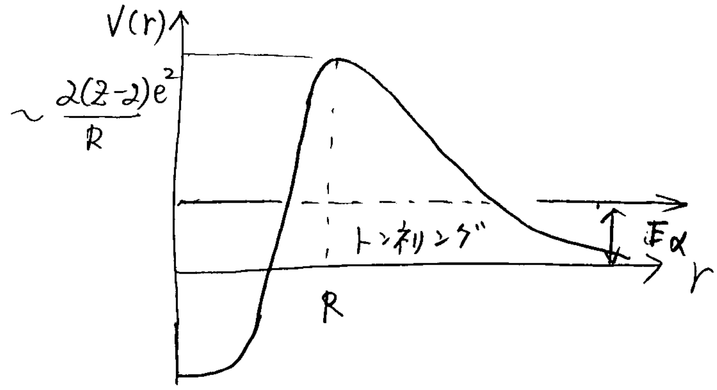
$R = 1.1 \times (230^{1/3} + 4^{1/3}) = 8.49\ fm$

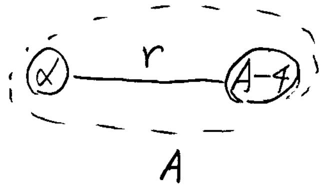
$\frac{2\times 88}{R} e^2 = \frac{2\times 88}{8.49} \times \frac{197}{137} = 29.8\ MeV \leftrightarrow 4 \sim 10\ MeV$

$\left(\sim \frac{\cancel{2\times 88}^{10}}{\cancel{8}} \times \frac{200}{\cancel{140}} \sim \frac{400}{15} = \frac{80}{3} \sim 27\right)$

$R = 1.48 \times \cdots$ としても
$V_b = 22.1\ MeV$

α. ガモフによる α崩壊の説明





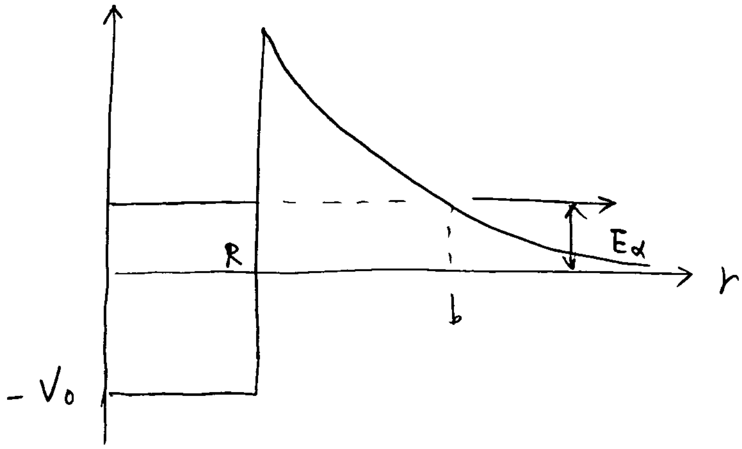
$E_\alpha < \frac{2(Z-2)e^2}{R}$

⤳ トンネル効果による崩壊

ガモフ： $\boxed{\lambda = w \cdot P}$

w：単位時間当りにポテンシャルを hit する数 (attempt frequency)

P：トンネル効果の確率



$\frac{1}{2}\mu \tilde{v}^2 = E + V_0$

$V(r) = \begin{cases} -V_0 & (r < R) \\ \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} & (r > R) \end{cases}$ と単純化すると

$w \sim \frac{\tilde{v}}{2R}$, $P = e^{-2\int_R^b \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2}\left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} - E\right)}}$

$$E = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{b}$$

$$P = e^{-G}$$

$$G = 2\int_R^b dr\,\sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2}\left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} - E\right)}$$

$$E = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{b}$$

$$= 2\cdot\sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2}}\ \sqrt{Z_1 Z_2 e^2}\ \underbrace{\int_R^b \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{b}}\, dr}_{=\sqrt{b}\left[\cos^{-1}\sqrt{\frac{R}{b}} - \sqrt{\frac{R}{b} - \frac{R^2}{b^2}}\right]}$$

$$\sqrt{b}\left[\underbrace{\cos^{-1}\sqrt{\frac{R}{b}} - \sqrt{\frac{R}{b} - \frac{R^2}{b^2}}}_{\simeq\ \frac{\pi}{2} - 2\cdot\sqrt{\frac{R}{b}}\quad (b \gg R)}\right]$$

$$\sqrt{b} = \sqrt{\frac{Z_1 Z_2 e^2}{E}}$$

$$\sim \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2}}\ \sqrt{Z_1 Z_2 e^2\cdot \cancel{b}}\ \sqrt{\frac{R}{\cancel{b}}}\left(\pi\sqrt{\frac{b}{R}} - 4\right)$$

$$= \sqrt{\frac{2\mu R}{\hbar^2}\cdot Z_1 Z_2 e^2}\left(\pi\sqrt{\frac{Z_1 Z_2 e^2}{RE}} - 4\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{R}{b}}\right) = \sin\sqrt{\frac{R}{b}} \simeq \sqrt{\frac{R}{b}}$$

↓

$$\lambda = \lambda_0 \, e^{-\alpha \cdot \frac{Z_1}{\sqrt{E}} + \beta}$$

↓

$$T_{1/2} = \frac{1}{\lambda} \cdot \log 2 = C \cdot e^{\alpha \cdot \frac{Z_1}{\sqrt{E}}}$$

↓

$$\boxed{\log T_{1/2} = \log C + \alpha \cdot \frac{Z_1}{\sqrt{E}}}$$ ← Geiger-Nuttall

(note)

β ← R に依存

↓ E と λ から R を決定できる

$$R = r_0 \, A^{1/3}$$

$$r_0 = 1.48 \text{ fm}$$

(note) 電子散乱の実験： $r_0 = 1.1 \sim 1.2$ fm

- ポテンシャルが現実的にはもっと滑らか
- α 粒子の大きさ
- 多体系の中に α 粒子が析出する確率
  (α spectroscopic factor)

$$A_\alpha^2 = \left| \langle \psi_i(A) \,|\, \psi_f(A-4) \cdot \varphi_\alpha \rangle \right|^2$$

Department of Physics
Tohoku University
Sendai Japan

(note)

$R \to 0$ では

$$\boxed{\int_0^b \sqrt{\frac{1}{r}-\frac{1}{b}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{b}}$$

$$b = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{E}$$

$$G = \cancel{2} \cdot \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2}} \cdot \sqrt{Z_1 Z_2 e^2} \cdot \frac{\pi}{\cancel{2}} \sqrt{\frac{Z_1 Z_2 e^2}{E}}$$

$$= \pi Z_1 Z_2 e^2 \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2 E}} \qquad E = \frac{1}{2}\mu v^2$$

$$= 2\pi \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v}\right)$$

$$\equiv \eta(E)$$

ゾンマーフェルト・パラメーター

$$10^{10} \text{ year} = 10^{10} \times 365 \times 24 \times 60 \times 60 \text{ sec.}$$

$$= 3.15 \times 10^{17} \text{ sec.}$$

24桁

$$0.11 \ \mu\text{sec} = 1.1 \times 10^{-7} \text{ sec.}$$

$$\frac{1}{2}\mu c^2 \left(\frac{v}{c}\right)^2 = E$$

Department of Physics
Tohoku University
Sendai, Japan

(note)

$$P(E) = e^{-2\pi\eta(E)}$$

$$\eta(E) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v} = Z_1 Z_2 \cdot \frac{e^2}{\hbar c} \cdot \frac{1}{v/c}$$

$$= Z_1 Z_2 \cdot \frac{e^2}{\hbar c} \cdot \sqrt{\frac{\mu c^2}{2E}}$$

$Z_1 = 2$, $Z_2 = 88$, $\mu = 4 m_N \sim 4 \times 940\ \mathrm{MeV}/c^2$ とすると

$E = 4\ \mathrm{MeV}$ で

$$\eta = 2 \times 88 \times \frac{1}{137} \times \sqrt{\frac{4 \times 940}{2 \times 4}} = 27.851$$

$$e^{-2\pi\eta} = 1.00 \times 10^{-76}$$

$E = 10\ \mathrm{MeV}$ で

$$\eta = 2 \times 88 \times \frac{1}{137} \times \sqrt{\frac{4 \times 940}{2 \times 10}} = 17.615$$

$$e^{-2\pi\eta} = 8.60 \times 10^{-49} \quad (= 1.00 \times 10^{-76} \times 8.60 \times 10^{27})$$

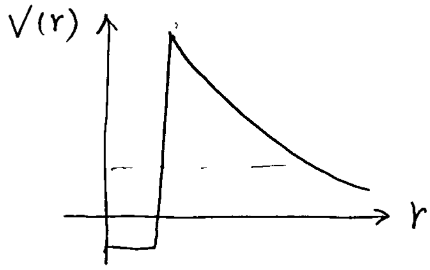
3. 共鳴状態の理論 :

$$V(r) \xrightarrow[\text{どう求めるか}]{?} E_{res},\ \Gamma$$

共鳴幅

連続スペクトルからどのようなE_resを探すか?

