原子核の質量

原子核の基本的な物理量の一つ

例１）ベータ崩壊

$$ {}^{A}_{Z}X_{N} \rightarrow {}^{A}_{Z+1}Y_{N-1} + e^{-} + \overline{\nu}_{e} $$

- $Q_\beta = m({}^{A}_{Z}X_{N})c^2 - [m({}^{A}_{Z+1}Y_{N-1})c^2 + m_e c^2]$ が電子と反ニュートリノの運動エネルギーに分配
- ベータ崩壊の確率はQ_β に大きく依存

例２）核融合反応

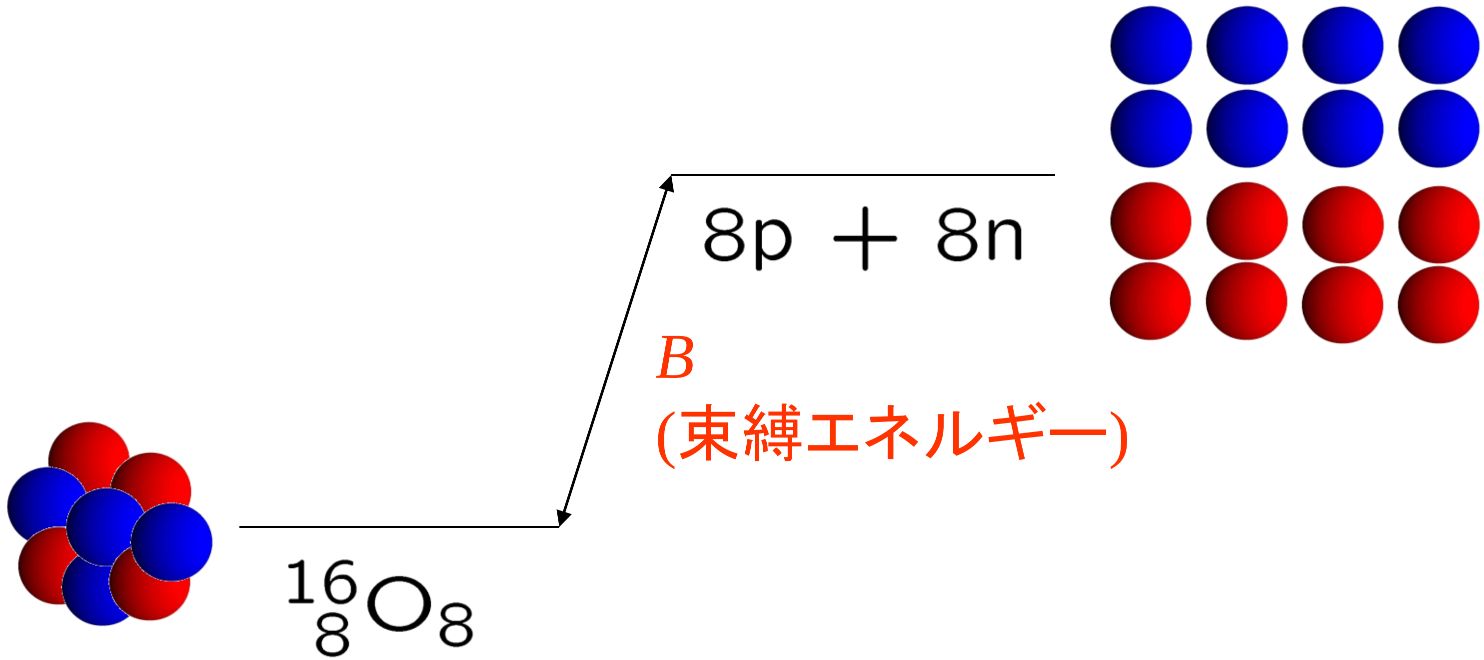
$$ {}^{16}O + {}^{208}Pb \rightarrow {}^{224}Th $$

