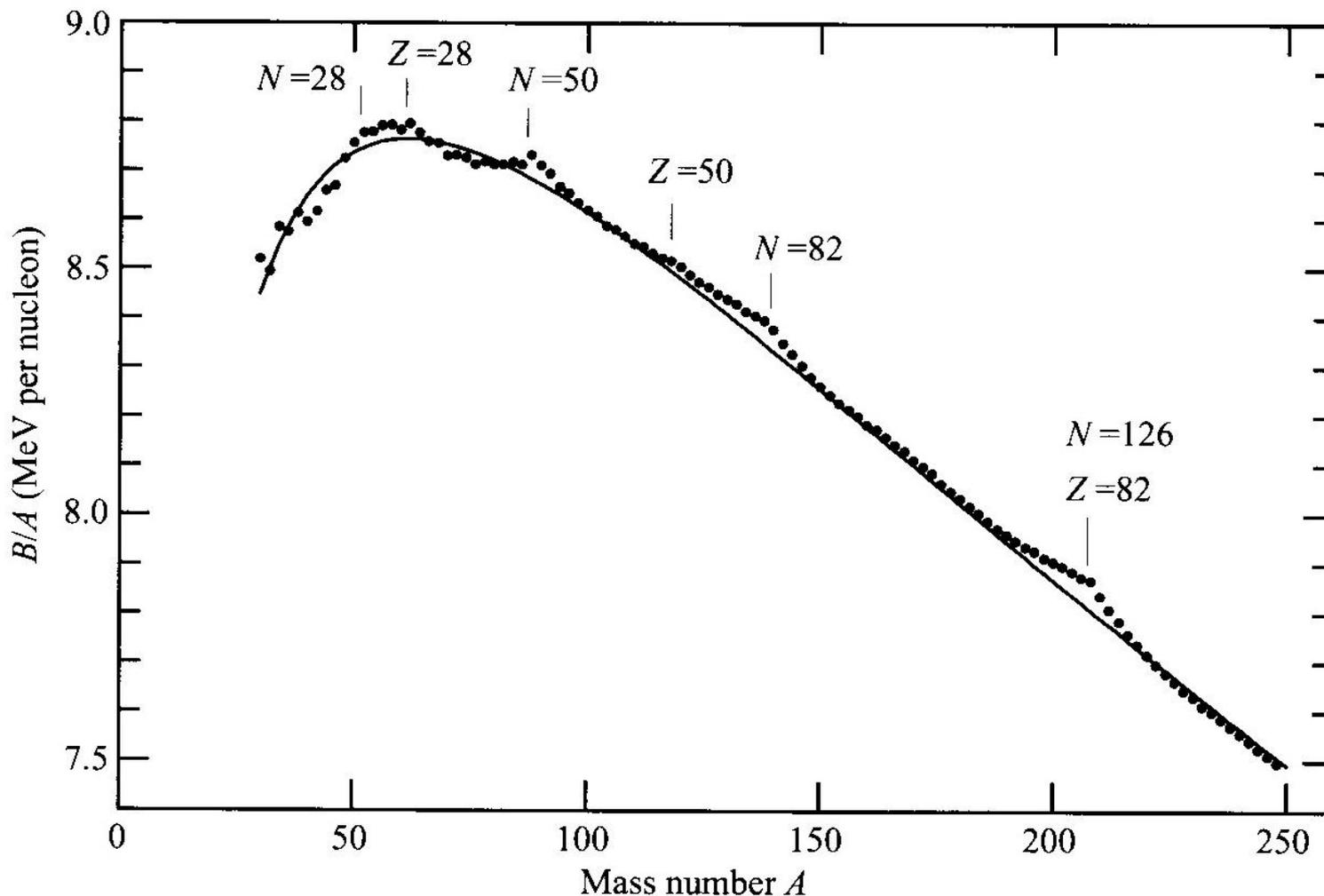


# B/A (核子あたりの束縛エネルギー)の実験データ



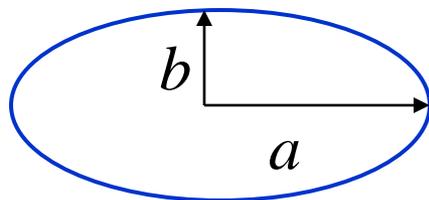
Bethe-Weizacker 質量公式: 液滴模型

$$B(N, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\text{sym}} \frac{(N - Z)^2}{A}$$

# 液滴模型による原子核の変形

$$B(N, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\text{sym}} \frac{(N - Z)^2}{A}$$

回転楕円体

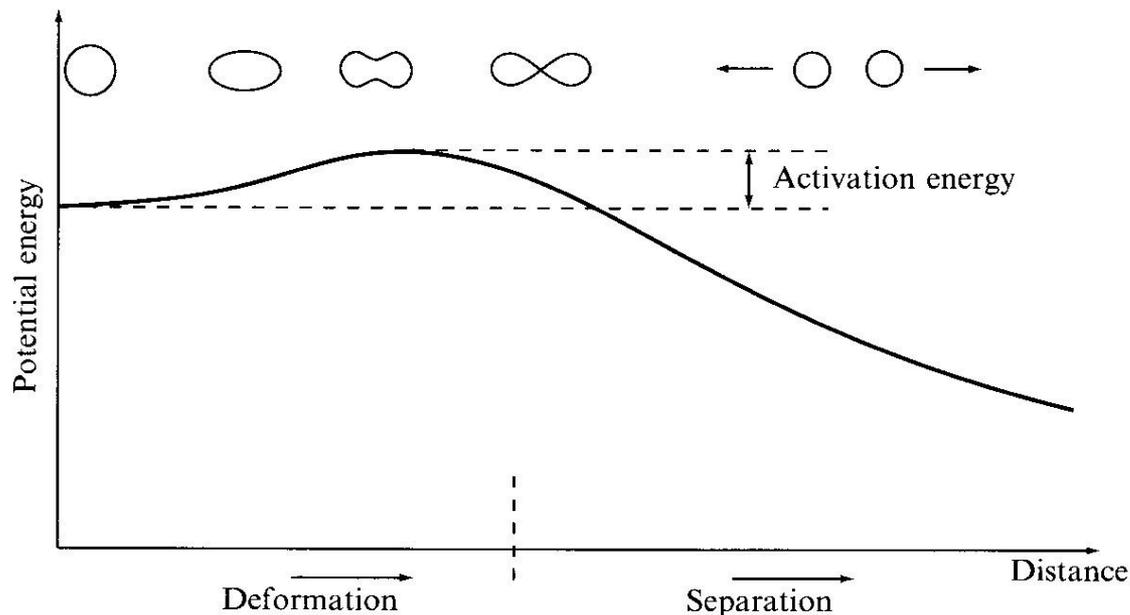


$$a = R \cdot (1 + \epsilon)$$

$$b = R \cdot (1 + \epsilon)^{-1/2}$$

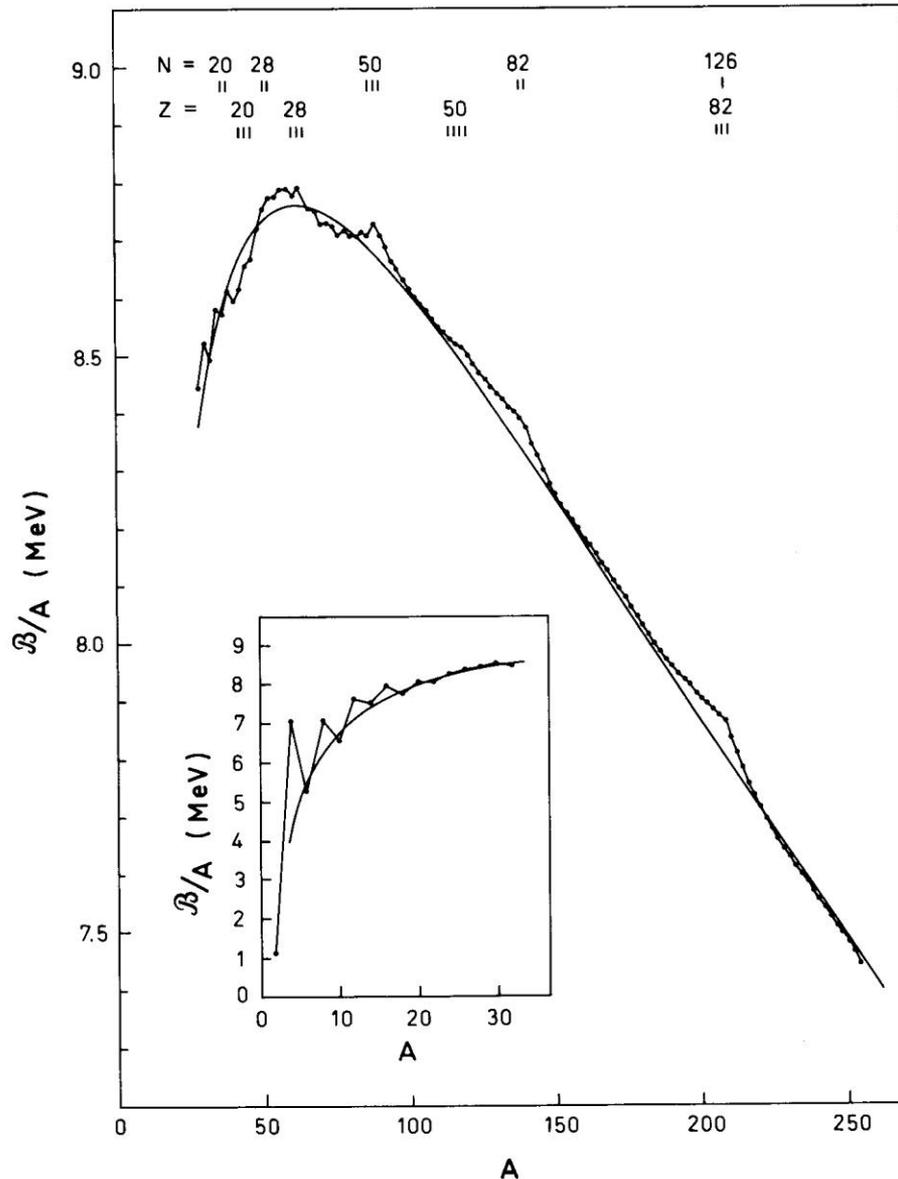
$$E_{\text{surf}} = E_{\text{surf}}^{(0)} (1 + 2\epsilon^2/5 + \dots)$$

$$E_C = E_C^{(0)} (1 - \epsilon^2/5 + \dots)$$



# 殻構造

$$B(N, Z) = B_{\text{macro}}(N, Z) + B_{\text{micro}}(N, Z)$$



## • スムーズな関数

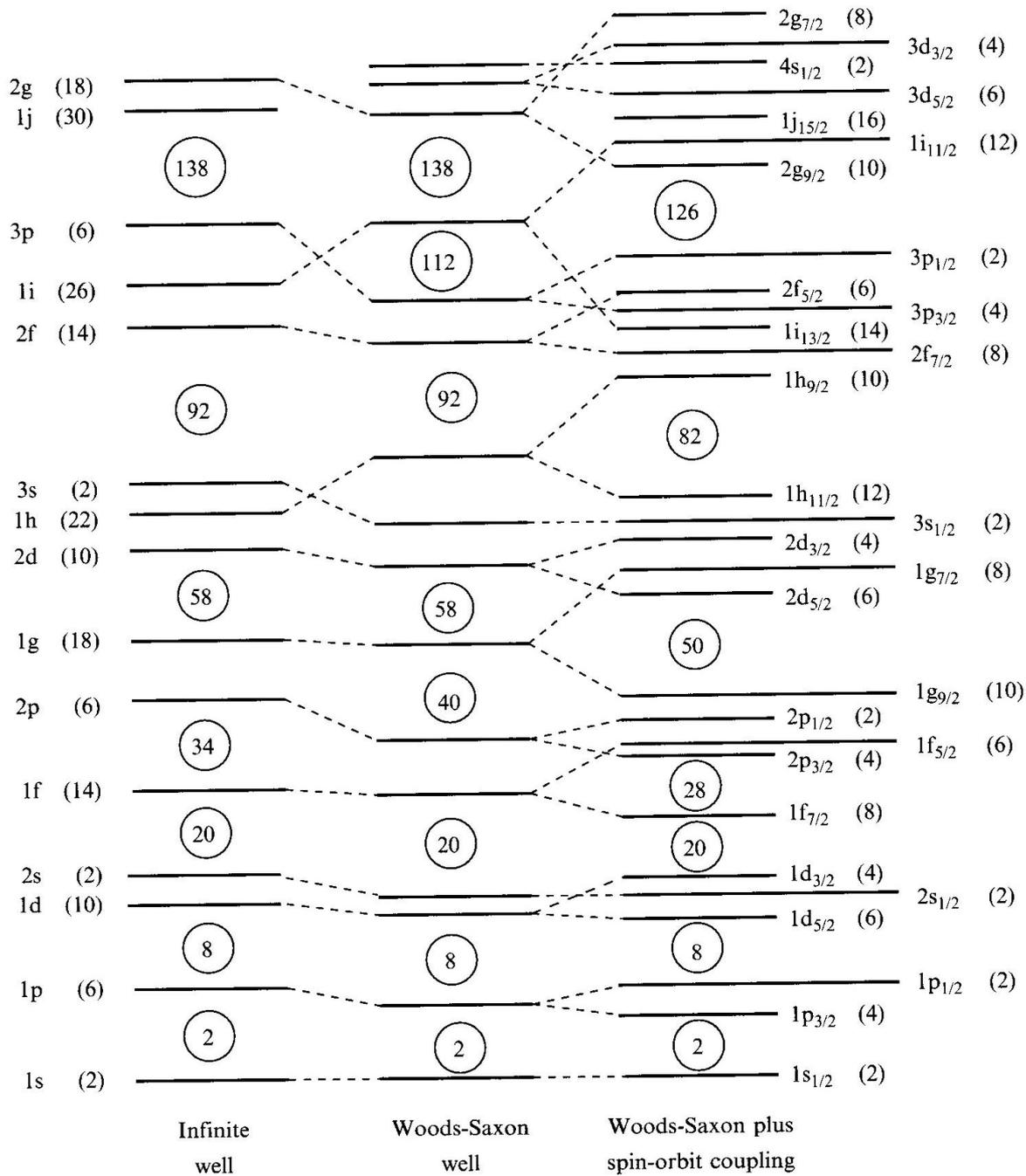
$$B_{\text{macro}}(N, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\text{sym}} \frac{(N - Z)^2}{A}$$