3.1. 共鳴散乱理論



$$u_l(r) \to e^{-i(kr-\frac{l\pi}{2})} - \underbrace{S_l}_{= e^{2i\delta_l}} e^{i(kr-\frac{l\pi}{2})}$$

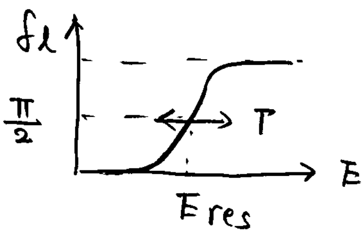
$$\psi(\mathbf{r}) \to e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + f(\theta)\cdot\frac{e^{ikr}}{r}$$

$$f(\theta) = \sum_l (2l+1)\frac{S_l-1}{2ik} P_l(\cos\theta)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2$$

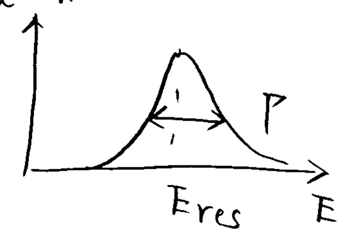
$$\sigma = \int d\Omega \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \frac{4\pi}{k^2}\sum_l (2l+1)\sin^2\delta_l$$

位相のずれが



のような振るまう時

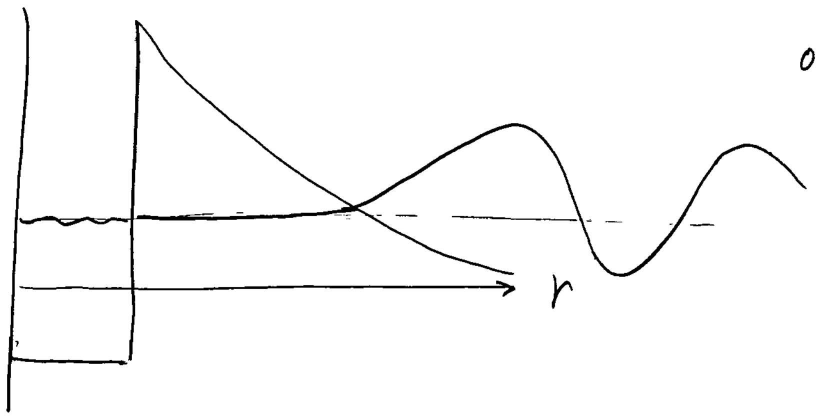
$$\sigma_l = \frac{4\pi}{k^2}(2l+1)\sin^2\delta_l$$

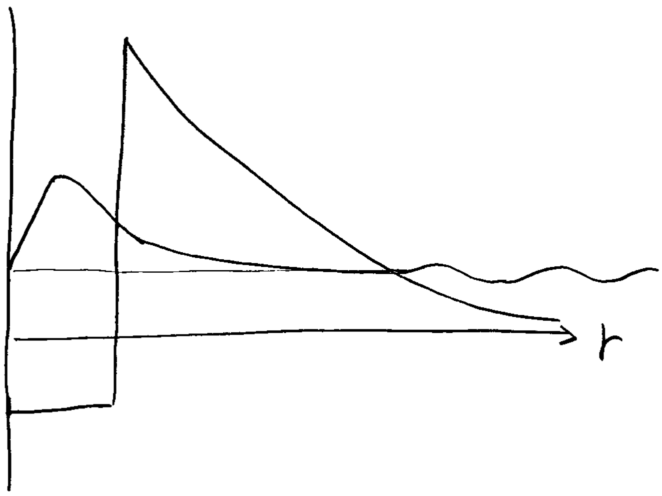


(共鳴散乱)

Department of Physics
Tohoku University
Sendai Japan

波動関数の振るまい





共鳴散乱理論

自由粒子の運動: $$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi = E\psi = \frac{\boldsymbol{k}^2\hbar^2}{2m}\psi$$

$$\begin{aligned}\psi(\boldsymbol{r}) &= e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\, i^l j_l(kr) P_l(\cos\theta) \\ &\to \frac{i}{2kr}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1) i^l \left[e^{-i(kr-l\pi/2)} - e^{i(kr-l\pi/2)}\right] P_l(\cos\theta)\end{aligned}$$

ポテンシャルがある場合: $$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\boldsymbol{r}) - E\right]\psi = 0$$

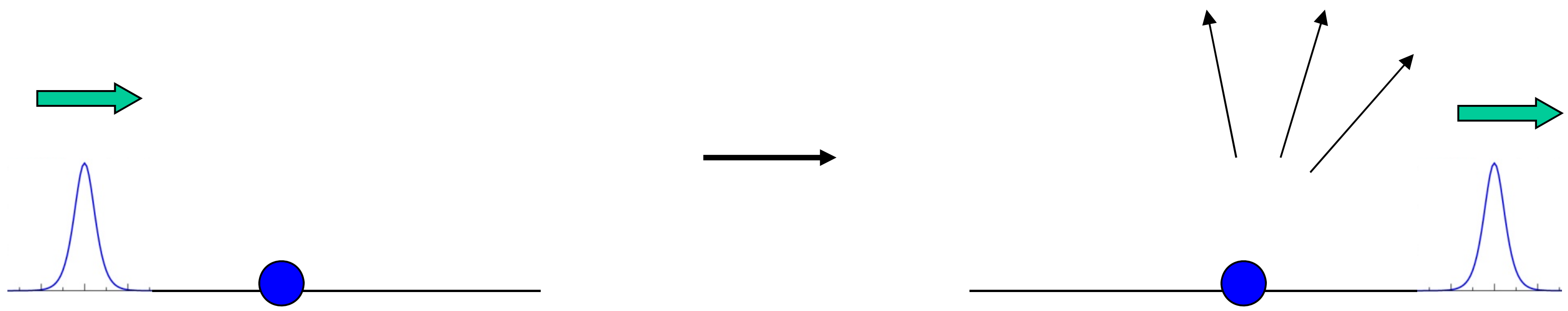
波動関数の漸近形

$$\begin{aligned}\psi(\boldsymbol{r}) &\to \frac{i}{2kr}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1) i^l \left[e^{-i(kr-l\pi/2)} - \underline{\underline{S_l}}\, e^{i(kr-l\pi/2)}\right] P_l(\cos\theta) \\ &= e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + \underbrace{\left[\sum_l (2l+1)\,\frac{S_l - 1}{2ik} P_l(\cos\theta)\right]}_{f(\theta)\ \text{（散乱振幅）}} \frac{e^{ikr}}{r}\end{aligned}$$

$$\psi(\boldsymbol{r}) \;\rightarrow\; e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + \left[\sum_l (2l+1)\,\frac{S_l - 1}{2ik}P_l(\cos\theta)\right]\frac{e^{ikr}}{r}$$

$$= \; e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r}$$

＝（入射波）＋（散乱波）



弾性散乱のみが起こる場合： $|S_l| = 1$ （フラックスの保存）

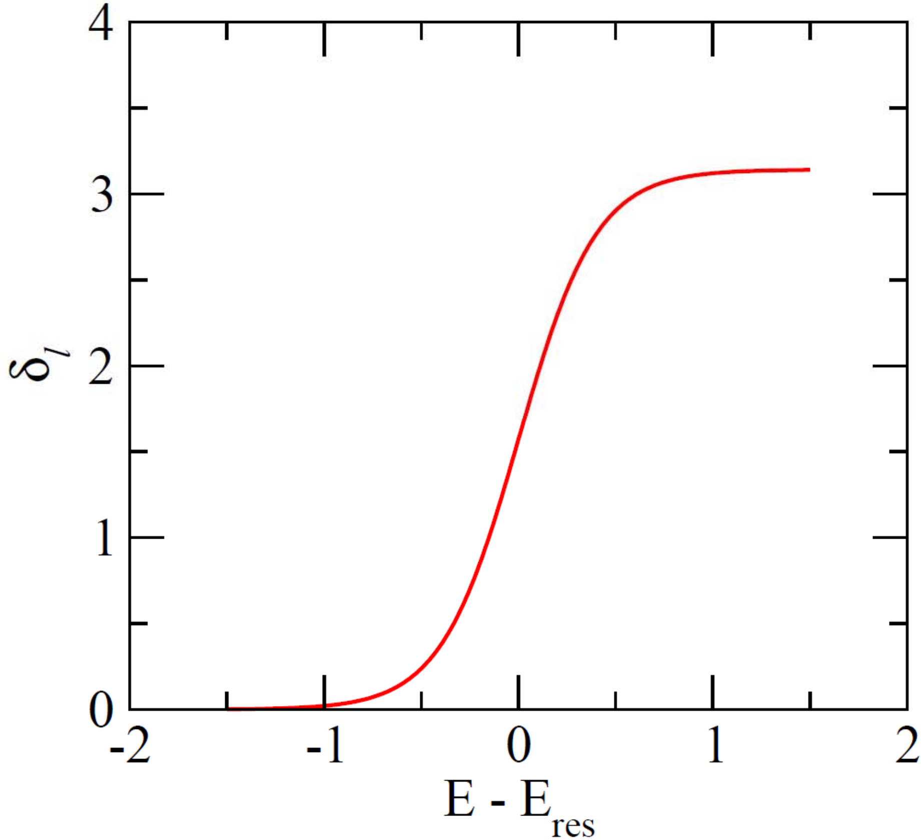
$$\boxed{S_l = e^{2i\delta_l}}$$

δ_l ：位相のずれ（phase shift）

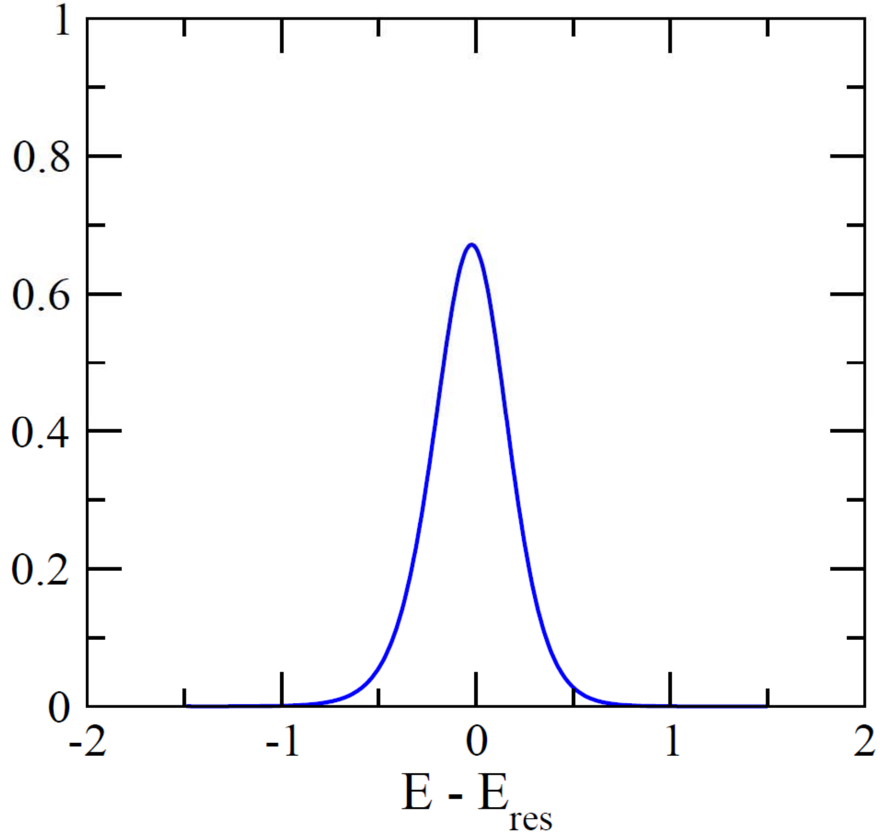
弾性散乱の全散乱断面積:

$$\sigma(E) = \int d\Omega |f(\theta)|^2 = \frac{4\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) \sin^2 \delta_l(E)$$