生成される ${}^{224}Th$ の励起エネルギー

$$ E^* = m({}^{16}O)c^2 + m({}^{208}Pb)c^2 + E_{beam}(cm) - m({}^{224}Th)c^2 $$

✓${}^{224}Th$ の崩壊の様子は E* に大きく依存

原子核の質量



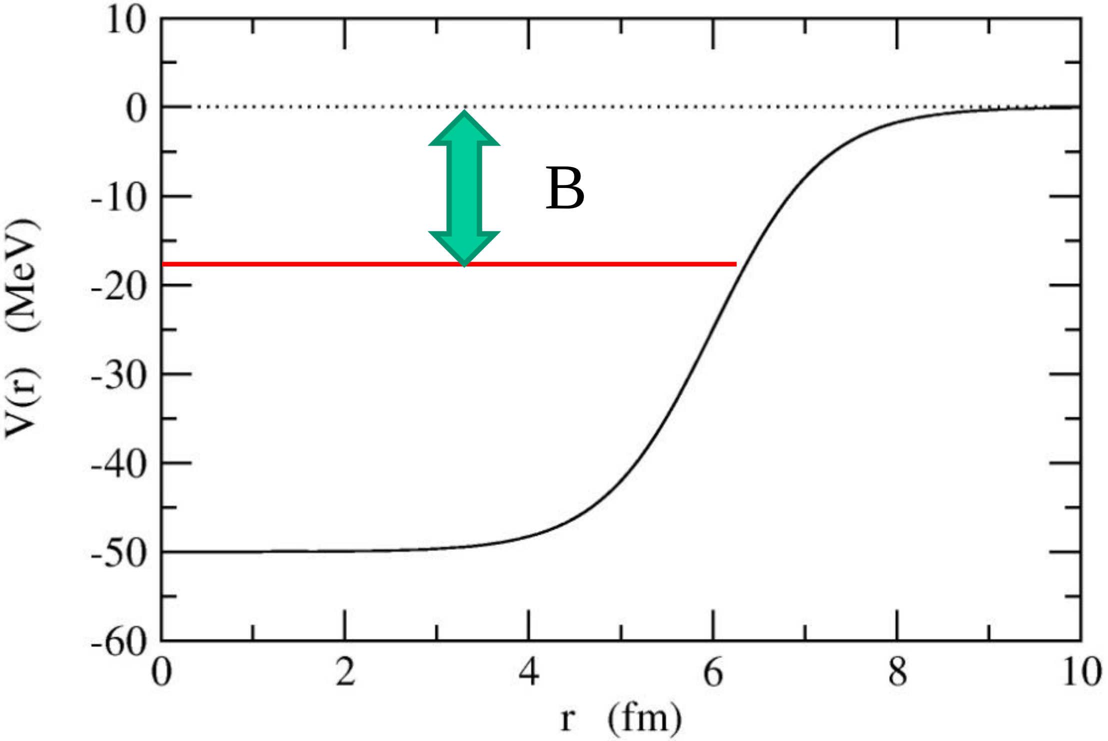
$$m(N,Z)c^2 = Zm_pc^2 + Nm_nc^2 - B$$

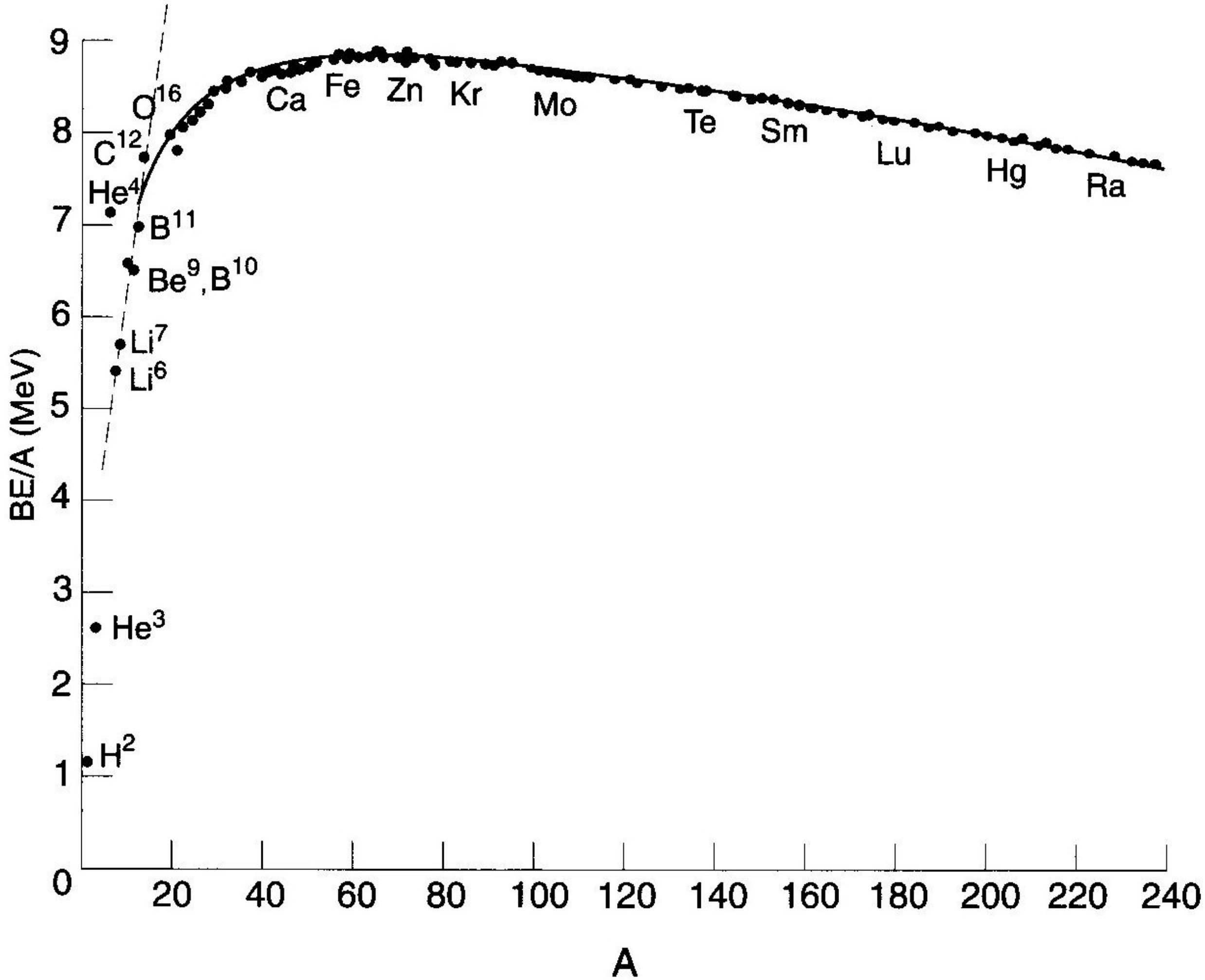
束縛エネルギー

* 束縛エネルギーが大きいほど安定（質量が軽い）

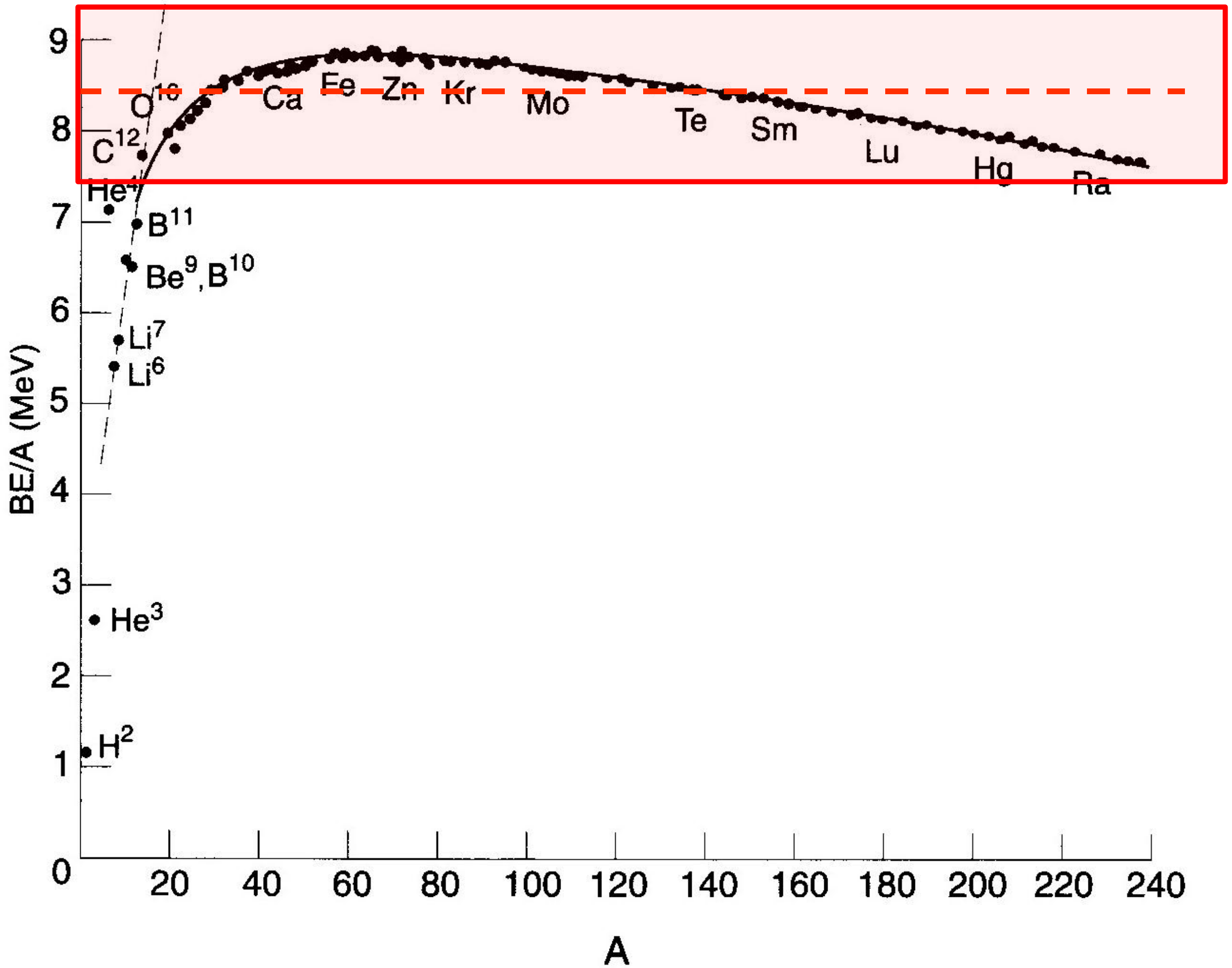
cf. 2粒子系の場合:

$$Mc^2 = m_1c^2 + m_2c^2 - B$$

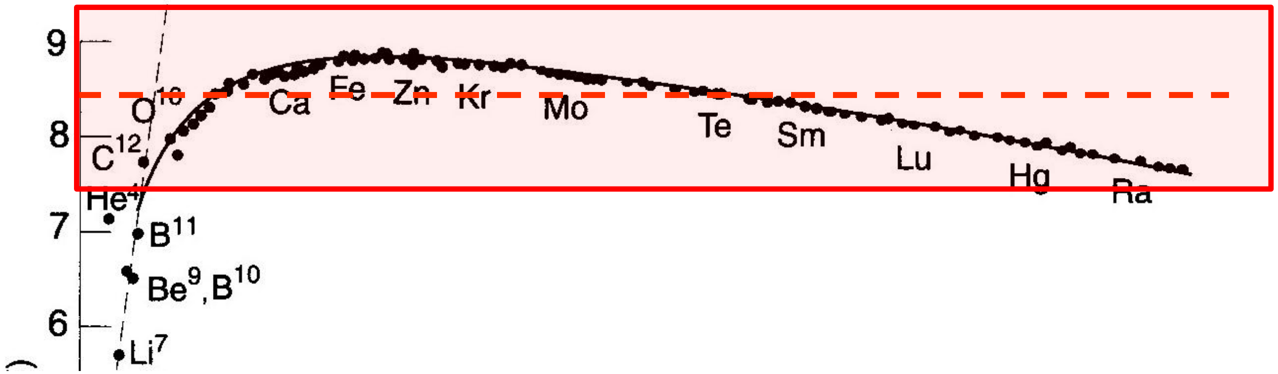




BE/A (MeV)
A
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
220
240
H2
He3
Li6
Li7
Be9, B10
B11
He4
C12
O16
Ca
Fe
Zn
Kr
Mo
Te
Sm
Lu
Hg
Ra

