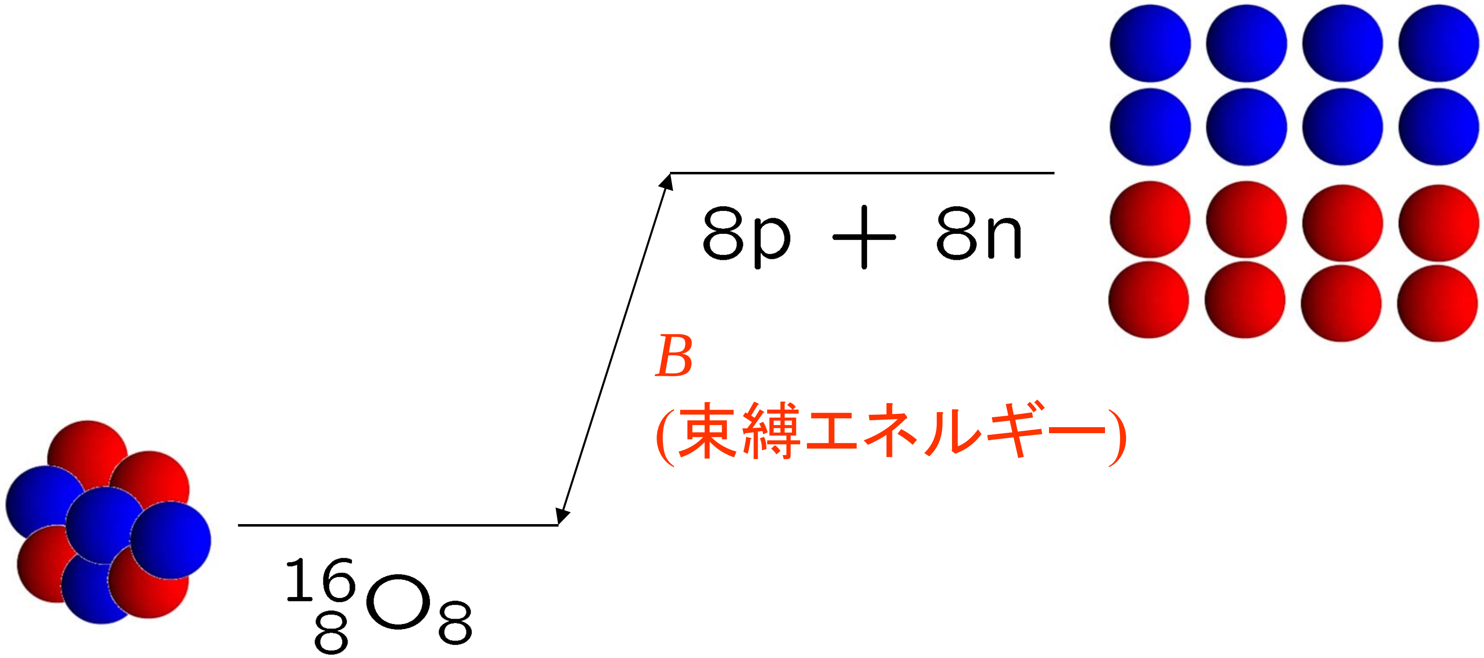
原子核の質量

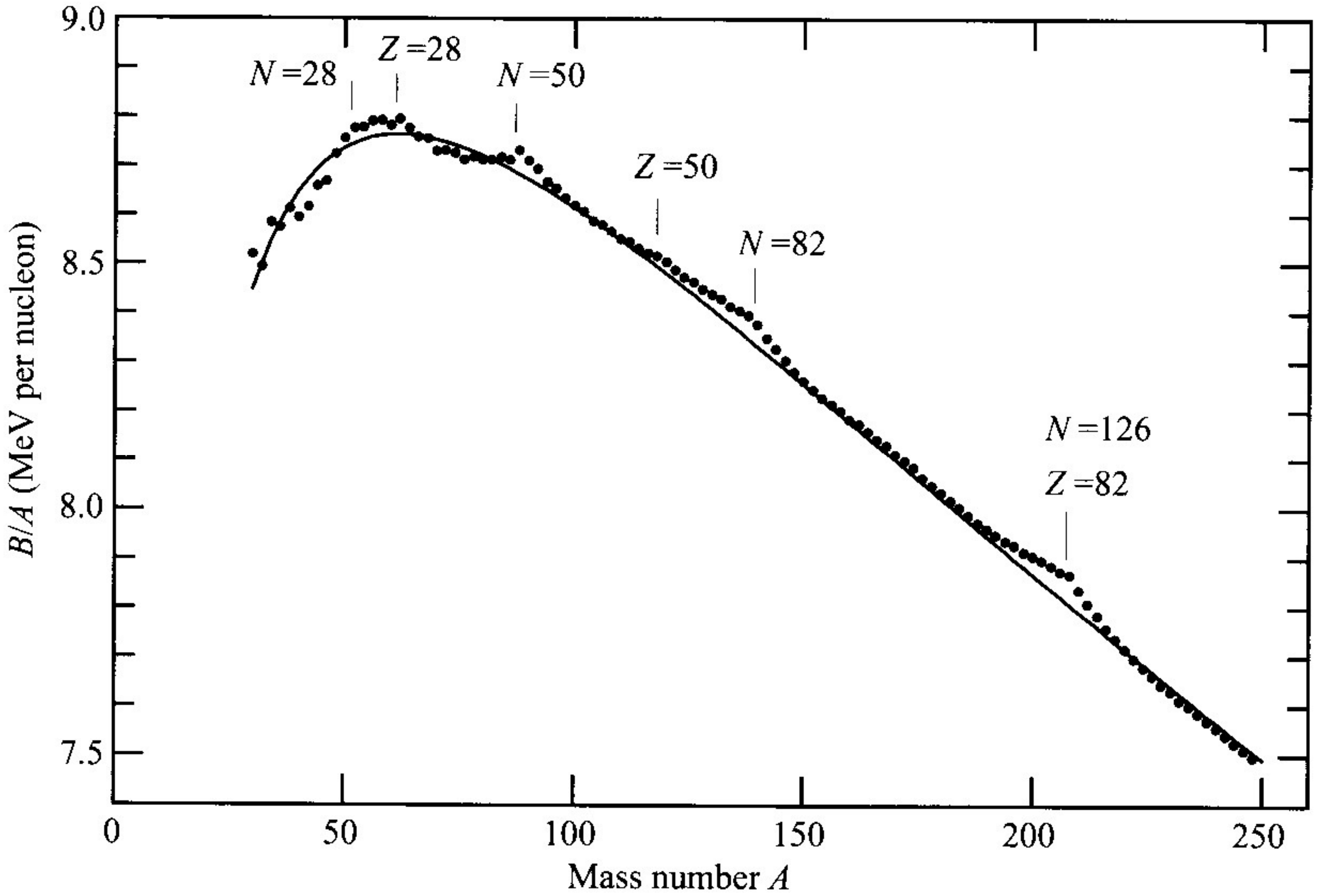


$$m(N,Z)c^2 = Zm_pc^2 + Nm_nc^2 - B$$

束縛エネルギー

＊束縛エネルギーが大きいほど安定（質量が軽い）

B/A（核子あたりの束縛エネルギー）の実験データ



半経験的質量公式

(Bethe-Weizacker 質量公式: 液滴模型)

$$B(N,Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\mathrm{sym}} \frac{(N-Z)^2}{A}$$

- 体積エネルギー: $a_v A$
- 表面エネルギー: $-a_s A^{2/3}$
- クーロン・エネルギー: $-a_C\, Z^2/A^{1/3}$
- 対称エネルギー: $-a_{\mathrm{sym}}\,(N-Z)^2/A$

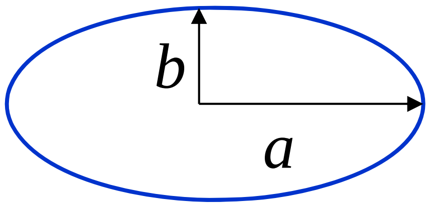
原子核が変形するとどうなるか？

$$\boxed{B(N,Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\rm sym}\frac{(N-Z)^2}{A}}$$