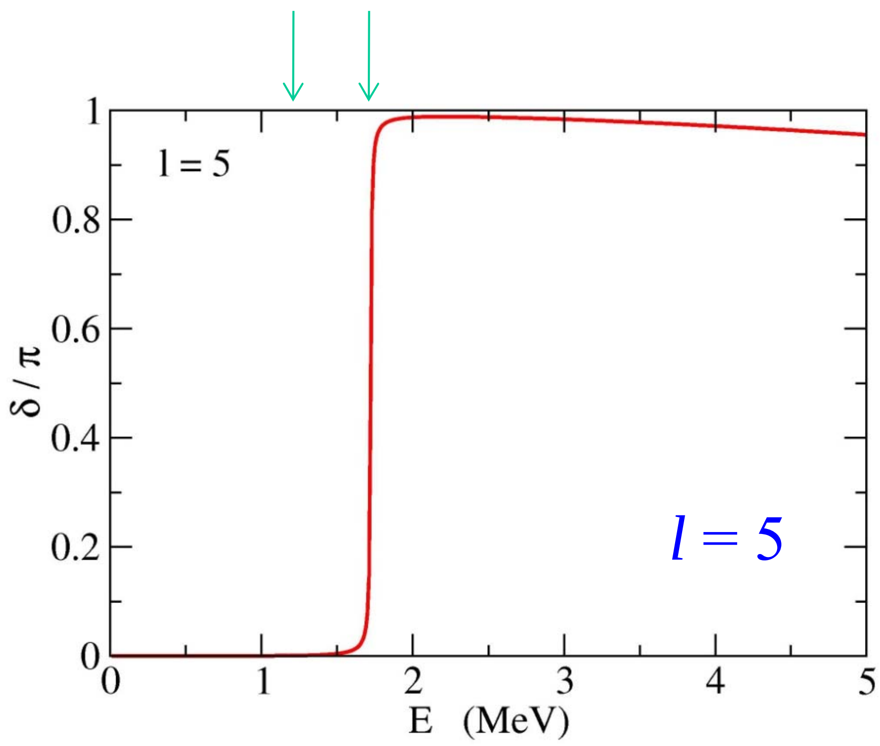
ある l で位相のずれが
下のようになったとすると

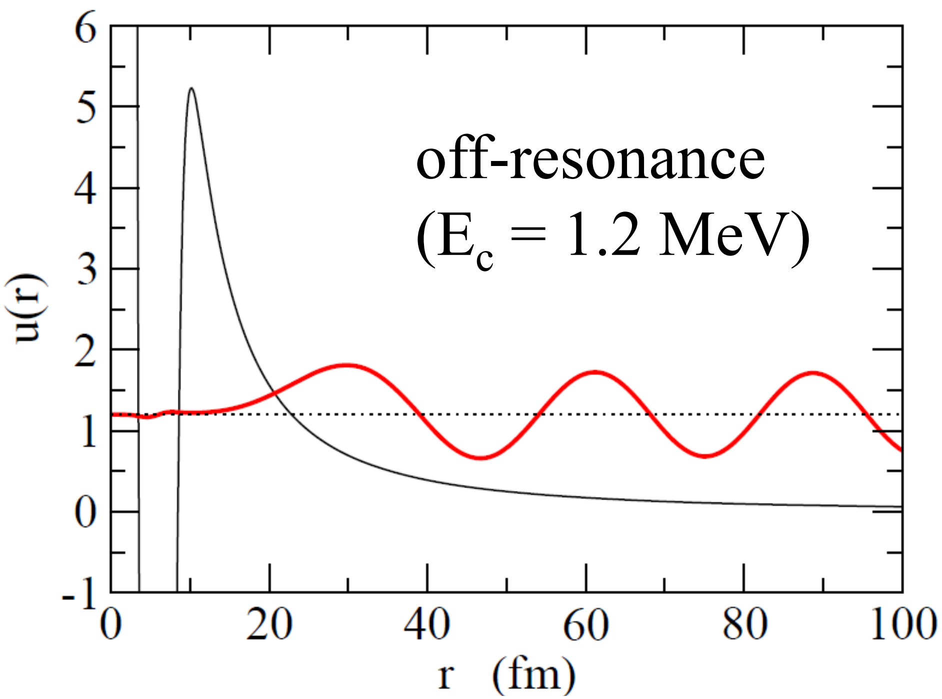


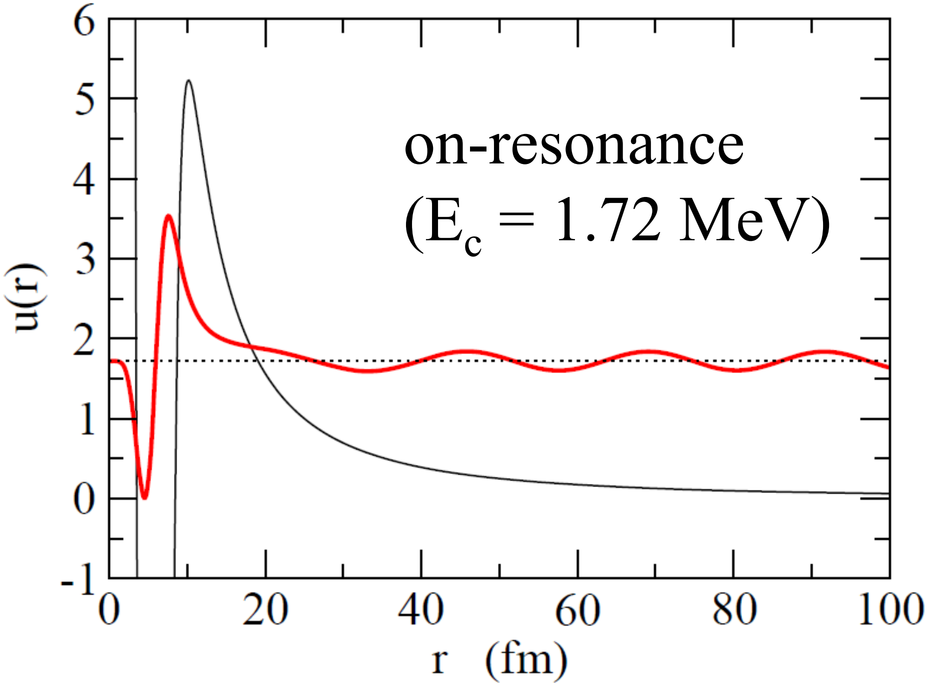
散乱の断面積は下のように
なる（共鳴散乱）



位相のずれのエネルギー依存性と共鳴状態







V_0 = -50 MeV

$R_0 = 1.27 * 200^{1/3}$ fm

a = 0.67 fm

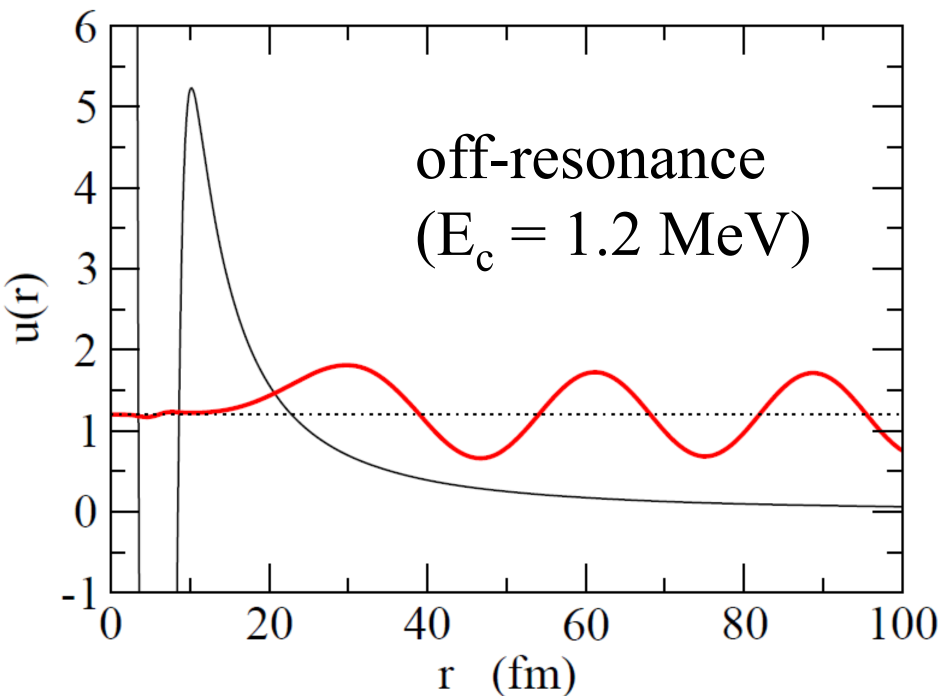
$\mu = 200\, m_N / 201$

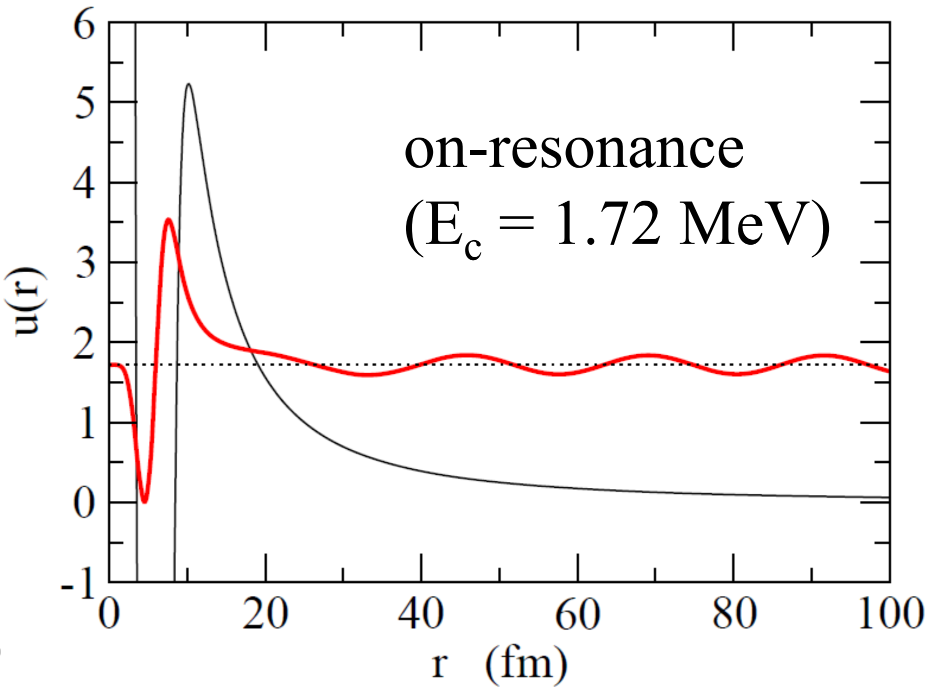
- off-resonance では
  - 波動関数は障壁の外側で大きな振幅
  - トンネル効果による障壁内部にしみ込む

