

原子核の質量

原子核の基本的な物理量の一つ

例1) ベータ崩壊



- $Q_\beta = m({}^A_Z X_N)c^2 - [m({}^A_{Z+1} Y_{N-1})c^2 + m_e c^2]$ が電子と反ニュートリノの運動エネルギーに分配
- ベータ崩壊の確率は Q_β に大きく依存

例2) 核融合反応

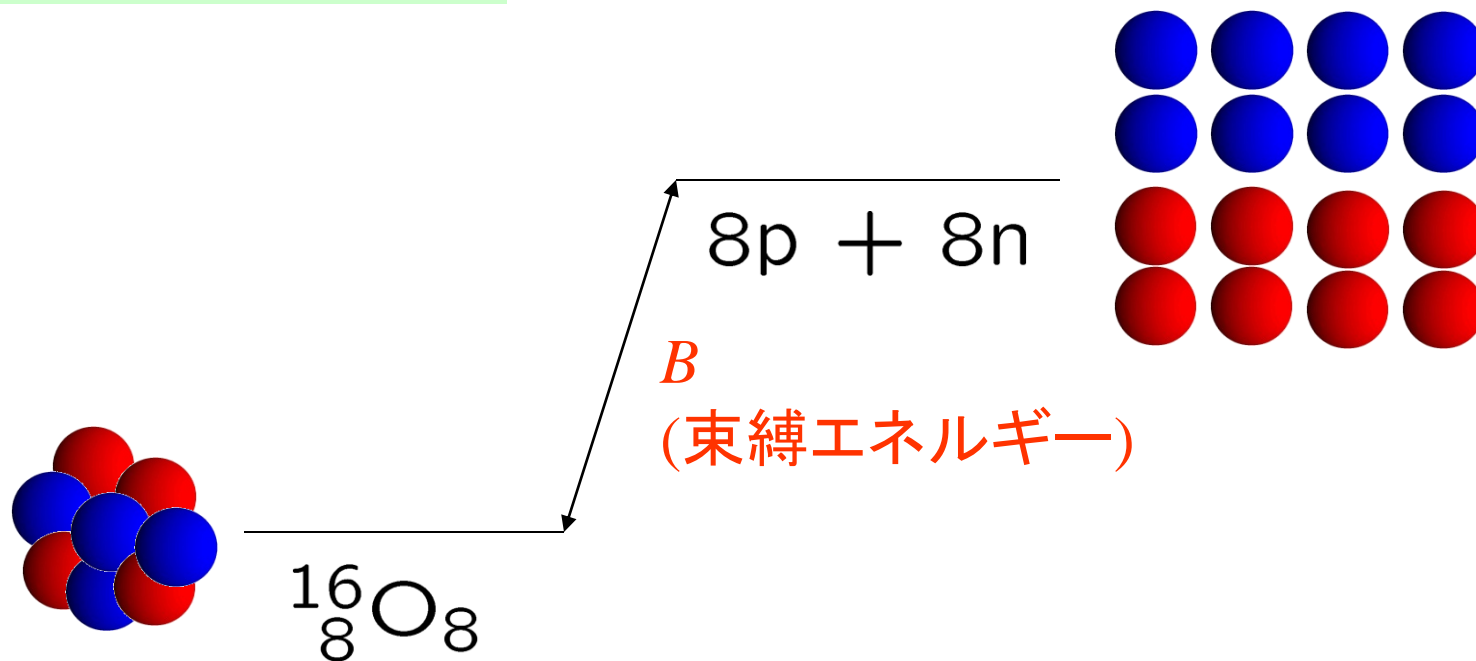


生成される ${}^{224}\text{Th}$ の励起エネルギー

$$E^* = m({}^{16}\text{O})c^2 + m({}^{208}\text{Pb})c^2 + E_{\text{beam}}(\text{cm}) - m({}^{224}\text{Th})c^2$$

