▨ β崩壊について

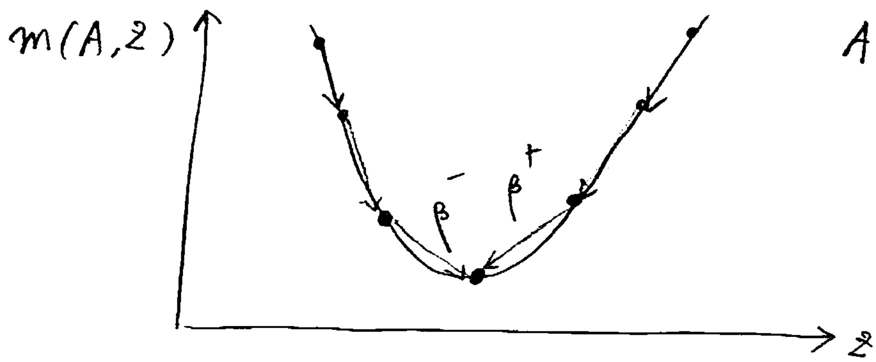
0. β安定線

液滴模型

$$B(N,Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{sym}\frac{(N-Z)^2}{A}$$

↓

$$m(A,Z) = f(A) + a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_{sym}\frac{(A-2Z)^2}{A}$$

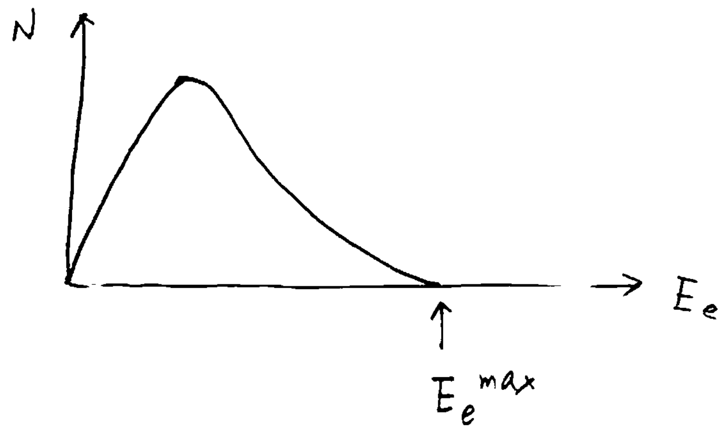


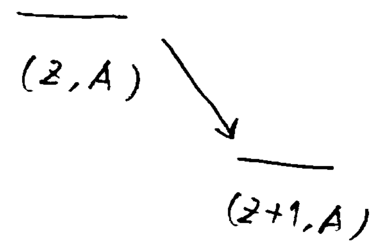
A：固定

Ⅲ β崩壊について

1. β線スペクトルとニュートリノ

$$(Z, A) \longrightarrow (Z+1, A) + e^-$$





$$E_e^{max} \sim M(A, Z)c^2 - M(A, Z+1)c^2 - m_e c^2$$

連続分布 → 3体崩壊を示唆

パウリ (1931): ニュートリノを仮定

$$\begin{cases} (Z, A) \to (Z+1, A) + e^- + \bar{\nu}_e & ;\ \beta^- \text{崩壊} \\ (Z, A) \to (Z-1, A) + e^+ + \nu_e & ;\ \beta^+ \text{崩壊} \end{cases}$$

素過程

$$n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$$
$$p \to n + e^+ + \nu_e$$

その他のプロセス

$$p + e^- \to n + \nu_e \qquad (\text{電子捕獲})$$

$$\left.\begin{array}{l} \nu_e + n \to p + e^- \\ \bar{\nu}_e + p \to n + e^+ \end{array}\right\} \text{ニュートリノ-原子核反応}$$

2. β崩壊の理論（非相対論的，スピン無し模型）

$$H_\beta = g_F \int \left(\psi_p^+(r)\psi_n(r)\right)\left(\psi_e^+(r)\psi_{\nu_e}(r)\right) dr + h.c.$$

$$\left.\begin{array}{l}\psi_a^+(r)\text{：場所 } r \text{ に } a \text{ を生成} \\ \qquad\qquad\qquad\quad \bar{a} \text{ を消滅}\end{array}\right\} \text{させるオペレーター}$$

⇓ $\psi_e^+ \psi_{\nu_e}$ ： $e^- + \bar{\nu}_e$ を生成

フェルミの Golden Rule:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\text{終状態}} |\langle f | H_\beta | i \rangle|^2$$

