

Ⅳ γ崩壊

多体のハミルトン = アニ

$$H = \sum_i \frac{P_i^2}{2m} + \sum_{i < j} V_{ij}$$

$$\rightarrow H = \sum_i \left[\frac{1}{2m} \left(P_i - \frac{e_i}{c} A(r_i, t) \right)^2 + e_i \phi_i \right] + \sum_{i < j} V_{ij} \\ + H_{em}$$

$$e_i = \begin{cases} +e & \text{陽子} \\ 0 & \text{中性子} \end{cases}$$

* このようなすると古典的ガロレンツカ
がでてくる。

* A : ベクトル・ポテンシャル
 ϕ : スカラー・ポテンシャル

クローン・ゲージ

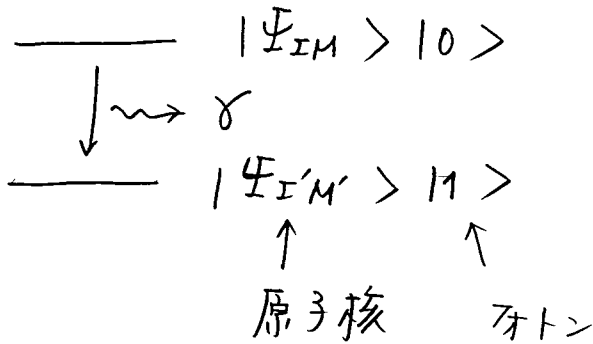
$$\begin{cases} \nabla \cdot A = 0 \\ \phi = 0 \end{cases}$$

↓

$$\begin{aligned} \left(P_i - \frac{e_i}{c} A_i \right)^2 &= P_i^2 - \frac{e_i}{c} \underbrace{(P_i \cdot A_i + A_i \cdot P_i)}_{\substack{\text{ } \\ \int \\ 0 \\ \text{(高次)}}} + \frac{e_i^2}{c^2} A_i^2 \\ &= P_i^2 - \frac{e_i}{c} \left(\underbrace{(P_i \cdot A_i)}_{\substack{\text{ } \\ \int \\ 0 \\ \text{(高次)}}} + 2 A_i \cdot P_i \right) \\ &\quad \underbrace{\frac{1}{c} \nabla_i \cdot A_i = 0}_{\text{(クローン・ゲージ)}} \\ &= P_i^2 - \frac{2e_i}{c} A_i \cdot P_i \end{aligned}$$

↓

$$\text{Hint} = - \sum_i \frac{e_i}{m c} A_i \cdot P_i$$



フェルミの黄金律

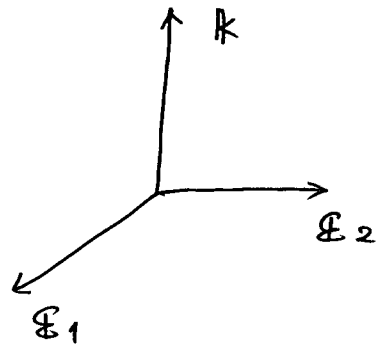
$$\Gamma = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_f |\langle f | \text{Hint} | i \rangle|^2$$

(note) 真空中でのマクスウェル方程式:

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right) A(\mathbf{r}, t) = 0$$

解: $A(\mathbf{r}, t) = A_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + c.c.$
($\omega = ck$)

$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$
 $\rightarrow \mathbf{k} \cdot \mathbf{A}_0 = 0$ (横波条件)



2つの独立解

$A_0 = A_0 \mathbf{E}_\alpha$
($\alpha = 1, 2$)

偏極ベクトル

(2つのスピン
波動関数に相当)

第2量子化 $\rightarrow A_0 = \sqrt{\frac{2\pi c^2 \hbar}{\omega V}} a_{\mathbf{k}\alpha}$
2つの消滅演算子

(=のように規格化因子をとれば)

$$H_{em} = \frac{1}{8\pi} \int d\mathbf{r} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)$$

$$= \sum_{\mathbf{k}, \alpha} \left(a_{\mathbf{k}\alpha}^\dagger a_{\mathbf{k}\alpha} + \frac{1}{2} \right) \cdot \hbar \omega_{\mathbf{k}}$$

(note)

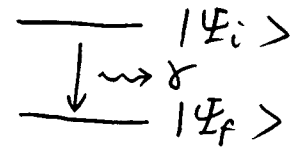
$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \left(\sum_l\right) (2l+1) i^l j_l(kr) P_l(\cos\theta)$$

様々なる l がまじる

→ 原子核の角運動量状態が
 γ 線の放出により変化する

。電磁遷移確率

$$|\Psi_i\rangle |0\rangle \rightarrow |\Psi_f\rangle |1\rangle$$



光子の運動量ベクトル

$$T = \frac{2\pi}{\hbar} \cdot \frac{V}{(2\pi)^3} \left(\sum_{\mathbf{k}} \right) \sum_{\alpha} \left| \langle \Psi_f | \langle 1_{\mathbf{k}\alpha} | \sum_i \frac{e_i}{mc} \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{P}_i | \Psi_i \rangle |0\rangle \right|^2 \times \delta(E_i - E_f - E_\gamma)$$