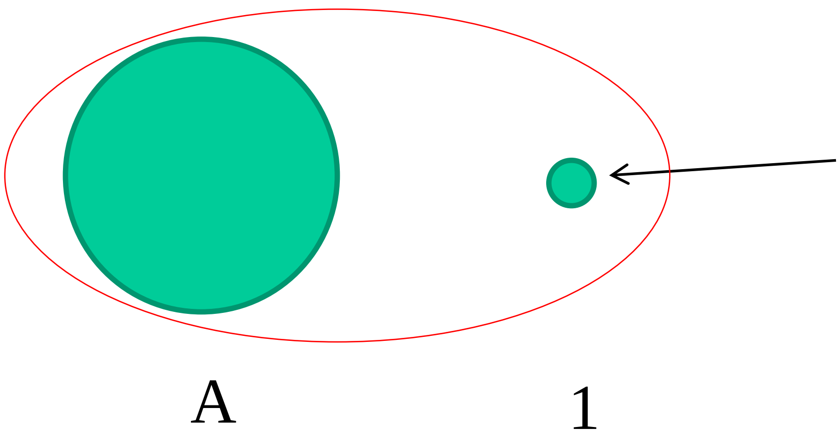


1. B(N,Z)/A ~ 8.5 MeV (A > 12) ⟺ 短距離力（核子間相互作用）



1. B(N,Z)/A ~ 8.5 MeV (A > 12)

これは、粒子を1つ増やすと、束縛エネルギーは一定の量（~ 8.5 MeV）しか増えないことを意味している。



この核子は決まった個数の核子としか相互作用しない（短距離力）

もし全ての核子と相互作用するとすると（長距離力）

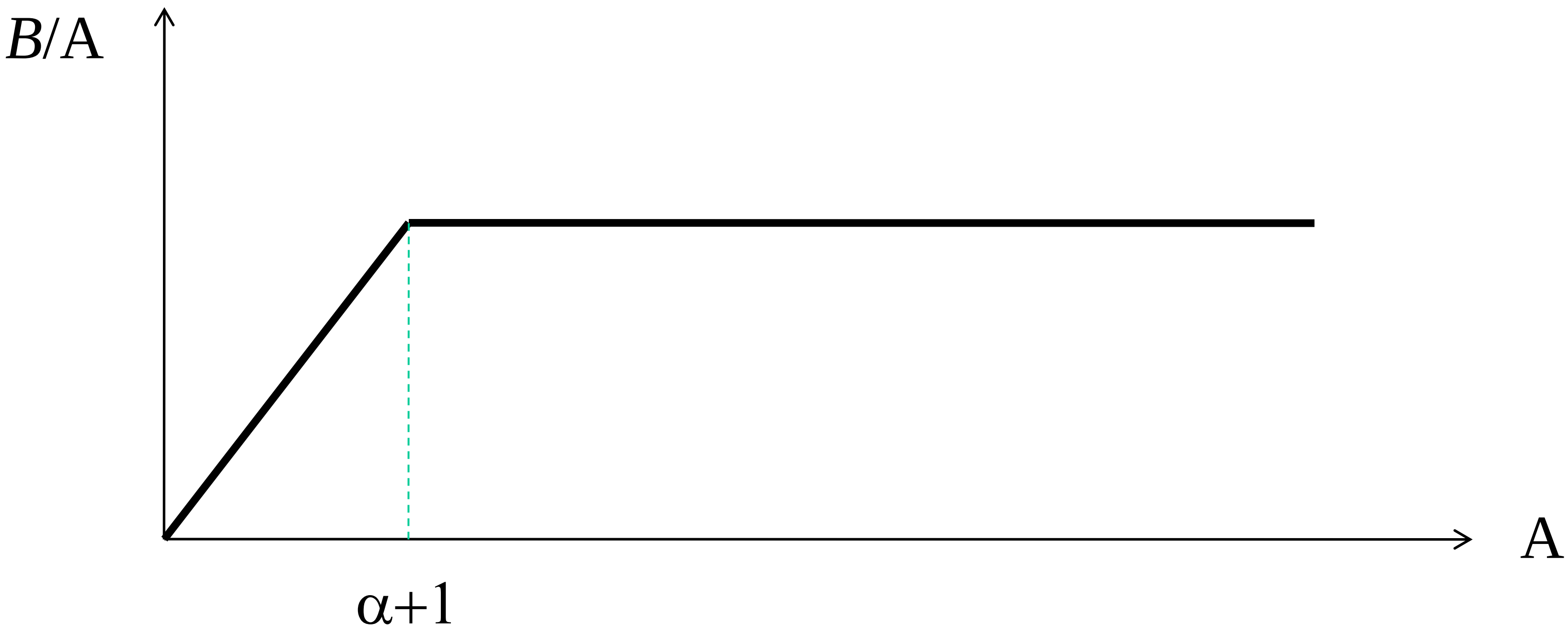
$B \propto A(A-1)/2$ $B/A \propto A$ となるはず。。。。

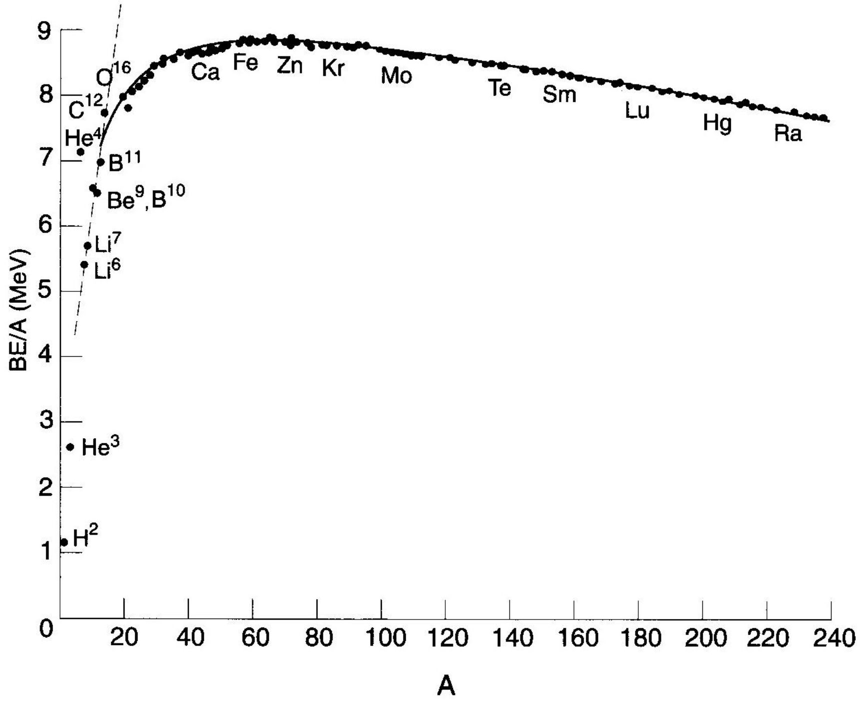
1つの核子が α 個の核子とのみ相互作用するとすると、

$B \sim \alpha A/2 \longrightarrow B/A \sim \alpha/2$ (const.)

