四 γ崩壊について

1. 電場, 磁場, 電磁ポテンシャル

$$\begin{cases} \mathbb{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} \\ \mathbb{B} = \nabla \times A \end{cases}$$

ϕ : スカラー・ポテンシャル
A : ベクトル・ポテンシャル

電磁場のエネルギー : $H_{em} = \frac{1}{8\pi}\int dr\,(\mathbb{E}^2 + \mathbb{B}^2)$.

以下, クーロン・ゲージをとる : $\begin{cases} \nabla\cdot A(r,t) = 0 \\ \phi(r,t) = 0 \end{cases}$

↓

真空中でのマクスウェル方程式

$$\nabla \times \mathbb{B} = \cancelto{0}{i} + \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial t}\cdot\frac{1}{c}$$

$$\rightarrow \quad \underbrace{\nabla \times (\nabla \times A)}_{\parallel} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}$$

$$\varepsilon_{ijk}\,\partial_j\,\varepsilon_{klm}\,\partial_l A_m = \partial_i(\partial_j A_j) - \partial_j\partial_j A_i$$

$$\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \qquad = \nabla\,\cancel{(\nabla\cdot A)} - \nabla^2 A$$

$$= -\nabla^2 A$$

$$\Downarrow \quad \boxed{\nabla^2 A - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}A = 0}$$

$$\nabla^2 A - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} A = 0$$

解： $A_k(r,t) \sim e^{ik\cdot r - i\omega t}$ $\quad (\omega = ck)$

$$\nabla^2 A = ik\cdot\nabla e^{ik\cdot r - i\omega t}$$
$$= (ik)^2 e^{ik\cdot r - i\omega t} = -k^2 e^{ik\cdot r - i\omega t}$$

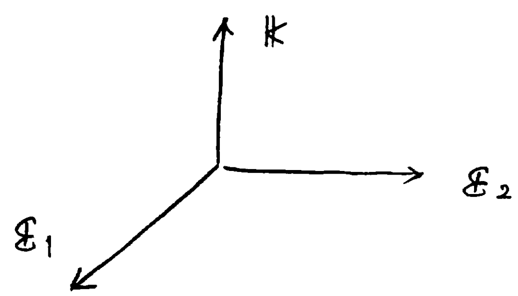
(note) ゲージ条件 $\quad \nabla\cdot A = 0$

$\downarrow$

$k\cdot A_k = 0$ （横波条件）

電磁波の偏極ベクトル：ε_α
（A の向き，従って E の向き）
↑
光子のスピン波動関数に相当

$$\varepsilon_\alpha \cdot k = 0$$



$$\varepsilon_\alpha \cdot \varepsilon_{\alpha'} = \delta_{\alpha,\alpha'}$$

波動方程式の一般解

$$\mathbb{A}(\mathbb{r},t) = \sum_{\alpha=1,2} \sum_{\mathbb{k}} \left(A_{\mathbb{k}\alpha} \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha e^{i\mathbb{k}\cdot\mathbb{r} - i\omega t} + c.c. \right)$$

$\downarrow$

$$\mathbb{E}(\mathbb{r},t) = -\frac{1}{c}\dot{\mathbb{A}}$$

$$= \frac{i}{c} \sum_{\mathbb{k},\alpha} \omega_k \left(A_{\mathbb{k}\alpha} \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha e^{i(\mathbb{k}\cdot\mathbb{r} - \omega t)} - c.c. \right)$$

$$\mathbb{B}(\mathbb{r},t) = \nabla \times \mathbb{A}$$

$$= i \sum_{\mathbb{k},\alpha} \mathbb{k} \times \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha \left(A_{\mathbb{k}\alpha} e^{i\mathbb{k}\cdot\mathbb{r} - i\omega t} - c.c. \right)$$

・第2量子化

$$\left.\begin{array}{l} A_{\mathbb{k}\alpha} \propto a_{\mathbb{k}\alpha} \\ A_{\mathbb{k}\alpha}^{*} \propto a_{\mathbb{k}\alpha}^{\dagger} \end{array}\right\}$$ 光子の生成・消滅演算子

$$[a_{\mathbb{k}\alpha}, a_{\mathbb{k}'\alpha'}^{\dagger}] = \delta_{\mathbb{k},\mathbb{k}'}\delta_{\alpha\alpha'}$$

$$\mathbb{A}(\mathbb{r},t) = \sum_{\mathbb{k},\alpha} \sqrt{\frac{2\pi c^2 \hbar}{\omega V}} \left\{ a_{\mathbb{k}\alpha} \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha e^{i\mathbb{k}\cdot\mathbb{r} - i\omega t} + a_{\mathbb{k}\alpha}^{\dagger} \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha e^{-i\mathbb{k}\cdot\mathbb{r} + i\omega t} \right\}$$

