四 集団振動運動について

1. 慣性質量に対する流体模型

原子核の変形： $R(\theta,\varphi) = R_0 \left(1 + \sum_{\lambda,\mu} \alpha_{\lambda\mu} Y^{*}_{\lambda\mu}(\theta,\varphi)\right)$.

平衡点の周りの微小振動を記述するハミルトニアン：

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\lambda,\mu} \left\{ B_\lambda |\dot{\alpha}_{\lambda\mu}|^2 + C_\lambda |\alpha_{\lambda\mu}|^2 \right\}.$$

◦ B_λ をどう見積もるか → 流体アプローチ

古典的な渦なし (irrotational), 非圧縮性 (incompressible) 流体を仮定.

渦なし流体 → $\nabla \times \underbrace{v(r)}_{\text{流れの速度}} = 0$

↓

$v = -\nabla \underbrace{\Phi(r)}_{\text{速度ポテンシャル}}$

非圧縮性流体 → $\rho = \text{const}$

↓ 連続の式： $\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}}_{\substack{\shortparallel \\ 0}} + \nabla \cdot (\rho v) = 0$

↓ $\nabla \cdot v = 0$

$$\boxed{\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = 0.}$$

解：$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{\lambda\mu} d^*_{\lambda\mu} \, r^\lambda \, Y_{\lambda\mu}(\hat{\mathbf{r}})$

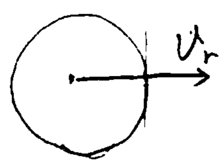
cf. 自由粒子に対するシュレーディンガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 \Psi(\mathbf{r}) = E\,\Psi(\mathbf{r})$$

$$\Psi(\mathbf{r}) = \frac{u_l(r)}{r} Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})$$

$$u_l(r) \sim r^{l+1}$$

境界条件：



$v_r = \dot{R}$

$$\frac{\partial}{\partial t} R(\theta, \varphi) = \left[v_r \right]_{r=R_0} = -\left[\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right]_{r=R_0}$$

$$\downarrow$$

$$R_0 \sum_{\lambda,\mu} \dot{\alpha}_{\lambda\mu} Y^*_{\lambda\mu} = -\sum_{\lambda\mu} \lambda R_0^{\lambda-1} d_{\lambda\mu} Y^*_{\lambda\mu}$$

$$\boxed{d_{\lambda\mu} = -\frac{1}{\lambda} R_0^{2-\lambda} \dot{\alpha}_{\lambda\mu}}$$

流体全体の運動エネルギー：

$$T = \frac{m}{2}\rho \int v^2 d\mathbf{r} = \frac{m}{2}\rho \int |\nabla \Phi|^2 d\mathbf{r}$$

$$= \cdots\cdots = \frac{m}{2}\rho R_0^5 \sum_{\lambda,\mu} \frac{1}{\lambda} |\dot{\alpha}_{\lambda\mu}|^2$$

$$\updownarrow$$

$$\frac{1}{2} \sum_{\lambda,\mu} B_\lambda |\dot{\alpha}_{\lambda\mu}|^2$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{B_\lambda = \frac{\rho m R_0^5}{\lambda} = \frac{3}{4\pi\lambda} A \cdot m R_0^2}$$

2. 表面振動の量子化

$$H = \frac{1}{2}\sum_{\lambda,\mu}\left\{ B_\lambda |\dot{\alpha}_{\lambda\mu}|^2 + C_\lambda |\alpha_{\lambda\mu}|^2 \right\}$$

$$\xrightarrow[\text{正準量子化}]{} \quad H = \sum_{\lambda\mu} \hbar\omega_\lambda \left(b^\dagger_{\lambda\mu} b_{\lambda\mu} + \frac{1}{2} \right)$$

$$\omega_\lambda = \sqrt{C_\lambda / B_\lambda}$$

$$[b_{\lambda\mu}, b_{\lambda'\mu'}] = 0, \quad [b_{\lambda\mu}, b^\dagger_{\lambda'\mu'}] = \delta_{\lambda\lambda'}\delta_{\mu\mu'}$$

- 1フォノン状態

$$b^\dagger_{\lambda\mu}|0\rangle$$

角運動量 $I = \lambda$, $I_z = \mu$,
パリティ $(-)^\lambda$

- 2フォノン状態

$$\frac{1}{\sqrt{2}} b^\dagger_{\lambda\mu} b^\dagger_{\lambda'\mu'} |0\rangle$$

角運動量のよい状態に組み直す

$\rightarrow$ $(I, I_z) = (\lambda, \mu)$ と $(I, I_z) = (\lambda', \mu')$
の合成

$$[b_\lambda^\dagger b_{\lambda'}^\dagger]^{(IM)} = \sum_{\mu\mu'} \underbrace{\langle \lambda\mu\,\lambda'\mu' | IM \rangle}_{\text{クレブシュ・ゴルダン係数}} b_{\lambda\mu}^\dagger b_{\lambda'\mu'}^\dagger$$

$\lambda = \lambda' = 2$ の場合：

$$[b_2^\dagger b_2^\dagger]^{(IM)} = \sum_{\mu\mu'} \langle 2\mu\,2\mu' | IM \rangle b_{2\mu}^\dagger b_{2\mu'}^\dagger$$

$$= \sum_{\mu\leq\mu'} \langle 2\mu\,2\mu' | IM \rangle b_{2\mu}^\dagger b_{2\mu'}^\dagger + \underbrace{\langle 2\mu'\,2\mu | IM \rangle}_{= (-)^I \langle 2\mu\,2\mu' | IM \rangle} \underbrace{b_{2\mu'}^\dagger b_{2\mu}^\dagger}_{= b_{2\mu}^\dagger b_{2\mu'}^\dagger}$$

$$= \sum_{\mu\leq\mu'} \{1 + (-)^I\} \langle 2\mu\,2\mu' | IM \rangle b_{2\mu}^\dagger b_{2\mu'}^\dagger$$

$\Downarrow$ I：偶数のみ

$2\times\hbar\omega_2$ ——— $0^+, 2^+, 4^+$

$\hbar\omega_2$ ——— 2^+

——— 0^+