✓ ${}^{224}\text{Th}$ の崩壊の様子は E^* に大きく依存

原子核の質量

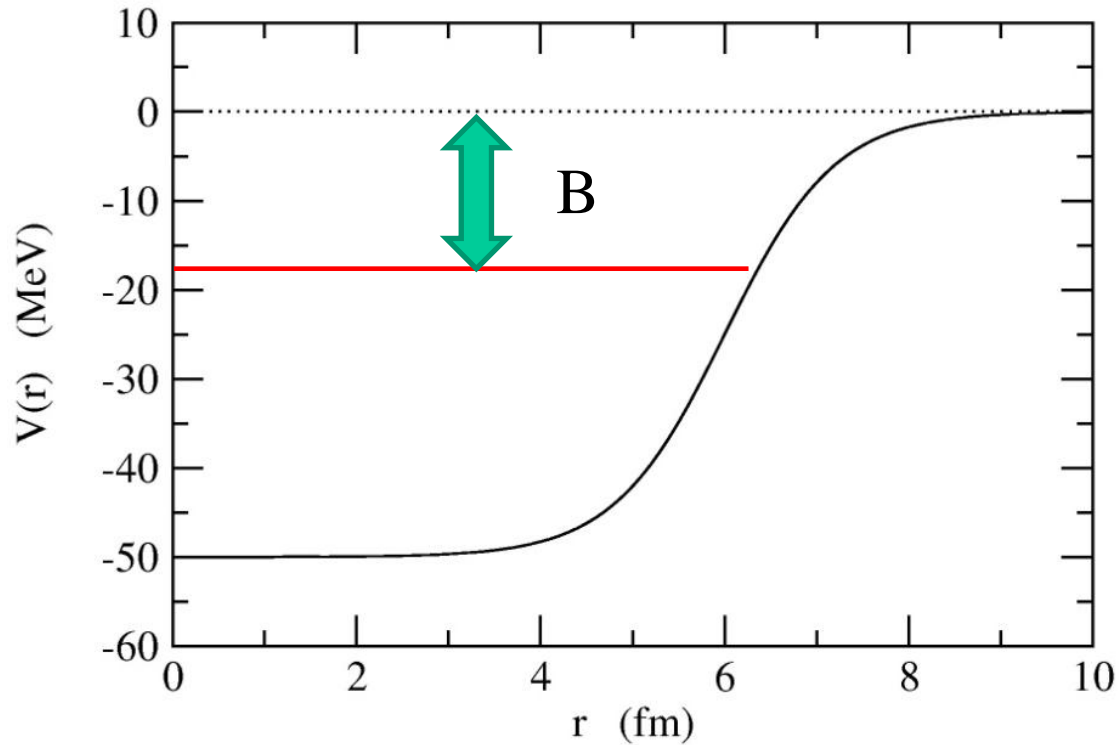


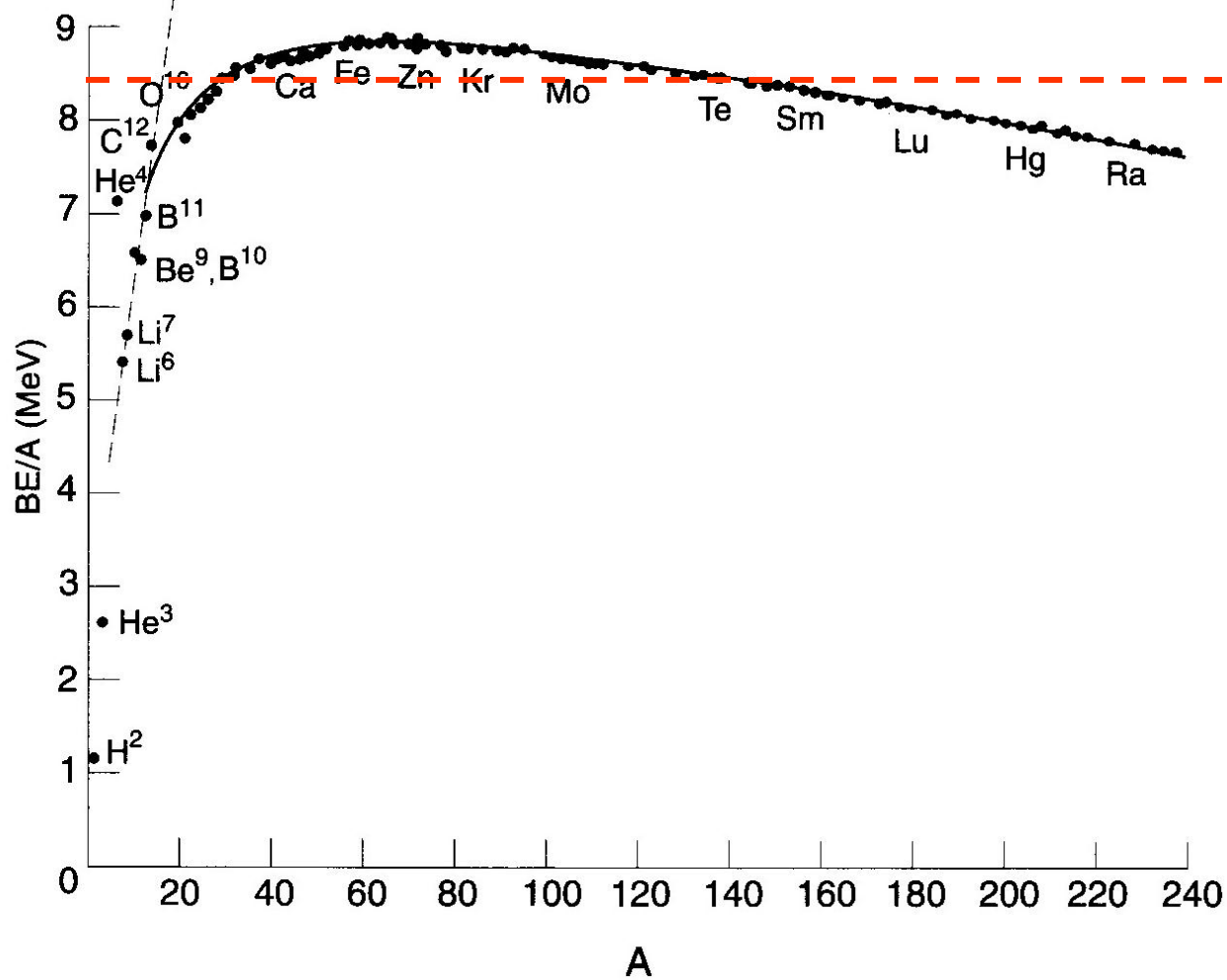
$$m(N, Z)c^2 = Zm_p c^2 + Nm_n c^2 - B$$

cf. 2粒子系の場合:

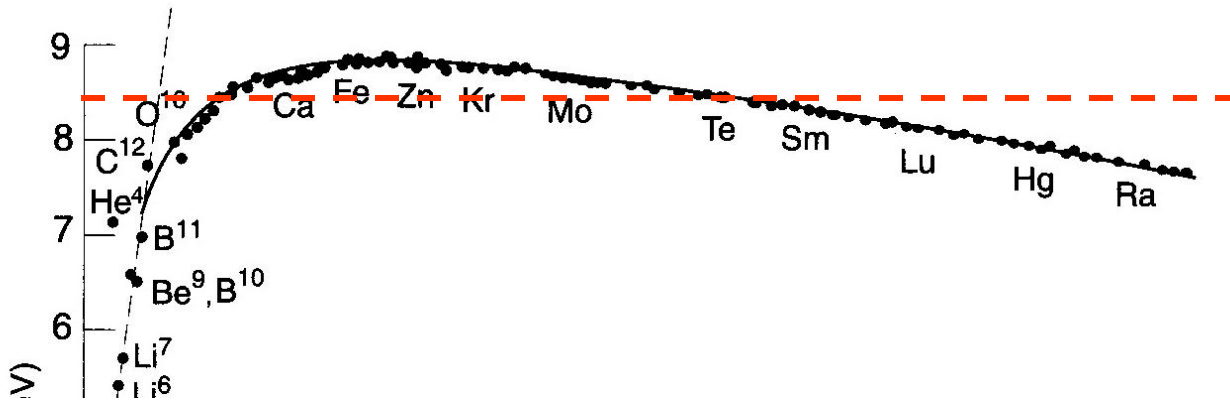


$$Mc^2 = m_1c^2 + m_2c^2 - B$$



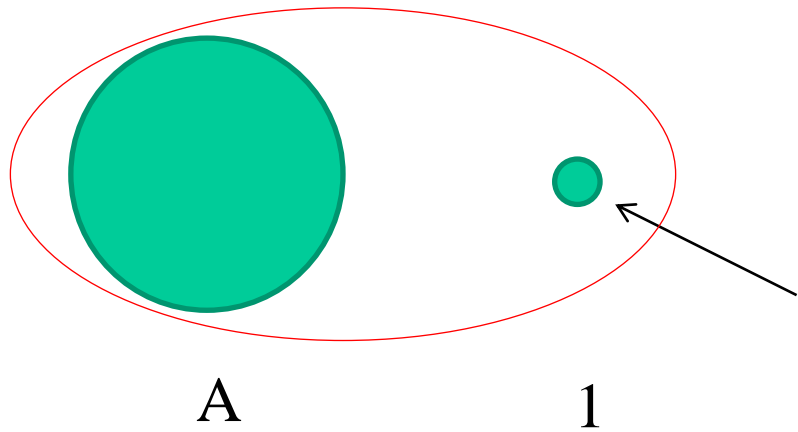


1. $B(N,Z)/A \sim 8.5 \text{ MeV} (A > 12) \iff$ 短距離力 (核子間相互作用)



1. $B(N,Z)/A \sim 8.5 \text{ MeV} (A > 12)$

これは、粒子を1つ増やすと、束縛エネルギーは一定の量 (~ 8.5 MeV) しか増えないことを意味している。


















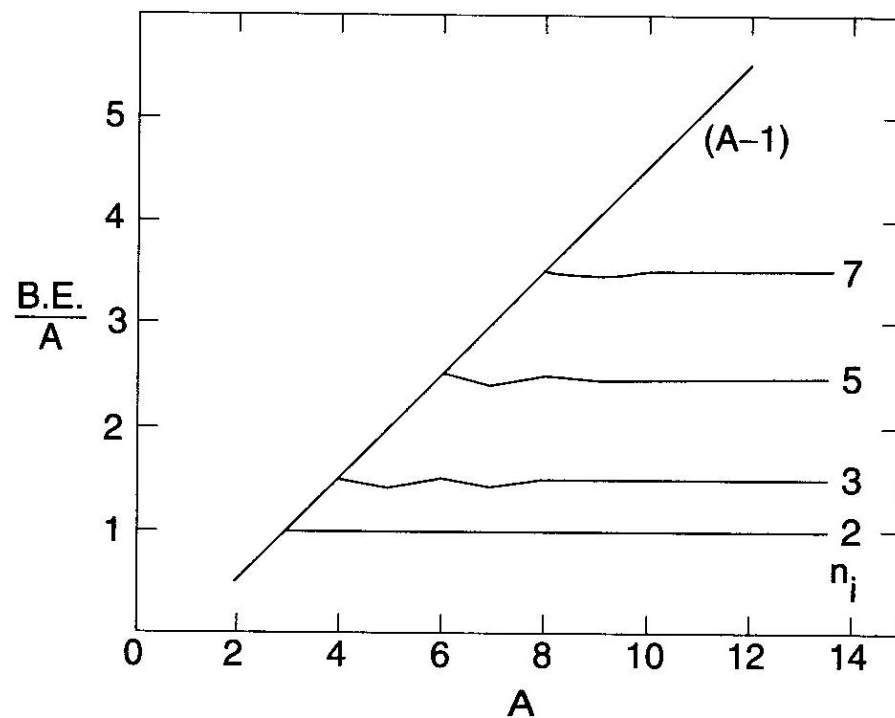
この核子は決まった個数の核子としか相互作用しない

長距離力 vs 短距離力

長距離力: $B \propto A(A-1)/2 \iff B/A \propto A$

短距離力: saturation (B/A が一定になる)