と規格化因子をとれば

$$H_{em} = \sum_{\mathbb{k}\alpha} \left(a_{\mathbb{k}\alpha}^{\dagger} a_{\mathbb{k}\alpha} + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_k$$

2. 電磁場との相互作用

多体のハミルトニアン

$$H = \sum_i \frac{\mathbb{P}_i^2}{2m} + \sum_{i<j} v_{ij}$$

$$\rightarrow H = \sum_i \left(\frac{1}{2m} \left(\mathbb{P}_i - \frac{e_i}{c} A_i \right)^2 + e_i \phi \right) + \sum_{i<j} v_{ij}$$

$$+ H_{em}$$

$$e_i = \begin{cases} +e & \text{for } p \\ 0 & \text{for } n \end{cases}$$

(note) "minimum principle"

$$m\ddot{\mathbb{r}} = e\left(\mathbb{E}(\mathbb{r},t) + \frac{1}{c} \mathbb{v} \times \mathbb{B}(\mathbb{r},t) \right)$$

$$\left(\mathbb{P}_i - \frac{e_i}{c} A_i \right)^2 = \mathbb{P}_i^2 - \frac{e_i}{c} \left(\mathbb{P}_i \cdot A_i + A_i \cdot \mathbb{P}_i \right) + \frac{e_i^2}{c^2} A^2$$

$$= \mathbb{P}_i^2 - \frac{e_i}{c} \left(\cancel{(\mathbb{P}_i \cdot A_i)} + 2 A_i \cdot \mathbb{P}_i \right) + \underbrace{\frac{e_i^2}{c^2} A^2}_{0}$$

$$(\mathbb{P}_i \cdot A_i) = \frac{\hbar}{i} \nabla \cdot A_i = 0 \quad \text{(クーロン・ゲージ)}$$

(e_iの高次)

$$\therefore \quad \boxed{H_{int} = -\sum_i \frac{e_i}{mc} A \cdot \mathbb{P}_i}$$

$$|\Psi_{IM}\rangle |0\rangle \;\downarrow\; \rightsquigarrow \gamma \;\; |\Psi_{I'M'}\rangle |1\rangle$$

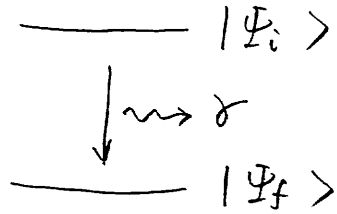
フェルミの黄金律

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f | H_{int} | i \rangle|^2 \frac{dn}{dE}$$

終状態の数

3. 電磁遷移確率

$$|\Psi_i\rangle|0\rangle \to |\Psi_f\rangle|1\rangle$$



$$T=\frac{2\pi}{\hbar}\cdot\frac{V}{(2\pi)^3}\sum_{\mathbf{k}}\sum_{\alpha}\left|\langle\Psi_f|\langle 1_{\mathbf{k}\alpha}|\sum_i\frac{e}{mc}\mathbf{A}\cdot\mathbf{p}_i|\Psi_i\rangle|0\rangle\right|^2$$
$$\times\,\delta(E_i-E_f-E_\gamma)$$

$$=\frac{2\pi}{\hbar}\,\frac{\cancel{V}}{(2\pi)^3}\cdot\frac{2\pi c^2\hbar}{\omega\cancel{V}}\sum_\alpha\int k^2dk\,d\hat{\mathbf{k}}\cdot\left(\frac{e}{mc}\right)^2$$