## • ゆらぎ

$$B_{\text{micro}} = B_{\text{pair}} + B_{\text{shell}}$$

## 液滴模型:

$$B_{\text{LDM}} = B_{\text{macro}} + B_{\text{pair}}$$



Infinite  
well

Woods-Saxon  
well

Woods-Saxon plus  
spin-orbit coupling

# 原子核の変形

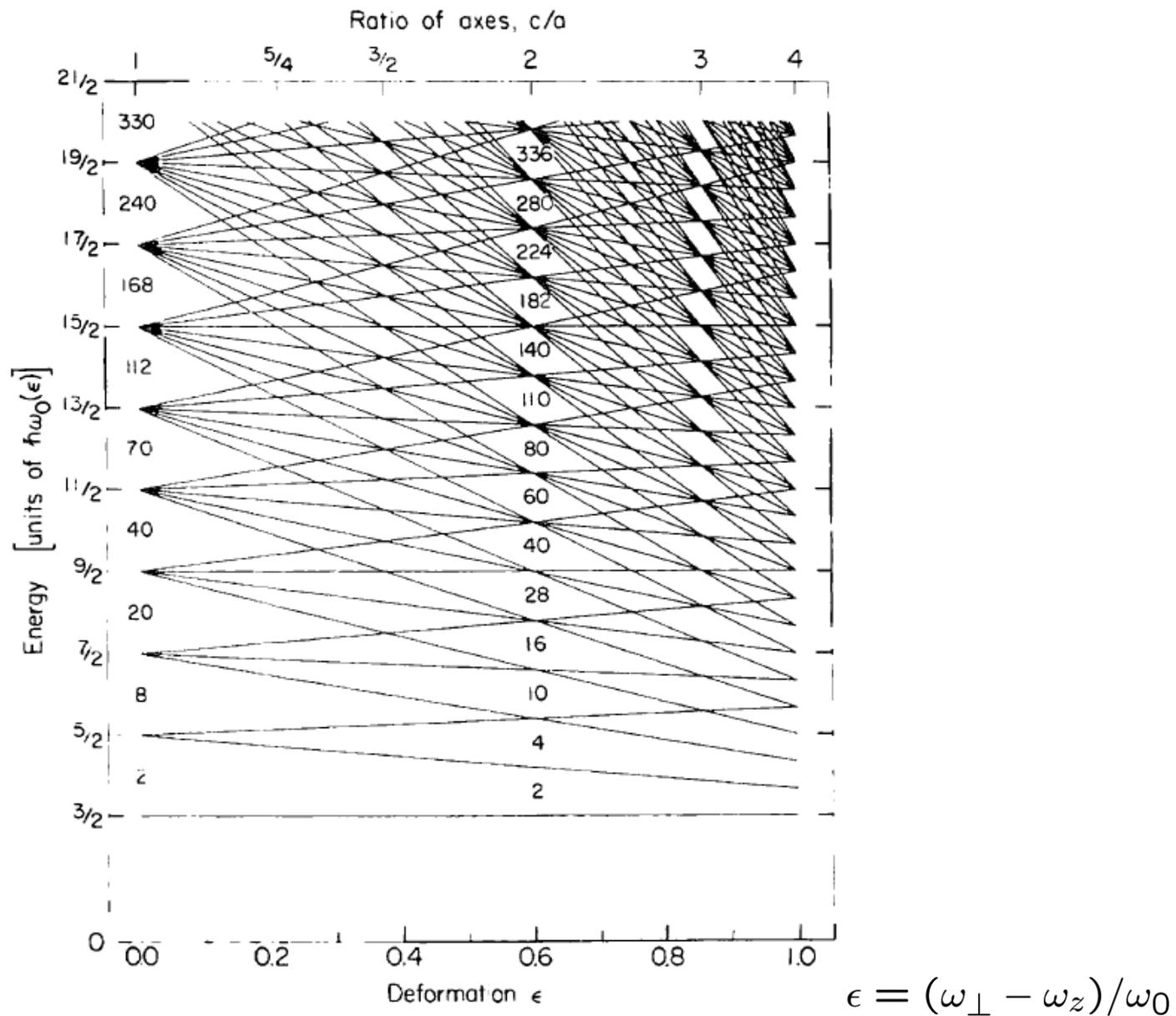
原子核の変形にともなうエネルギーの変化

$$E(\beta) = E_{LDM}(\beta) + E_{\text{shell}}(\beta)$$

原子核が変形

→ 核子が感じるポテンシャルも変形

→ 変形度によって異なる量子力学的補正(殻効果)

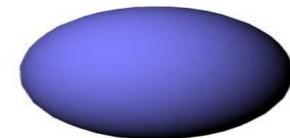
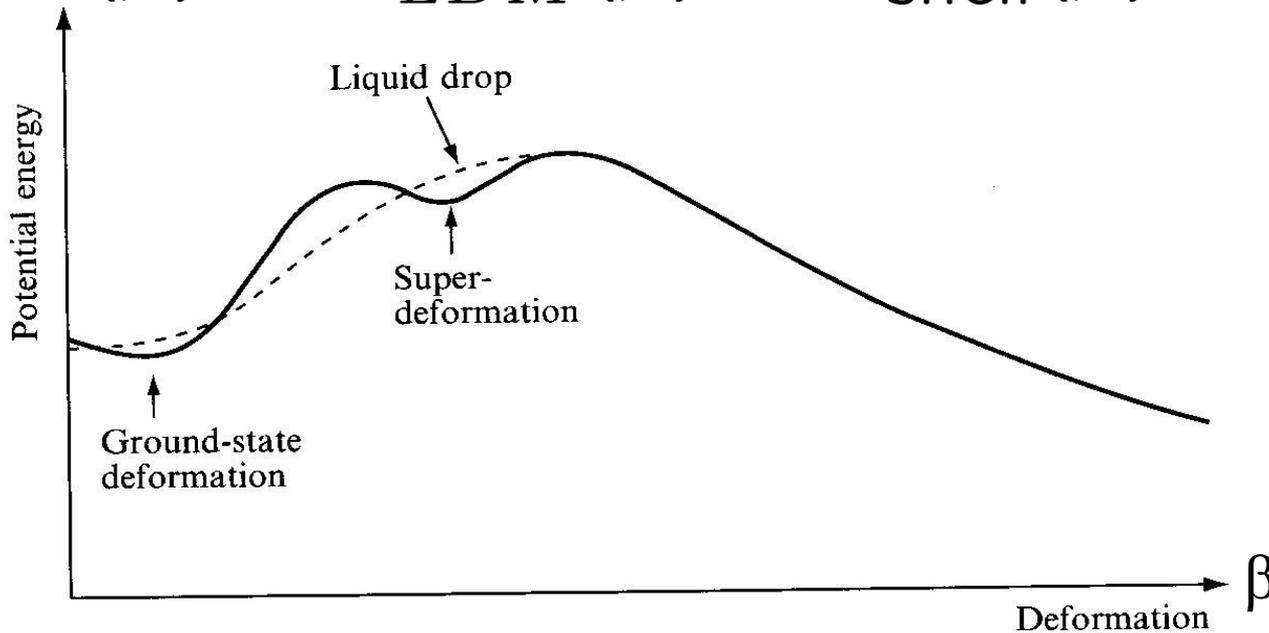


**Figure 2.25.** Energy levels of an harmonic-oscillator potential for prolate spheroidal deformations  $\epsilon$ . (From [MN 73].)

# 原子核の変形

原子核の変形にともなうエネルギーの変化

$$E(\beta) = E_{LDM}(\beta) + E_{shell}(\beta)$$



液滴模型  
殻補正

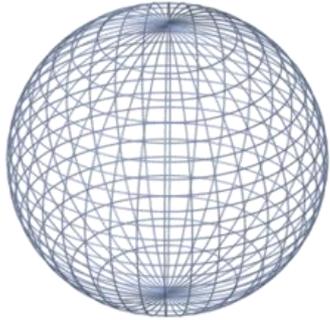


必ず球形

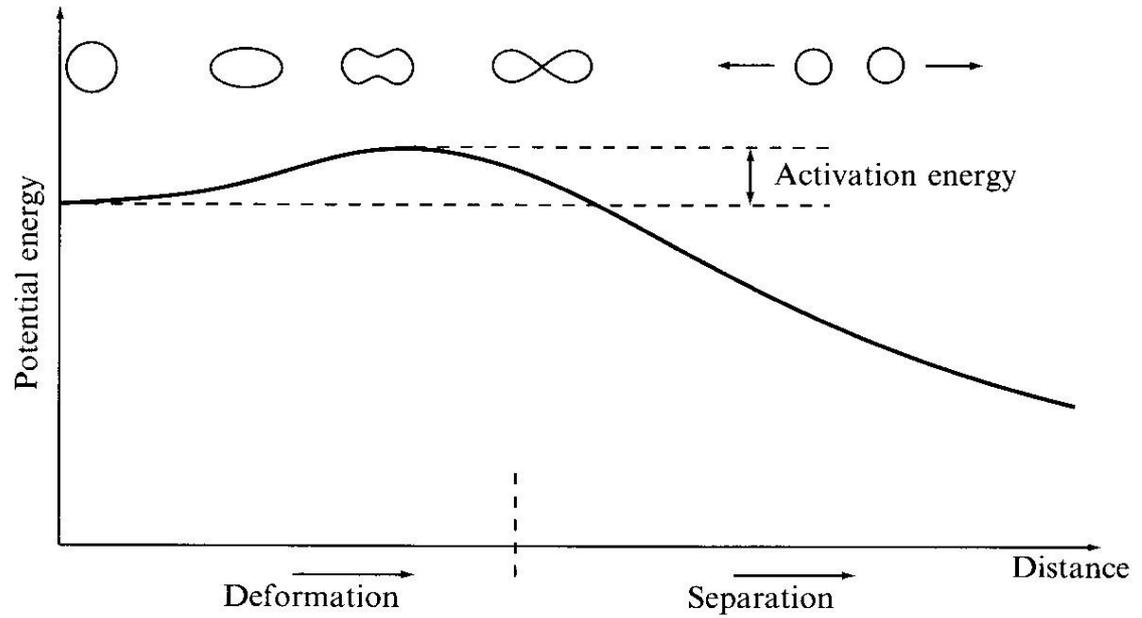
変形状態が基底状態になる場合あり

\* 対称性の自発的破れ

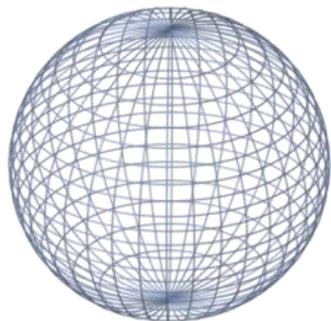
# 原子核の変形



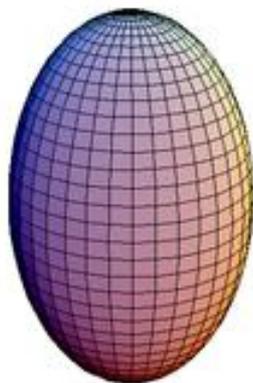
球形



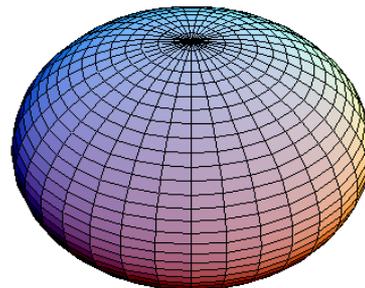
# 回転楕円体



球形

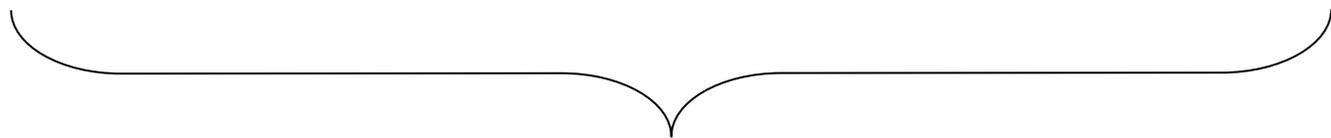


プロレート



オブレート

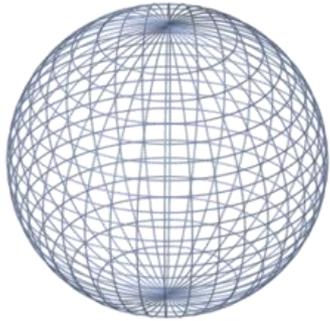
三軸非対称



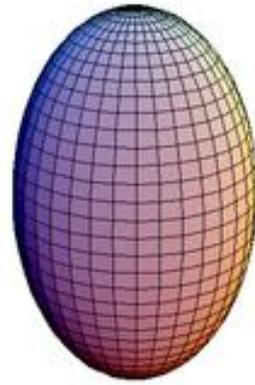
殻効果

$$B_{\text{micro}} = B_{\text{pair}} + B_{\text{shell}}$$

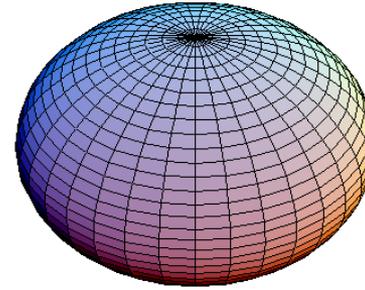
# 回転楕円体



球形

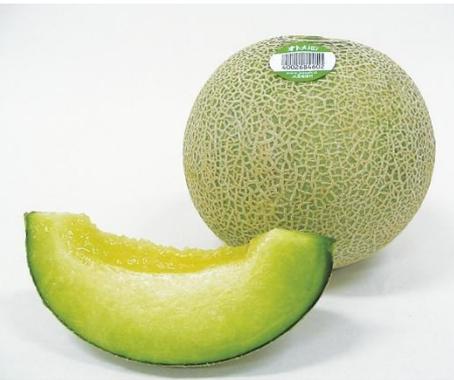


プロレート

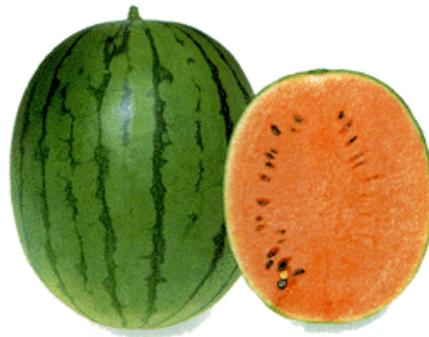


オブレート

三軸非対称

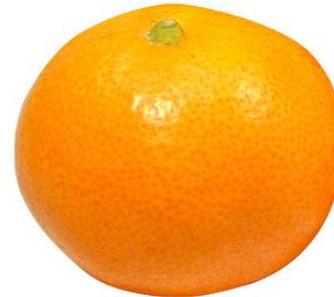


$$\beta = 0$$



$$\beta > 0$$

$$\gamma = 0$$



$$\beta < 0$$

$$\gamma = 0$$



$$\beta > 0$$

$$0 < \gamma < \pi/3$$

# 原子核の変形

## $^{154}\text{Sm}$ の励起スペクトル

0.903 —————  $8^+$   
(MeV)