原子核:密度を変化させるのに大きなエネルギーが必要

→ 体積を変化させないように原子核を変形させる

回転楕円体



$$\begin{aligned} a &= R\cdot(1+\epsilon) \\ b &= R\cdot(1+\epsilon)^{-1/2} \end{aligned}$$

体積項、対称項:変化せず

表面項:損をする(表面積が大きくなるため)

クーロン項:得をする(平均的な陽子間距離が大きくなるため)

$$\begin{aligned} E_{\rm surf} &= E_{\rm surf}^{(0)}(1+2\epsilon^2/5+\cdots) \\ E_C &= E_C^{(0)}(1-\epsilon^2/5+\cdots) \end{aligned}$$

原子核の表面振動

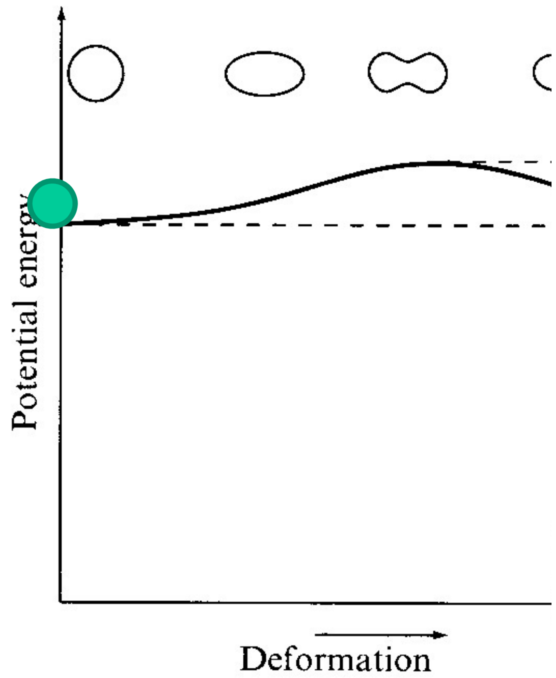
$$E_{\mathrm{surf}} = E_{\mathrm{surf}}^{(0)}(1 + 2\epsilon^2/5 + \cdots)$$
$$E_C = E_C^{(0)}(1 - \epsilon^2/5 + \cdots)$$