ただし、$A < \alpha+1$ の時は、すべての核子対が相互作用するので、

$B/A \propto A$





この図からα の値を読み取ると、α ~ 10 くらい。

↓

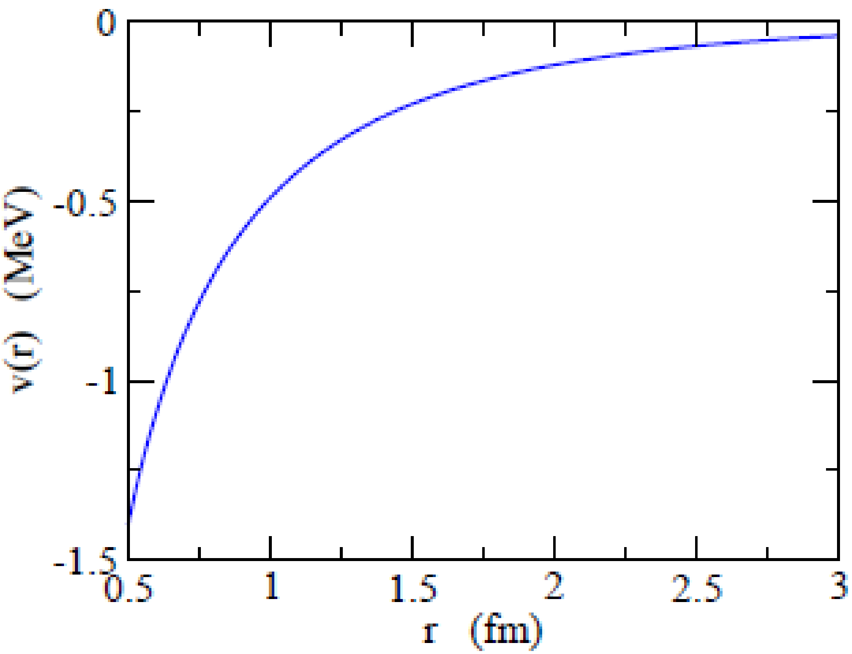
核力の到達距離は、

$1.1 \times 10^{1/3} = 2.37$ fm 程度。

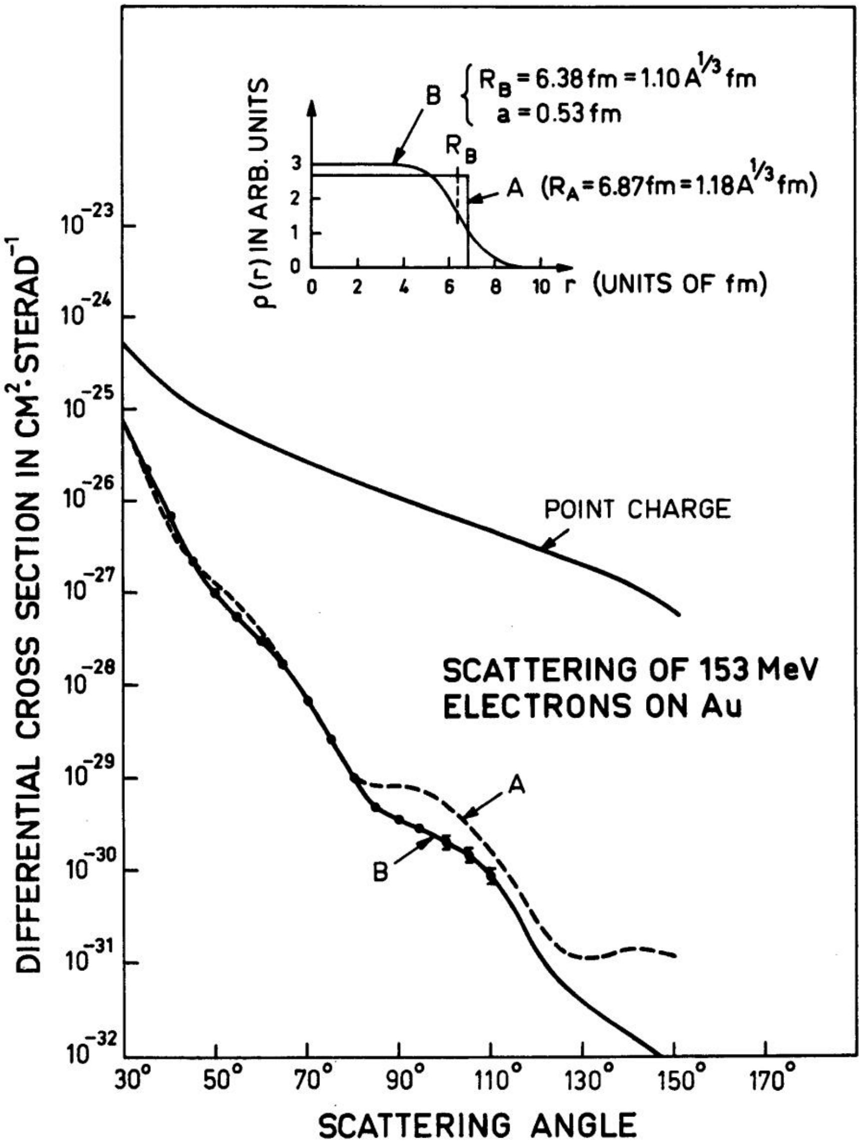
湯川相互作用:

$$v(r) = -g\frac{e^{-\kappa r}}{r}$$

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{\hbar}{m_\pi c} = 1.41 \text{ fm}$$



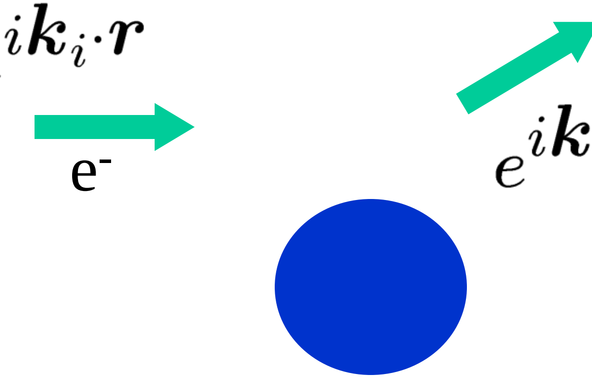
電荷分布：R ~ 1.1A$^{1/3}$ fm の根拠



高エネルギー電子散乱

ボルン近似:

$e^{i\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{r}}$



$e^{i\boldsymbol{k}_f\cdot\boldsymbol{r}}$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z_P^2 e^4}{(4E\sin^2\theta/2)^2}|F(\boldsymbol{q})|^2$$

形状因子（form factor）

$$F(\boldsymbol{q}) = \int e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}\,\rho(\boldsymbol{r})\,d\boldsymbol{r}$$

(密度のフーリエ変換)

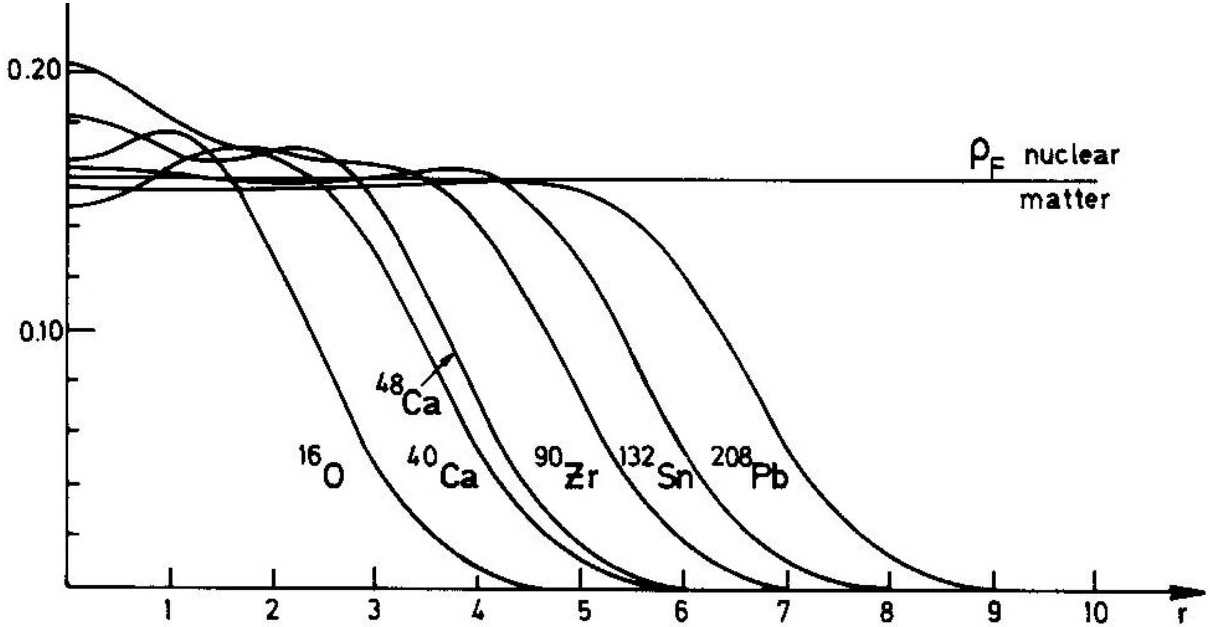
電子と原子核の相互作用:

$$V(\boldsymbol{r}) = -\int d\boldsymbol{r}'\,\rho_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{r}')\frac{e^2}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