0.544 —————  $6^+$

0.267 —————  $4^+$

0.082 —————  $2^+$

0 —————  $0^+$

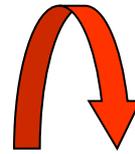
$^{154}\text{Sm}$

$$E_I \sim \frac{I(I+1)\hbar^2}{2\mathcal{J}}$$

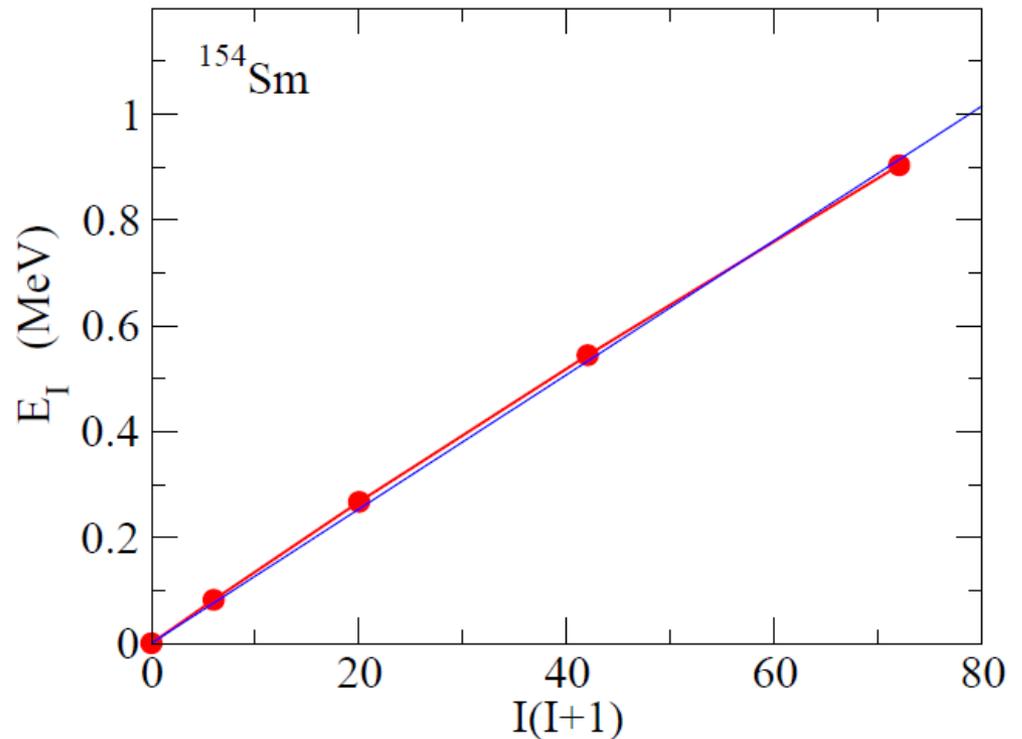
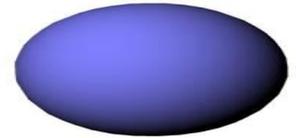
Cf. 剛体の回転エネルギー(古典力学)

$$E = \frac{1}{2}\mathcal{J}\omega^2 = \frac{I^2}{2\mathcal{J}}$$

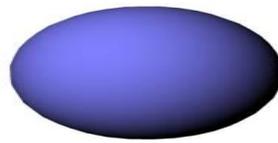
$$(I = \mathcal{J}\omega, \omega = \dot{\theta})$$



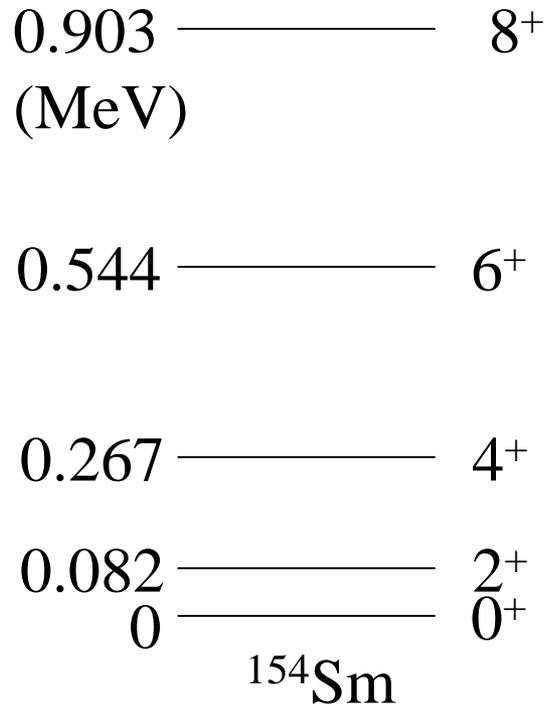
$^{154}\text{Sm}$  は変形している



# 原子核の変形



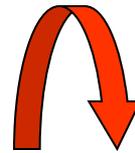
## $^{154}\text{Sm}$ の励起スペクトル



Cf. 剛体の回転エネルギー(古典力学)

$$E = \frac{1}{2} \mathcal{J} \omega^2 = \frac{I^2}{2\mathcal{J}}$$

$$(I = \mathcal{J} \omega, \omega = \dot{\theta})$$



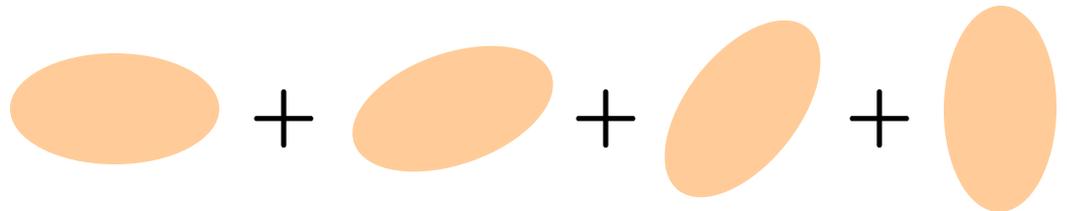
$^{154}\text{Sm}$  は変形している

(note)  $0^+$  状態とは(量子力学)?

$0^+$ : 空間の異方性がない

→ 色々な向きが等確率で混ざっている

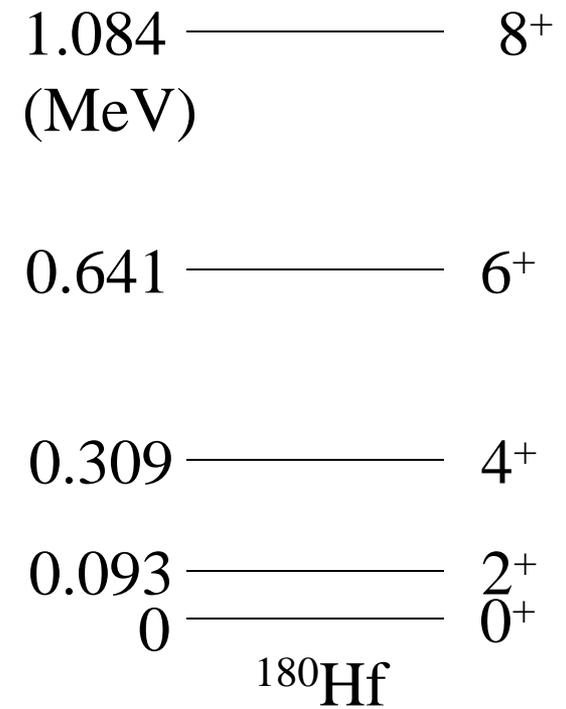
$$E_I \sim \frac{I(I+1)\hbar^2}{2\mathcal{J}}$$