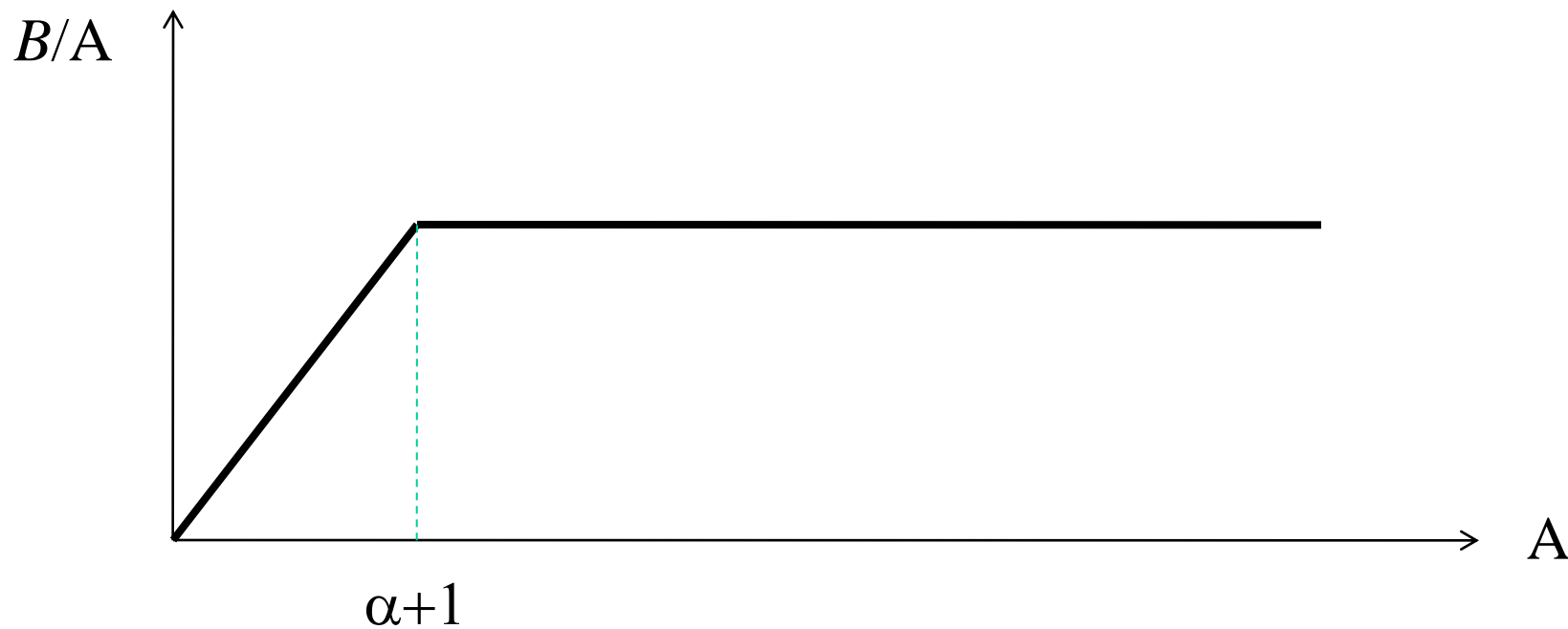
A	2	3	5	(A-1)
3	 1.0	 1.0	 1.0	1.0
4	 1.0	 1.5	 1.5	1.5
5	 1.0	 1.4	 2.0	2.0
6	 1.0	 1.5	 2.5	2.5
8	 1.0	 1.5	 2.5	3.5 ⋮ (A-1)/2