$$\Delta E = E_{\mathrm{surf}}^{(0)} \cdot \frac{2}{5}(1-x)\epsilon^2$$

$$x \equiv \frac{E_C^{(0)}}{2E_{\mathrm{surf}}^{(0)}}$$

（fissility パラメーター）

＊原子核が安定に存在するためには
$x < 1$ が必要



原子核の表面振動

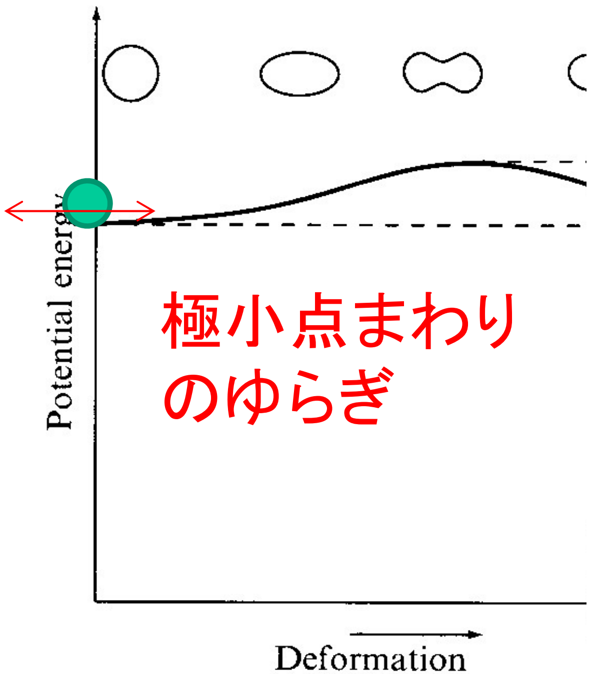
$$E_{\text{surf}} = E^{(0)}_{\text{surf}}\,(1 + 2\epsilon^2/5 + \cdots)$$
$$E_C = E^{(0)}_C\,(1 - \epsilon^2/5 + \cdots)$$

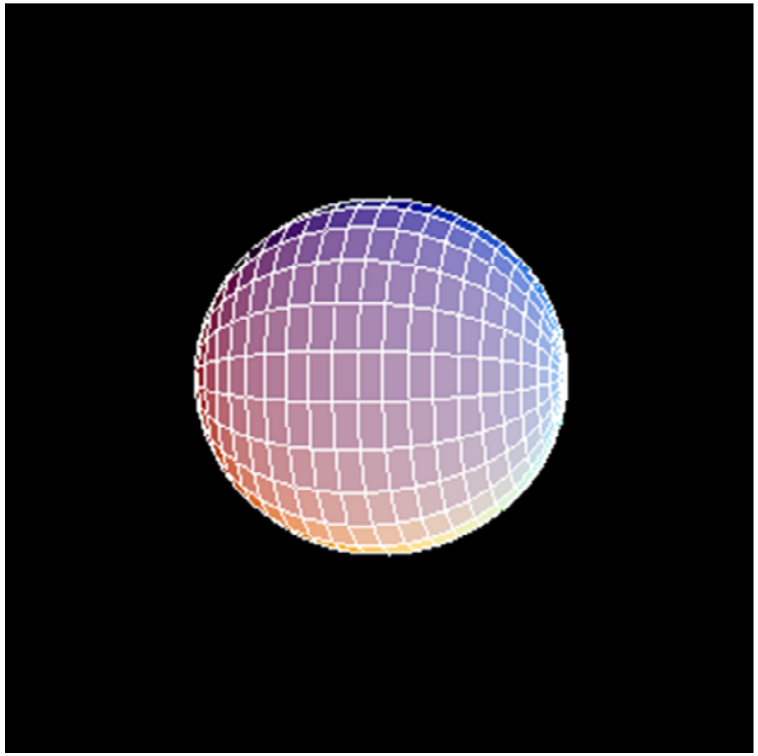
$$\Rightarrow \quad \Delta E = E^{(0)}_{\text{surf}} \cdot \frac{2}{5}(1 - x)\epsilon^2$$

$$x \equiv \frac{E^{(0)}_C}{2E^{(0)}_{\text{surf}}}$$

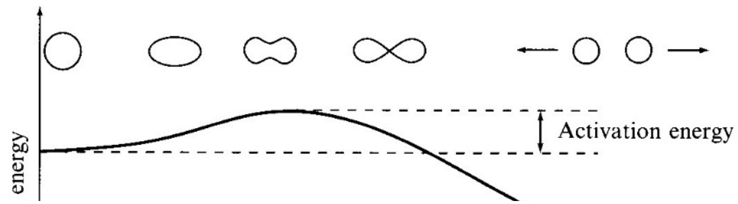
（fissility パラメーター）

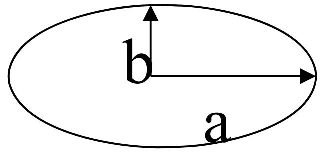
* 原子核が安定に存在するためには
  $x < 1$ が必要





集団振動





$$
\begin{aligned}
a &= R\cdot(1+\epsilon)\\
b &= R\cdot(1+\epsilon)^{-1/2}
\end{aligned}
$$

一般的に, $R(\theta,\phi) = R_0\left(1+\sum_{\lambda,\mu}\alpha_{\lambda\mu}Y^*_{\lambda\mu}(\theta,\phi)\right)$