$\uparrow$

$\langle 1_{\mathbf{k}\alpha}|a^{\dagger}_{\mathbf{k}\alpha}|0\rangle=1$

$$\times\left|\langle\Psi_f|\sum_i e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_i}\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha\cdot\mathbf{p}_i|\Psi_i\rangle\right|^2$$
$$\times\,\delta(E_i-E_f-\underbrace{E_\gamma}_{=ck\cdot\hbar})$$

$$=\frac{2\pi}{\hbar}\cdot\frac{1}{(2\pi)^3}\cdot\frac{2\pi c^2\hbar}{\omega}\cdot\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\cdot\frac{1}{c\hbar}\cdot\left(\frac{e}{mc}\right)^2\sum_\alpha$$
$$\times\int d\hat{\mathbf{k}}\left|\langle\Psi_f|\sum_i e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_i}\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha\cdot\mathbf{p}_i|\Psi_i\rangle\right|^2$$

$$=\frac{\omega}{2\pi c^3\hbar}\left(\frac{e}{m}\right)^2\sum_\alpha\int d\hat{\mathbf{k}}\left|\langle\Psi_f|\sum_i e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_i}\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha\cdot\mathbf{p}_i|\Psi_i\rangle\right|$$

↘

$\langle\Psi_f|\,e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_i}\,\mathbf{p}_i\,|\Psi_i\rangle \qquad \left(k=\frac{E_\gamma}{\hbar c}\right)$
を評価すればよい

○ 長波長近似

$$e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \sim 1 - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \cdots$$

$$E_\gamma \ll \frac{\hbar c}{R}$$

$$E_\gamma = 1\,\mathrm{MeV} \longrightarrow k = \frac{\hbar\omega}{\hbar c} \sim \frac{1}{200}\ \mathrm{fm}^{-1}$$

▨ E1 遷移

$$e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \sim 1.$$

↓

$$T = \frac{\omega}{2\pi c^3\hbar}\left(\frac{e}{m}\right)^2 \sum_\alpha \int d\hat{\mathbf{k}}\ \left|\langle \Psi_f | \sum_i \mathbf{P}_i \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha | \Psi_i \rangle\right|^2.$$

(note) $[\mathbf{P}^2, \mathbf{r}] = -2i\hbar\,\mathbf{P}$

↓

$$[\underbrace{\frac{\mathbf{P}^2}{2m} + V}_{= H_0}, \mathbf{r}] = -\frac{i\hbar}{m}\mathbf{P}$$

↓

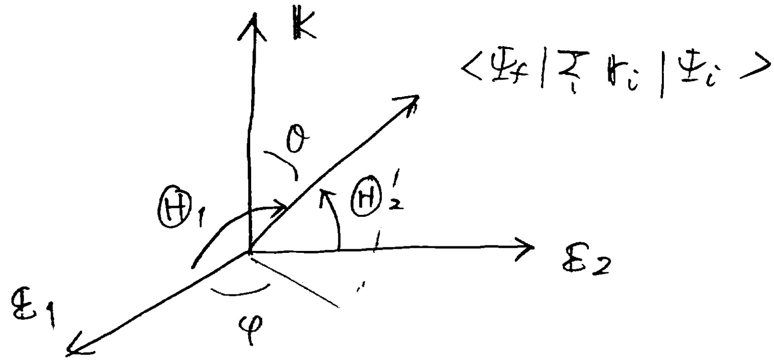
$$\langle \Psi_f | \sum_i \mathbf{P}_i | \Psi_i \rangle = \langle \Psi_f | \frac{im}{\hbar}[H_0, \sum_i \mathbf{r}_i] | \Psi_i \rangle$$

$$= \frac{im}{\hbar}\underbrace{(E_f - E_i)}_{= -\hbar\omega}\langle \Psi_f | \sum_i \mathbf{r}_i | \Psi_i \rangle$$

$$\therefore\ T = \frac{e^2\omega^3}{2\pi\hbar c^3}\sum_\alpha \int d\hat{\mathbf{k}}\ \underbrace{\left|\langle \Psi_f | \sum_i \mathbf{r}_i\cdot \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha | \Psi_i\rangle\right|^2}_{\parallel}$$

$$\left|\langle \Psi_f | \sum_i \mathbf{r}_i | \Psi_i\rangle\right|^2 \cos^2\Theta_\alpha$$