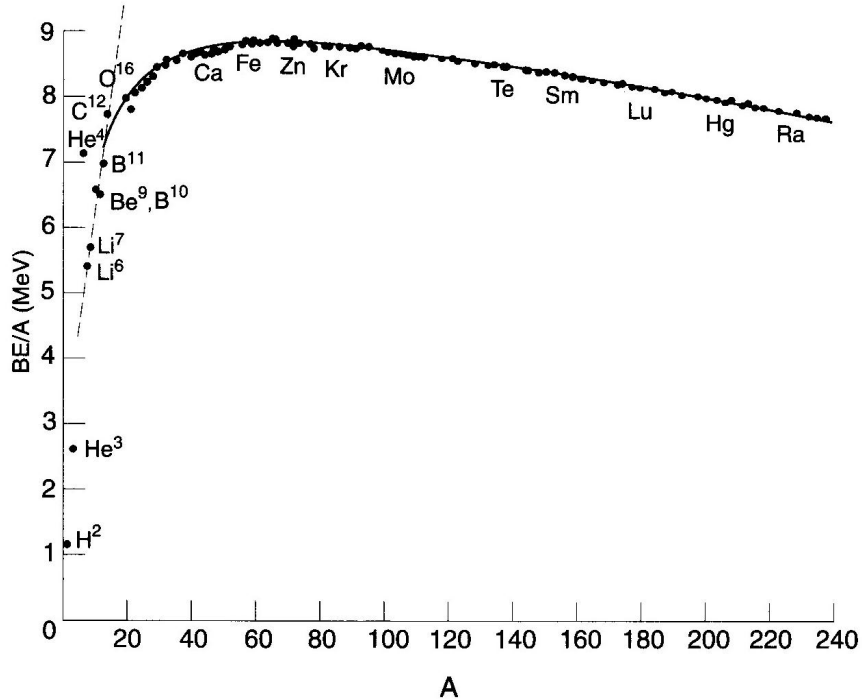


1つの核子が α 個の核子とのみ相互作用するとすると、

$$B \sim \alpha A/2 \longrightarrow B/A \sim \alpha/2 \text{ (const.)}$$

ただし、 $A < \alpha + 1$ の時は、すべての核子対が相互作用するので、
 $B/A \propto A$





この図から α の値を読み取ると、
 $\alpha \sim 10$ くらい。

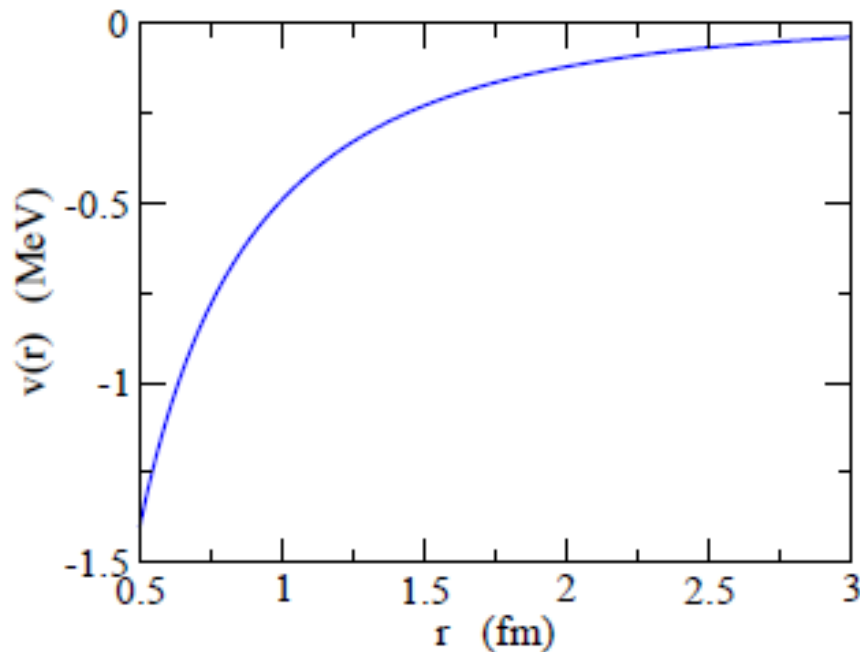


核力の到達距離は、
 $1.1 \times 10^{1/3} = 2.37 \text{ fm}$ 程度。

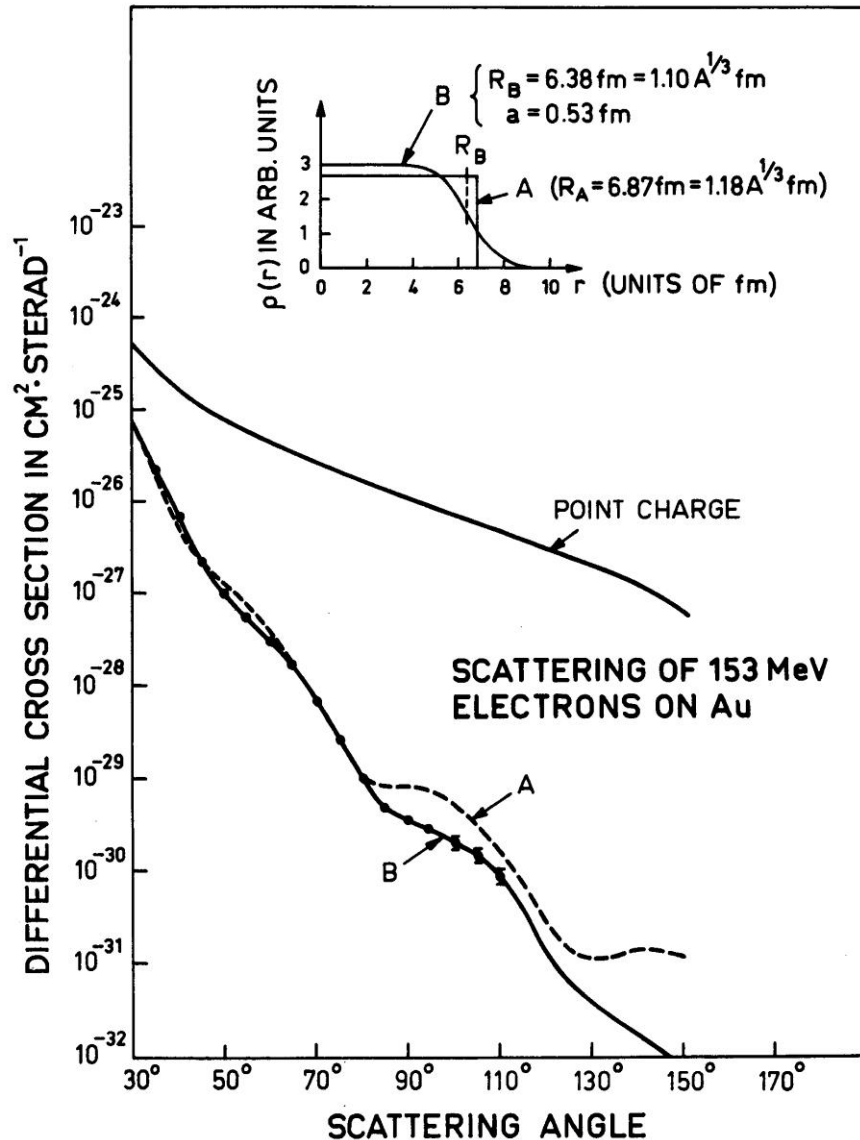
湯川相互作用:

$$v(r) = -g \frac{e^{-\kappa r}}{r}$$

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{\hbar}{m_{\pi} c} = 1.41 \text{ fm}$$

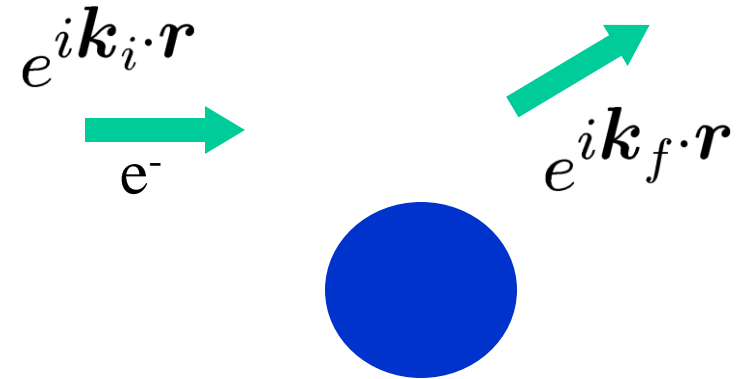


電荷分布



高エネルギー電子散乱

ボルン近似:



$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z_P^2 e^4}{(4E \sin^2 \theta/2)^2} |F(\mathbf{q})|^2$$

形状因子 (form factor)

$$F(\mathbf{q}) = \int e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$$

(密度のフーリエ変換)

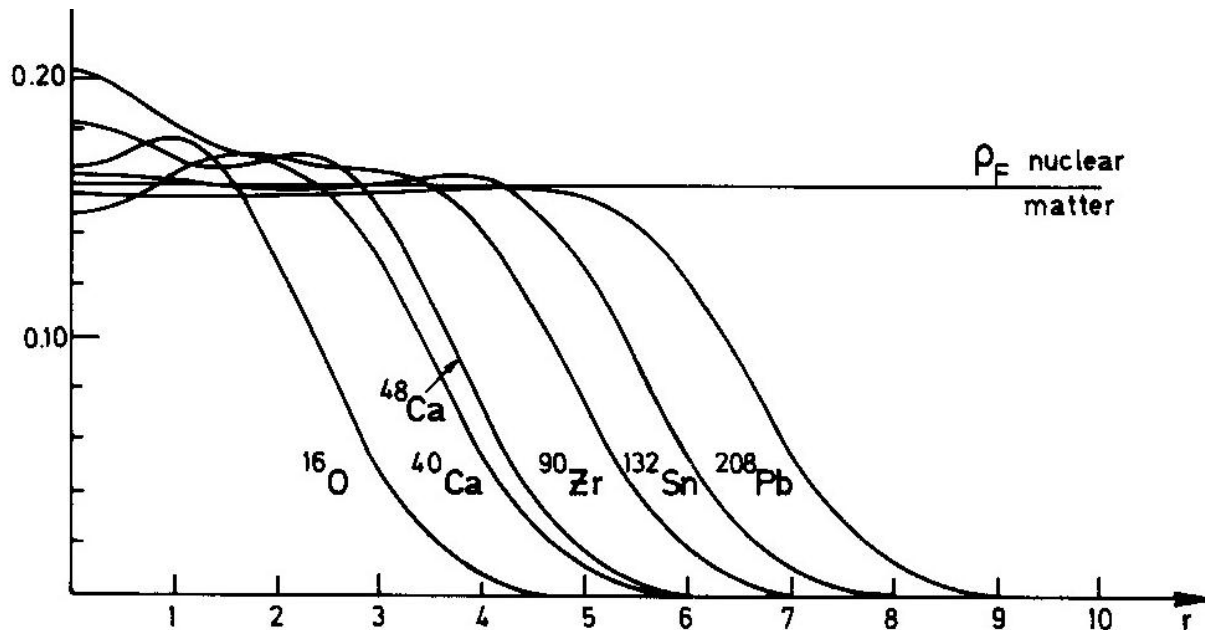
電子と原子核の相互作用:

$$V(\mathbf{r}) = - \int d\mathbf{r}' \rho_{\text{ch}}(\mathbf{r}') \frac{e^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

(note) $\nabla^2 V(\mathbf{r}) = 4\pi e^2 \rho_{\text{ch}}(\mathbf{r})$

$$\begin{aligned} M_{fi} &= \langle \psi_f | V | \psi_i \rangle = \int d\mathbf{r} \psi_f^*(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}) \psi_i(\mathbf{r}) \\ &= \int d\mathbf{r} e^{i(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f) \cdot \mathbf{r}} V(\mathbf{r}) \equiv \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} V(\mathbf{r}) \\ &= \underbrace{-\frac{4\pi e^2}{q^2}}_{\uparrow} \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \rho_{\text{ch}}(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