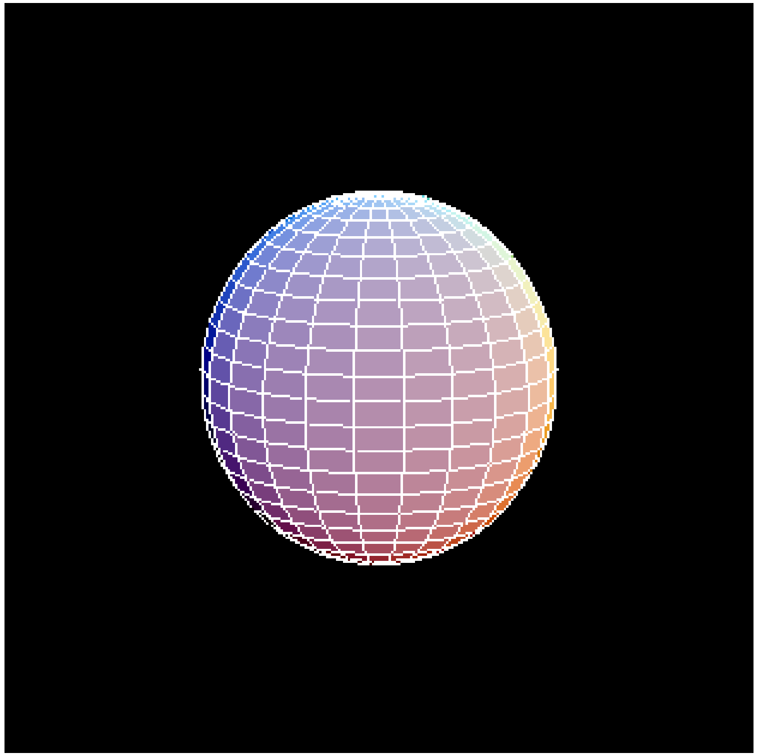
（回転楕円体は $\lambda = 2, \mu = 0$ に相当）

$$V = \frac{1}{2}\sum_{\lambda,\mu} C_\lambda\,|\alpha_{\lambda\mu}|^2$$

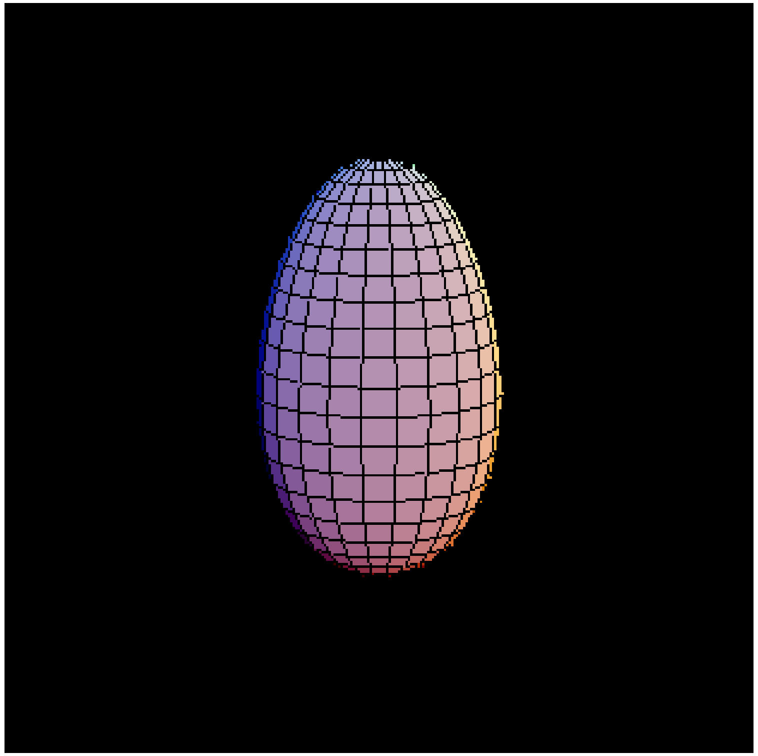
量子化: 調和振動子

(note) 慣性能率　　$\Leftarrow$ 非圧縮性渦なし流体

$$R(\theta,\phi) = R_0\left(1 + \sum_{\lambda,\mu}\alpha_{\lambda\mu}Y^*_{\lambda\mu}(\theta,\phi)\right) \qquad V = \frac{1}{2}\sum_{\lambda,\mu}C_\lambda\left|\alpha_{\lambda\mu}\right|^2$$