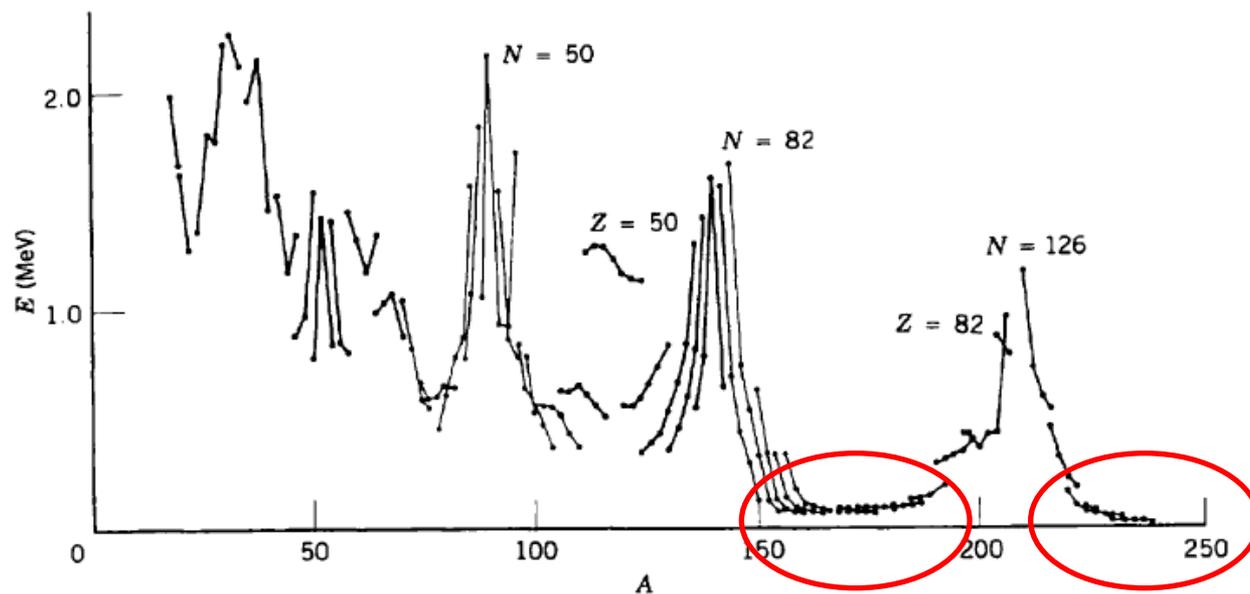
## 原子核が変形している証拠

- 回転バンドの存在

$$E_I = \frac{I(I + 1)\hbar^2}{2\mathcal{J}}$$

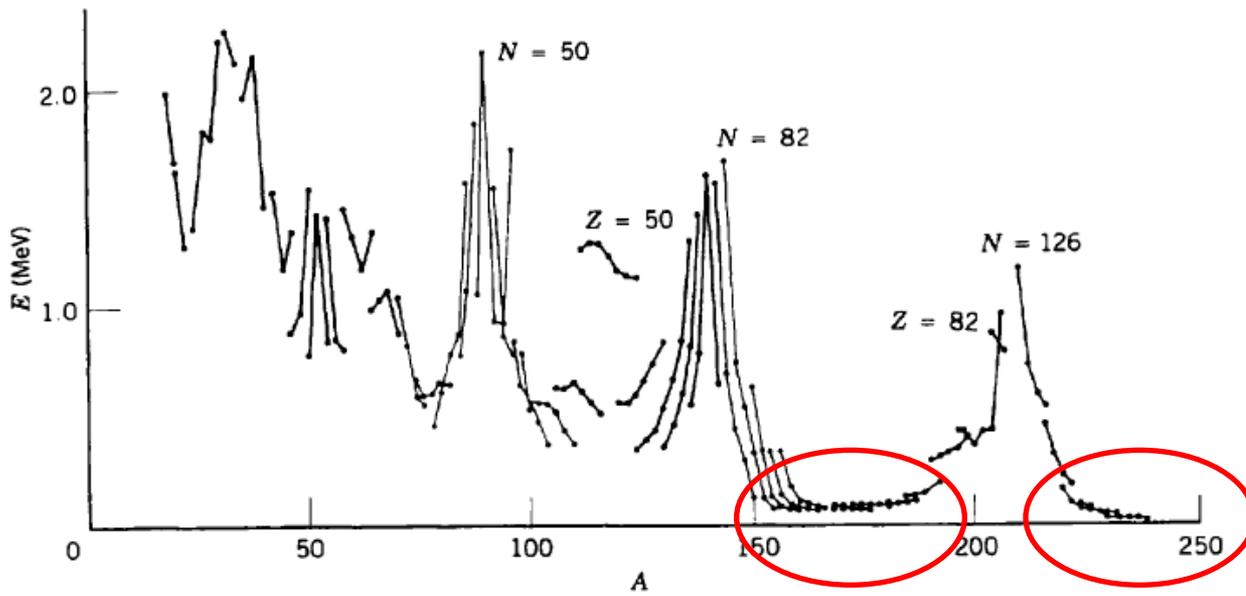


# 偶偶核の $2^+$ 状態のエネルギー



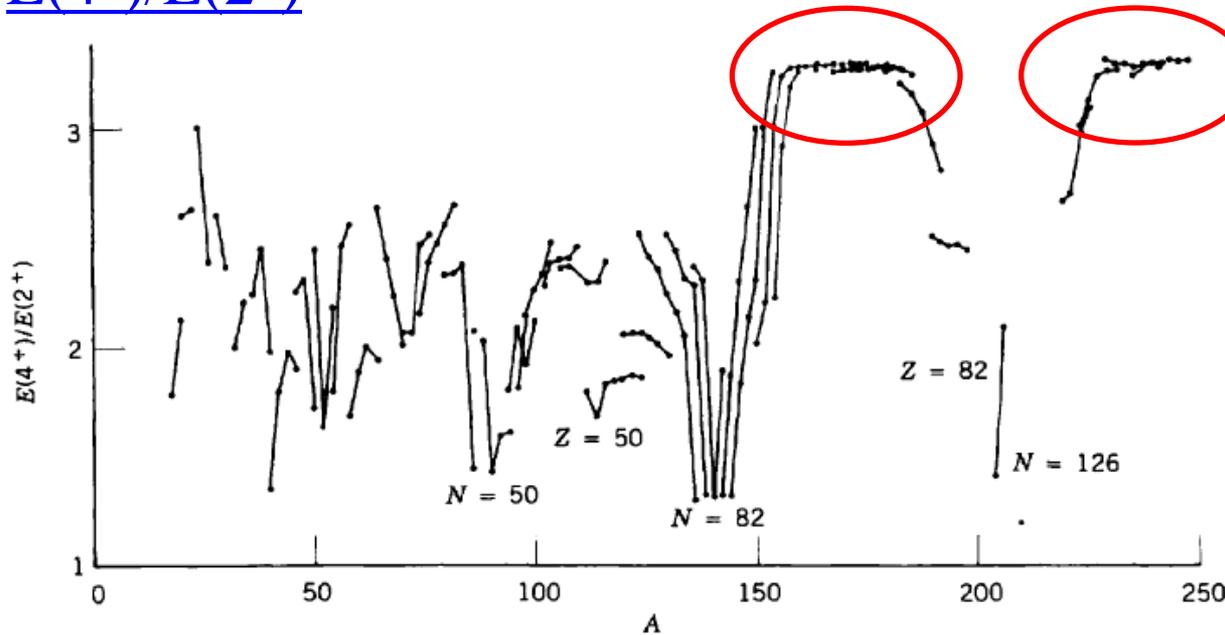
変形核

K.S. Krane, "Introductory Nuclear Physics"



変形核

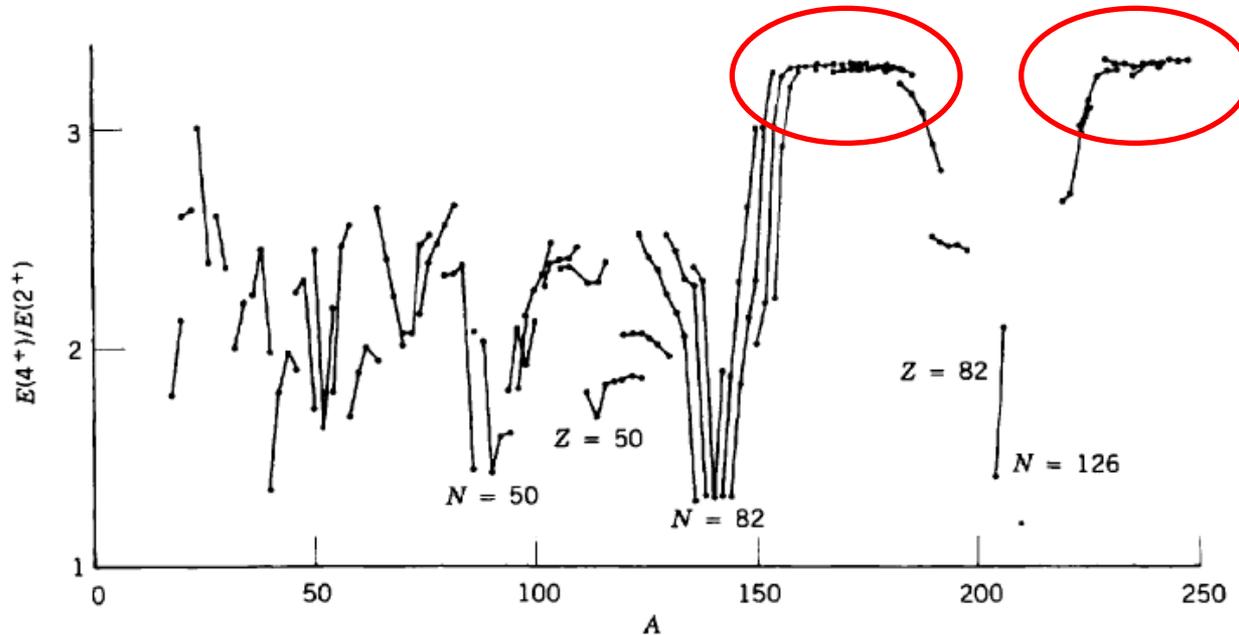
$E(4^+)/E(2^+)$



変形核なら  
 $E(4^+)/E(2^+) \sim 3.3$

球形核なら  
 $E(4^+)/E(2^+) \sim 2$

# 偶偶核における $E(4^+)/E(2^+)$

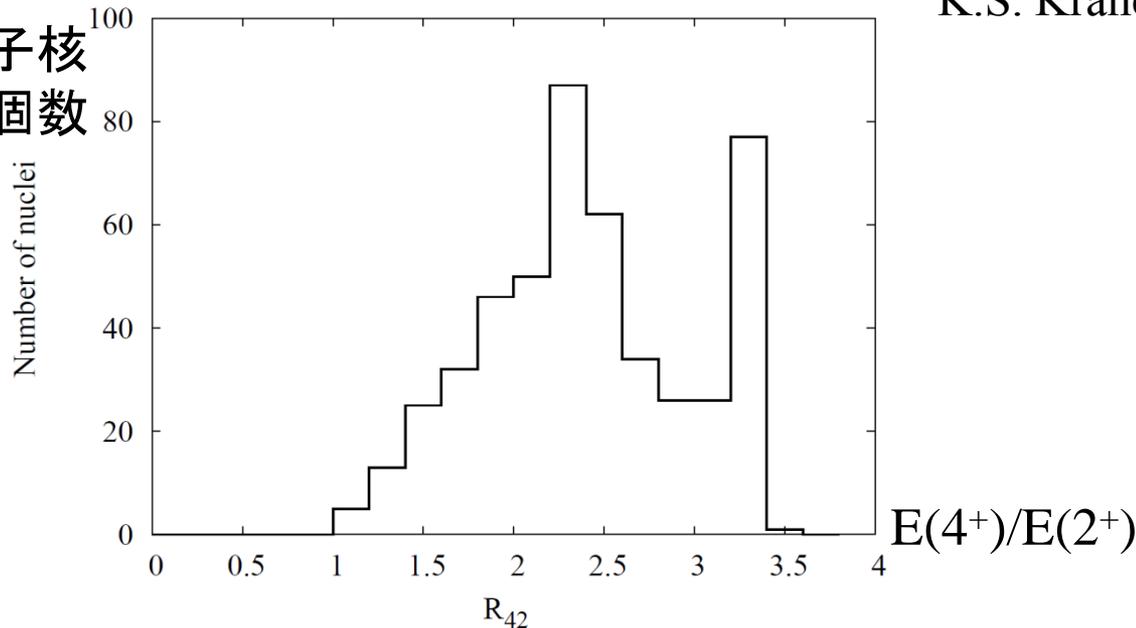


変形核なら  
 $E(4^+)/E(2^+) \sim 3.3$

球形核なら  
 $E(4^+)/E(2^+) \sim 2$

K.S. Krane, "Introductory Nuclear Physics"

原子核  
 の個数



G.F. Bertsch,  
 arXiv:1203.5529

## 原子核が変形している証拠

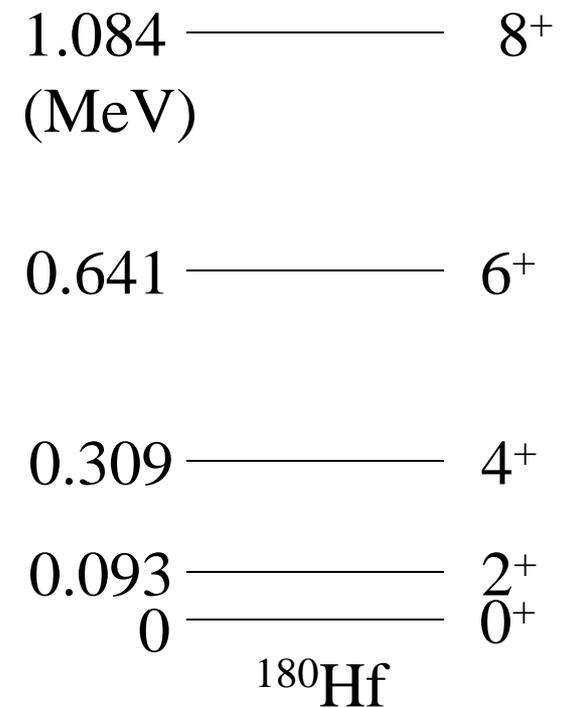
- 回転バンドの存在

$$E_I = \frac{I(I+1)\hbar^2}{2\mathcal{J}}$$

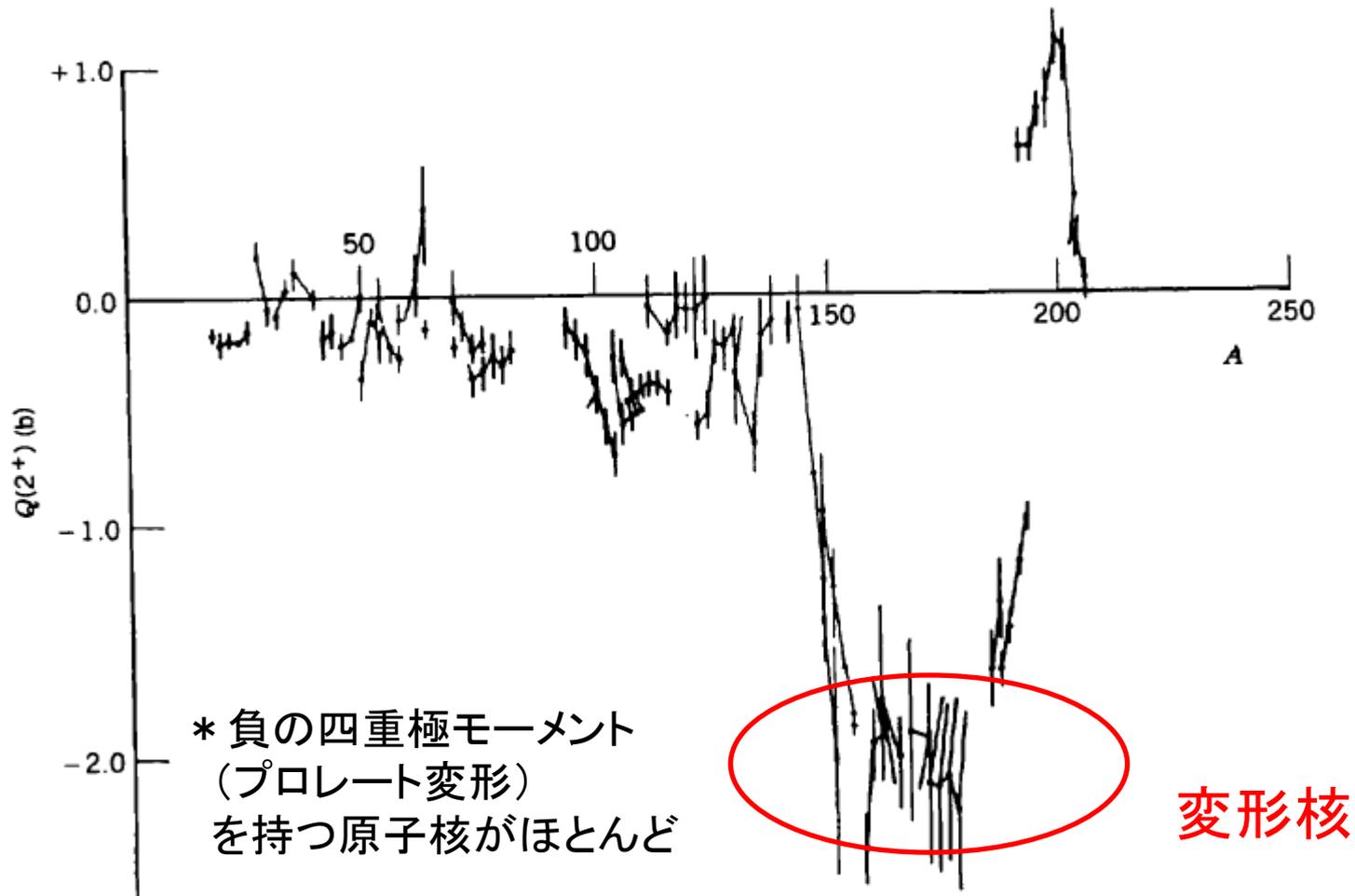
- 非常に大きな四重極モーメント  
(奇数個の核子を持つ原子核や励起状態)

$$Q = e\sqrt{\frac{16\pi}{5}} \langle \Psi_{II} | r^2 Y_{20} | \Psi_{II} \rangle$$

- 四重極遷移確率の増大



# 偶偶核の $2^+$ 状態の四重極モーメント



**Figure 5.16b** Electric quadrupole moments of lowest  $2^+$  states of even- $Z$ , even- $N$  nuclei. The lines connect sequences of isotopes.