(部分積分2回)



フェルミ分布

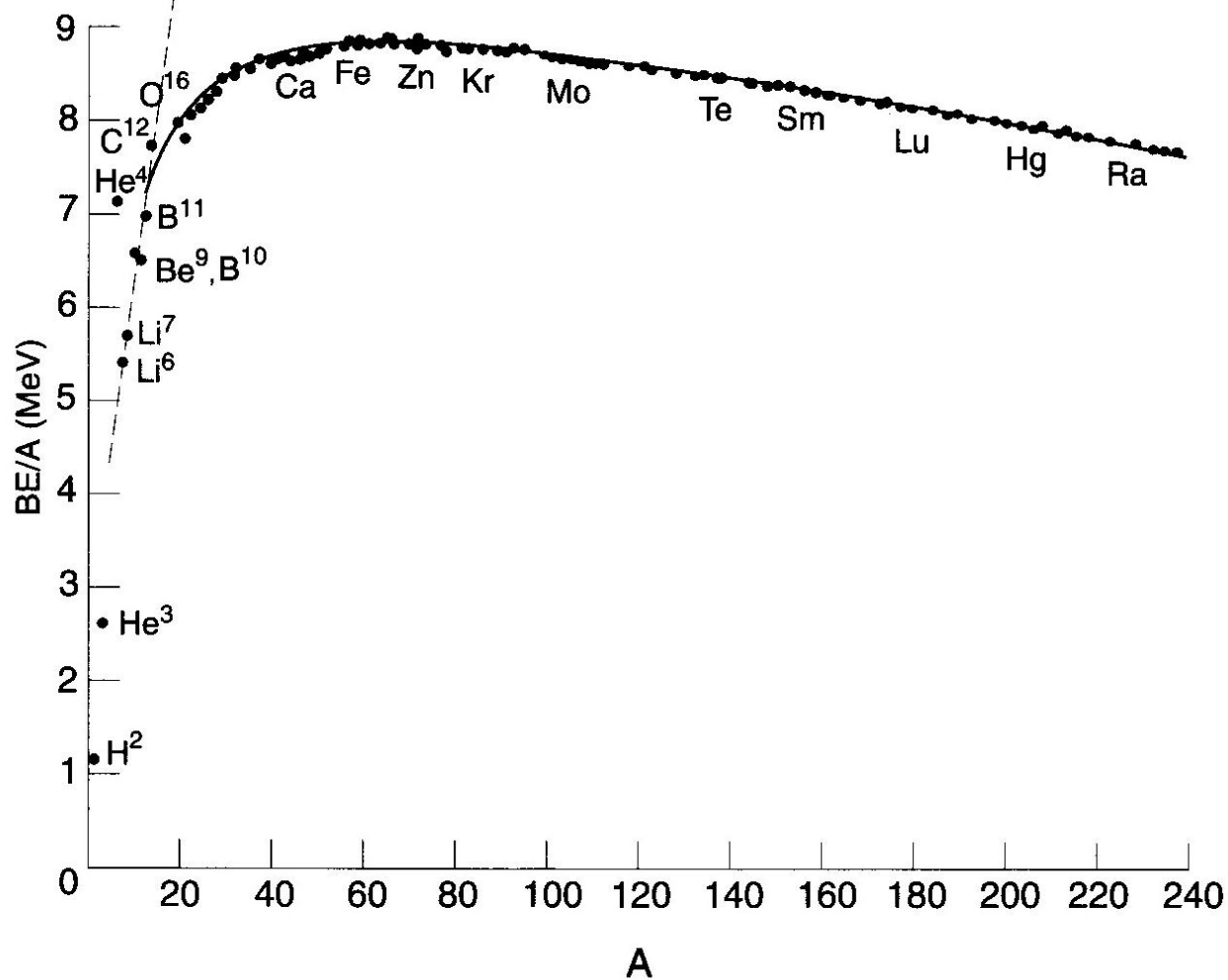
$$\rho(r) = \rho_0 / [1 + \exp((r - R_0)/a)]$$

