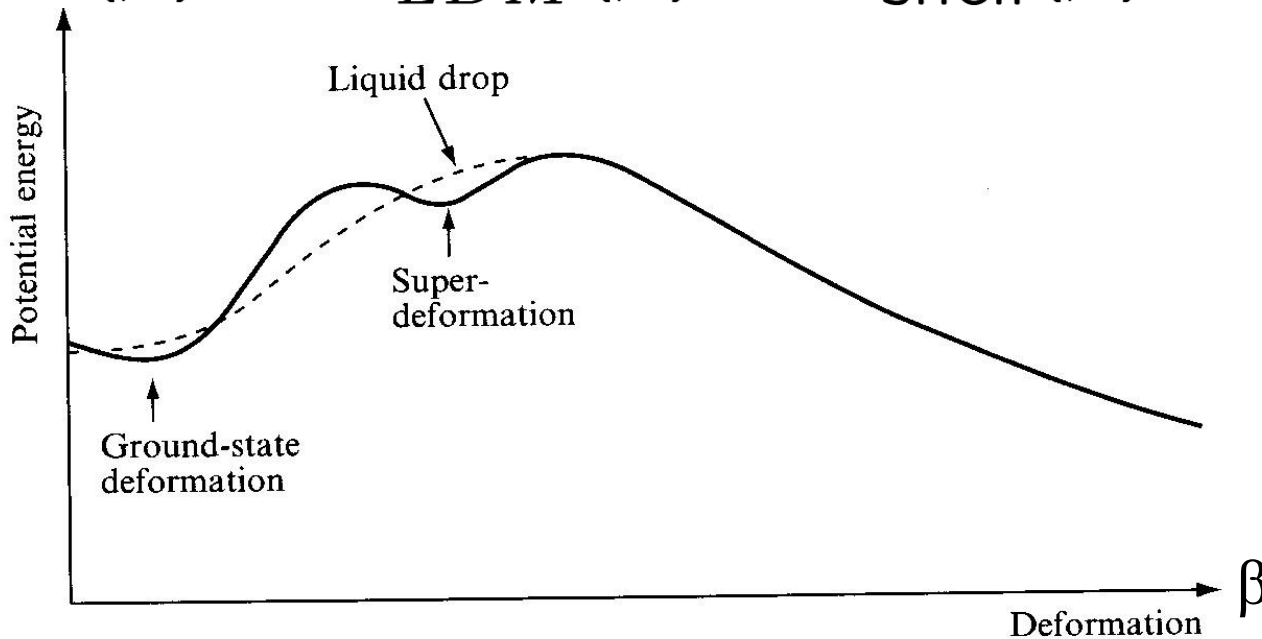


# 原子核の変形

原子核の変形に伴うエネルギーの変化

$$E(\beta) = E_{LDM}(\beta) + E_{shell}(\beta)$$



液滴模型  
殻補正



必ず球形

変形状態が基底状態になる場合あり

\* 対称性の自発的破れ

# 原子核の変形

## $^{154}\text{Sm}$ の励起スペクトル

0.903 —————  $8^+$   
(MeV)

0.544 —————  $6^+$

0.267 —————  $4^+$

0.082 —————  $2^+$

0 —————  $0^+$

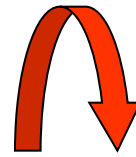
$^{154}\text{Sm}$

$$E_I \sim \frac{I(I+1)\hbar^2}{2\mathcal{J}}$$

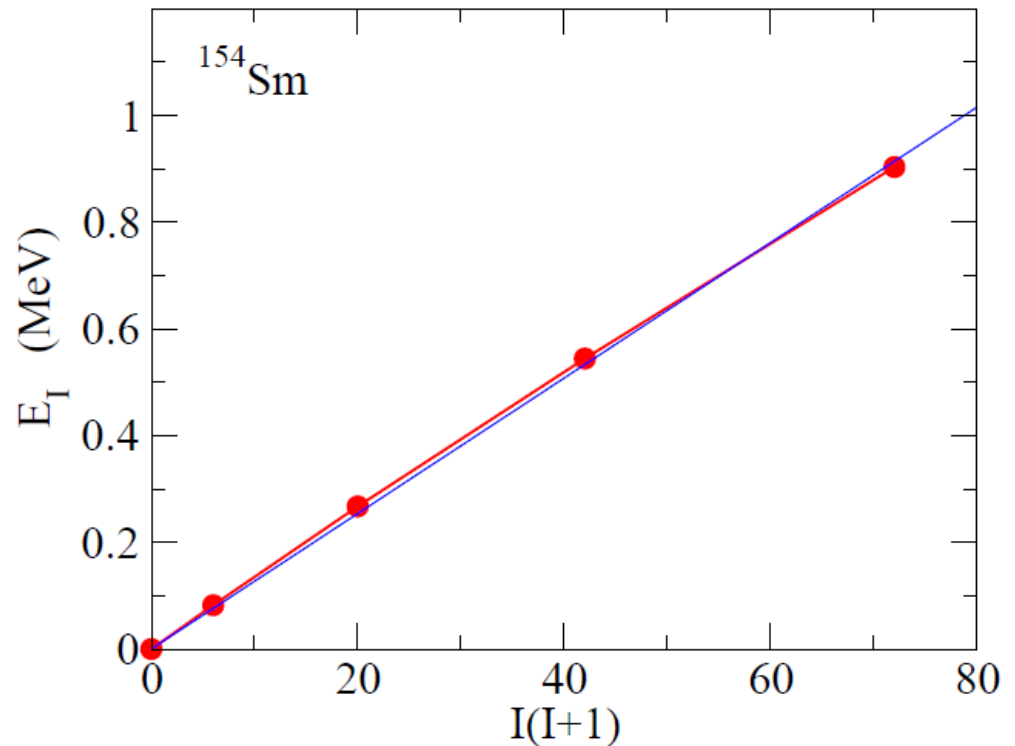
Cf. 剛体の回転エネルギー (古典力学)