## 原子核が変形している証拠

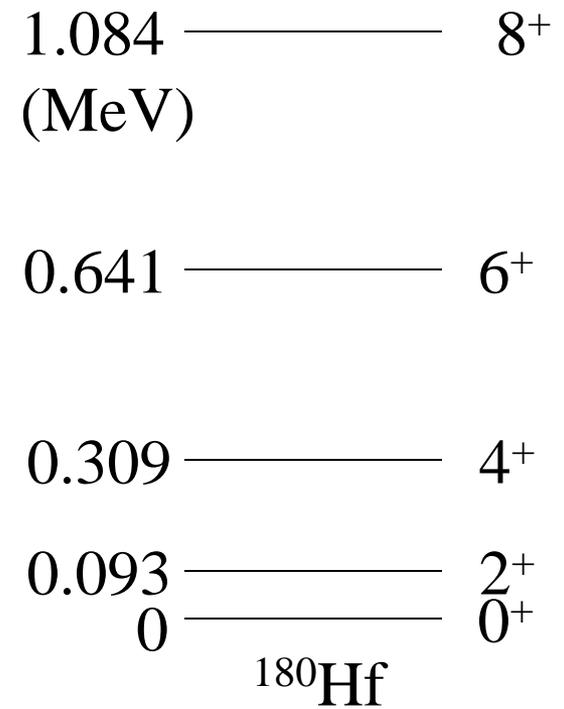
- 回転バンドの存在

$$E_I = \frac{I(I+1)\hbar^2}{2\mathcal{J}}$$

- 非常に大きな四重極モーメント  
(奇数個の核子を持つ原子核や励起状態)

$$Q = e\sqrt{\frac{16\pi}{5}}\langle\Psi_{II}|r^2Y_{20}|\Psi_{II}\rangle$$

- 四重極遷移確率の増大
- 一粒子スペクトル



# 変形核の一粒子準位 (ニルソン・レベル)

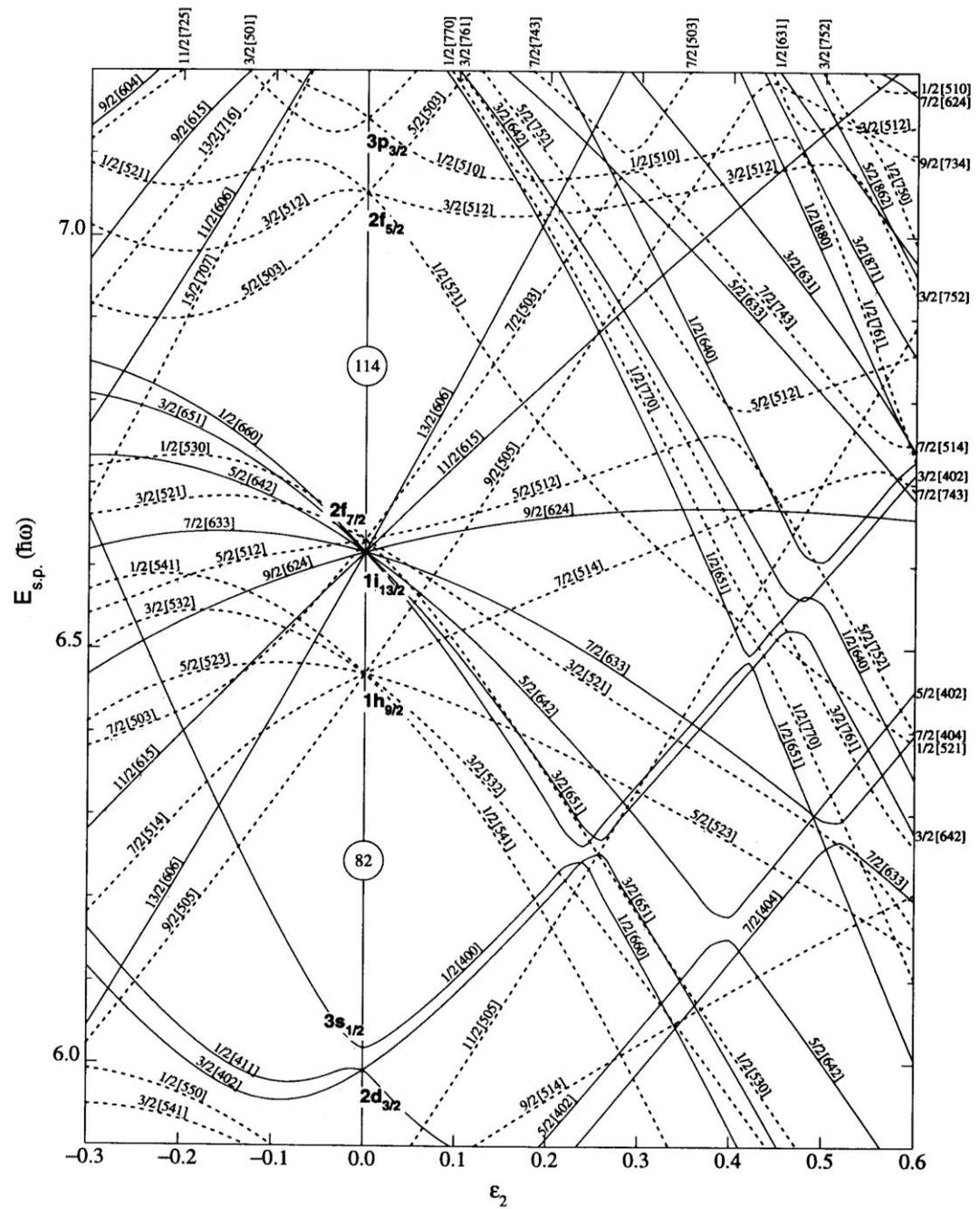
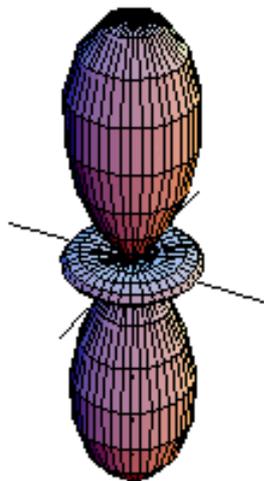
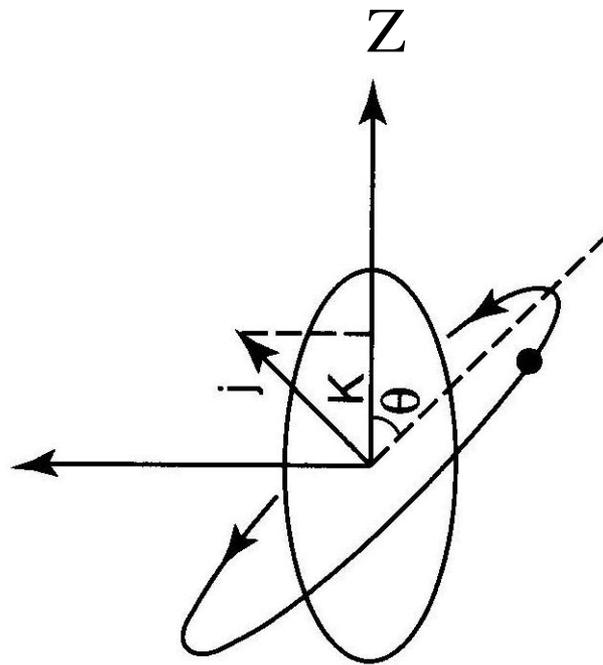
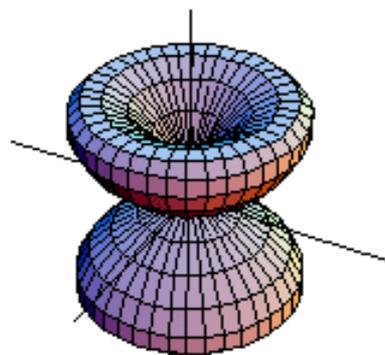


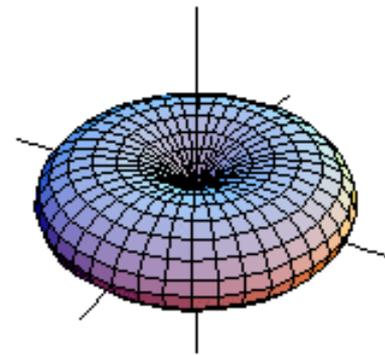
Figure 13. Nilsson diagram for protons,  $Z \geq 82$  ( $\epsilon_4 = \epsilon_2^2/6$ ).



$r = Y_{20}$   
( $K=0$ )

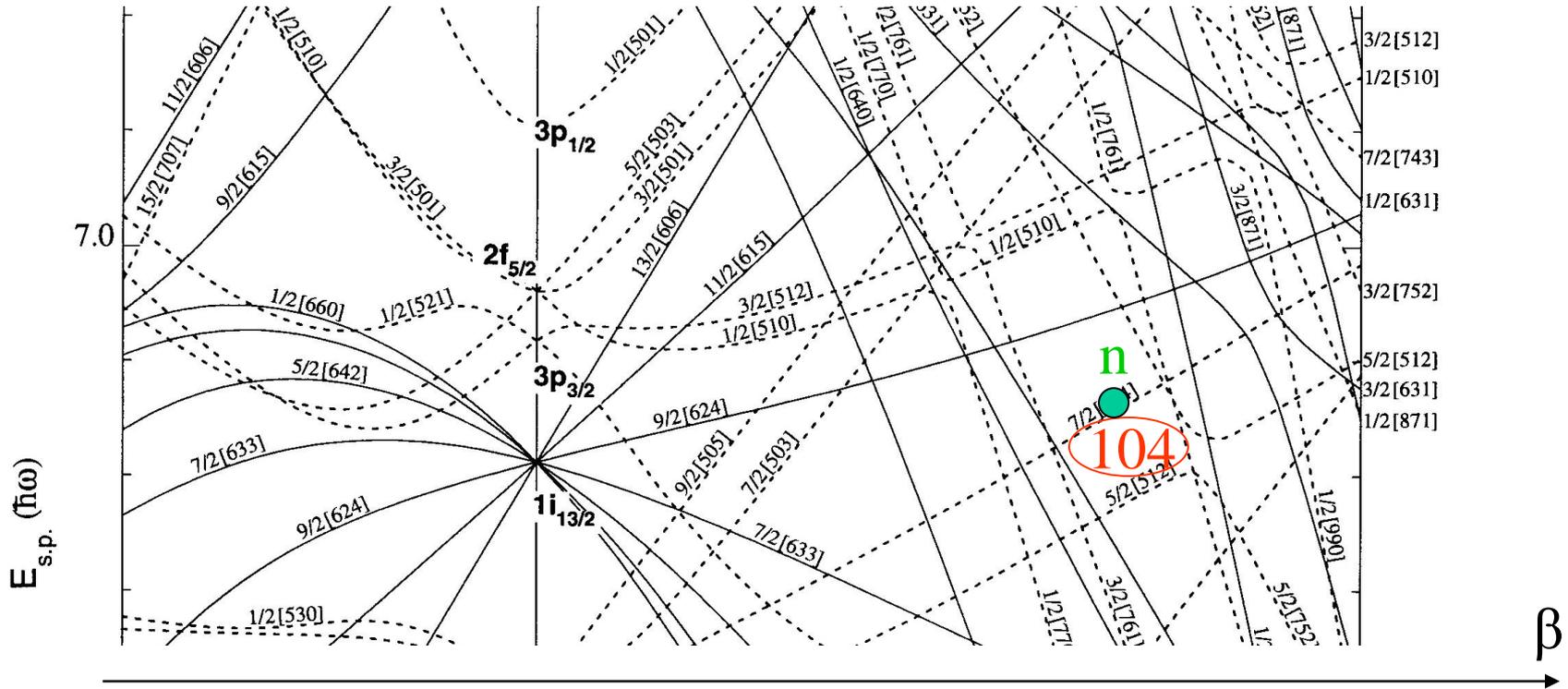


$r = Y_{21}$   
( $K=1$ )



$r = Y_{22}$   
( $K=2$ )

# 変形核の一粒準位

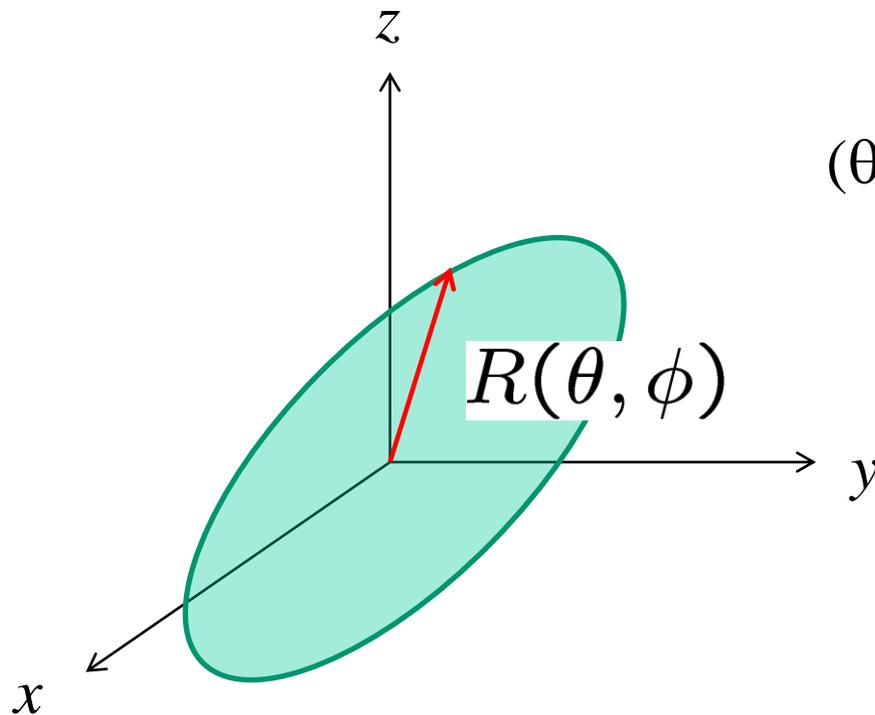


$5/2^-$  ————— 0.508

$9/2^+$  ————— 0.321       $^{177}_{72}\text{Hf}_{105}$

$7/2^-$  —————

# 変形パラメーター



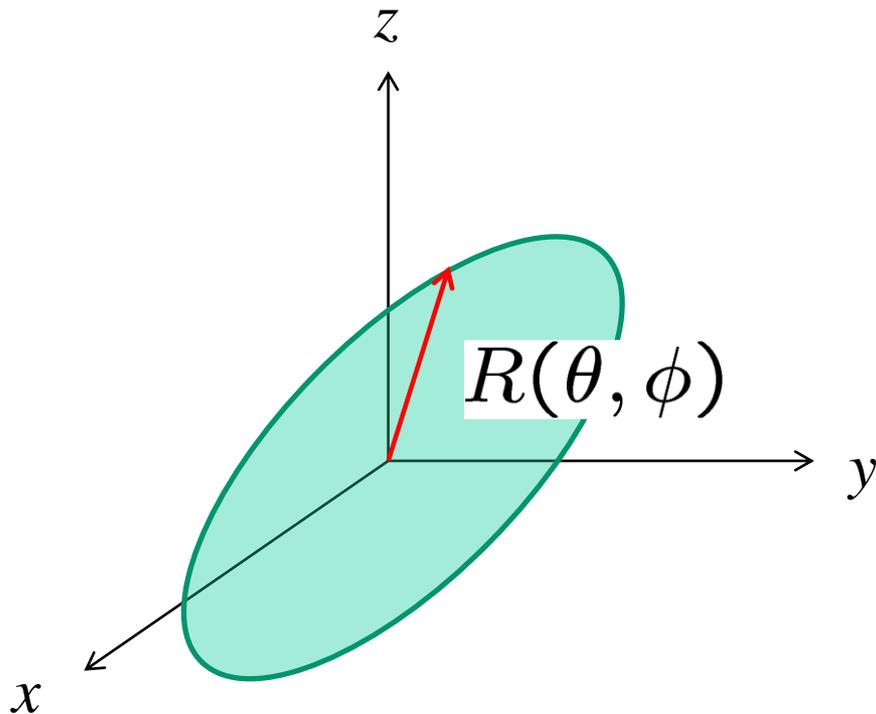
$(\theta, \phi)$  方向の半径:  $R(\theta, \phi)$