$$\rho_0 \sim 0.17 \text{ (fm}^{-3}\text{)} \quad \leftarrow \text{原子核の飽和性}$$

$$R_0 \sim 1.1 \times A^{1/3} \text{ (fm)}$$

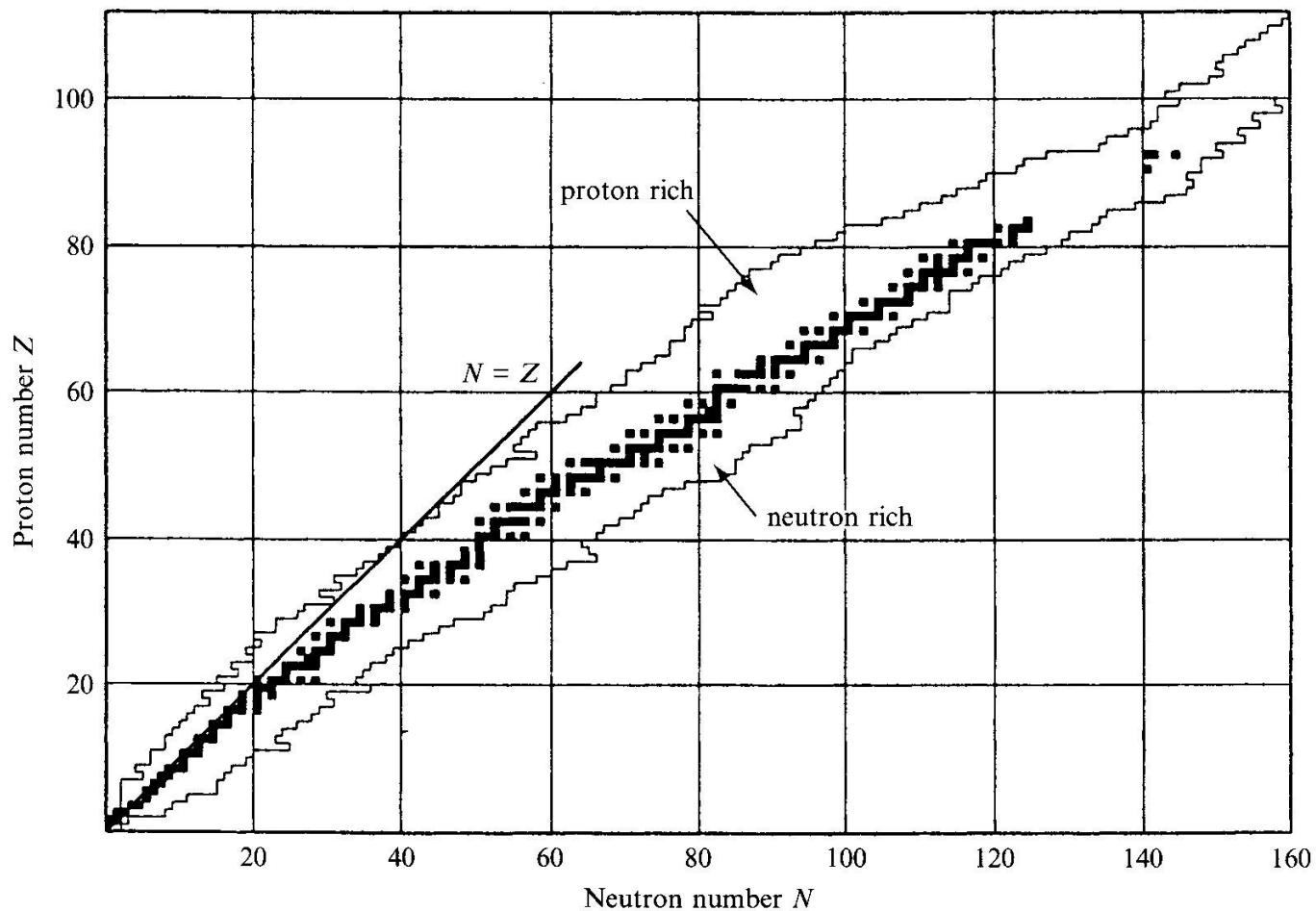
$$a \sim 0.57 \text{ (fm)}$$

cf. 核子の感じるポテンシャルも同じような形。下から軌道を詰めていくとフェルミ・エネルギーは約 -8.5 MeV

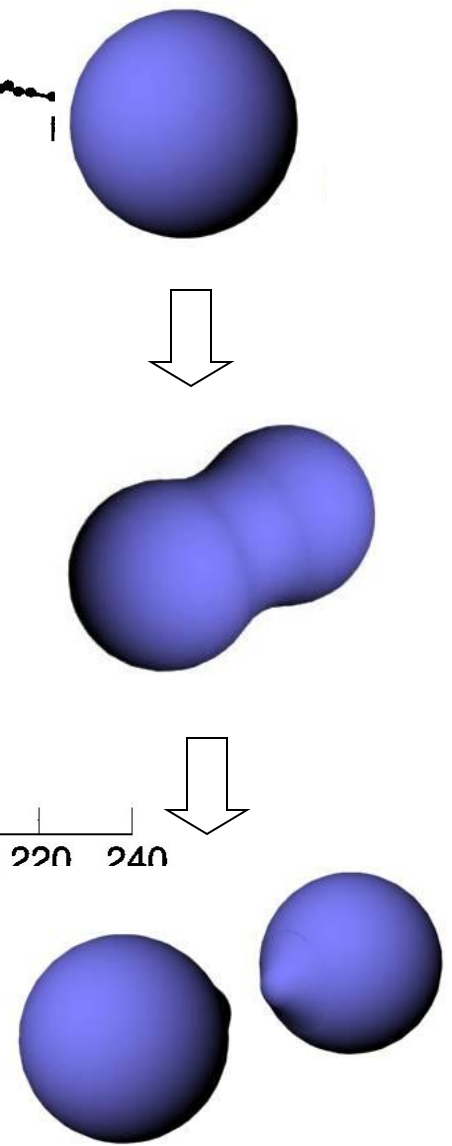
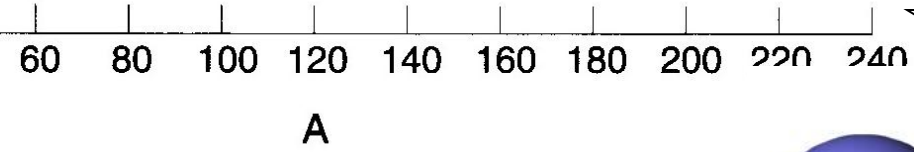
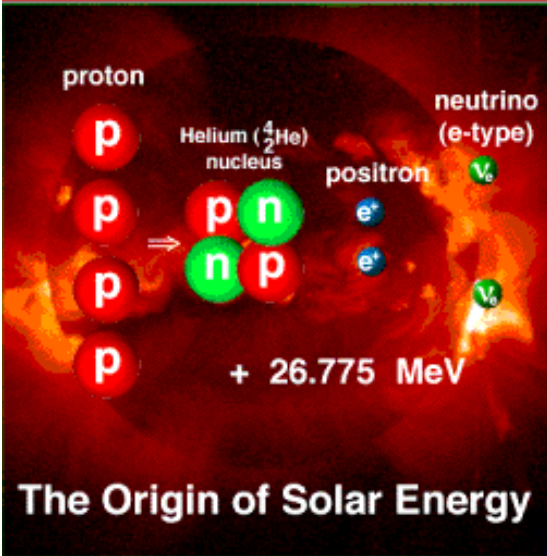
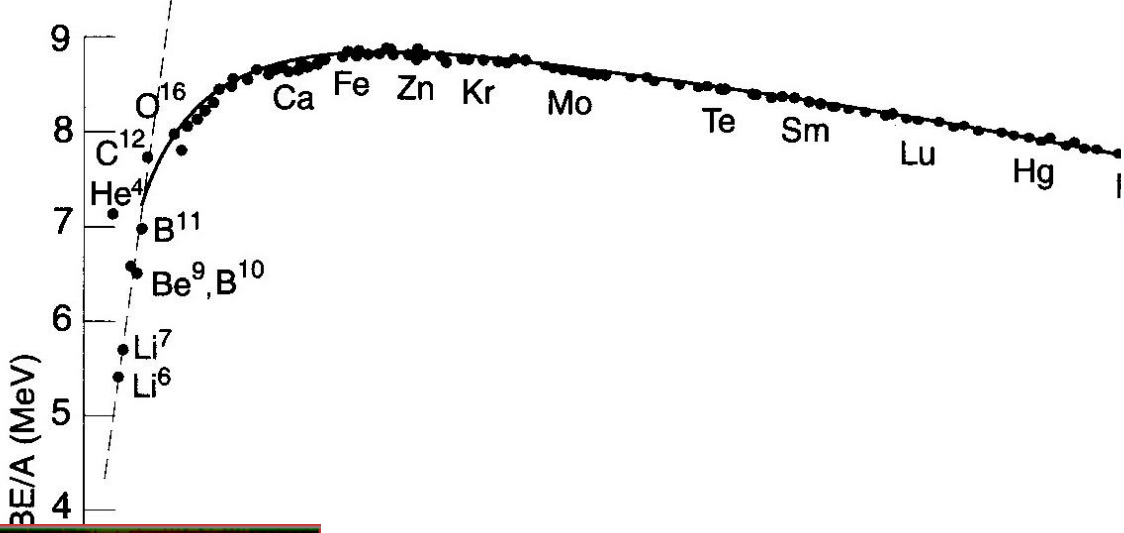


1. $B(N,Z)/A \sim 8.5 \text{ MeV} (A > 12) \iff$ 短距離力(核子間相互作用)
2. 重い原子核に対してはクーロン力の影響

核图表

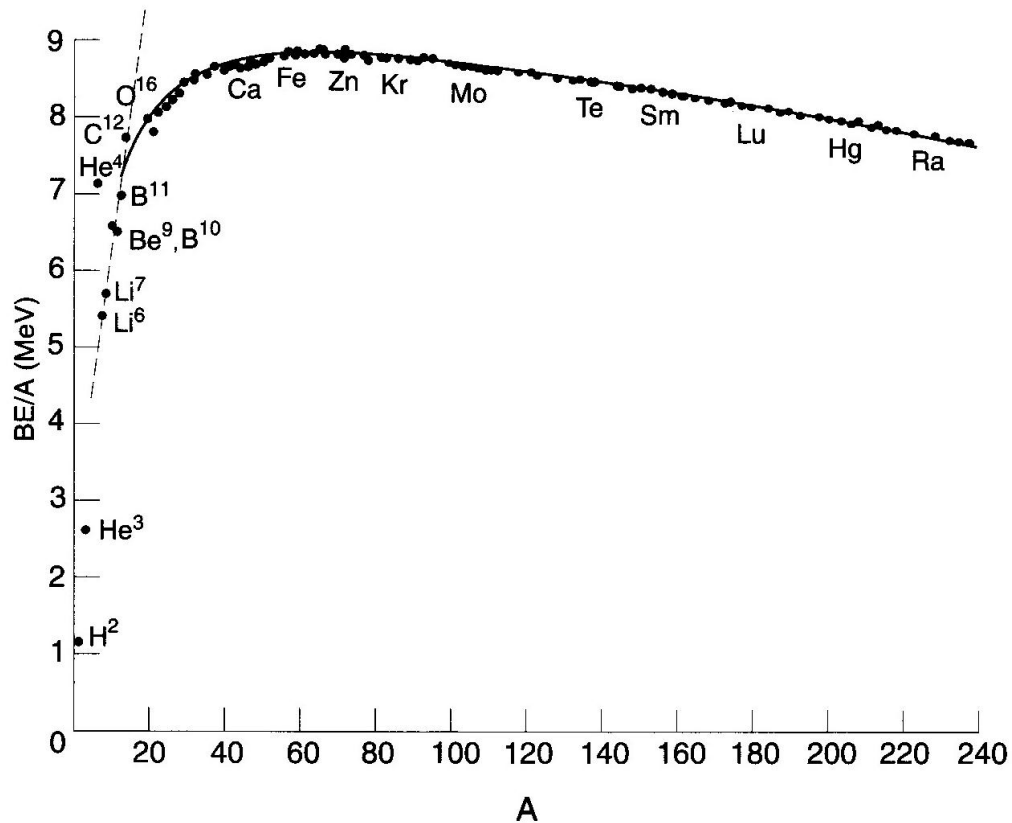


安定核: $N \geq Z$



1. $B(A, Z)/A \approx 0.8 \text{ MeV}$ ($A > 12$) \iff Short range
2. 重い原子核に対してはクーロン力の影響
3. 軽い核は核融合した方が安定
4. 重い核は核分裂した方が安定

