j_I(kr) [Y_I(\hat{r}) e]^{(IM_I)} \right) \cdot \sum_{i=1}^{Z} p_i | i \rangle \right|^2$$

$$T_{fi}(M, kIM_I) = \frac{8\pi k}{\hbar} \left| \langle f | \frac{e}{mc} \left(j_I(kr) [Y_I(\hat{r}) e]^{(IM_I)} \right) \cdot \sum_{i=1}^{Z} p_i | i \rangle \right|^2 .$$

長波長近似
$E_\gamma \ll \frac{\hbar c}{R_0}$

$$j_I(kr) \sim \frac{(kr)^I}{(2I+1)!!}\left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{(kr)^2}{2I+3} + \cdots\right)$$

$\downarrow$

$$T_{fi}(\lambda, kIM_I) \sim \frac{8\pi(I+1)}{\hbar \cdot I((2I+1)!!)^2} \left|\langle f | \hat{m}(\lambda\, kIM_I) | i \rangle\right|^2 \times \left(\frac{E_\gamma}{\hbar c}\right)^{2I+1}$$

$$\hat{m}(E, IkM_I) = \sum_{i=1}^{Z} e r_i^I Y_{IM_I}(\hat{r}_i) \equiv \hat{Q}_{IM_I}$$

$$\hat{m}(M, IkM_I) = \mu_N \sum_{i=1}^{A} \left\{ g_s^{(i)} s_i + \frac{2}{I+1} g_l^{(i)} \vec{l_i} \right\} \cdot \left(\nabla r_i^I Y_{IM_I}(\hat{r}_i)\right) \equiv \hat{M}_{IM_I}$$

$$\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_N c}$$

$g_l = 1$ for p. 0 for n.

○角運動量のz成分を区別しない時

$$T_{fi}(\lambda, I) = \frac{1}{2I_i+1} \sum_{m_i, m_f, M_I} T_{fi}(\lambda, I M_I)$$

$$= \frac{1}{2I_i+1} \sum_{m_i, m_f, M_I} \left| \langle I_f m_f | \hat{m}(\lambda, I M_I) | I_i m_i \rangle \right|^2$$

$\times \cdots$

(note) Wigner - Eckart の定理

$$\langle I_f m_f | \hat{m}(\lambda, I M_I) | I_i m_i \rangle$$

$$= (-)^{I_i - m_i} \frac{\langle I_f m_f \; I_i -m_i | I M_I \rangle}{\sqrt{2I+1}} \langle I_f \| \hat{m}(\lambda, I) \| I_i \rangle$$

↓

$$T_{fi}(\lambda, I) = \frac{8\pi(I+1)}{\hbar I((2I+1)!!)^2} \left(\frac{E_\gamma}{\hbar c}\right)^{2I+1} \underbrace{B(\lambda I, I_i \to I_f)}_{\text{換算遷移確率}}$$

$$B(EI; I_i \to I_f) = \frac{1}{2I_i+1} \left| \langle I_f \| \hat{Q}_I \| I_i \rangle \right|^2$$

$$B(MI; I_i \to I_f) = \frac{1}{2I_i+1} \left| \langle I_f \| \hat{M}_I \| I_i \rangle \right|^2.$$

一般に　$B(EI) \gg B(MI)$

$B(EI) \gg B(E, I+1) \gg \cdots$

E2 と M1 の競合が起こることもある.

4. 選択則

$$\langle I_f m_f | \hat{Q}_{\lambda\mu} \underbrace{| I_i m_i \rangle}_{\text{初期状態}}$$

初期状態 + 1フォトン状態

→ 合成角運動量

$|\lambda - I_i|, \cdots, \lambda + I_i$

z-成分: $\mu + m_i$

～

$$|\lambda - I_i| \le I_f \le \lambda + I_i$$

$$m_f = \mu + m_i$$

パリティ: $(-)^{I}$ (E), $(-)^{I+1}$ (M)

例) $2^+ \to 0^+$: E2

$3^- \to 0^+$: E3

$4^+ \to 2^+$: E2, E4, M3, E6, M5

$3^+ \to 2^+$: E2, M1, E4, M3, M5

unnatural parity

$2^+ \to 3^-$: E1, E3, E5, M2, M4