(note) $\quad \boldsymbol{\nabla}^2 V(\boldsymbol{r}) = 4\pi e^2 \rho_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{r})$

$$\begin{aligned}
M_{fi} &= \langle\psi_f|V|\psi_i\rangle = \int d\boldsymbol{r}\,\psi_f^*(\boldsymbol{r})V(\boldsymbol{r})\psi_i(\boldsymbol{r}) \\
&= \int d\boldsymbol{r} e^{i(\boldsymbol{k}_i-\boldsymbol{k}_f)\cdot\boldsymbol{r}}V(\boldsymbol{r}) \equiv \int d\boldsymbol{r} e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}V(\boldsymbol{r}) \\
&= -\frac{4\pi e^2}{q^2}\int d\boldsymbol{r} e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}\rho_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{r})
\end{aligned}$$

（部分積分2回）



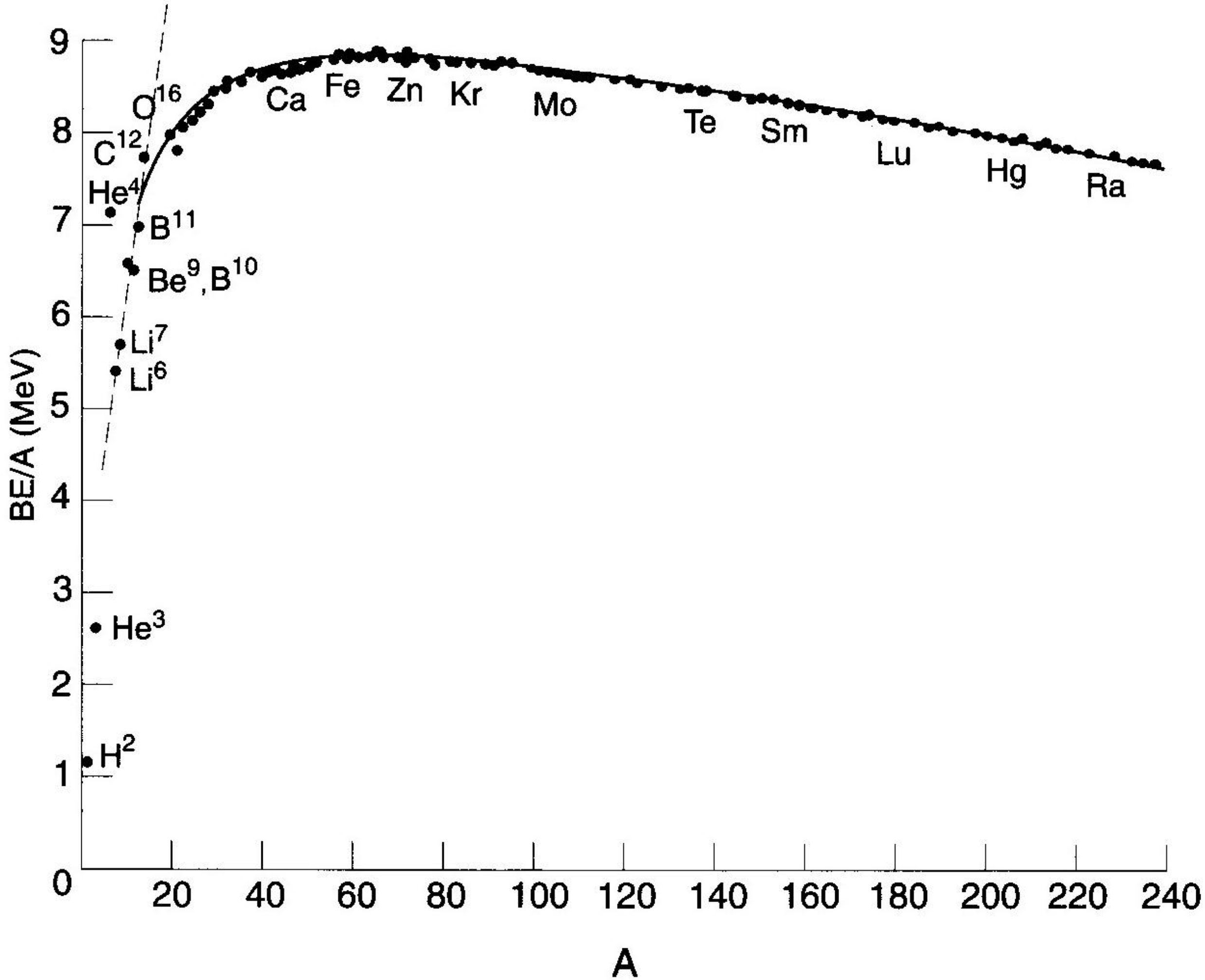
フェルミ分布

$$\boxed{\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + \exp((r - R_0)/a)}}$$

$$\rho_0 \sim 0.17 \ (\mathrm{fm}^{-3})$$
$$R_0 \sim 1.1 \times A^{1/3} \ (\mathrm{fm})$$
$$a \sim 0.57 \ (\mathrm{fm})$$