半経験的質量公式



Aの関数としてどのように振る舞うか？

- ✓ 経験的
- ✓ 半経験的
- ✓ 非経験的

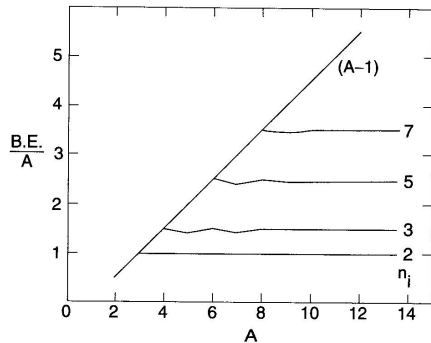
} アプローチ

半経験的質量公式

(Bethe-Weizacker 質量公式: 液滴模型)

$$B(N, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\text{sym}} \frac{(N - Z)^2}{A}$$

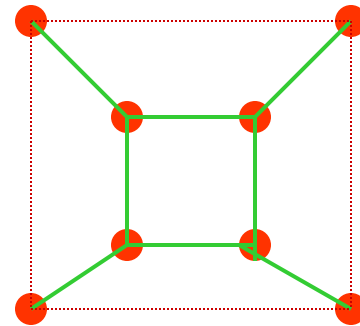
● 体積エネルギー: $a_v A$



$$R_0 \sim 1.1 \times A^{1/3} \rightarrow V \propto A$$
$$S \propto A^{2/3}$$

● 表面エネルギー: $-a_s A^{2/3}$

表面付近の核子は少ない数の核子と相互作用する。



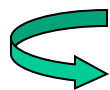
$$B(N, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\text{sym}} \frac{(N - Z)^2}{A}$$

● **クーロン・エネルギー**: $-a_C Z^2 / A^{1/3}$

$$E_C = \frac{3}{5} \frac{Z^2 e^2}{R_C} \quad (\text{一様帯電球のクーロン・エネルギー})$$

● **対称エネルギー**: $-a_{\text{sym}} (N - Z)^2 / A$

ポテンシャル・エネルギー $v_{nn} = v_{pp} = v, \quad v_{np} \sim 2v$

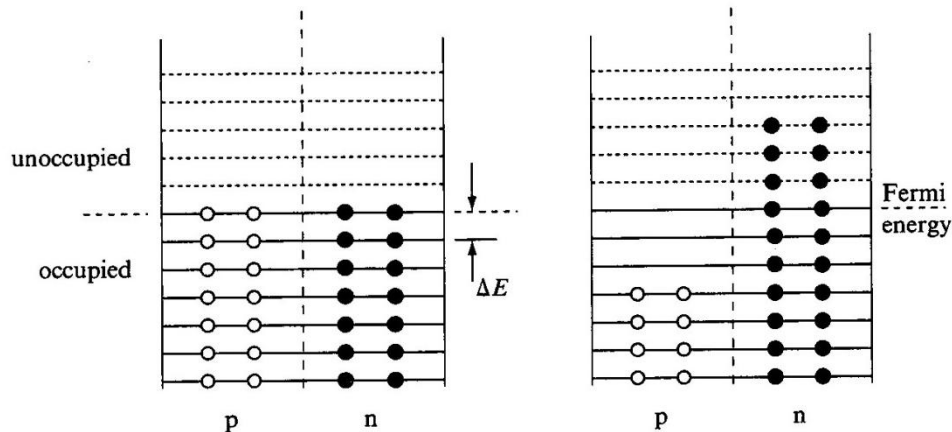


核物質と相互作用する核子のエネルギー:

$$N(v_{nn}N/A + v_{pn}Z/A) + Z(v_{pn}N/A + v_{pp}Z/A) = \frac{v}{2}(3A - (N - Z)^2/A)$$