- on-resonance では
  - 波動関数は障壁内部で束縛状態のように振る舞う
  - 障壁にトラップされた波動関数がトンネル効果により障壁の外側にしみ出る
  - 準安定状態

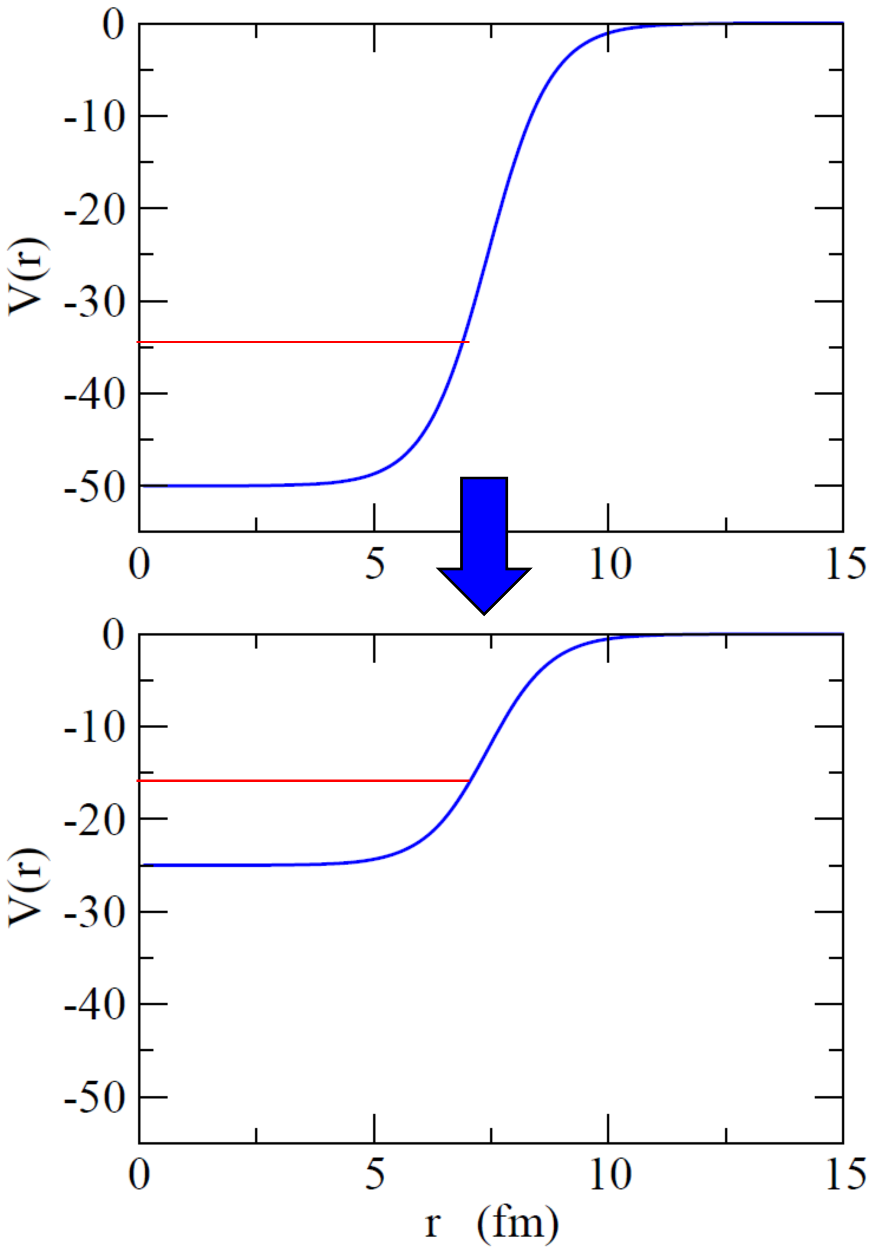
α崩壊と同じ描像

陽子放出崩壊（陽子過剰核）





（補足）共鳴状態と束縛状態の関係



ポテンシャルを浅くしていくと
束縛状態のエネルギーは上がる

↓

やがて束縛状態は共鳴状態へと
連続的に変化
（従って共鳴状態は連続状態に
埋め込まれた束縛状態とも言える。）

3.2. ガモフ状態

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} + V(r) - E \right] u_l(r) = 0$$

$$u_l(r) \sim \begin{cases} r^{l+1} & (r \to 0) \\ e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})} & (r \to \infty) \end{cases}$$

同時に満たすためには

$$E = E_{res} - i\frac{\Gamma}{2}.$$

(note) $P(t) = |\langle \psi(0) | \psi(t) \rangle|^2$

$$= |\langle \psi(0) | e^{-iHt/\hbar} | \psi(0) \rangle|^2$$

$$= e^{-\Gamma t/\hbar}.$$

（参考）ガモフ状態

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2}+V_{\rm cent}(r)+V(r)-E\right]u(r)=0$$

共鳴状態の境界条件として、

- 原点正則
- 遠方で外向き波

を課す。

$$\begin{aligned} u(r) &\sim r^{l+1} && (r\to 0)\\ &\to \mathcal{N}(G_l(kr)+iF_l(kr)) && (r\to\infty)\end{aligned}$$

エネルギーを複素数にしなければならない

$$E\to E_R - i\frac{\Gamma}{2}$$

Γ ← 共鳴幅

E_R ↑ 共鳴エネルギー

$$
\begin{aligned}
P(t) &= |\langle\psi(0)|\psi(t)\rangle|^2 \\
&= |\langle\psi(0)|e^{-iHt/\hbar}|\psi(0)\rangle|^2 \\
&= |\langle\psi(0)|e^{-i(E_R-i\Gamma/2)t/\hbar}|\psi(0)\rangle|^2 \\
&= e^{-\Gamma t/\hbar}
\end{aligned}
$$

4. 陽子放出崩壊

S. Åberg et al.,
Phys. Rev. C56 (97) 1762

陽子過剰核 ($Z \gg N$)

→ 陽子を放出して崩壊

$$ {}^{A+1}_{Z+1}X \longrightarrow {}^{A}_{Z}X + p $$

α崩壊と類似の現象

・実験技術の進歩に伴い過去10年間で
次々と発見

・α崩壊より"純粋な"トンネル現象
(cf. αが「析出」する確率)