・状態数： 観測 → E_{e^-} を測定

⇓

$$\sum_{\text{終状態}} = V^2 \int \frac{dP_e'}{(2\pi\hbar)^3} \frac{dP_{\bar{\nu}_e}}{(2\pi\hbar)^3} \underbrace{\delta(E_e' + E_{\bar{\nu}_e} - Q)}_{\text{エネルギー保存}}$$

$$\times \underbrace{\delta(E_e' - E_e)}_{E_e\text{を測定.}}$$

$$= V^2 \frac{(4\pi)^2}{(2\pi\hbar)^3} \int P_e'^2 dP_e' \, P_{\bar{\nu}_e}^2 \, dP_{\bar{\nu}_e}$$

$$\times \delta(E_e' + E_{\bar{\nu}_e} - Q)\,\delta(E_e' - E_e)$$

(note) $E_{\bar{\nu}} = c\, p_{\bar{\nu}}$

$\Rightarrow$

$$dE_{\bar{\nu}} = c\, dp_{\bar{\nu}}$$

$$E_e = \sqrt{m_e^2 c^4 + p_e^2 c^2}$$

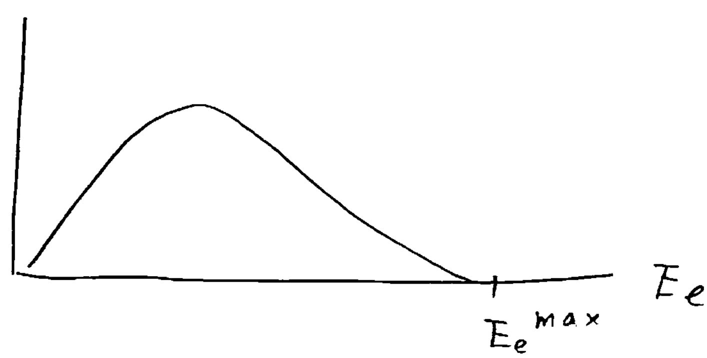
$$\Rightarrow\ dE_e = \frac{2p_e c^2}{2E_e}\, dp_e$$

$$p_e = \frac{1}{c}\sqrt{E_e^2 - m_e^2 c^4}$$

$$\Rightarrow\ \sum_{終状態} = \frac{(4\pi)^2}{(2\pi\hbar)^6}\int \frac{E_e'}{p_e' c^2}\, p_e'^2\, dE_e' \cdot \frac{E_{\bar{\nu}}^2}{c^2}\frac{dE_{\bar{\nu}}}{c}\ \delta(E_e' + E_{\bar{\nu}} - Q) \times \delta(E_e' - E_e)$$

$$= \frac{(4\pi)^2}{(2\pi\hbar)^6}\cdot\frac{1}{c^6}\cdot E_e\sqrt{E_e^2 - m_e^2c^4}\cdot(Q - E_e)^2$$

$$= \frac{1}{4\pi^4\hbar^6 c^6}(Q - E_e)^2 \cdot E_e \cdot \sqrt{E_e^2 - m_e^2 c^4}.$$



β線スペクトルの形と非常に似ている。

$\boldsymbol{p}_\nu = -\boldsymbol{p}_{\bar\nu}$

。レプトン波動関数

$$\psi_e(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\boldsymbol{p}_e\cdot\boldsymbol{r}/\hbar}, \quad \psi_{\bar\nu}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{+i\boldsymbol{p}_{\bar\nu}\cdot\boldsymbol{r}/\hbar}$$

↓

$$\langle f|H_\beta|i\rangle = \frac{g_F}{V}\int\left[\Psi_f^*(\boldsymbol{r})\,\tau_+\,\Psi_i(\boldsymbol{r})\right]e^{-i(\boldsymbol{p}_e+\boldsymbol{p}_{\bar\nu})\cdot\boldsymbol{r}/\hbar}\,d\boldsymbol{r}.$$

$$e^{-i(\boldsymbol{p}_e+\boldsymbol{p}_{\bar\nu})\cdot\boldsymbol{r}/\hbar} \sim \underbrace{1}_{\text{許容転移 (allowed transition)}} \underbrace{-\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{p}_e+\boldsymbol{p}_{\bar\nu})\cdot\boldsymbol{r}}_{\text{1次禁止転移 (forbidden transition)}} + \cdots$$

$\Psi(\boldsymbol{r})$: 原子核の多体波動関数

。選択則

$$\langle f|H_\beta|i\rangle \sim \frac{g_F}{V}\int\left[\Psi_f^*(\boldsymbol{r})\,\tau_+\,\Psi_i(\boldsymbol{r})\right]d\boldsymbol{r}$$