$\langle \Psi_f | \sum_i \mathbf{r}_i | \Psi_i\rangle$ と $\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha$ の成す角



$$\cos\Theta_1 = \sin\theta\cos\varphi$$
$$\cos\Theta_2 = \sin\theta\sin\varphi$$

$$\therefore\ \sum_\alpha \cos^2\Theta_\alpha = \sin^2\theta$$

$$\therefore\ \sum_\alpha \int d\hat{\mathbf{k}}\,\cos^2\Theta_\alpha = 2\pi\int_{-1}^{1}\big(\overbrace{\sin^2\theta}^{1-\cos^2\theta}\, d(\cos\theta)\big)$$

$$= 2\pi\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{x=-1}^{1} = \frac{8\pi}{3}$$

$$\therefore\ \boxed{T = \frac{4}{3}\cdot\frac{e^2}{\hbar c}\cdot\frac{\omega^3}{c^2}\left|\langle \Psi_f | \sum_i \mathbf{r}_i | \Psi_i\rangle\right|^2}$$

(note)

$$\Gamma = \frac{\omega^3}{2\pi\hbar c^3}\sum_\alpha \int d\hat{\mathbf{k}}\ \left|\langle \Psi_f \,|\, \sum_i e_i \mathbf{r}_i\cdot \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha \,|\,\Psi_i\rangle\right|^2$$

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}}$$

$$= +\frac{i}{c}\sum_{\mathbf{k},\alpha}\sqrt{\frac{2\pi c^2\hbar}{\omega V}}\cdot\omega\left(a^{+}_{\mathbf{k}\alpha}\,\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+i\omega t} - c.c.\right)$$

$$\sim \frac{i}{c}\sum_{\mathbf{k},\alpha}\sqrt{\frac{2\pi c^2\hbar}{\omega V}}\cdot\omega\left(a^{+}_{\mathbf{k}\alpha}\,\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha\, e^{i\omega t} - c.c.\right)$$

$$\mathbf{d} \equiv \sum_i e_i\mathbf{r}_i \qquad \text{(双極子オペレーター)}$$

$H_{int} \sim \mathbf{E}\cdot\mathbf{d}$ に対する摂動

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\hbar}\cdot\frac{\cancel{V}}{(2\pi)^3}\cdot\cancel{\frac{1}{c^2}}\,\frac{2\pi \cancel{c^2}\hbar}{\omega \cancel{V}}\cdot\omega^2\sum_\alpha\int k^2 dk\, d\hat{\mathbf{k}}$$

$$\times \left|\langle \Psi_f \,|\, \mathbf{d}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha \,|\, \Psi_i\rangle\right|^2 \delta(E_i - E_f - \underset{ck\cdot\hbar}{\underline{\underline{E_\gamma}}})$$

$$= \cancel{\frac{2\pi}{\hbar}}\cdot\frac{1}{\cancel{(2\pi)^3}}\,\frac{\cancel{2\pi\hbar}}{\omega}\cdot\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\frac{\omega^2}{c\hbar}\sum_\alpha\int d\hat{\mathbf{k}}\ \left|\langle \Psi_f \,|\, \mathbf{d}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha \,|\, \Psi_i\rangle\right|^2$$

$$= \frac{\omega^3}{2\pi\hbar c^3}\sum_\alpha\int d\hat{\mathbf{k}}\ \left|\langle \Psi_f \,|\, \mathbf{d}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha \,|\, \Psi_i\rangle\right|^2$$

$\Updownarrow$

$H_{int} = \mathbf{E}\cdot\mathbf{d}$ に対する摂動と同じ

電気双極子遷移

四 E2 + M1 遷移

$$e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \sim 1 - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \cdots$$ の 2項目の寄与.
(higher order)

(note)

$$\langle \Psi_f | (\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})(\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathbf{p}) | \Psi_i \rangle$$

$$= \frac{1}{2} \langle \Psi_f | (\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})(\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathbf{p}) + (\mathbf{k}\cdot\mathbf{p})(\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathbf{r}) | \Psi_i \rangle$$
$$+ \frac{1}{2} \langle \Psi_f | (\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})(\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathbf{p}) - (\mathbf{k}\cdot\mathbf{p})(\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathbf{r}) | \Psi_i \rangle .$$

first term: $(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})(\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathbf{p}) + (\mathbf{k}\cdot\mathbf{p})(\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathbf{r})$

$$= \mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}\mathbf{p} + \mathbf{p}\mathbf{r})\cdot\boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\mathbf{r}\mathbf{p} + \mathbf{p}\mathbf{r} = \frac{mi}{\hbar}[H_0, \mathbf{r}\mathbf{r}]$$