・mass が軽い
→ 遠心力の効果が大
→ proton decay を用いて exotic な原子核
の性質が調べられる

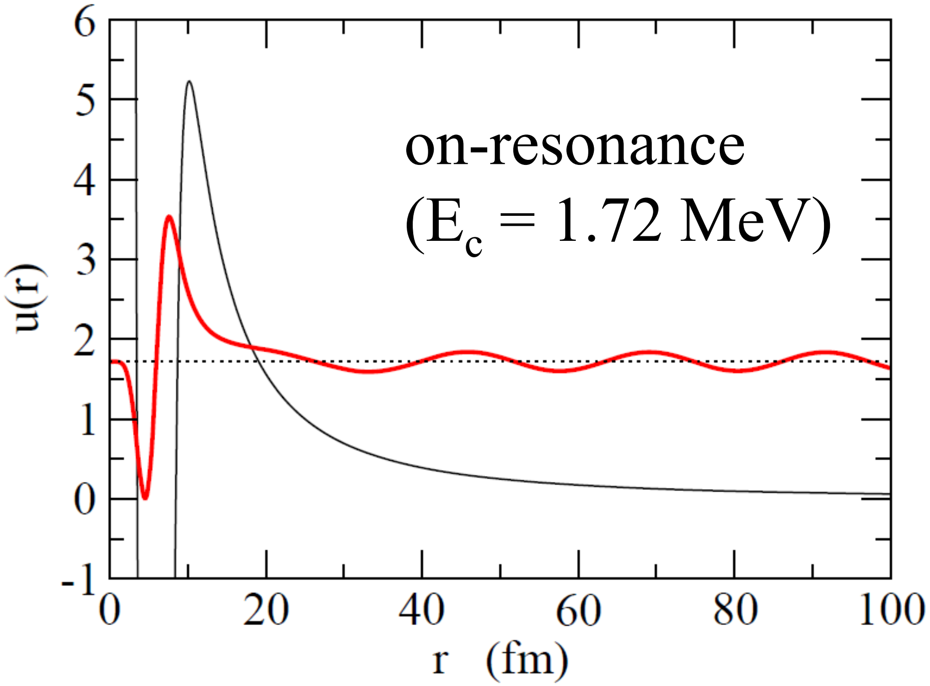
s.p. level
変形
振動

など

陽子ドリップ線を越えた原子核の陽子放出崩壊

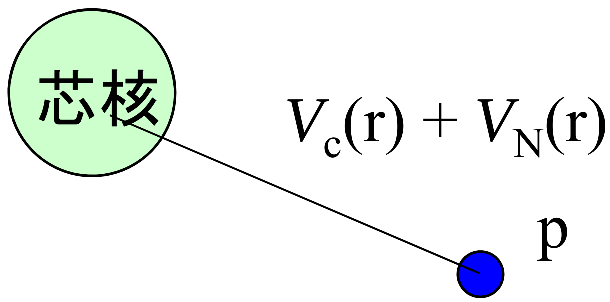
➢共鳴状態の波動関数

- 波動関数は障壁内部で束縛状態のように振る舞う
- 障壁にトラップされた波動関数がトンネル効果により障壁の外側にしみ出る
- 準安定状態



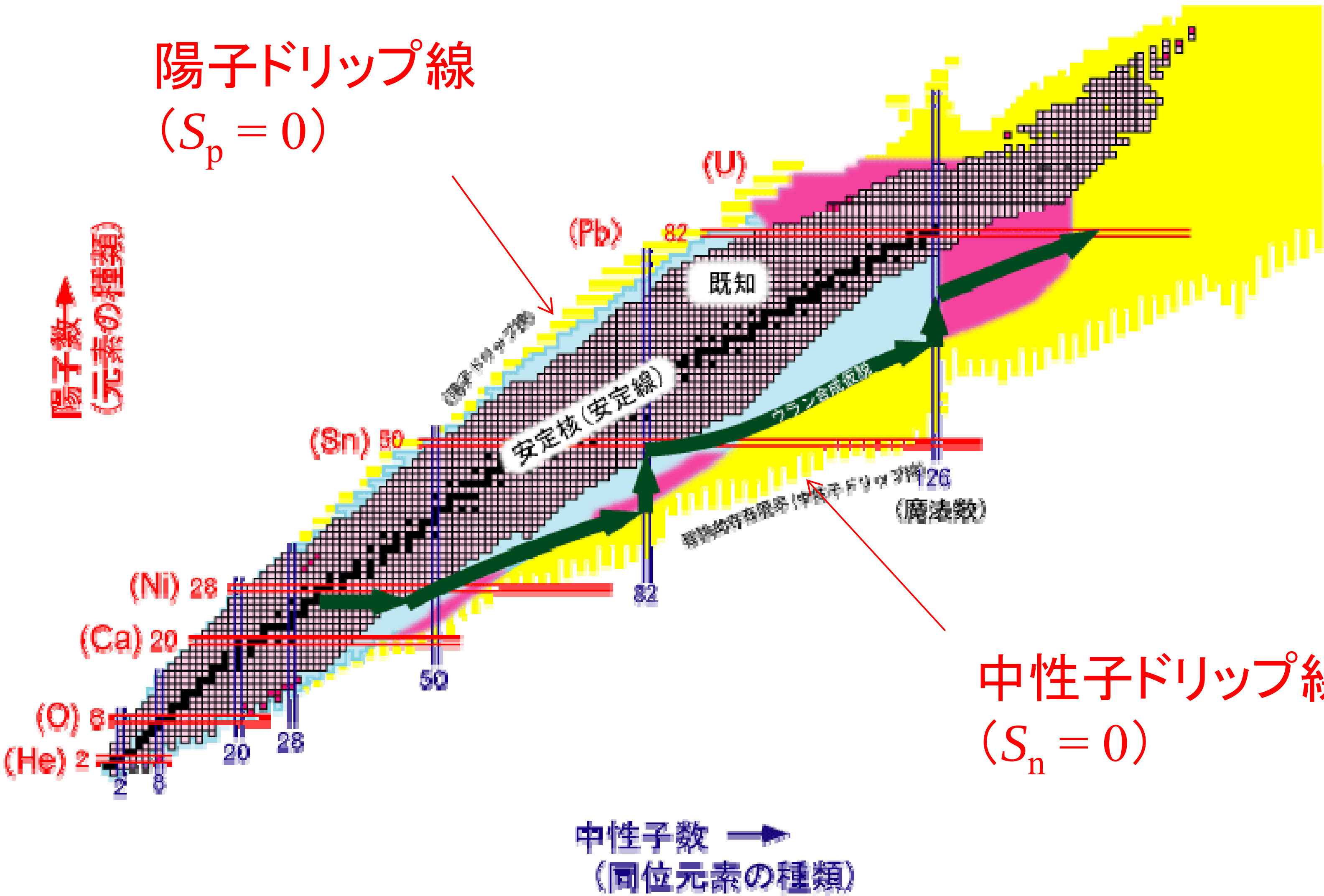
α崩壊と同じ描像

陽子放出崩壊（陽子過剰核）



陽子ドリップ線を越えた原子核の陽子放出崩壊

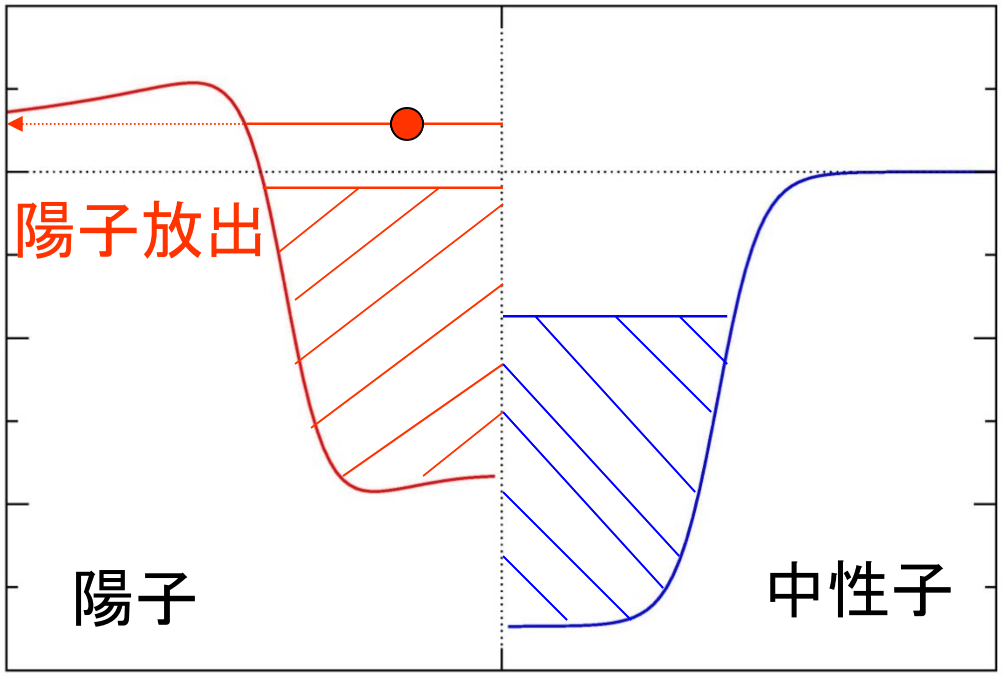
陽子ドリップ線
（$S_p = 0$）



中性子ドリップ線
（$S_n = 0$）

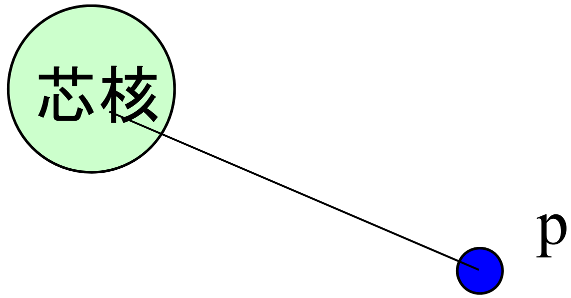
陽子放出崩壊

陽子ドリップ線を越えた原子核



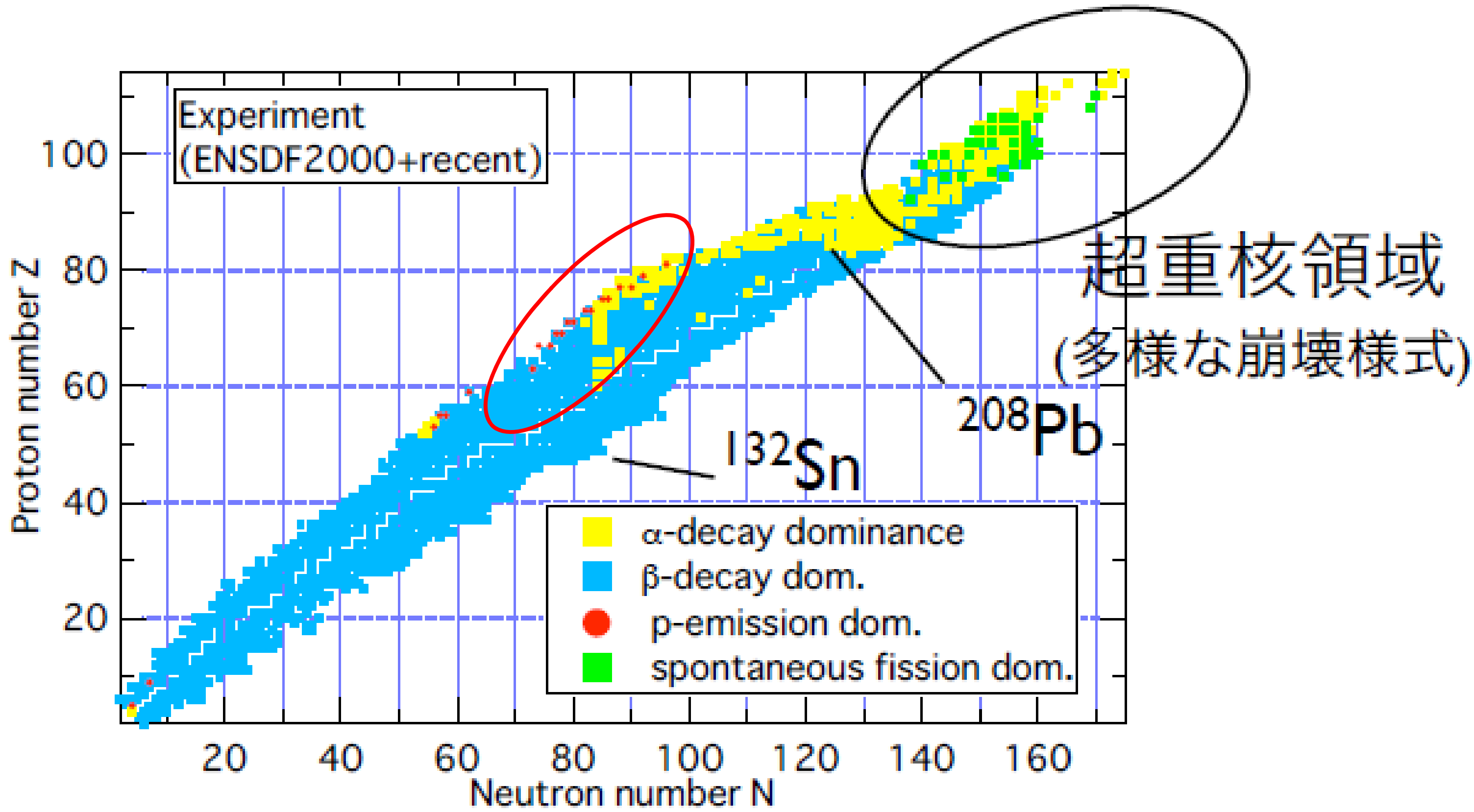
陽子:クーロン障壁にトラップ
（障壁をトンネルしなければならない）

→ 非常に幅の狭い（長寿命な）共鳴状態



多くの（基底状態）陽子放出核がオークリッジやアルゴンヌ研究所で発見

実験の観測量: 陽子の放出エネルギーE_pと崩壊半減期 $T_{1/2}$



小浦寛之氏（JAEA）
のスライドより

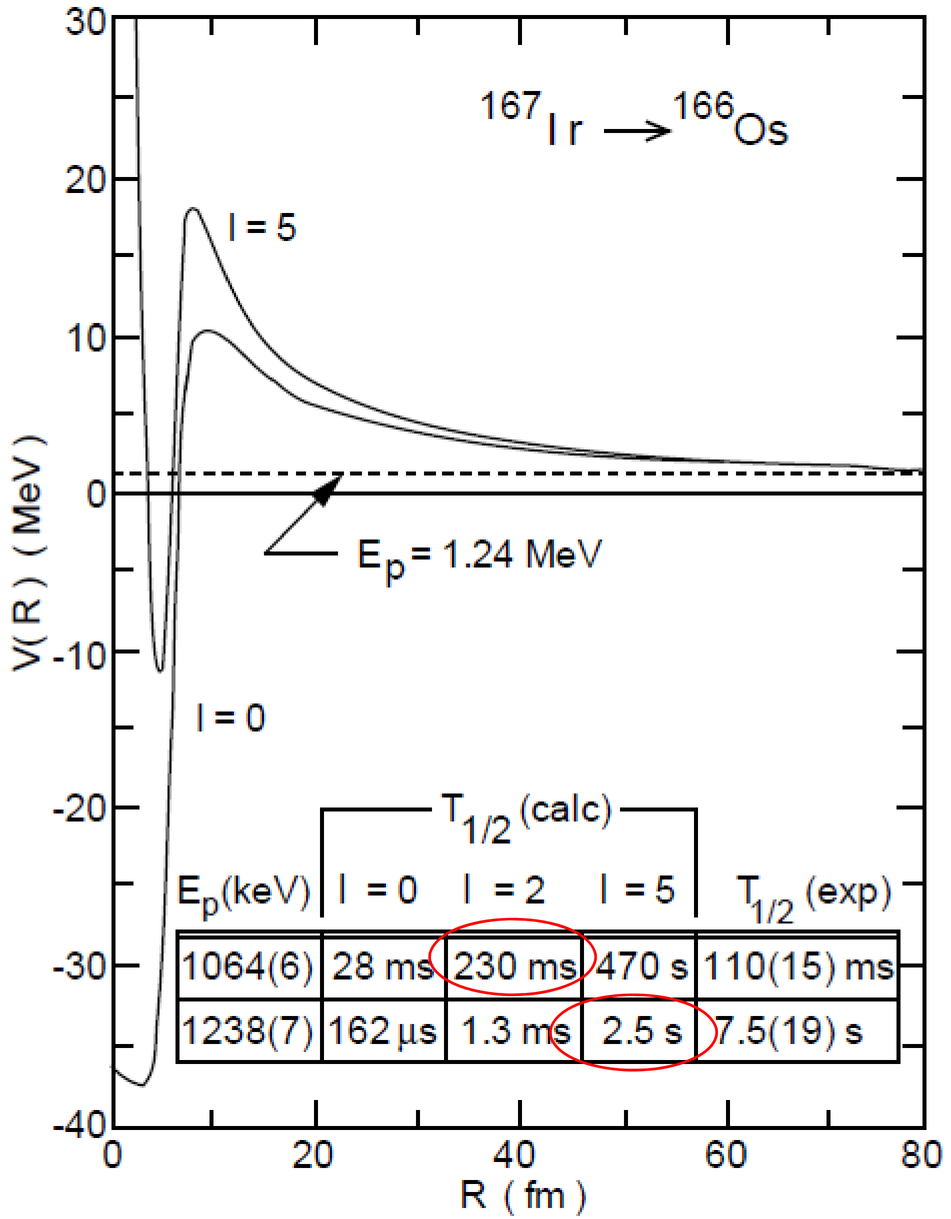