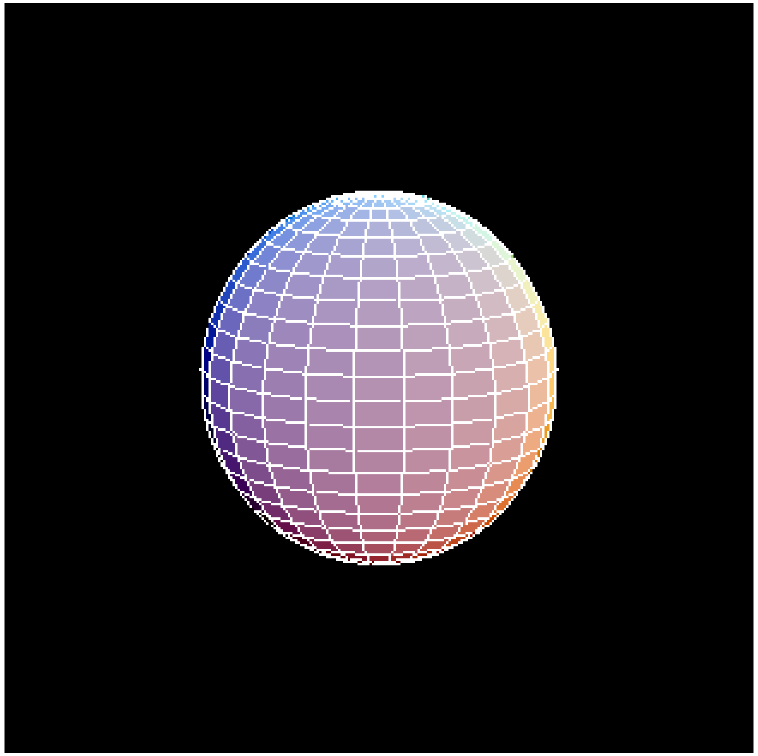


λ=2: 四重極型振動



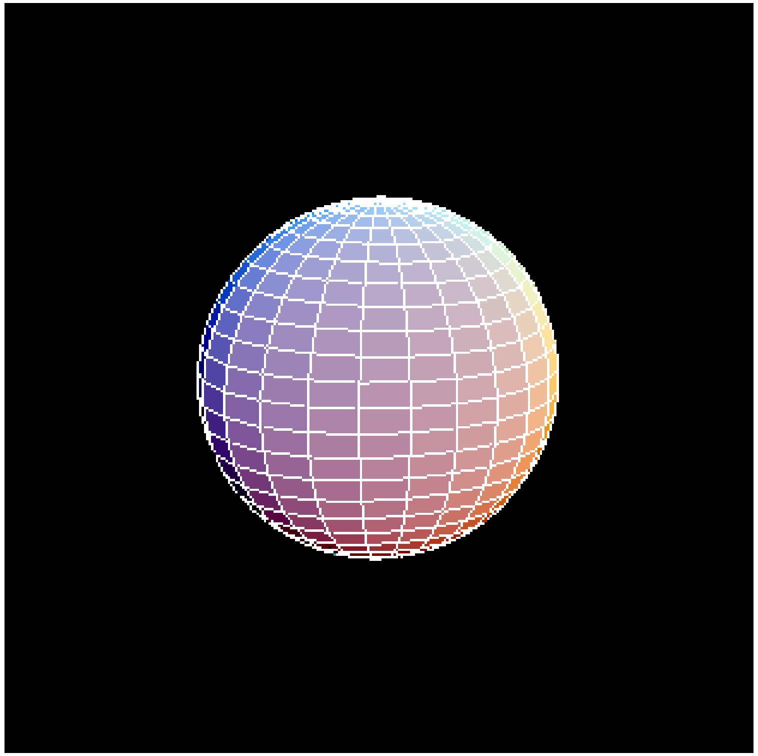
λ=3: 八重極型振動

$$R(\theta,\phi) = R_0\left(1 + \sum_{\lambda,\mu} \alpha_{\lambda\mu} Y^*_{\lambda\mu}(\theta,\phi)\right) \qquad V = \frac{1}{2}\sum_{\lambda,\mu} C_\lambda \left|\alpha_{\lambda\mu}\right|^2$$



Y_{20} 型振動

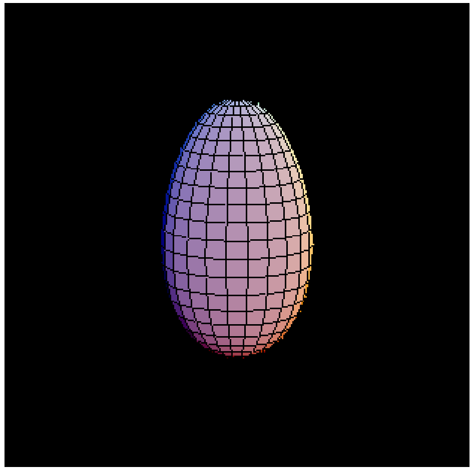
$\lambda=2,\ \mu = 0$



Y_{22} 型振動

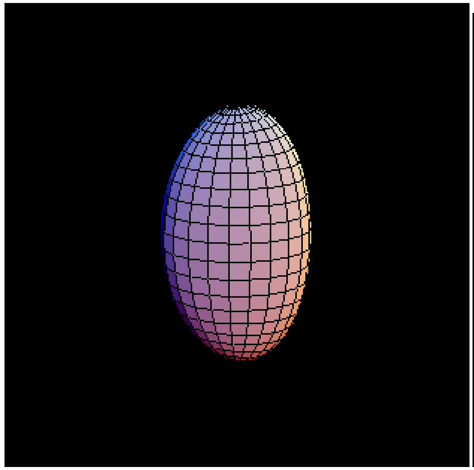
$\lambda=2,\ \mu = +/-\ 2$

$$R(\theta,\phi) = R_0\left(1 + \sum_{\lambda,\mu} \alpha_{\lambda\mu} Y^*_{\lambda\mu}(\theta,\phi)\right) \qquad V = \frac{1}{2}\sum_{\lambda,\mu} C_\lambda \left|\alpha_{\lambda\mu}\right|^2$$