任意の関数は球面調和関数で展開できる:

$$R(\theta, \phi) = R_0 \left( 1 + \sum_{\lambda, \mu} \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}^*(\theta, \phi) \right)$$

$\alpha_{\lambda\mu}$ : 変形パラメーター

# 変形パラメーター



$$R(\theta, \phi) = R_0 \left( 1 + \sum_{\lambda, \mu} \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}^*(\theta, \phi) \right)$$

最も重要な変形は  $\lambda = 2$   
(四重極変形)

$\lambda = 0$ :  $R_0$  に吸収

$\lambda = 1$ : 重心の位置を変えるだけ

(原点を適当にとれば

$\alpha_{1\mu} = 0$  とすることができる)

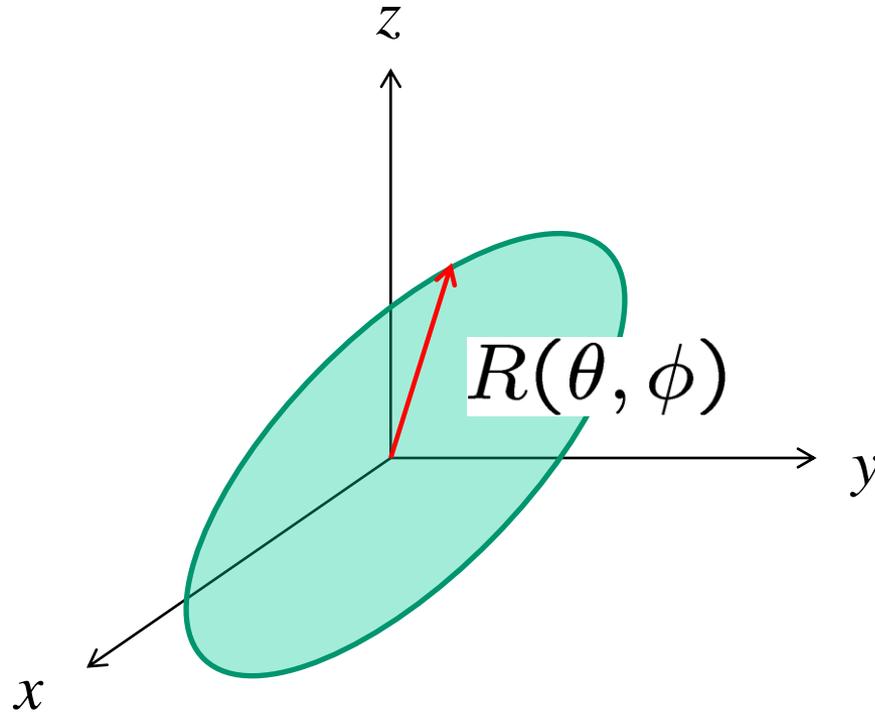
$\lambda = 2$ : 楕円体型の変形

以下、 $\lambda = 2$  に話を限定

$$R(\theta, \phi) = R_0 \left( 1 + \sum_{\mu} \alpha_{2\mu} Y_{2\mu}^*(\theta, \phi) \right)$$

以下、 $\lambda = 2$  に話を限定  $R(\theta, \phi) = R_0 \left( 1 + \sum_{\mu} \alpha_{2\mu} Y_{2\mu}^*(\theta, \phi) \right)$

\*この時点で5個の独立なパラメーター： $\alpha_{22} \sim \alpha_{2-2}$



軸をうまく取りなおすことによってより表現が簡単になる

四重極変形の代表的な形はキウイ・フルーツ型



横からみた形



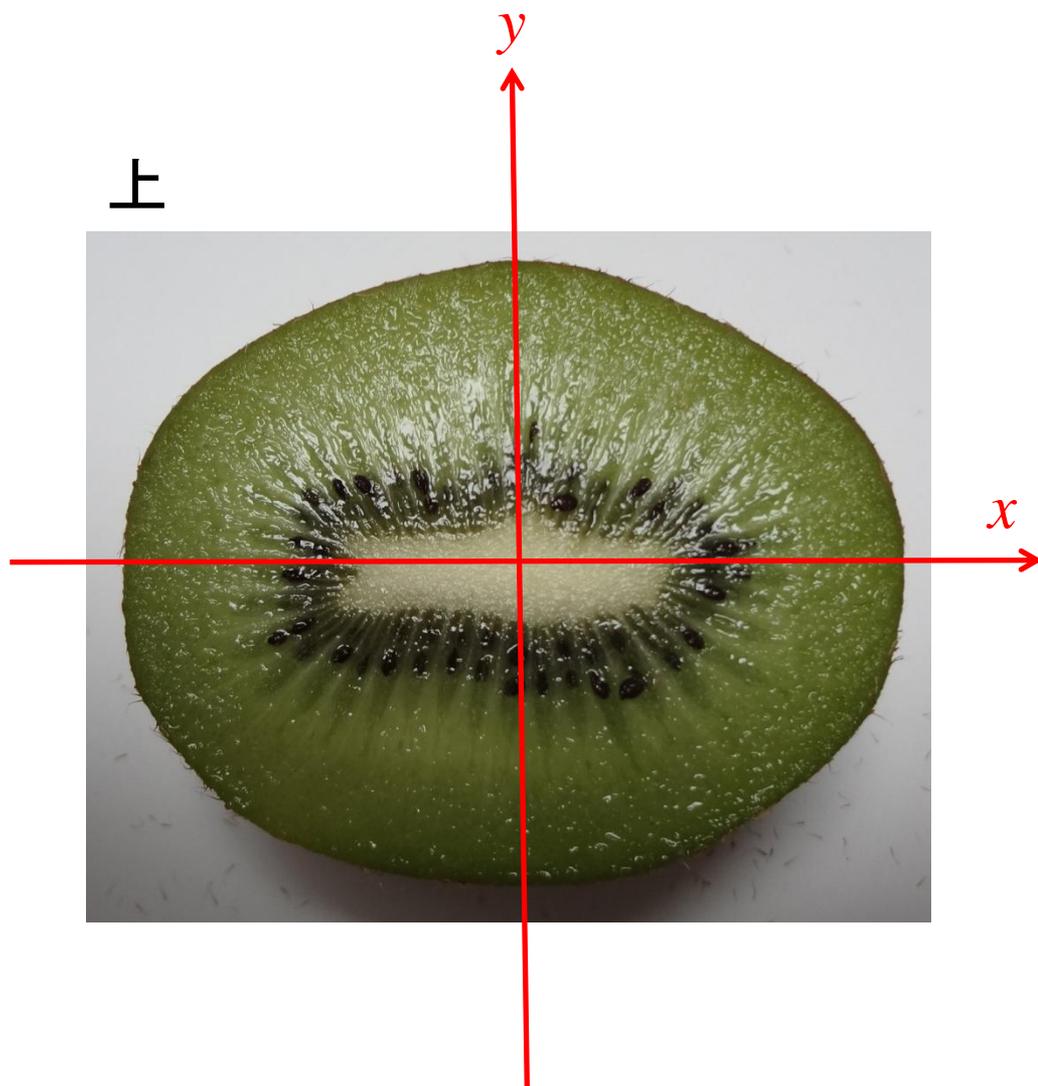
上からみた形



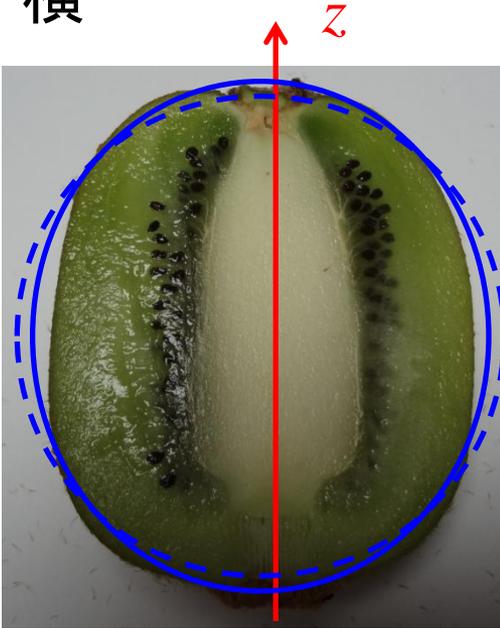
横



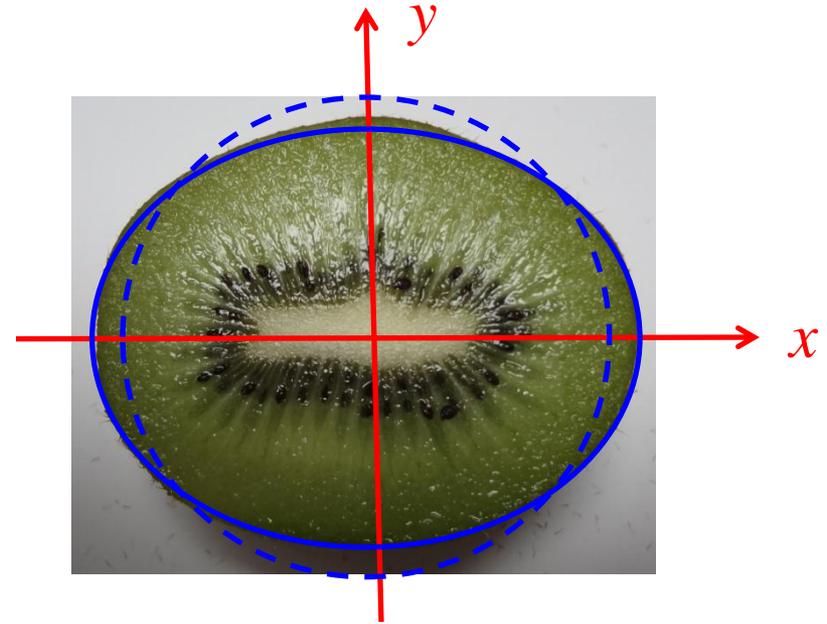
上



横



上



この形は2つのパラメーター(のみ)で記述できる

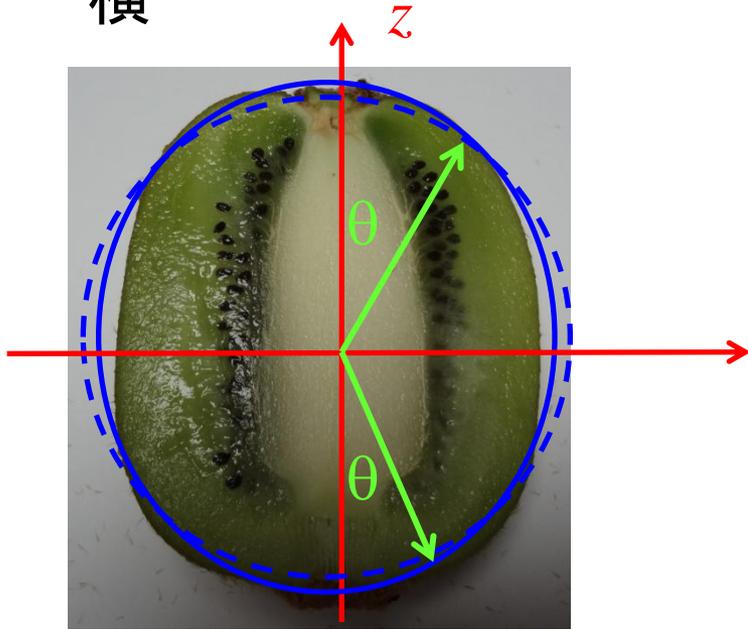
✓「横」から見た時にどのくらい円からずれているか

✓「上」から見た時にどのくらい円からずれているか

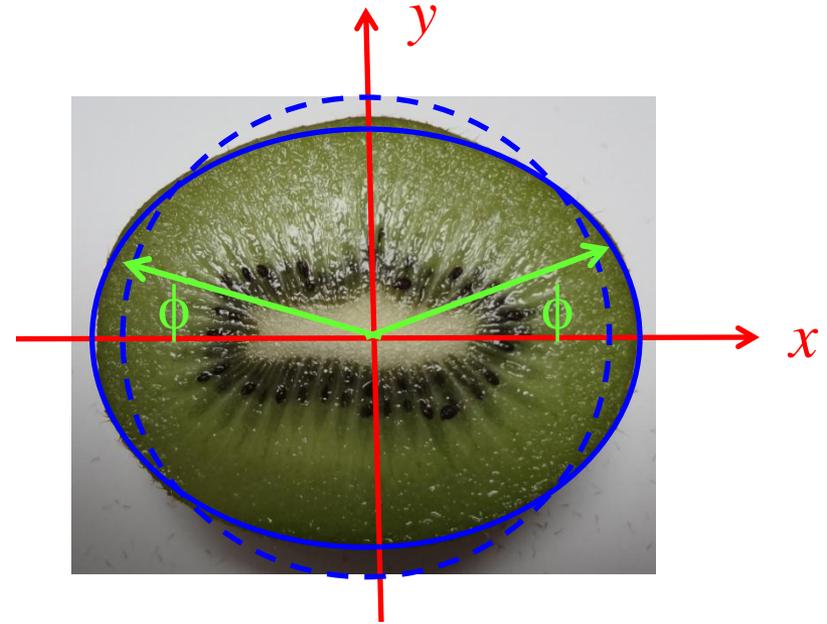
数学的には

$$R(\theta, \phi) = R_0 [1 + a_{20}Y_{20}(\theta) + a_{22}(Y_{22}(\theta, \phi) + Y_{2-2}(\theta, \phi))]$$