原子核の飽和性

cf. 核子の感じるポテンシャルも同じような形。下から軌道を詰めていくとフェルミ・エネルギーは約 -8.5 MeV

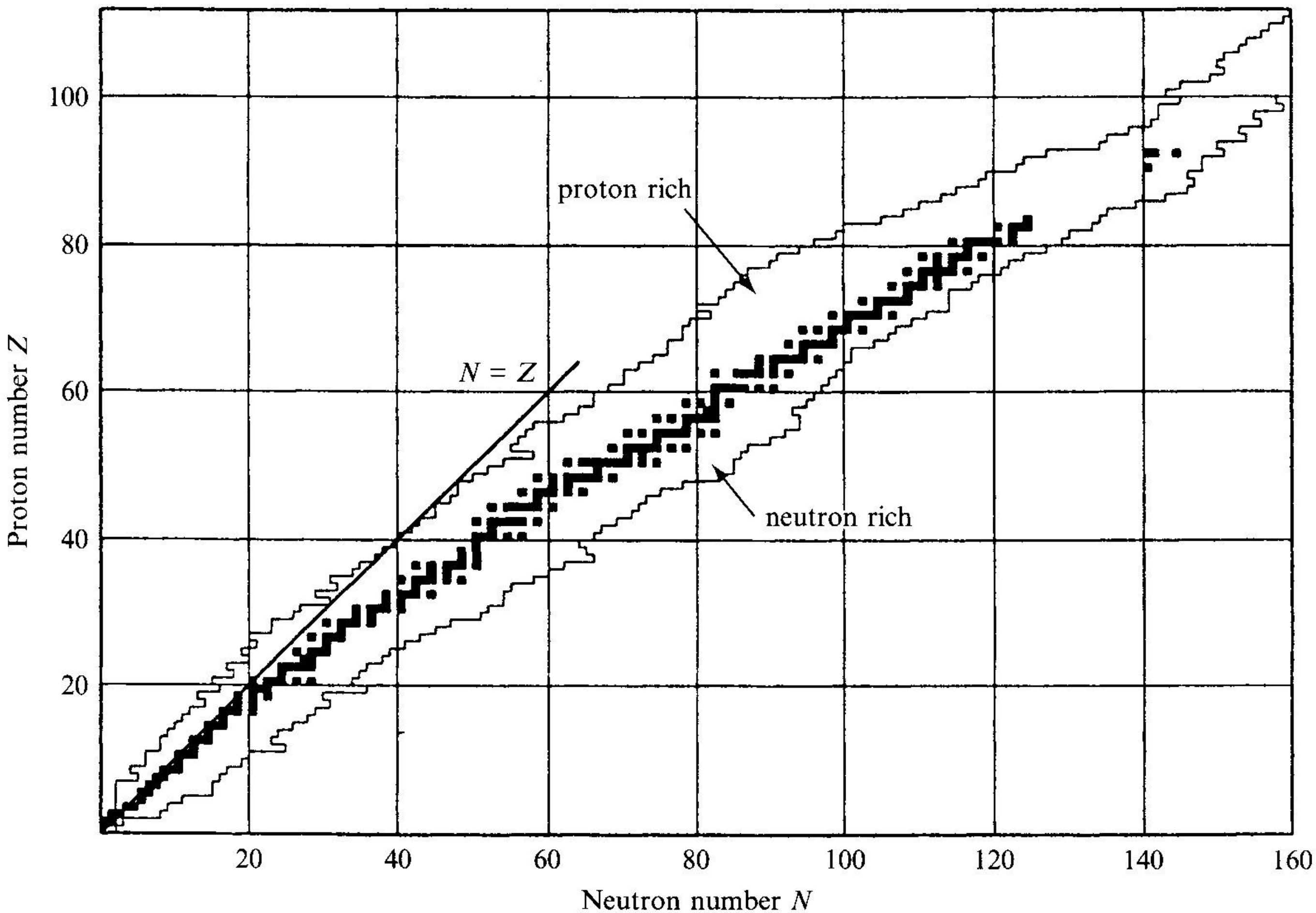


1. B(N,Z)/A ~ 8.5 MeV (A > 12) ⟺ 短距離力（核子間相互作用）
2. 重い原子核に対してはクーロン力の影響

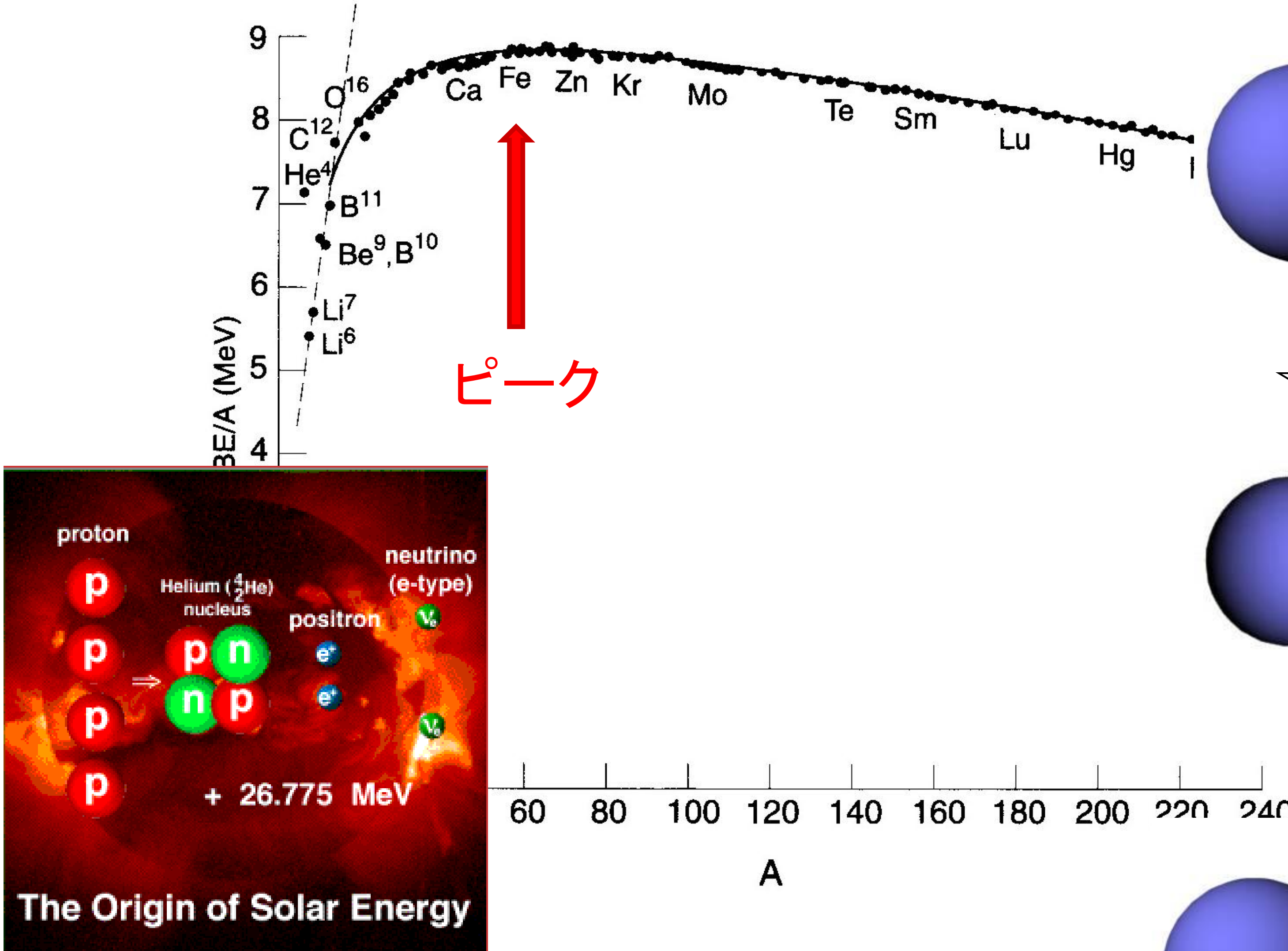
← B/A が A に比例して減少

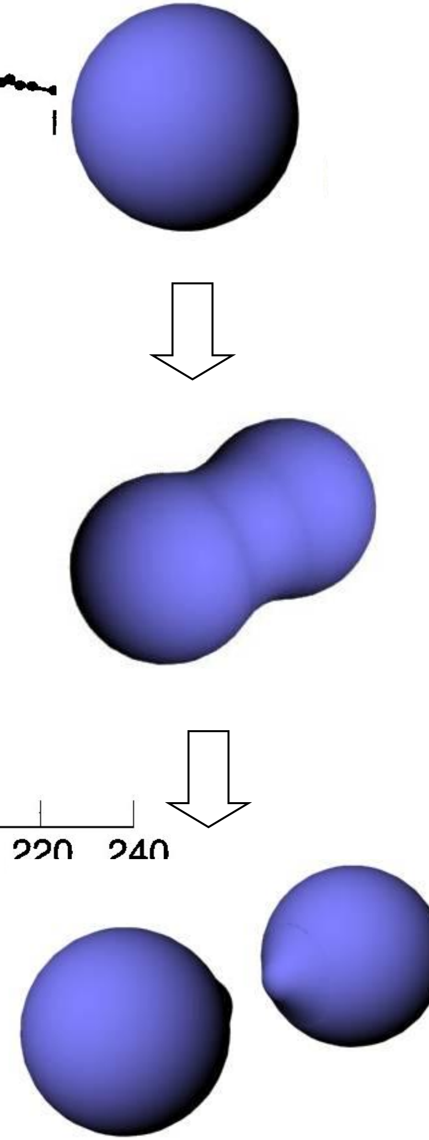
（長距離力（クーロン力）がはたらいている証拠）

核図表



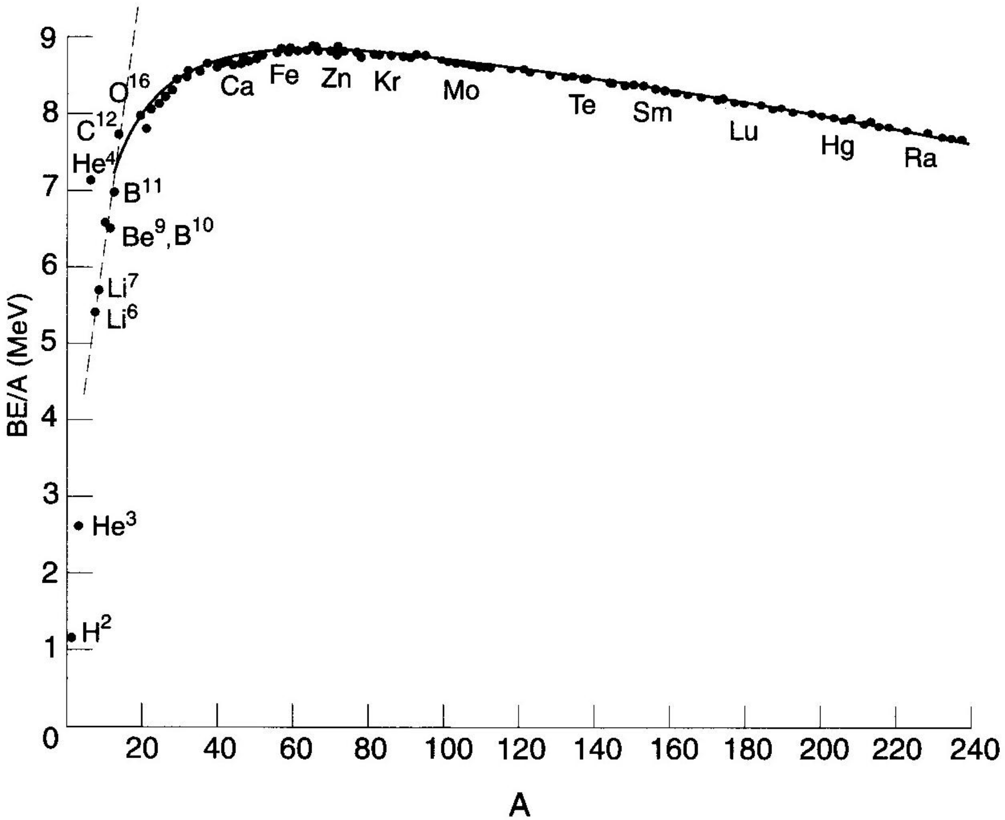
安定核: $N \geq Z$





- 軽い核は核融合した方が安定
- 重い核は核分裂した方が安定

半経験的質量公式



Aの関数としてどのように振る舞うか?

✓経験的
✓半経験的
✓非経験的

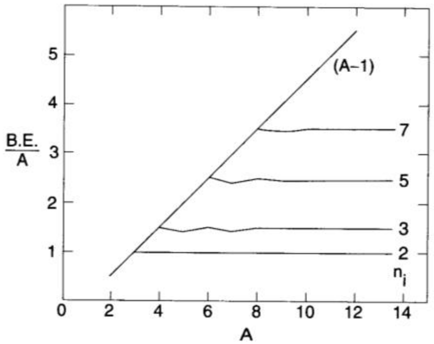
アプローチ

半経験的質量公式

(Bethe-Weizacker 質量公式: 液滴模型)

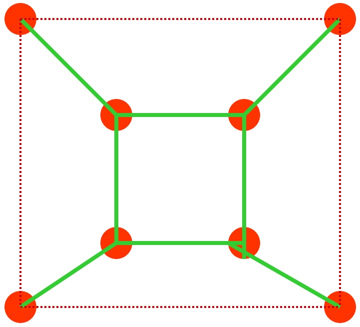
$$B(N,Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\mathrm{sym}} \frac{(N-Z)^2}{A}$$