Figure 3 Proton-nucleus potential calculated for the proton emitter ^{167}Ir. The *inset* shows the proton-decay half-lives calculated using the WKB approximation for three values of the angular momentum ℓ, compared to the experimental values for the ground and isomeric transitions.

A ~ 150-160 領域における典型的な値

$V_b \sim 10$ MeV (l=0)
$E_p \sim 1$ MeV
R_{turn}: 80~100 fm
Γ : 10^{-18}~10^{-22} MeV
$T_{1/2}$: 100 μs~1 sec

陽子放出崩壊の一つの特徴:
半減期が l に敏感

↓

陽子崩壊を通じて陽子過剰核の陽子一粒子状態の l を決定できる

P.J. Woods and C.N. Davids,
Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. 47 ('97)541

α崩壊との相違点

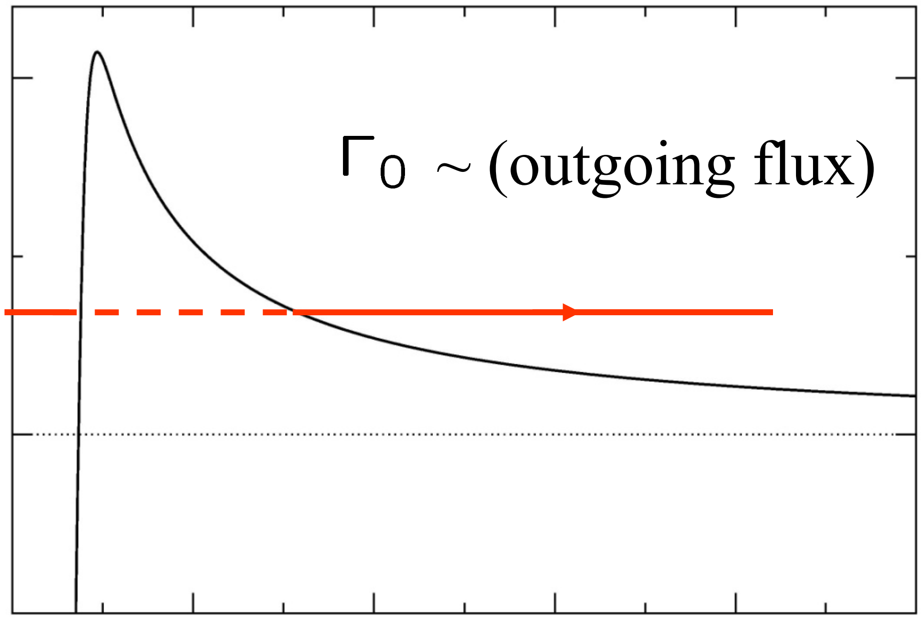
1. 換算質量 μ が小さい

➡ l の依存性が強い(遠心力ポテンシャル)

➡ 陽子の一粒子状態の情報を得ることができる
（偶々核のα崩壊では $l=0$ がメイン）

2. 分光学的因子 (spectroscopic factor) がずっと単純

$${}^{A+1}_{Z+1}X \rightarrow {}^{A}_{Z}X + p$$



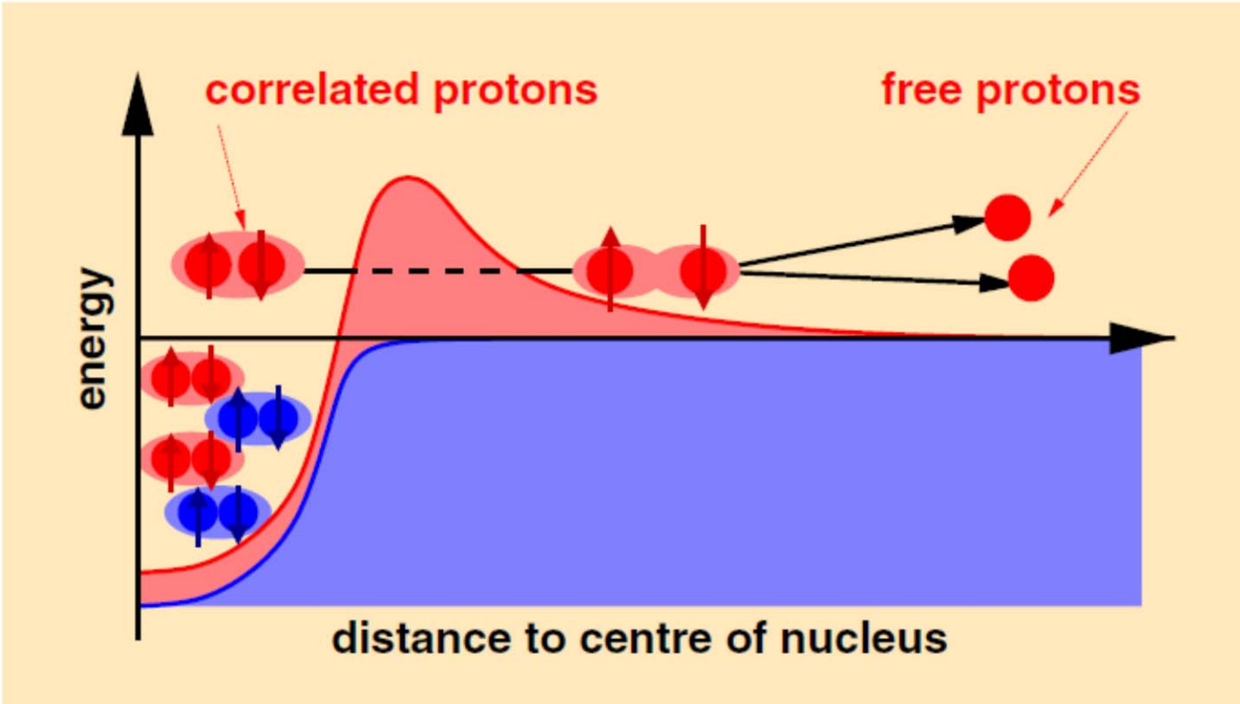
$$\boxed{\begin{aligned} \Gamma &= \Gamma_0 \cdot S \\ S &= |\langle (A+1)|(A)+1\rangle|^2 \end{aligned}}$$