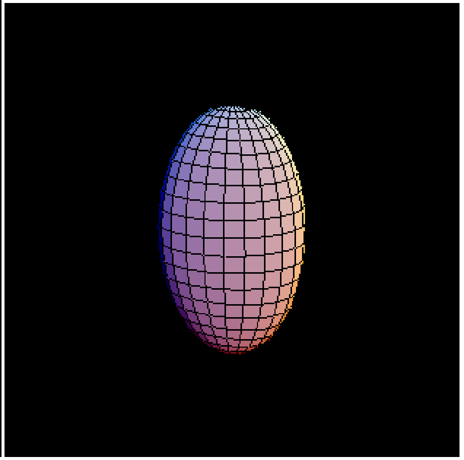
Y_{30} 型振動

$\lambda=3,\ \mu = 0$



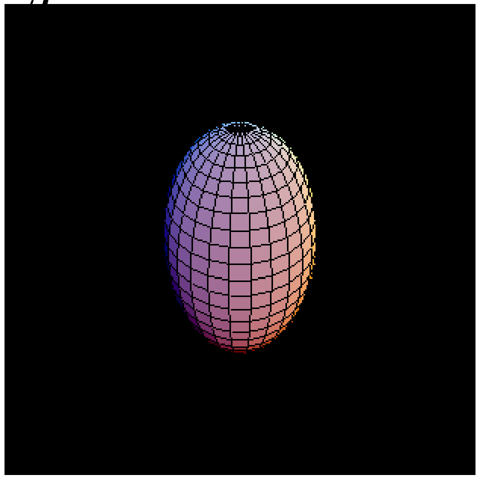
Y_{31} 型振動

$\lambda=3,\ \mu = +/-\ 1$



Y_{32} 型振動

$\lambda=3,\ \mu = +/-\ 2$



Y_{33} 型振動

$\lambda=3,\ \mu = +/-\ 3$

どのくらいのエネルギーを与えれば原子核は振動しはじめるのか？

$\Longleftrightarrow$ 振動の励起エネルギー

ムービー：在田謙一郎氏（名古屋工大）

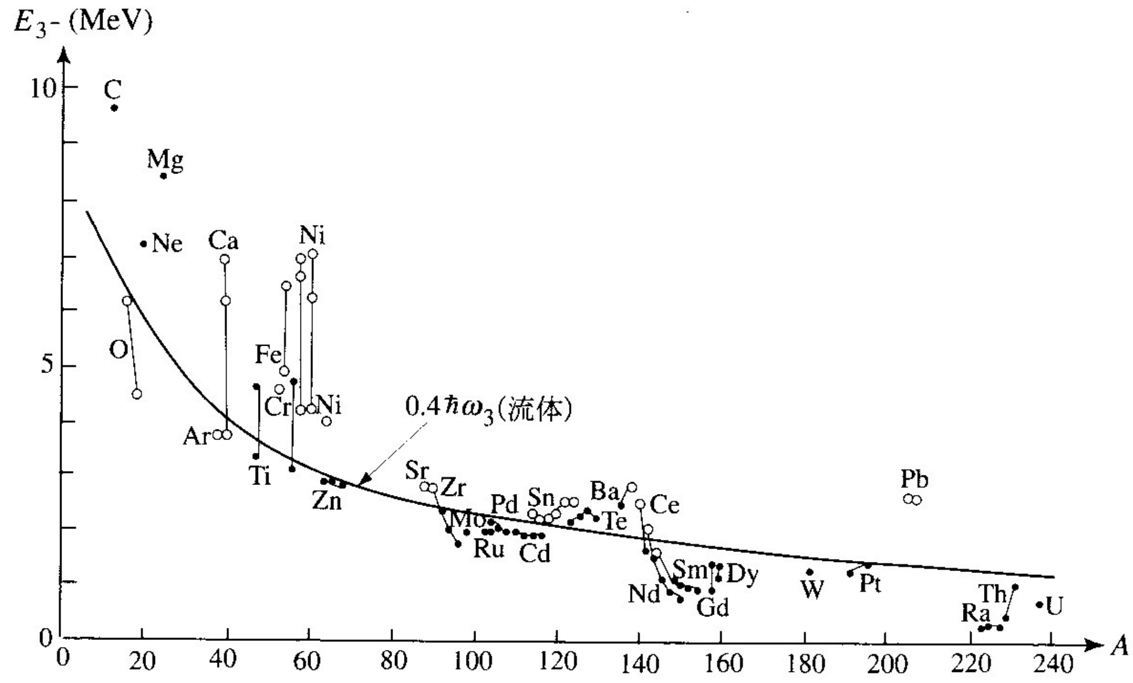


図 3.3　偶々核の第 1 励起 3^- 状態の励起エネルギー

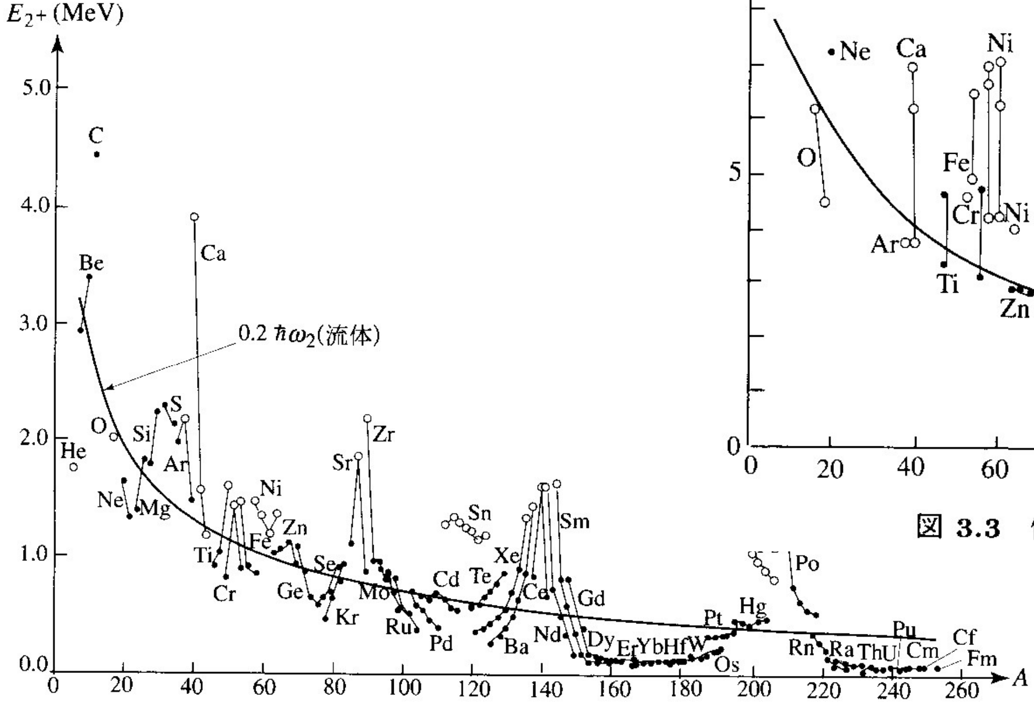
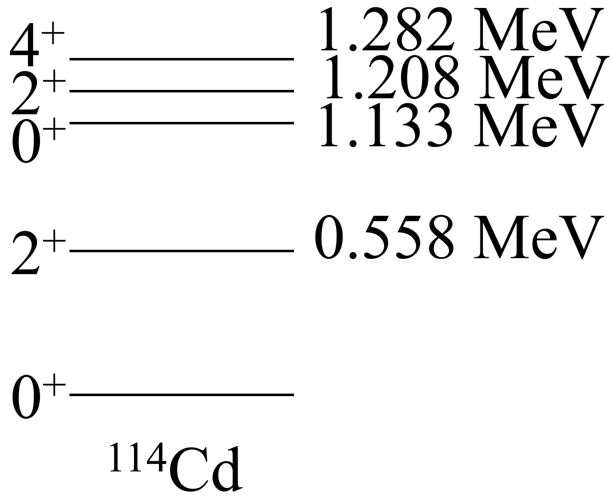