運動エネルギー

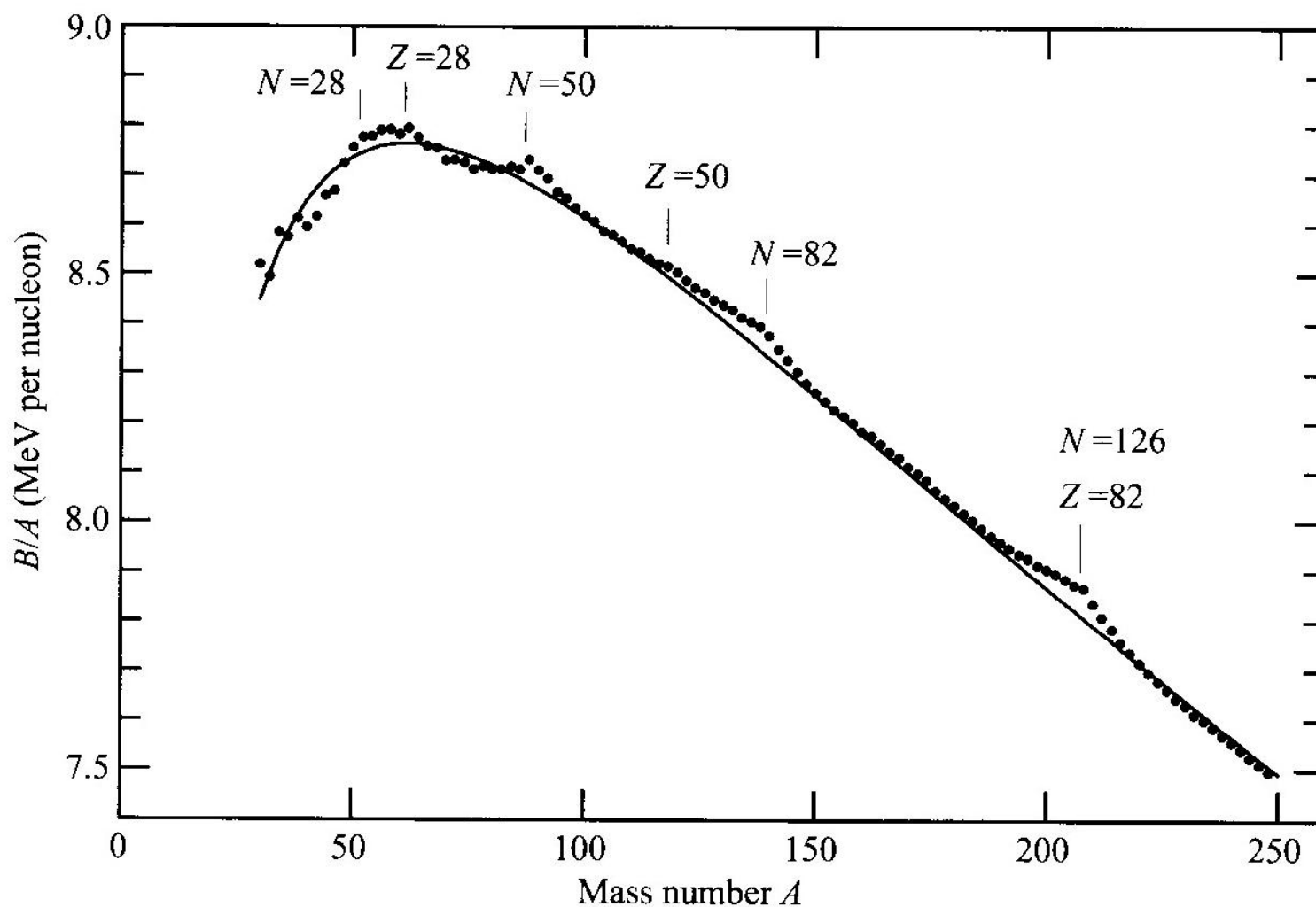
パウリ原理



準位エネルギーが $E_k = k \Delta E$ で与えられ、各準位の縮退度が 2 だとすると、

$$\begin{aligned} E &= \sum_{k=1}^{N/2} 2k \Delta E + \sum_{k=1}^{Z/2} 2k \Delta E \\ &= 2\Delta E \left(\sum_{k=1}^{N/2} k + \sum_{k=1}^{Z/2} k \right) \\ &= \frac{\Delta E}{2} \left(\frac{N^2 + Z^2}{2} + N + Z \right) \\ &= \frac{\Delta E}{2} \left(\frac{A^2}{4} + A + (N - Z)^2 \right) \end{aligned}$$

どのくらい実験を再現するか？

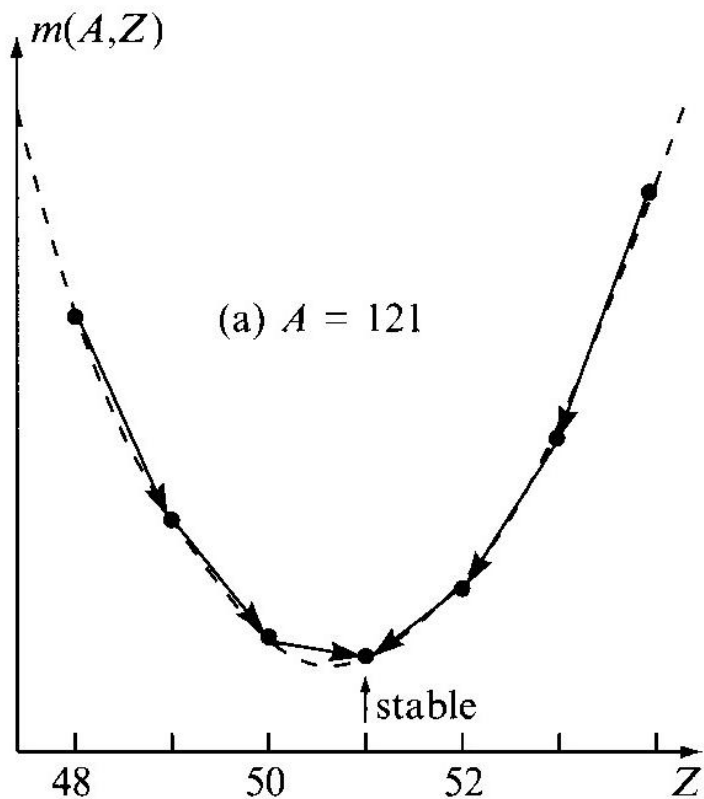


cf. $N, Z = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126$ (魔法数) に対して束縛エネルギー大

β -安定線

$$B(N, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\text{sym}} \frac{(N - Z)^2}{A}$$

$$m(A, Z) = f(A) + a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_{\text{sym}} \frac{(A - 2Z)^2}{A}$$



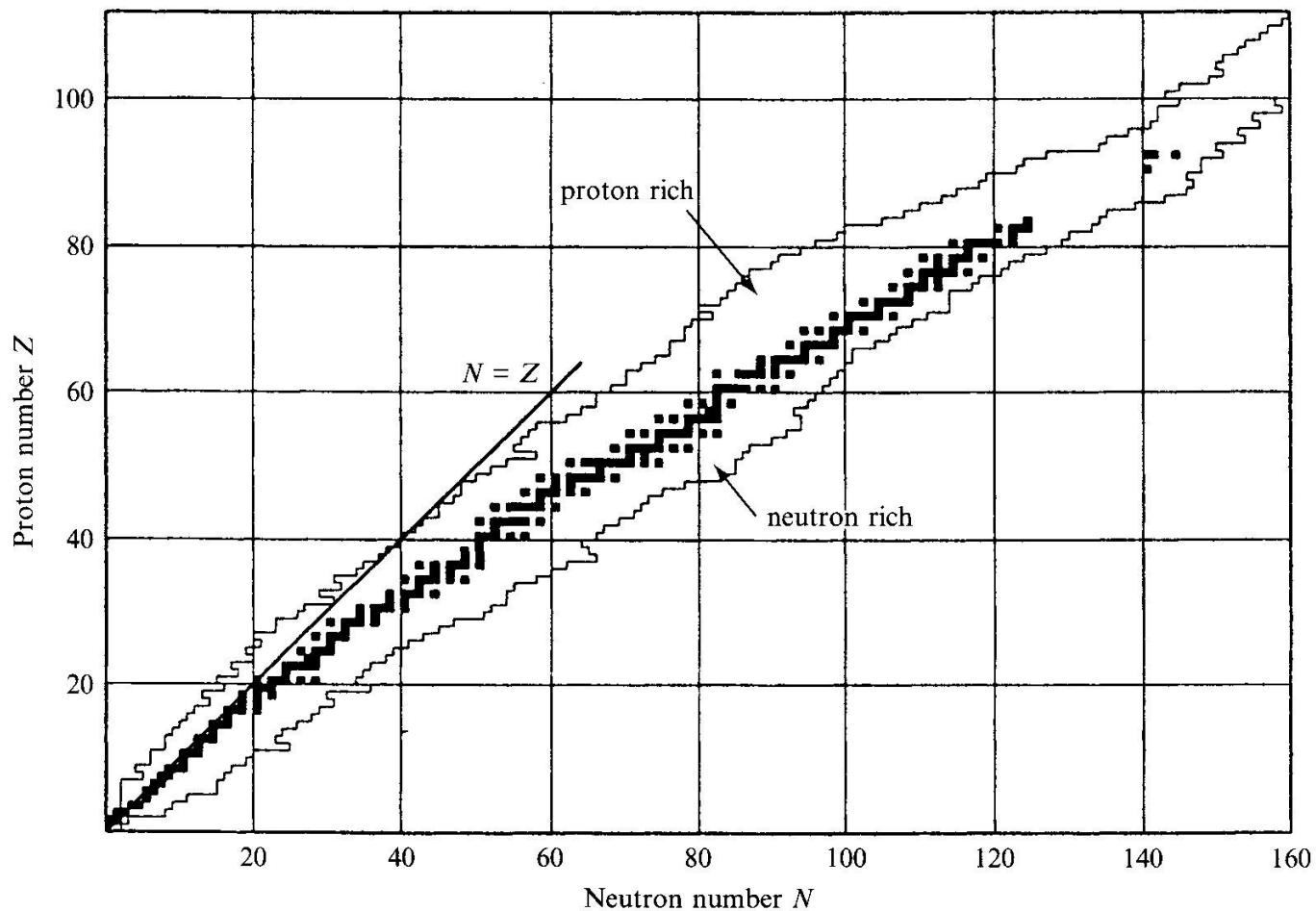
安定核 (beta-安定線)

$$\left. \frac{\partial m}{\partial Z} \right|_{A=\text{const.}} = 0$$

$$Z = \frac{4a_{\text{sym}}}{2a_C/A^{1/3} + 8a_{\text{sym}}/A}$$

$$\Rightarrow Z < A/2$$

核图表



安定核: $N \geq Z$