横



上



数学的には

$$R(\theta, \phi) = R_0 [1 + a_{20}Y_{20}(\theta) + a_{22}(Y_{22}(\theta, \phi) + Y_{2-2}(\theta, \phi))]$$

このようにとると、

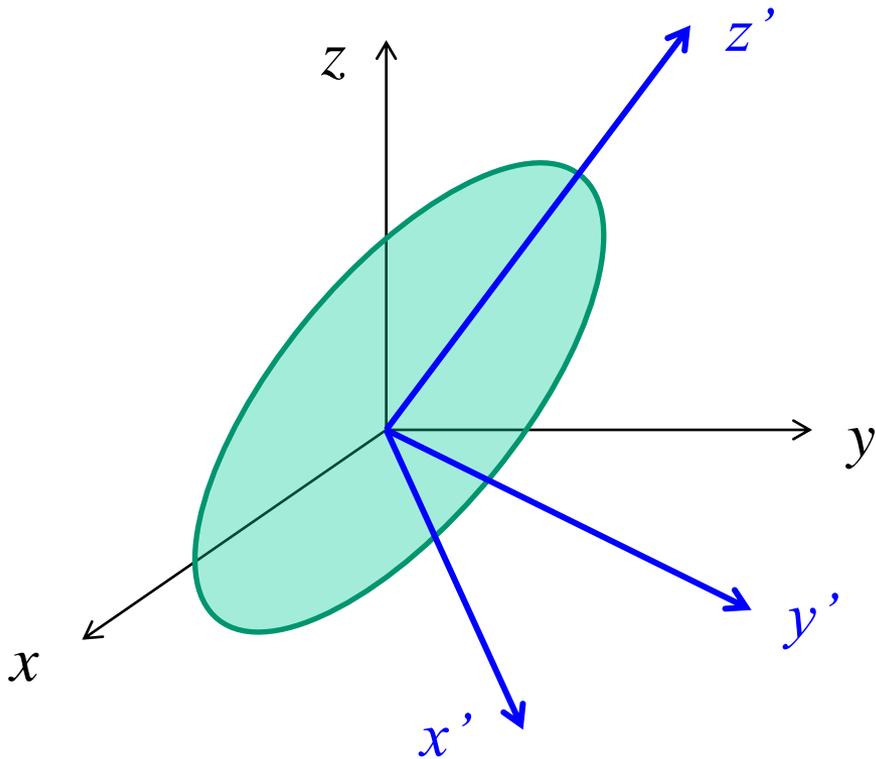
$$R(\theta, \phi) = R(\pi - \theta, \phi)$$

$$R(\theta, \phi) = R(\theta, \pi - \phi)$$

$$R(\theta, \phi) = R_0 \left( 1 + \sum_{\mu} \alpha_{2\mu} Y_{2\mu}^*(\theta, \phi) \right)$$

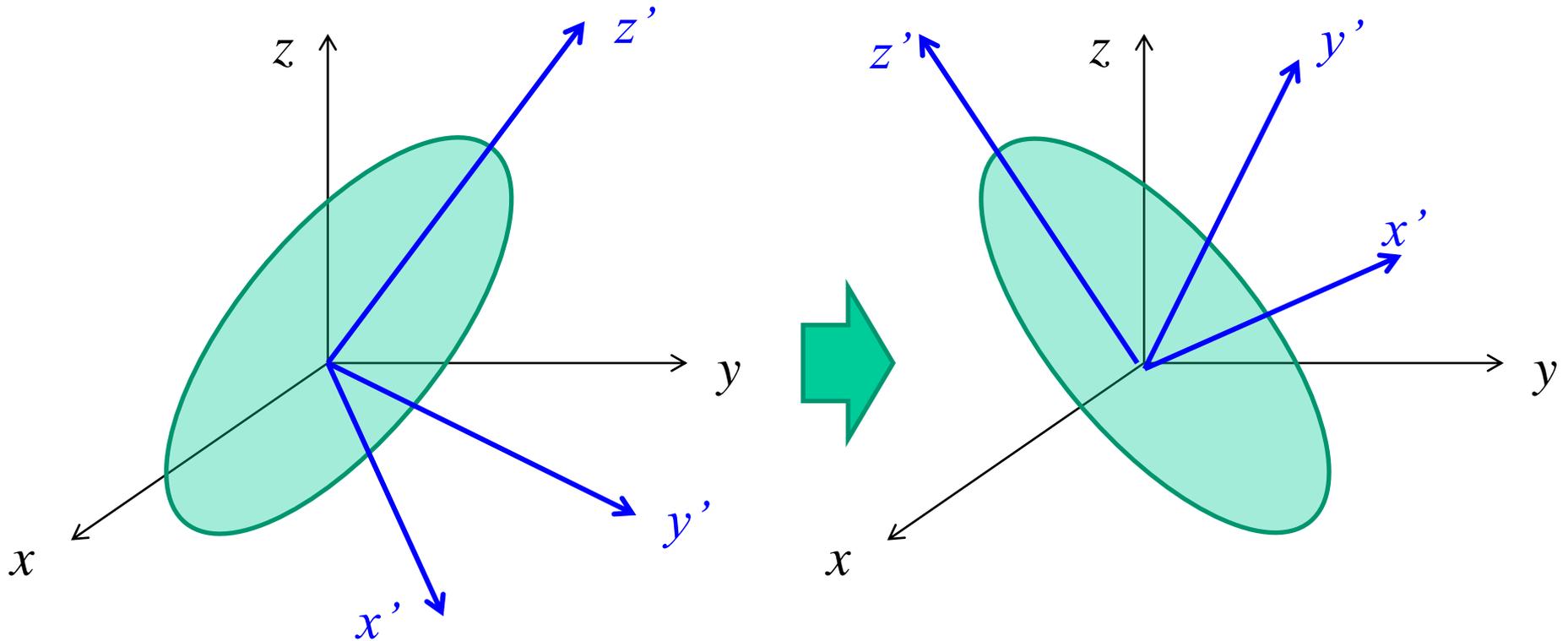
5個の独立なパラメーター:

$$\alpha_{22} \sim \alpha_{2-2}$$



原子核の形状を表すパラメーター2つ:  $a_{20}, a_{22}$   
+取りなおした軸の方向を表す角度3つ(オイラー角)

原子核が回転すると軸も一緒に回転(物体固定系)  
物体固定系から見ると、半径の式  $R(\theta, \phi)$  はいつも同じ



原子核の形状を表すパラメーター2つ:  $a_{20}$ ,  $a_{22}$   
+取りなおした軸の方向を表す角度3つ(オイラー角)

$$R(\theta, \phi) = R_0 [1 + a_{20}Y_{20}(\theta) + a_{22}(Y_{22}(\theta, \phi) + Y_{2-2}(\theta, \phi))]$$

$$a_{20} \equiv \beta \cos \gamma, \quad a_{22} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \beta \sin \gamma$$

とよくおく。

$\gamma = 0$  のとき:  $a_{20} = \beta, a_{22} = 0$

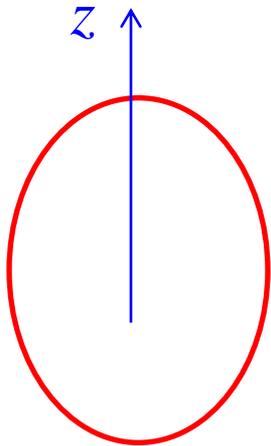


$$R(\theta, \phi) = R_0 [1 + \beta Y_{20}(\theta)]$$

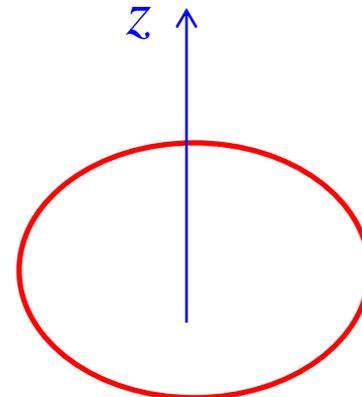
( $\gamma$  は軸対称性からのずれを表す)



半径は  $\phi$  によらない:  $z$  軸まわりの軸対称 (回転楕円体)

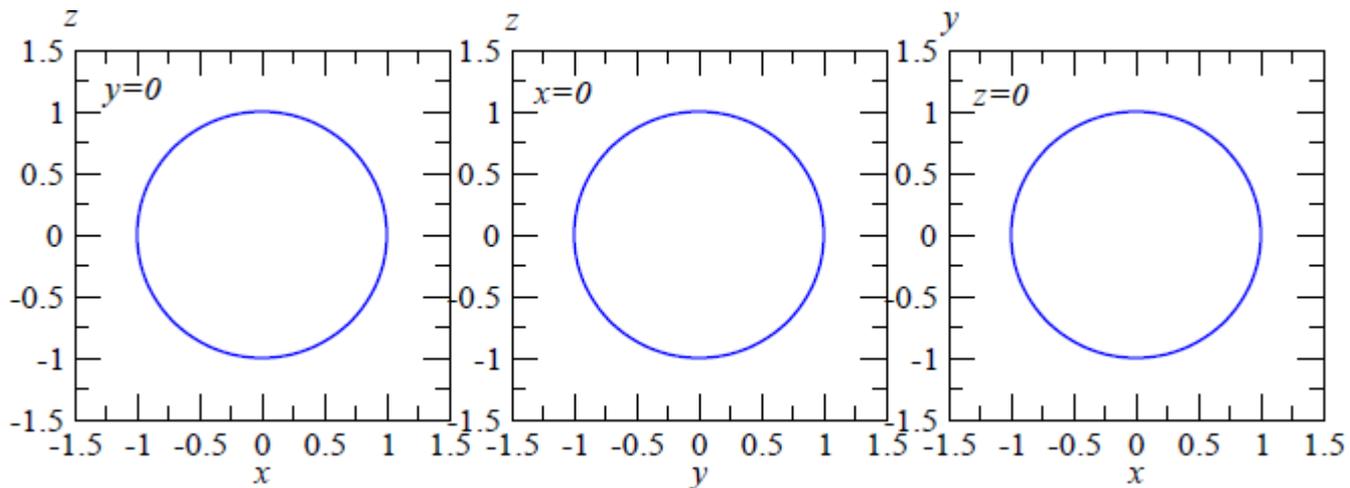


$\beta > 0$   
プロレート変形



$\beta < 0$   
オブレート変形

$\beta = 0$   
(球形)