- 体積エネルギー: $a_v A$



$$R_0 \sim 1.1 \times A^{1/3} \;\to\; V \propto A$$
$$S \propto A^{2/3}$$

- 表面エネルギー: $-a_s A^{2/3}$



表面付近の核子は少ない
数の核子と相互作用する。

$$B(N,Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\mathrm{sym}} \frac{(N-Z)^2}{A}$$

●クーロン・エネルギー: $-a_C\, Z^2/A^{1/3}$

$$E_C = \frac{3}{5}\frac{Z^2 e^2}{R_C}$$ （一様帯電球のクーロン・エネルギー）

●対称エネルギー: $-a_{\mathrm{sym}}\,(N-Z)^2/A$

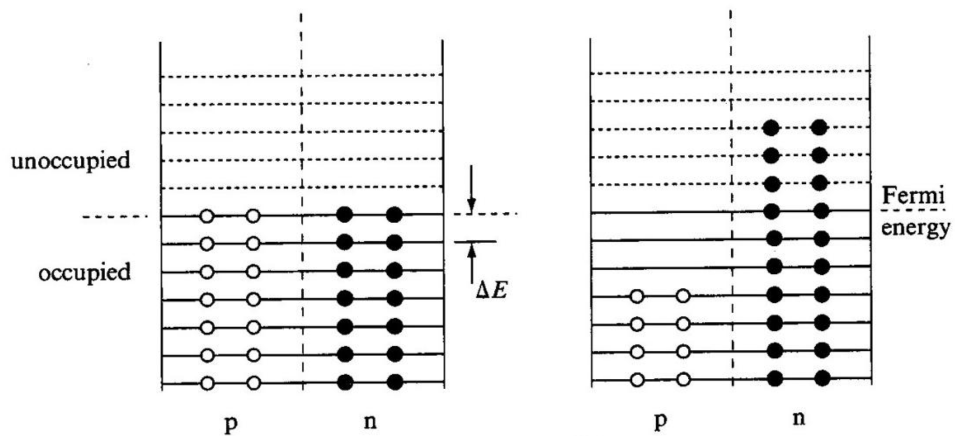
ポテンシャル・エネルギー $v_{nn} = v_{pp} = v, \quad v_{np} \sim 2v$

核物質と相互作用する核子のエネルギー:

$$N(v_{nn}N/A + v_{pn}Z/A) + Z(v_{pn}N/A + v_{pp}Z/A) = \frac{v}{2}(3A - (N-Z)^2/A)$$