図 3.2　偶々核の第 1 励起 2^+ 状態の励起エネルギー

２重フォノン状態



■ 表面振動の量子化

$$H = \frac{1}{2}\sum_{\lambda\mu}\left\{ B_\lambda |\dot{\alpha}_{\lambda\mu}|^2 + C_\lambda |\alpha_{\lambda\mu}|^2 \right\}$$

$$\xrightarrow[\text{正準量子化}]{} \quad H = \sum_{\lambda\mu} \hbar\omega_\lambda \left(b^\dagger_{\lambda\mu} b_{\lambda\mu} + \frac{1}{2} \right)$$

角運動量とそのz成分

$$\omega_\lambda = \sqrt{C_\lambda / B_\lambda}$$

$$[b_{\lambda\mu}, b_{\lambda'\mu'}] = 0, \quad [b_{\lambda\mu}, b^\dagger_{\lambda'\mu'}] = \delta_{\lambda\mu,\lambda'\mu'}$$

- 1フォノン状態

$$b^\dagger_{\lambda\mu}|0\rangle$$

角運動量 $I = \lambda, \ I_z = \mu$
パリティ $(-)^\lambda$

(note) $Y_{\lambda\mu}(-\hat{r}) = (-1)^\lambda Y_{\lambda\mu}(\hat{r})$

- 2フォノン状態

$$\frac{1}{\sqrt{2}} b^\dagger_{\lambda\mu} b^\dagger_{\lambda'\mu'}|0\rangle$$

角運動量のよい状態に組み直す

→ 角運動量 $\vec{\lambda}$ と $\vec{\lambda}'$ の合成

Department of Physics
Tohoku University
Sendai, Japan

$$[b_\lambda^\dagger b_{\lambda'}^\dagger]^{(IM)} = \sum_{\mu\mu'} \underbrace{\langle \lambda\mu\, \lambda'\mu' | IM \rangle}_{\text{クレブシュ・ゴルダン係数}} b_{\lambda\mu}^\dagger\, b_{\lambda'\mu'}^\dagger$$

$\lambda = \lambda' = 2$ の場合

$$[b_2^\dagger b_2^\dagger]^{(IM)} = \sum_{\mu\mu'} \langle 2\mu\, 2\mu' | IM \rangle\, b_{2\mu}^\dagger\, b_{2\mu'}^\dagger$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\mu\mu'} \Big\{ \langle 2\mu\, 2\mu' | IM \rangle\, b_{2\mu}^\dagger\, b_{2\mu'}^\dagger + \underbrace{\langle 2\mu'\, 2\mu | IM \rangle}_{= (-)^I \langle 2\mu\, 2\mu' | IM \rangle} \underbrace{b_{2\mu'}^\dagger\, b_{2\mu}^\dagger}_{= b_{2\mu}^\dagger\, b_{2\mu'}^\dagger} \Big\}$$

$$= \sum_{\mu\mu'} \frac{1}{2}\left(1 + (-)^I\right) \langle 2\mu\, 2\mu' | IM \rangle\, b_{2\mu}^\dagger\, b_{2\mu'}^\dagger$$

$\Downarrow$ I は偶数のみ

$2\hbar\omega$ ———— $0^+, 2^+, 4^+$

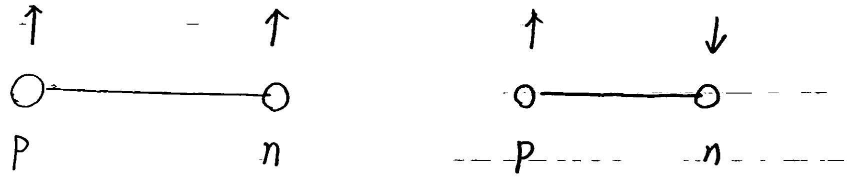
$\hbar\omega$ ———— 2^+

———— 0^+

Department of Physics
Tohoku University
Sendai, Japan.

▨角運動の合成

簡単な例 ： 2核子系の全スピン



$S_1 = \frac{1}{2}$ $\quad S_2 = \frac{1}{2}$ $\qquad S_1 = \frac{1}{2}$ $\quad S_2 = \frac{1}{2}$

$S_{1z} = \frac{1}{2}$ $\quad S_{2z} = \frac{1}{2}$ $\qquad S_{1z} = \frac{1}{2}$ $\quad S_{2z} = -\frac{1}{2}$

$S_1 = \frac{1}{2}$ $\quad S_2 = \frac{1}{2}$ $\qquad S_1 = \frac{1}{2}$ $\quad S_2 = \frac{1}{2}$

$S_{1z} = -\frac{1}{2}$ $\quad S_{2z} = +\frac{1}{2}$ $\qquad S_{1z} = -\frac{1}{2}$ $\quad S_{2z} = -\frac{1}{2}$