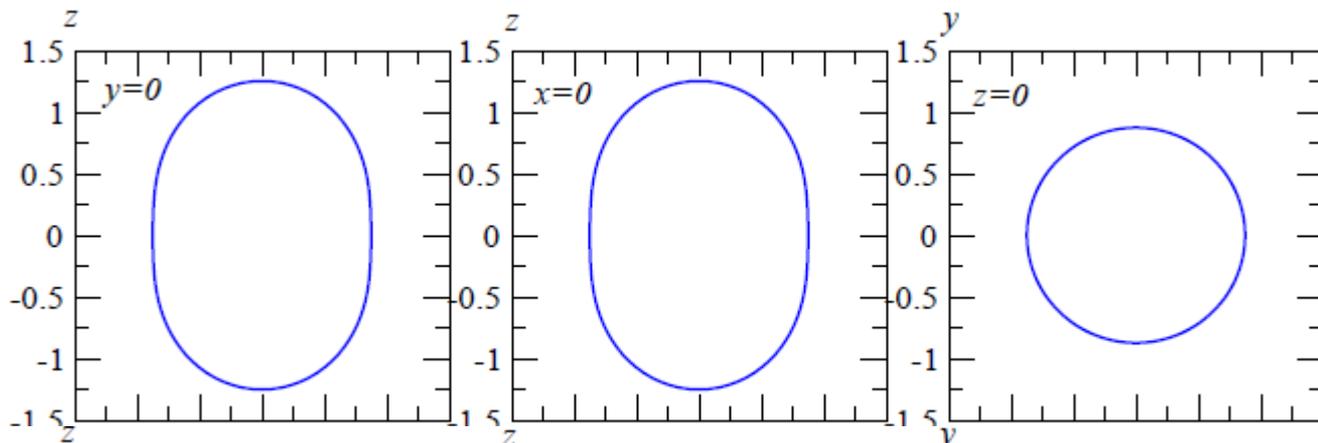


$y = 0$  で  
切った平面

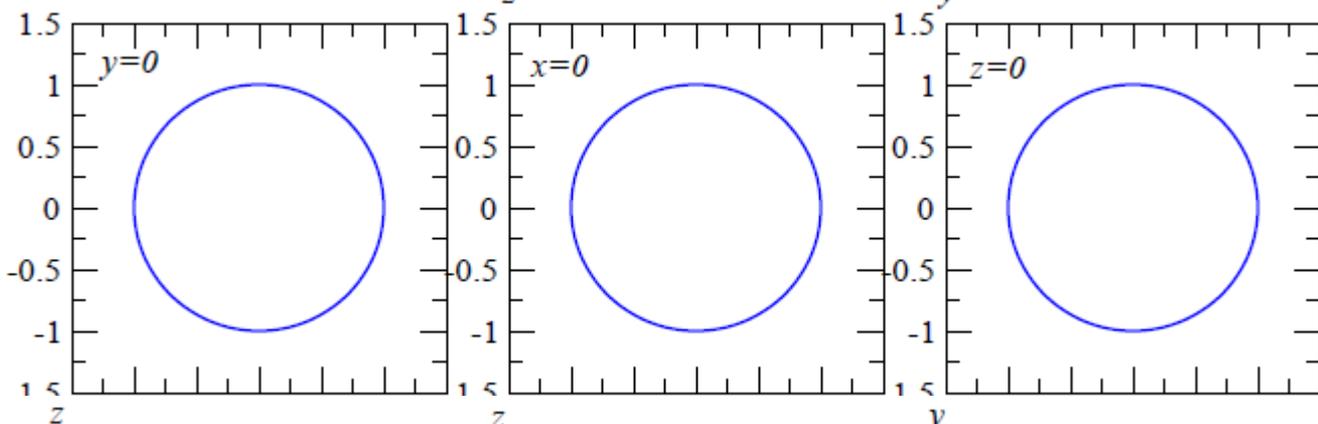
$x = 0$  で  
切った平面

$z = 0$  で  
切った平面

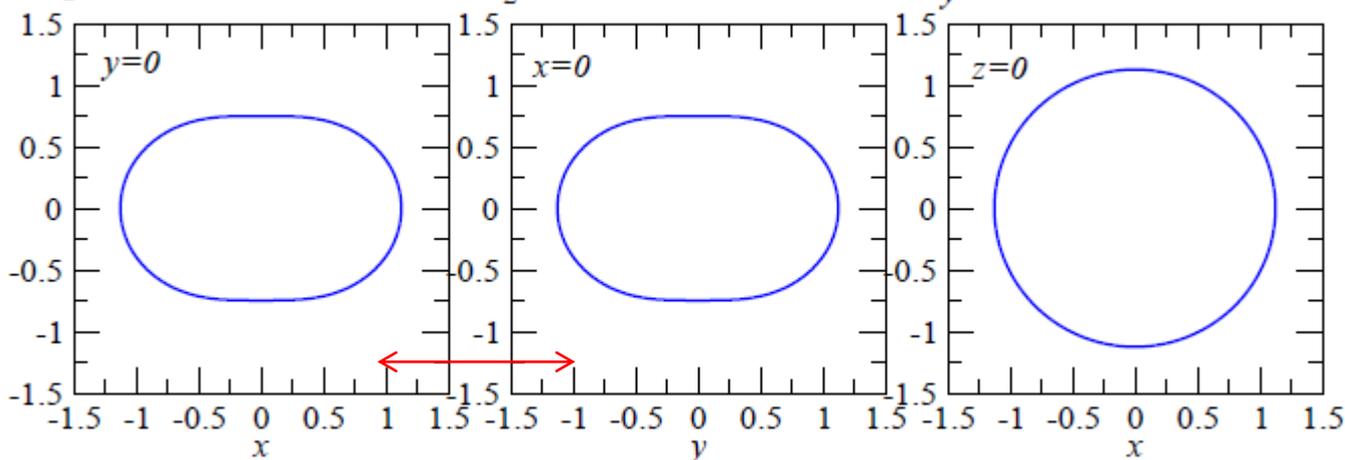
$\beta = 0.4$   
 $\gamma = 0$



$\beta = 0$   
(球形)



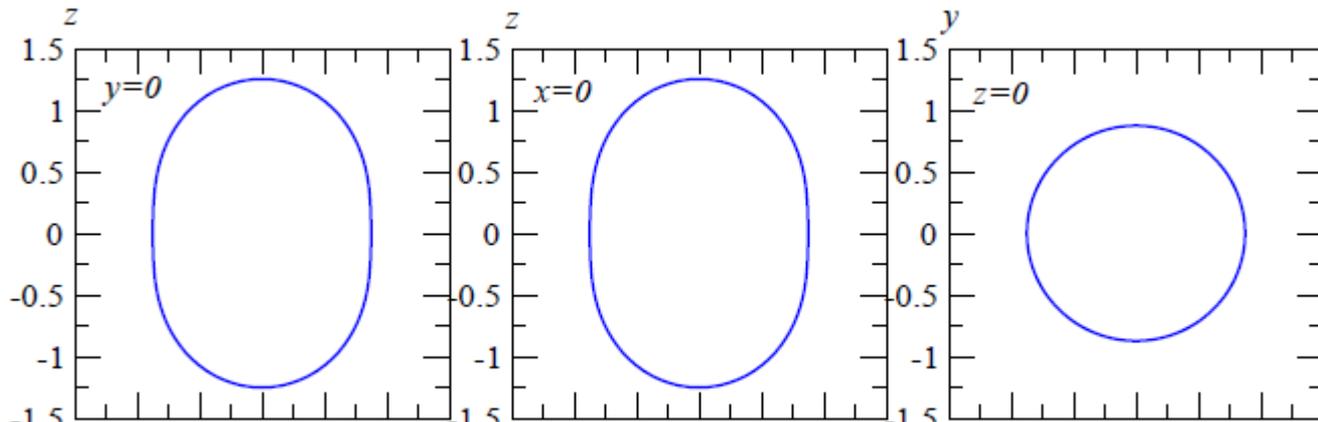
$\beta = -0.4$   
 $\gamma = 0$



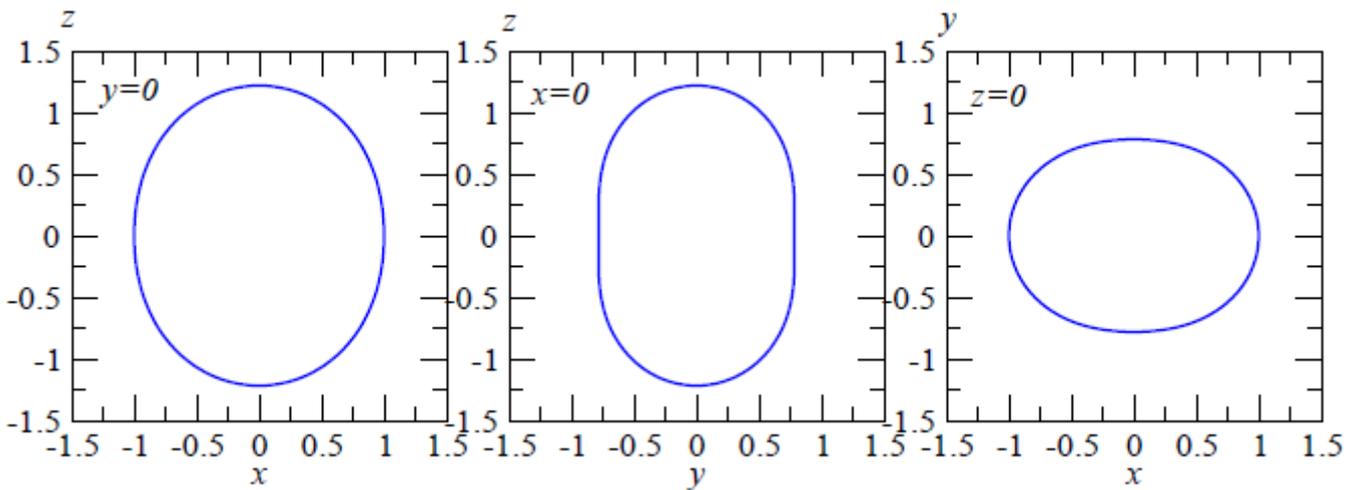
同じ

円 (軸対称)

$$\beta = 0.4$$
$$\gamma = 0$$



$$\beta = 0.4$$
$$\gamma = \pi/6$$



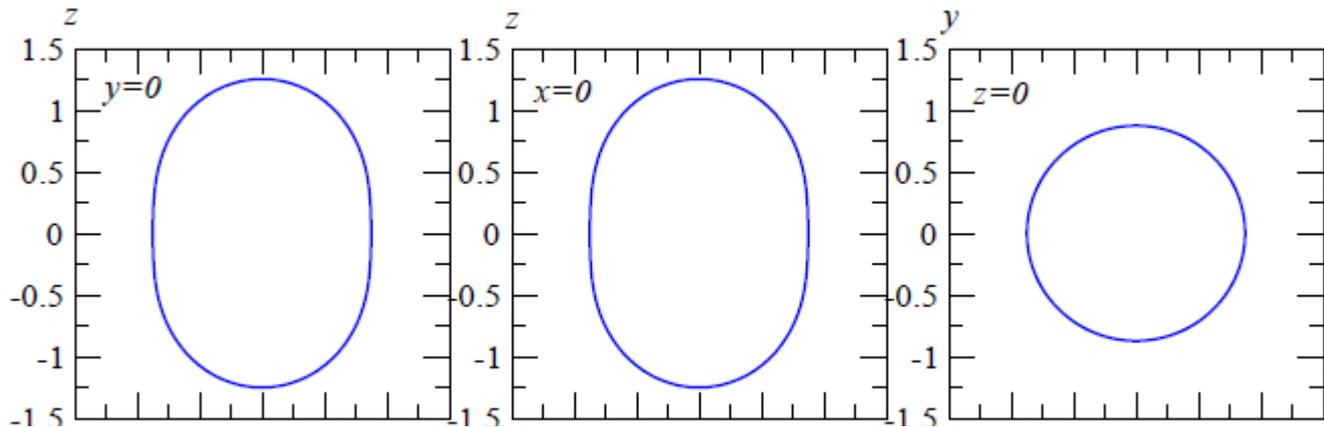
三軸非対称  
(どの平面で  
切っても円に  
ならない)



$$\beta = 0.4$$

$$\gamma = 0$$

(z 軸周りの軸対称プロレート変形)

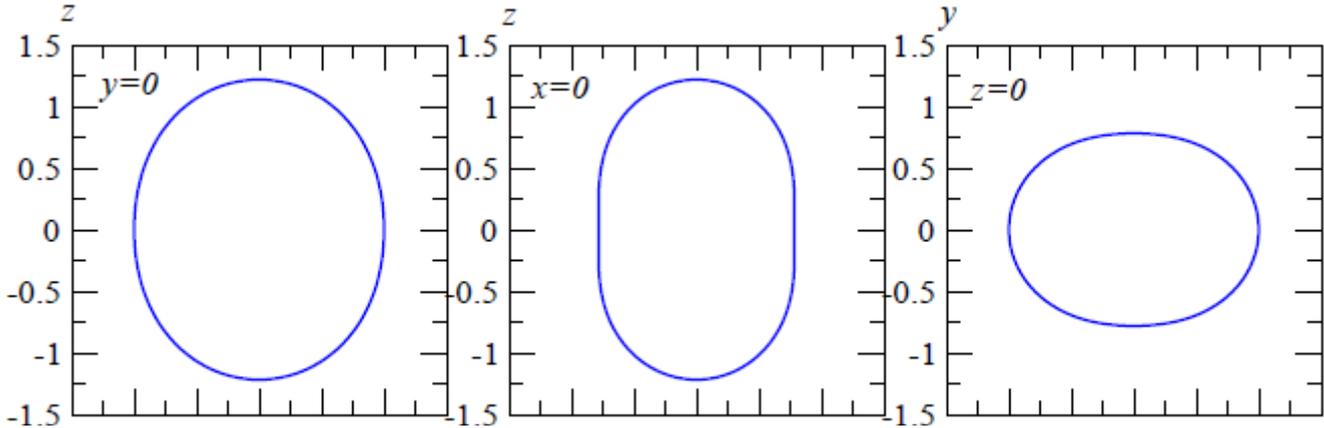


z 軸方向に伸びている

$$\beta = 0.4$$

$$\gamma = \pi/6$$

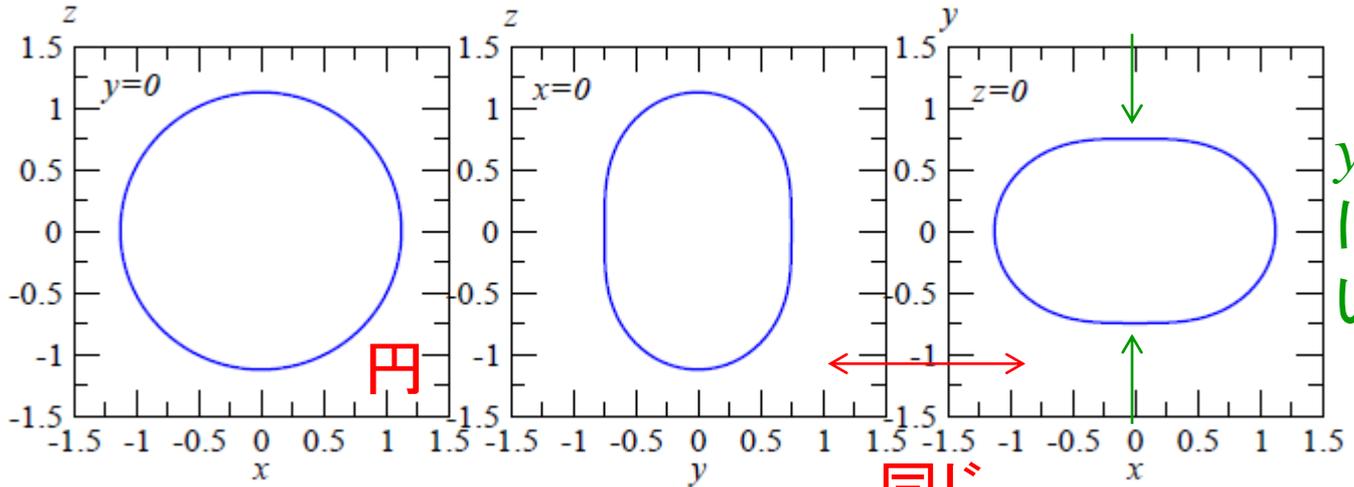
(三軸非対称)



$$\beta = 0.4$$

$$\gamma = \pi/3$$

(y 軸周りの軸対称オブレート変形)



y 軸方向に縮んでいる

同じ

$\beta \geq 0, \quad 0 \leq \gamma \leq \pi/3$  で全ての四重極変形を表現できる

## ( $\beta, \gamma$ ) 平面