U

$$= \frac{2\pi}{\hbar} \frac{V}{(2\pi)^3} \cdot \frac{2\pi c^2 \hbar}{\omega V} \sum_{\alpha} \int d\mathbf{k} \left(k^2 d\mathbf{k} \right) \left(\frac{e}{mc} \right)^2$$

$$\times \left(\langle 1_{\mathbf{k}\alpha} | a_{\mathbf{k}\alpha}^\dagger | 0 \rangle = 1 \right) \times \left| \langle \Psi_f | \sum_i e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i} \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{P}_i | \Psi_i \rangle \right|^2 \left(\delta(E_i - E_f - E_\gamma) \right)$$

$$= \frac{2\pi}{\hbar} \cdot \frac{1}{(2\pi)^3} \cdot \frac{2\pi c^2 \hbar}{\omega} \cdot \frac{1}{c\hbar} \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \left(\frac{e}{mc} \right)^2$$

$$\times \sum_{\alpha} \int d\mathbf{k} \left| \langle \Psi_f | \sum_i e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i} \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{P}_i | \Psi_i \rangle \right|^2$$

U

$$= \frac{\omega}{2\pi c^3 \hbar} \left(\frac{e}{m} \right)^2 \sum_{\alpha} \int d\mathbf{k} \left| \langle \Psi_f | \sum_i e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i} \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{P}_i | \Psi_i \rangle \right|^2$$

∴ $\langle \Psi_f | e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i} \mathbf{P}_i | \Psi_i \rangle$ を評価するのは"よい"
($k = \frac{E_\gamma}{\hbar c}$)

• 長波長近似

$$e^{-ik \cdot r} \sim 1 - ik \cdot r + \dots$$

$$E_\gamma \ll \frac{\hbar c}{R}$$

(例) 之は $E_\gamma = 1 \text{ MeV}$
 $\rightarrow k = \frac{\hbar \omega}{\hbar c} \sim \frac{1}{200} \text{ fm}^{-1}$)

四 E1 遷移

$$e^{-ik \cdot r} \sim 1$$

$$\downarrow \langle \Psi_f | \sum_i e^{-ik \cdot r_i} \mathcal{E}_\alpha \cdot \mathbf{P}_i | \Psi_i \rangle$$

$$\sim \sum_i \mathcal{E}_\alpha \cdot \langle \Psi_f | \mathbf{P}_i | \Psi_i \rangle$$

(note) $[\mathbf{P}^2, \mathbf{r}] = -2i\hbar \mathbf{P}$

$$\downarrow \left[\underbrace{\left(\frac{\mathbf{P}^2}{2m} + U \right)}_{H_0}, \mathbf{r} \right] = -\frac{i\hbar}{m} \mathbf{P}$$

$$\downarrow \langle \Psi_f | \sum_i \mathbf{P}_i | \Psi_i \rangle = \langle \Psi_f | \frac{i\hbar}{m} [H_0, \sum_i \mathbf{r}_i] | \Psi_i \rangle$$

$$= \frac{i\hbar}{m} (E_f - E_i) \langle \Psi_f | \left(\sum_i \mathbf{r}_i \right) | \Psi_i \rangle$$

$H_{\text{int}} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{d}$ (\mathbf{E} : 電場, $\mathbf{d} = \sum_i e_i \mathbf{r}_i$: 双極子モーメント)
 に対する摂動と同じ形
 \rightarrow 電気双極子 (E1) 遷移

□ E2 + M1 遷移

$$e^{-ik \cdot r} \sim 1 - \underbrace{ik \cdot r} + \dots \quad \text{の 2項目の寄与.}$$

(higher order)

(note)

$$\langle \Psi_f | (k \cdot r) (\mathcal{E} \cdot P) | \Psi_i \rangle$$

$$= \frac{1}{2} \langle \Psi_f | \underbrace{((k \cdot r) (\mathcal{E} \cdot P) + (k \cdot P) (\mathcal{E} \cdot r))}_{\text{E2 遷移}} | \Psi_i \rangle + \frac{1}{2} \langle \Psi_f | (k \cdot r) (\mathcal{E} \cdot P) - (k \cdot P) (\mathcal{E} \cdot r) | \Psi_i \rangle.$$

first term: $(k \cdot r) (\mathcal{E} \cdot P) + (k \cdot P) (\mathcal{E} \cdot r)$
 $= k \cdot \underbrace{(rP + Pr)} \cdot \mathcal{E}$

$$\frac{m_i}{\hbar} \parallel [H_0, \underbrace{(r \cdot r)}_{\text{E2 遷移}}]$$

↓
E2 遷移

second term: $(k \cdot r) (\mathcal{E} \cdot P) - (k \cdot P) (\mathcal{E} \cdot r)$
 $= \underbrace{(k \times \mathcal{E})}_{\text{S}} \cdot \underbrace{(r \times P)}_{\text{L}}$