運動エネルギー

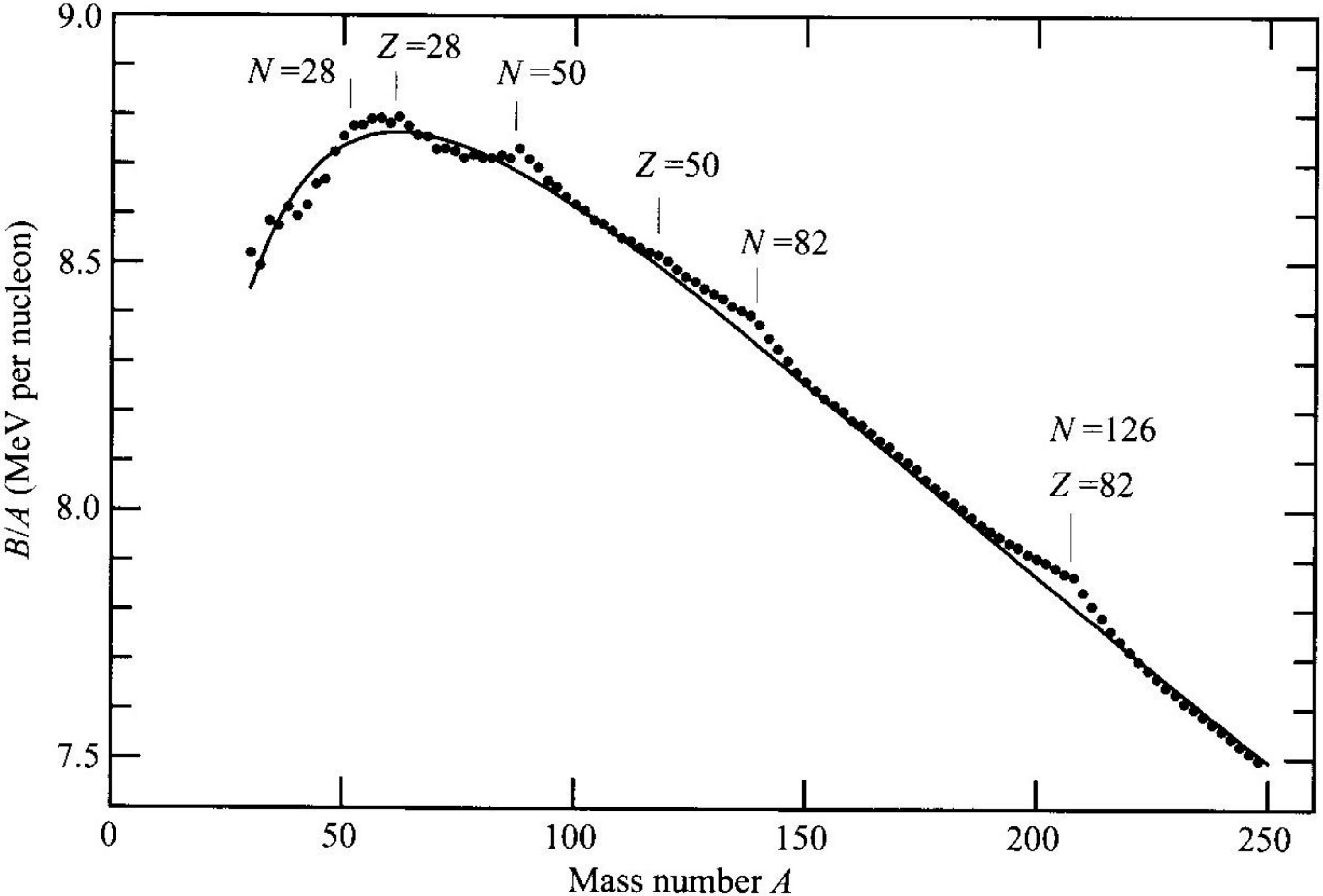
パウリ原理



準位エネルギーが $E_k = k\,\Delta E$ で与えられ、各準位の縮退度が 2 だとすると、

$$
\begin{aligned}
E &= \sum_{k=1}^{N/2} 2k\Delta E + \sum_{k=1}^{Z/2} 2k\Delta E \\
&= 2\Delta E\left(\sum_{k=1}^{N/2} k + \sum_{k=1}^{Z/2} k\right) \\
&= \frac{\Delta E}{2}\left(\frac{N^2+Z^2}{2} + N + Z\right) \\
&= \frac{\Delta E}{2}\left(\frac{A^2}{4} + A + \frac{1}{4}\cdot(N-Z)^2\right)
\end{aligned}
$$

どのくらい実験を再現するか？

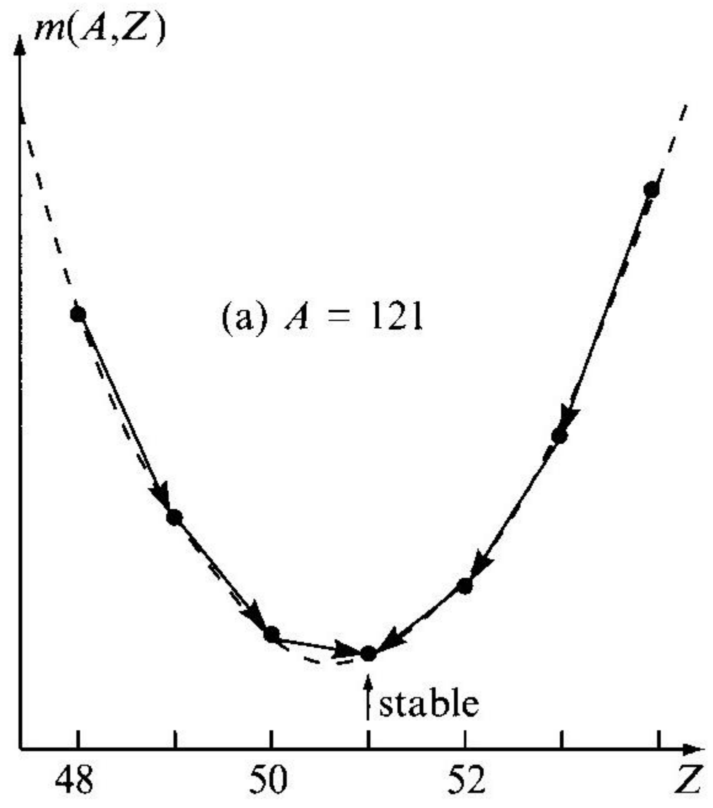


cf. N,Z = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126 (魔法数)に対して束縛エネルギー大

β-安定線

$$B(N,Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\rm sym} \frac{(N-Z)^2}{A}$$

$$\boxed{m(A,Z) = f(A) + a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_{\rm sym} \frac{(A-2Z)^2}{A}}$$



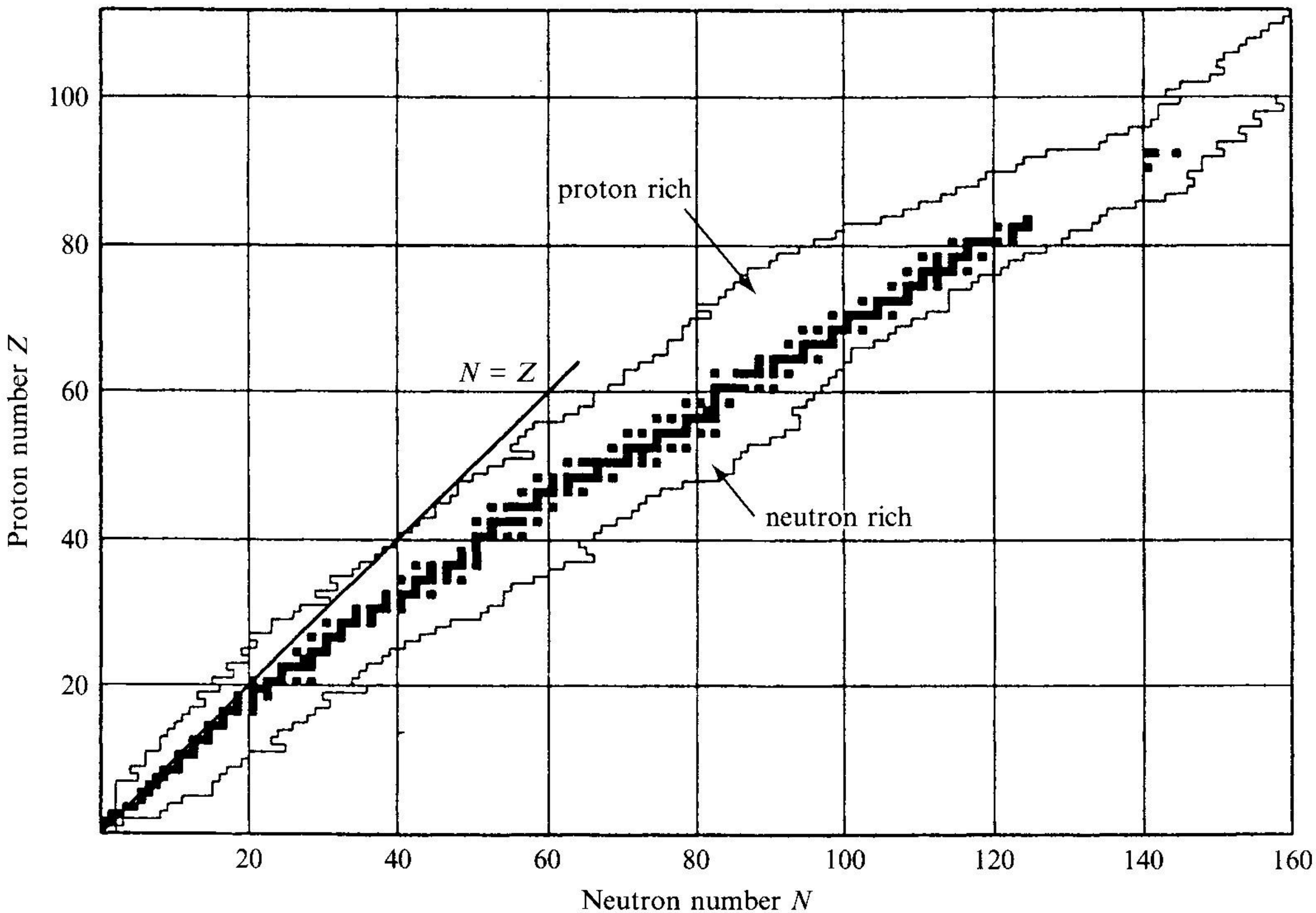
安定核 (beta-安定線)

$$\left.\frac{\partial m}{\partial Z}\right|_{A=const.} = 0$$

$$Z = \frac{4a_{\rm sym}}{2a_C/A^{1/3} + 8a_{\rm sym}/A}$$

Z < A/2

核図表



安定核: $N \geq Z$