4つの状態

└→ ただし，これらは全スピン $\vec{S} = \vec{S_1} + \vec{S_2}$ の大きさ $\vec{S}^2$ の固有状態ではない。

$$\begin{aligned}
\vec{S}^2 |\uparrow\downarrow\rangle &= (\vec{S_1}^2 + \vec{S_2}^2 + 2\vec{S_1}\cdot\vec{S_2})|\uparrow\downarrow\rangle \\
&= \Big(\vec{S_1}^2 + \vec{S_2}^2 + 2S_{1z}S_{2z} \\
&\qquad + \underbrace{2(S_{1x}S_{2x} + S_{1y}S_{2y})}_{\substack{\| \\ (S_{1x}+iS_{1y})(S_{2x}-iS_{2y}) \\ +(S_{1x}-iS_{1y})(S_{2x}+iS_{2y})}}\Big)|\uparrow\downarrow\rangle
\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{3}{4}\times 2 - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle$$

$$= 1\,|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle$$

$$S^2|\downarrow\uparrow\rangle = |\downarrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle$$

$$\vec{S}^2|\uparrow\uparrow\rangle = \left(\frac{3}{4}\cdot 2 + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)|\uparrow\uparrow\rangle$$

$$= 2\,|\uparrow\uparrow\rangle$$

$$\vec{S}^2|\downarrow\downarrow\rangle = 2\,|\downarrow\downarrow\rangle$$

状態を分類する際、$\vec{S}^2$の固有関数を作ると便利なことがしばしば。

$$\vec{S}^2|\uparrow\downarrow\rangle = |\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle$$

$$\rightarrow \quad \langle\uparrow\downarrow|\vec{S}^2|\uparrow\downarrow\rangle = 1$$

$$\langle\downarrow\uparrow|\vec{S}^2|\uparrow\downarrow\rangle = 1$$

$$\vec{S}^2|\downarrow\uparrow\rangle = |\downarrow\uparrow\rangle = |\uparrow\downarrow\rangle$$

$$\rightarrow \quad \langle\downarrow\uparrow|\vec{S}^2|\downarrow\uparrow\rangle = \langle\uparrow\downarrow|\vec{S}^2|\downarrow\uparrow\rangle = 1$$

$\downarrow$

$$\vec{S}^2 = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|cc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} |\uparrow\uparrow\rangle & |\uparrow\downarrow\rangle & |\downarrow\uparrow\rangle & |\downarrow\downarrow\rangle \end{array} \end{array}$$

Department of Physics
Tohoku University
Sendai, Japan.

2×2 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ の対角化

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda-1)^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda = 0$$

$\rightarrow \lambda = 0, \underset{\sim}{2}$

固有状態： $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $(\lambda = 0)$

$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(\lambda = 2)$

結局，

$\vec{S}^2$ の固有値 $\alpha = 1\cdot(1+1)$

$|\uparrow\uparrow\rangle$ $(S_z = 1)$

$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)$ (0)

$|\downarrow\downarrow\rangle$ (-1)

$\vec{S}^2$ の固有値 0

$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$ $(S_z = 0)$

の4つの状態。

$|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle$ の適当な線形結合

$\rightarrow |S=1, S_z=1\rangle, |S=1, S_z=0\rangle, |S=1, S_z=-1\rangle$

$|S=0, S_z=0\rangle$ の4つの状態，

Department of Physics
Tohoku University
Sendai, Japan.

これは

$\{ |s_{1z}\, s_{2z}\rangle \}$ から $\{ |S S_z\rangle \}$ へ変換と同等.

どちらも完全系をはる:

$$1 = \sum_{s_{1z}, s_{2z}} |s_{1z}\, s_{2z}\rangle \langle s_{1z}\, s_{2z}|$$

$$= \sum_{S, S_z} |S S_z\rangle \langle S S_z|$$

↓

$$|S S_z\rangle = \sum_{s_{1z}\, s_{2z}} |s_{1z}\, s_{2z}\rangle \underbrace{\langle s_{1z}\, s_{2z} | S S_z\rangle}_{\text{展開系数}}$$

$$|s_{1z}\, s_{2z}\rangle = \sum_{S, S_z} |S S_z\rangle \langle S S_z | s_{1z}\, s_{2z}\rangle$$

□ 一般化　$\vec{L} = \vec{l_1} + \vec{l_2}$

m_1, m_2 はよい量子数ではなくなる

$$\{ |l_1 m_1 ; l_2 m_2 \rangle \} \longleftrightarrow \{ |LM ; l_1 l_2 \rangle \}$$

$$1 = \sum_{m_1, m_2} |l_1 m_1 \, l_2 m_2 \rangle \langle l_1 m_1 \, l_2 m_2 |$$
$$= \sum_{LM} |LM ; l_1 l_2 \rangle \langle LM ; l_1 l_2 |$$

(note)　L の最大値は　$L_{max} = l_1 + l_2$
　　　　最小値は　$L_{min} = |l_1 - l_2|$

→ どちらの分類の仕方でも状態の総数は $(2l_1+1)(2l_2+1)$ 個

$$|LM \rangle = \sum_{m_1, m_2} \underbrace{\langle l_1 m_1 \, l_2 m_2 | LM \rangle}_{\text{クレブシュ・ゴルダン (CG) 係数}} |l_1 m_1 \, l_2 m_2 \rangle$$

$$|l_1 m_1 \, l_2 m_2 \rangle = \sum_{LM} \langle l_1 m_1 \, l_2 m_2 | LM \rangle |LM \rangle$$

(note)　クレブシュ・ゴルダン係数の性質

$$\langle l_1 m_1 \, l_2 m_2 | LM \rangle = (-1)^{l_1 + l_2 - L} \langle l_2 m_2 \, l_1 m_1 | LM \rangle$$