↓
M1 遷移

→ $r \times p = \vec{L}$ の寄与も手T"足夠

四 高次の項まで含めて一般的に

$$T_{fi}(\lambda\mu) \sim \frac{8\pi(\lambda+1)}{\hbar \lambda ((2\lambda+1)!!)^2} \left(\frac{E_\gamma}{\hbar c}\right)^{2\lambda+1} \\ \times |\langle \Psi_f | \hat{m}_{\lambda\mu} | \Psi_i \rangle|^2$$

• E λ 遷移

$$\hat{m}_{\lambda\mu} = \sum_{i=1}^Z e r_i^\lambda Y_{\lambda\mu}(\hat{r}_i) \equiv \hat{Q}_{\lambda\mu}$$

• M λ 遷移

$$\hat{m}_{\lambda\mu} = \mu_N \sum_{i=1}^A \left\{ g_s^{(i)} \mathcal{S}_i + \frac{2}{\lambda+1} g_l^{(i)} \mathcal{L}_i \right\}$$

$$\cdot (\nabla r_i^\lambda Y_{\lambda\mu}(\hat{r}_i)) \equiv \hat{M}_{\lambda\mu}$$

$$\mu_N = \frac{e\hbar}{2mc}$$

$$g_l = \begin{cases} 1 & \text{for } p \\ 0 & \text{for } n \end{cases}$$

$$g_s = \begin{cases} 5.586 & \text{for } p \\ -3.826 & \text{for } n \end{cases}$$

角運動量の z 成分を区別した時

$$T_{fi} = \frac{1}{2I_i+1} \sum_{M_i, M_f, \mu} T_{fi}(\lambda, \mu)$$

$$= \frac{1}{2I_i+1} \sum_{M_i, M_f, \mu} |\langle I_f M_f | \hat{M}_{\lambda\mu} | I_i M_i \rangle|^2 \times \dots$$

(note) Wigner-Eckart の定理

$$\langle I_f M_f | \hat{M}_{\lambda\mu} | I_i M_i \rangle$$

$$= (-)^{I_i - M_i} \frac{1}{\sqrt{2\lambda+1}} \underbrace{\langle I_f M_f | I_i - M_i | \lambda \mu \rangle}_{\text{Clebsch-Gordan coefficient}}$$

$$\times \langle I_f || \hat{M}_\lambda || I_i \rangle$$

(note) $\sum_{M_i, M_f} \langle I_f M_f | I_i - M_i | \lambda \mu \rangle^2 = 1$

$$\Downarrow T_{fi} = \frac{8\pi(\lambda+1)}{\hbar \lambda ((2\lambda+1)!!)^2} \left(\frac{E_f}{\hbar c} \right)^{2\lambda+1} \cdot \underbrace{\frac{1}{2I_i+1} |\langle I_f || \hat{M}_\lambda || I_i \rangle|^2}_{\text{BCE}}^2$$

BCE $\lambda: I_i \rightarrow I_f$

又は B(M $\lambda; I_i \rightarrow I_f$)

一般に $T(E\lambda) \gg T(M\lambda)$
 $T(E\lambda) \gg T(E, \lambda+1) \gg \dots$

E2 と M1 の競合が起ることも。

4. 選択則

$$\langle I_f m_f | \hat{Q}_{\lambda\mu} | \underbrace{I_i m_i}_{\text{初期状態}} \rangle$$

初期状態 + 1 光子状態

→ 合成角運動量

$$|\lambda - I_i|, \dots, \lambda + I_i$$

$$z\text{-成分: } \mu + m_i$$

$$|\Psi_f\rangle = \hat{Q}_{\lambda\mu} |\Psi_i\rangle \quad \text{として, } |\Psi_f\rangle \text{ と } |\Psi_i\rangle \text{ が "同じ" 量子数を持たなければならぬ}$$

$$|\lambda - I_i| \leq I_f \leq \lambda + I_i$$

$$m_f = \mu + m_i$$

$$\text{パリティ: } (-)^I \quad (E), \quad (-)^{I+1} \quad (M)$$

例) $2^+ \rightarrow 0^+ \quad ; \quad E2$

$3^- \rightarrow 0^+ \quad ; \quad E3$

$4^+ \rightarrow 2^+ \quad ; \quad E2, E4, M3, E6, M5$

$3^+ \rightarrow 2^+ \quad ; \quad E2, M1, E4, M3, M5$

↑
unnatural parity

$2^+ \rightarrow 3^- \quad ; \quad E1, E3, E5, M2, M4$