$\mathbf{r}\mathbf{r} \updownarrow$ E2 遷移

second term: $(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})(\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathbf{p}) - (\mathbf{k}\cdot\mathbf{p})(\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathbf{r})$

$$= \underbrace{(\mathbf{k}\times\boldsymbol{\varepsilon})}_{\sim\ \mathbf{B}} \cdot (\mathbf{r}\times\mathbf{p})$$

$\mathbf{r}\times\mathbf{p} = \vec{l}$ → スピン $\vec{S}$ の寄与も手で足す

$\vec{l} \updownarrow$ M1 遷移

▣ 高次の項まで含めて一般的に

$$T_{fi}(\lambda\mu) \sim \frac{8\pi(\lambda+1)}{\hbar\lambda((2\lambda+1)!!)^2}\left(\frac{E_\gamma}{\hbar c}\right)^{2\lambda+1}$$

$$\times \left|\langle \Psi_f | \hat{m}_{\lambda\mu} | \Psi_i \rangle\right|^2$$

・Eλ 遷移

$$\hat{m}_{\lambda\mu} = \sum_{i=1}^{Z} e\, r_i^{\lambda}\, Y_{\lambda\mu}(\hat{r}_i) \equiv \hat{Q}_{\lambda\mu}$$

・Mλ 遷移

$$\hat{m}_{\lambda\mu} = \mu_N \sum_{i=1}^{A} \left\{ g_s^{(i)} s_i + \frac{2}{\lambda+1} g_\ell^{(i)} l_i \right\}$$

$$\cdot \left(\nabla r_i^{\lambda}\, Y_{\lambda\mu}(\hat{r}_i)\right) \equiv \hat{M}_{\lambda\mu}$$

$$\mu_N = \frac{e\hbar}{2mc}$$

$$g_\ell = \begin{cases} 1 & \text{for } p \\ 0 & \text{for } n \end{cases}$$

$$g_s = \begin{cases} 5.586 & \text{for } p \\ -3.826 & \text{for } n \end{cases}$$

◦ 角運動量の z 成分を区別しない時

$$T_{fi} = \frac{1}{2I_i+1} \sum_{M_i, M_f, \mu} T_{fi}(\lambda\mu)$$

$$= \frac{1}{2I_i+1} \sum_{M_i M_f \mu} |\langle I_f M_f | \hat{m}_{\lambda\mu} | I_i M_i \rangle|^2 \times \cdots$$

(note) Wigner - Eckart の定理

$$\langle I_f M_f | \hat{m}_{\lambda\mu} | I_i M_i \rangle$$

$$= (-)^{I_i - M_i} \frac{1}{\sqrt{2\lambda+1}} \langle I_f M_f I_i -M_i | \lambda\mu \rangle$$

$$\times \langle I_f \| \hat{m}_\lambda \| I_i \rangle$$

(note) $\sum_{M_i M_f} \langle I_f M_f I_i - M_i | \lambda\mu \rangle^2 = 1$

$$\Rightarrow T_{fi} = \frac{8\pi(\lambda+1)}{\hbar\lambda((2\lambda+1)!!)^2} \left(\frac{E_\gamma}{\hbar c}\right)^{2\lambda+1} \cdot \underbrace{\frac{1}{2I_i+1} |\langle I_f \| \hat{m}_\lambda \| I_i \rangle|^2}_{\text{|||}}$$

$B(E\lambda : I_i \to I_f)$

又は $B(M\lambda ; I_i \to I_f)$

一般に $T(E\lambda) \gg T(M\lambda)$

$T(E\lambda) \gg T(E, \lambda+1) \gg \cdots$

E2 と M1 の競合が起こることも。

4. 選択則

$$\langle I_f m_f | \hat{Q}_{\lambda\mu} | \underbrace{I_i m_i}_{\text{初期状態}} \rangle$$

初期状態 + 1フォトン状態

→ 合成角運動量

$|\lambda - I_i|, \cdots, \lambda + I_i$

z 成分：$\mu + m_i$

∾

$$|\lambda - I_i| \leq I_f \leq \lambda + I_i$$

$$m_f = \mu + m_i$$

パリティ：$(-)^I$ (E)，$(-)^{I+1}$ (M)

例）
$2^+ \to 0^+$ ：E2
$3^- \to 0^+$ ：E3

$4^+ \to 2^+$ ：E2, E4, M3, E6, M5

$3^+ \to 2^+$ ：E2, M1, E4, M3, M5

unnatural parity

$2^+ \to 3^-$ ：E1, E3, E5, M2, M4