S: 特定の状態が（多体の）波動関数の中に存在する確率

- 陽子崩壊：軌道の占有確率
- α崩壊：α粒子が析出する確率
（とても複雑）

2陽子放出崩壊

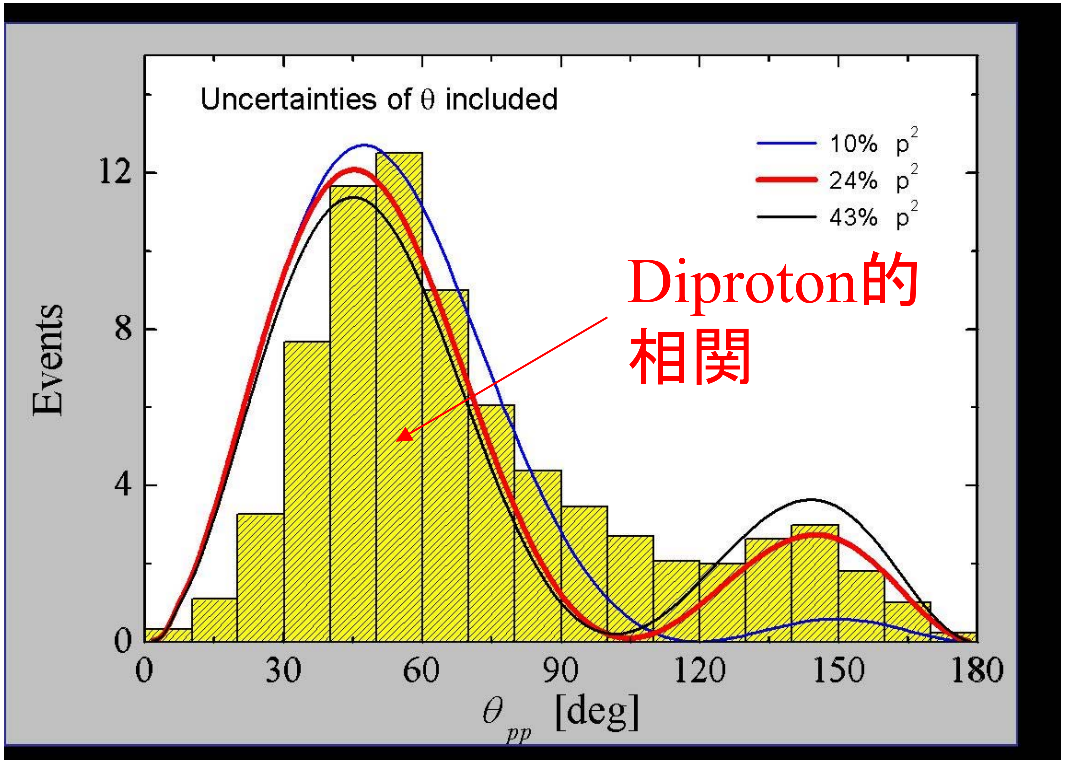
最近では陽子が2つ出てくる崩壊も観測されている



B. Blank and M. Ploszajczak, Rep. Prog. Phys. 71('08)046301

- ✓ 放出2陽子のエネルギー分布や角度分布から相関が見えるか?
- ✓ クーロン3体系（終状態相互作用）
  - ・理論的取扱いが難しい
  - ・基底状態の相関をどのくらい乱すか