$\Delta I = 0$, パリティ変化なし

$0^+ \rightarrow 0^+$

3. スピンの導入 (ガモフ・テラー遷移)

$$H_\beta = g_{GT} \int d\mathbf{r} \sum_{\text{spin}} \left[\psi_p^\dagger(\mathbf{r}) \vec{\sigma} \tau_+ \psi_n(\mathbf{r}) \right] \cdot \left[\psi_e^\dagger(\mathbf{r}) \vec{\sigma} \psi_{\nu_e}(\mathbf{r}) \right]$$

$\Delta I = 1$, パリティ変化なし

$0^+ \to 1^+$

${}^{60}Co(5^+) \to {}^{60}Ni(4^+)$

4. 相対論的な取り扱い

$$H_\beta = \int dr \left\{ C_V (\psi_p^\dagger \gamma_\mu \psi_n)(\psi_e^\dagger \underbrace{\gamma^\mu}_{\text{パリティ保存}} (1+\underbrace{\gamma_5}_{\text{パリティ非保存}}) \psi_\nu) + h.c. \right.$$

$$\left. - C_A (\psi_p^\dagger \gamma_\mu \gamma_5 \psi_n)(\psi_e^\dagger \gamma^\mu \gamma_5 (1+\gamma_5)\psi_\nu) + h.c. \right\}$$

"V − A 型"

$$\gamma_k = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_k \\ i\sigma_k & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-i\gamma_k\gamma_5 = \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & -\sigma_k \end{pmatrix}, \quad -i\gamma_0\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

・ナイーブな非相対論極限:

$$\gamma_\mu \sim \delta_{\mu,0}, \quad \gamma_5 \sim 0, \; -i\gamma_k\gamma_5 \sim \sigma_k$$
$$-i\gamma_0\gamma_5 \sim 0$$

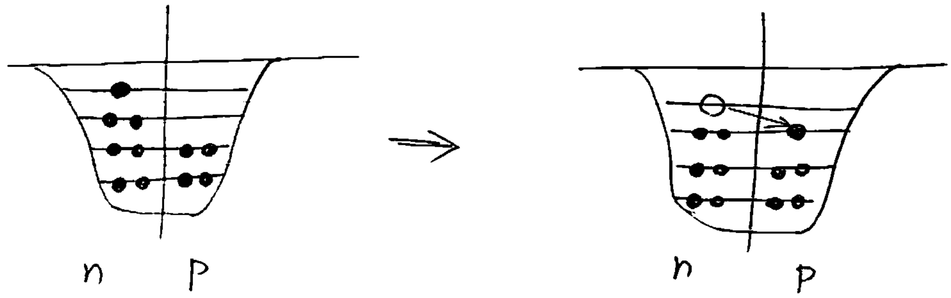
↓

$$H_\beta \sim \int dr \left\{ \overbrace{C_V (\psi_p^\dagger \psi_n)(\psi_e^\dagger \psi_\nu)}^{F} + h.c. \right.$$

$$\left. + \underbrace{C_A (\psi_p^\dagger \vec{\sigma} \psi_n)\cdot(\psi_e^\dagger \vec{\sigma} \psi_\nu)}_{GT} + h.c. \right\}$$

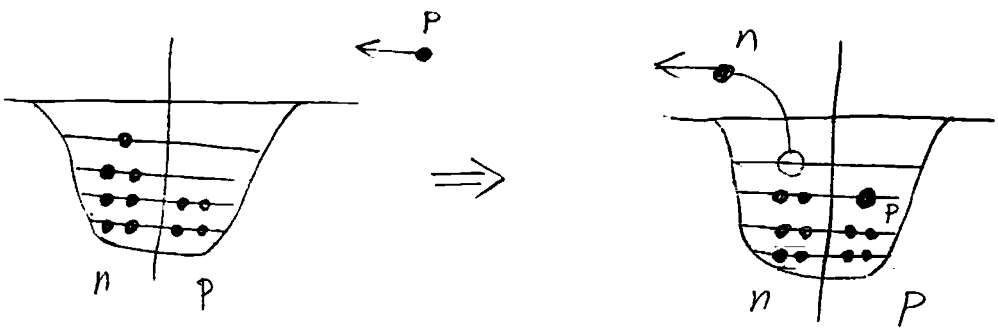
5. 荷電交換反応

核内での β 崩壊



荷電交換反応　(p, n) 反応

p をぶつけて n を出す反応



β崩壊と同じ Ψ_i, Ψ_f

同じ matrix element

$$\langle \Psi_f | \tau_\pm | \Psi_i \rangle$$

or $\langle \Psi_f | \vec{\sigma} \tau_\pm | \Psi_i \rangle$

他にも

ニュートリノ原子核反応　$\nu_e + n \to p + e^-$

$\bar{\nu}_e + p \to n + e^+$