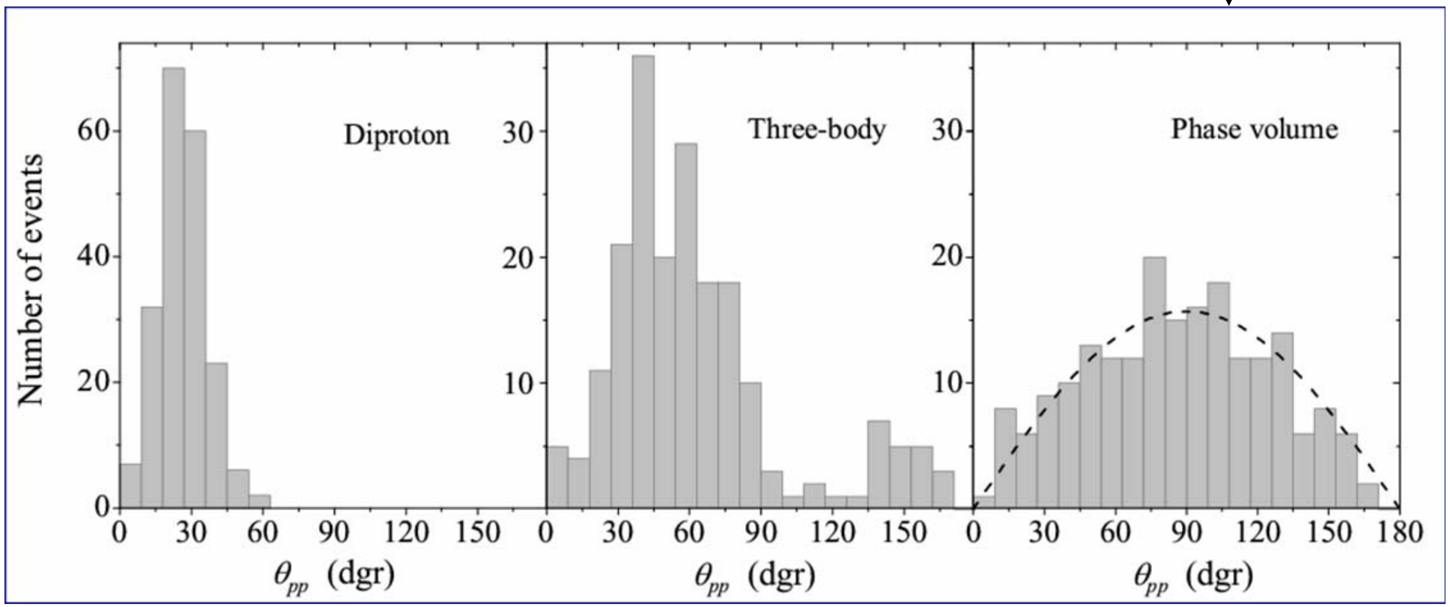
^{45}Fe 核の場合

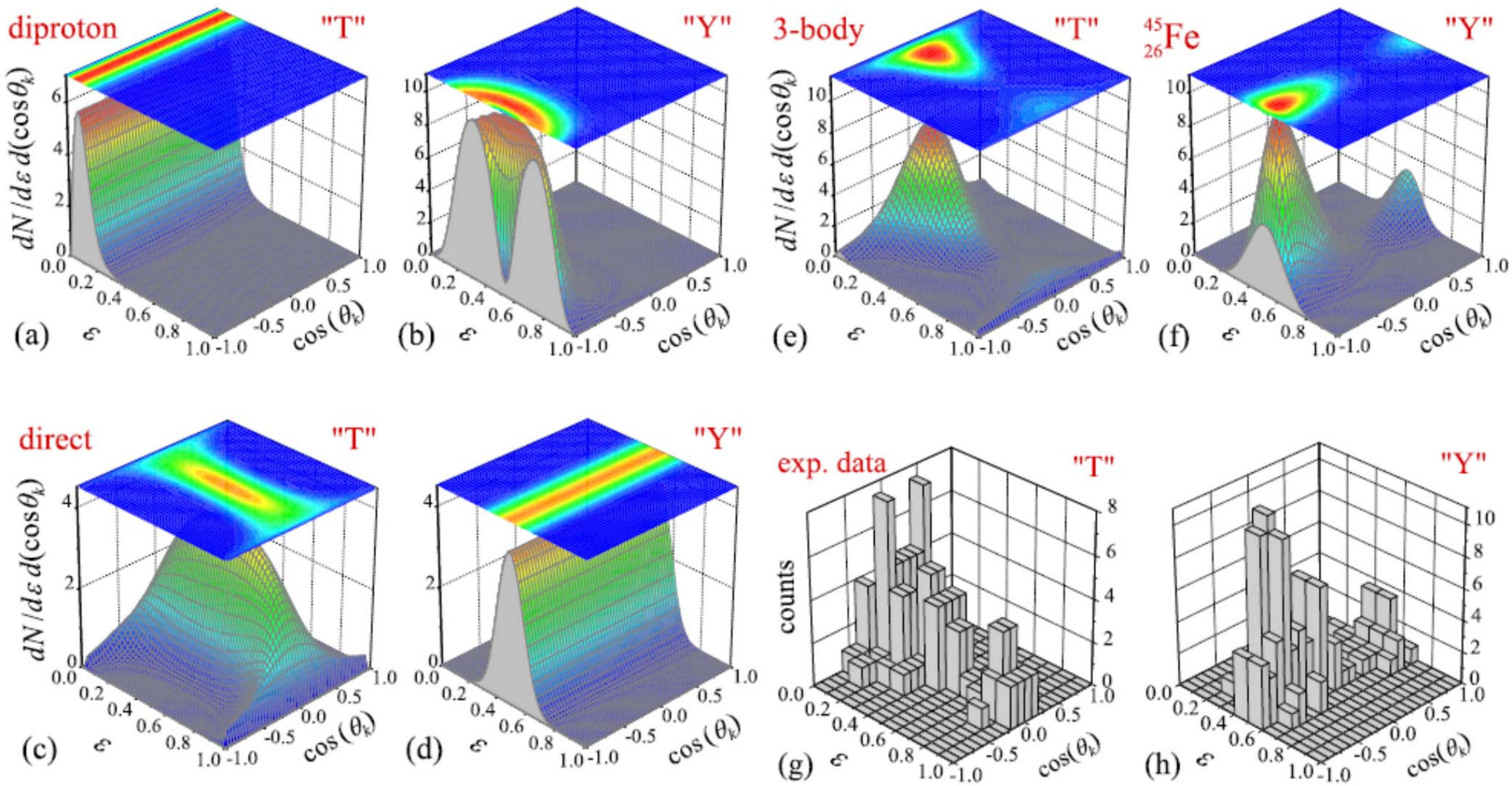


K. Miernik et al.,
PRL99 (‘07) 192501

← 実験データ

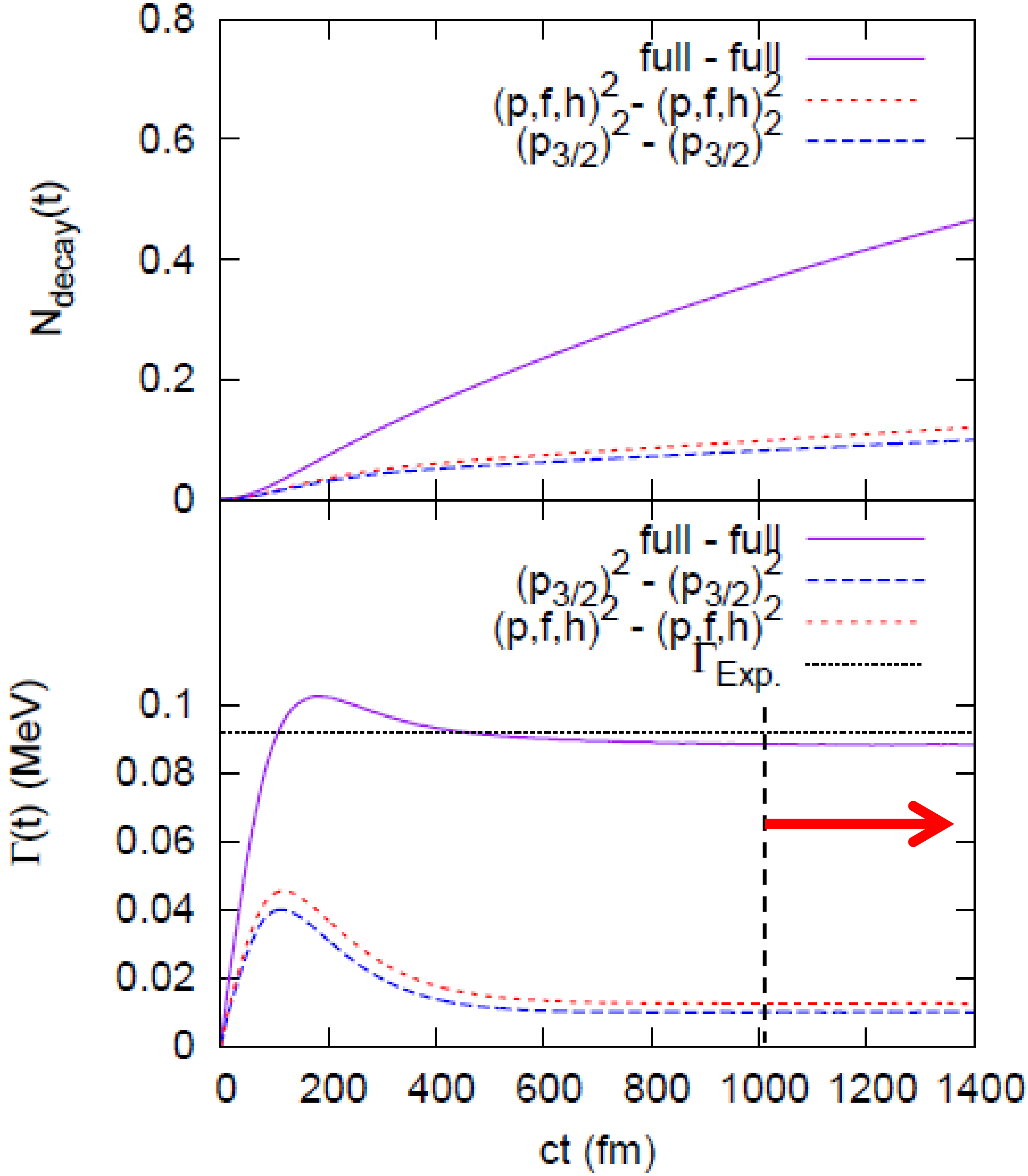
理論計算 (Grigorenko)



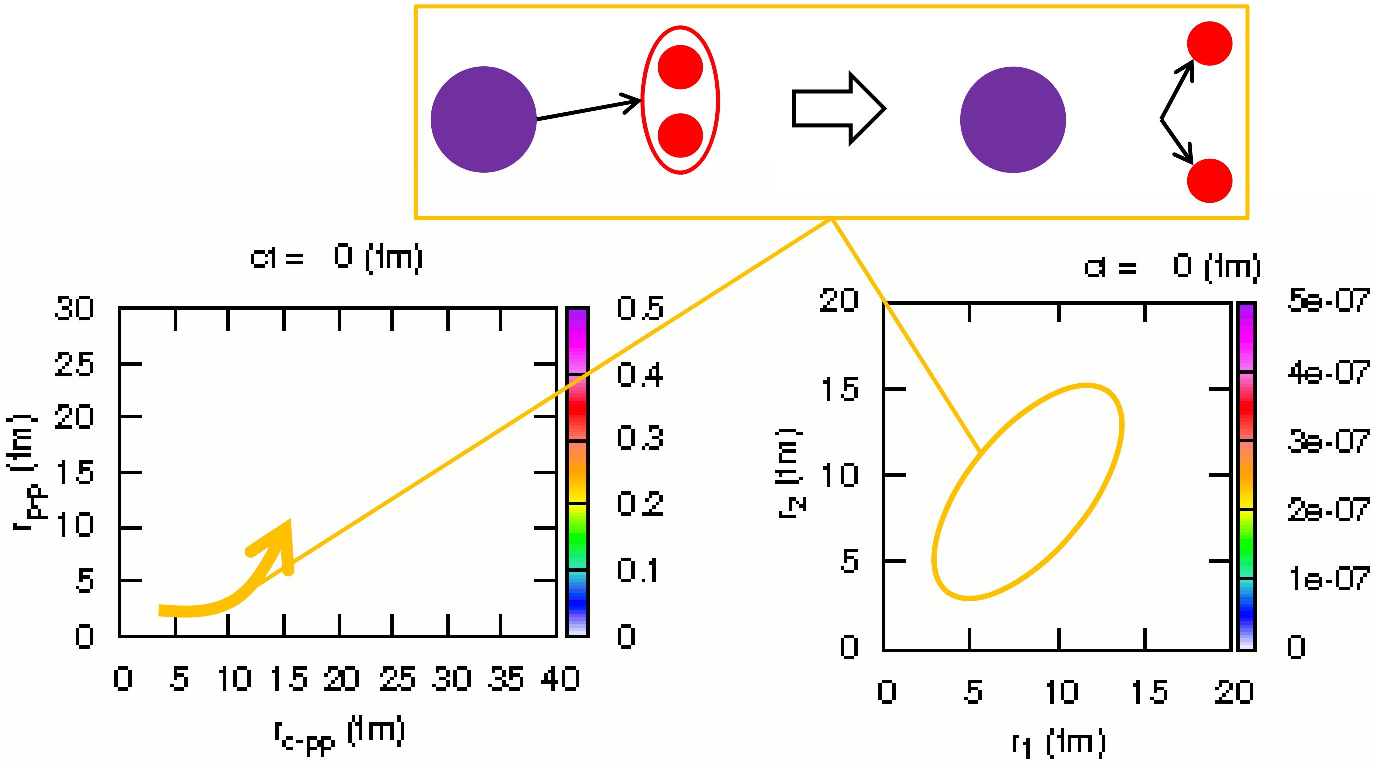


M. Pfutzner, M. Karny, L.V. Grigorenko, K. Riisager,
Rev. Mod. Phys. 84 ('12) 567

大石知広君(東北大D3)
^{6}Be 核を解析中
・時間に依存する3体模型
・崩壊幅
・放出2陽子の相関
はこれから

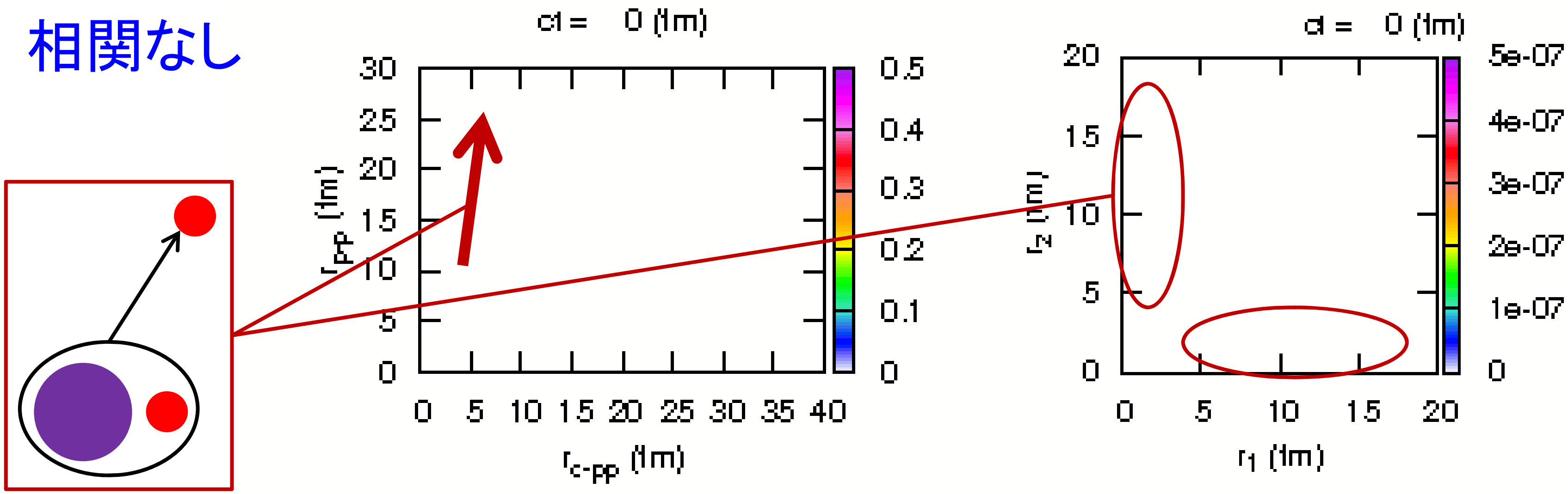


相関あり



ct = 0 (fm)
30
25
20
15
10
5
0
r_pp (fm)
0 5 10 15 20 25 30 35 40
r_c-pp (fm)
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
ct = 0 (fm)
20
15
10
5
0
r_2 (fm)
0 5 10 15 20
r_1 (fm)
5e-07
4e-07
3e-07
2e-07
1e-07
0

相関なし



ct = 0 (fm)
30
25
20
15
10
5
0
r_pp (fm)
0 5 10 15 20 25 30 35 40
r_c-pp (fm)
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
ct = 0 (fm)
20
15
10
5
0
r_2 (fm)
0 5 10 15 20
r_1 (fm)
5e-07
4e-07
3e-07
2e-07
1e-07
0