$$E = \frac{1}{2} \mathcal{J} \omega^2 = \frac{I^2}{2\mathcal{J}}$$

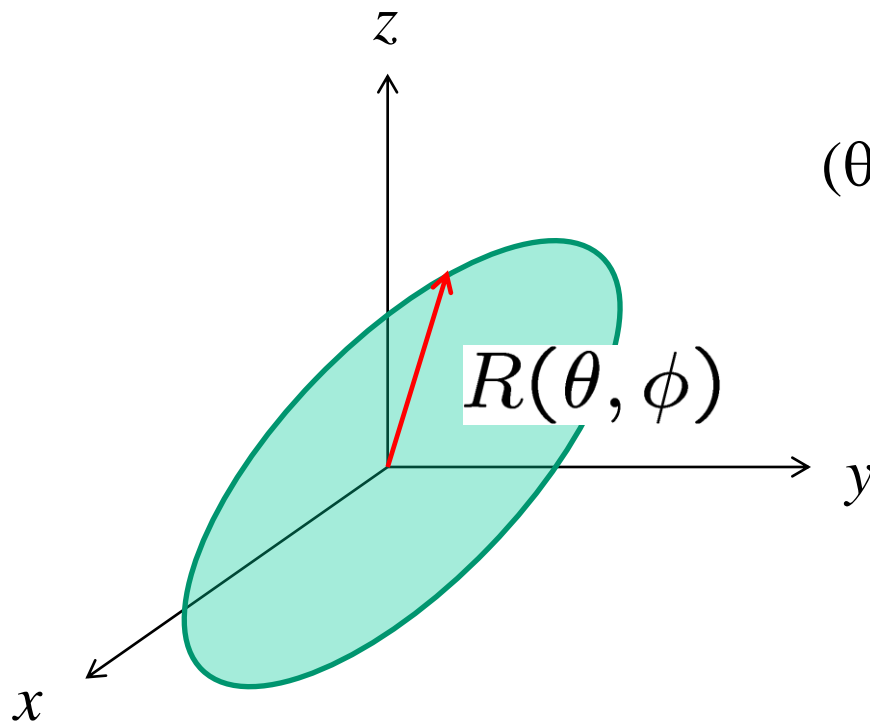
$$(I = \mathcal{J} \omega, \omega = \dot{\theta})$$



$^{154}\text{Sm}$  は変形している



# 変形パラメーター



$(\theta, \phi)$  方向の半径:  $R(\theta, \phi)$

任意の関数は球面調和関数で展開できる:

$$R(\theta, \phi) = R_0 \left( 1 + \sum_{\lambda, \mu} \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}^*(\theta, \phi) \right)$$

$\alpha_{\lambda\mu}$ : 変形パラメーター

$$R(\theta, \phi) = R_0 [1 + a_{20}Y_{20}(\theta) + a_{22}(Y_{22}(\theta, \phi) + Y_{2-2}(\theta, \phi))]$$

$$a_{20} \equiv \beta \cos \gamma, \quad a_{22} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \beta \sin \gamma$$

とよくおく。

$\gamma = 0$  のとき:  $a_{20} = \beta, a_{22} = 0$

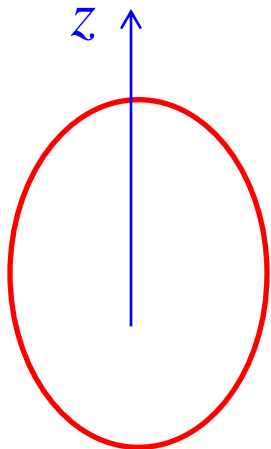


$$R(\theta, \phi) = R_0 [1 + \beta Y_{20}(\theta)]$$

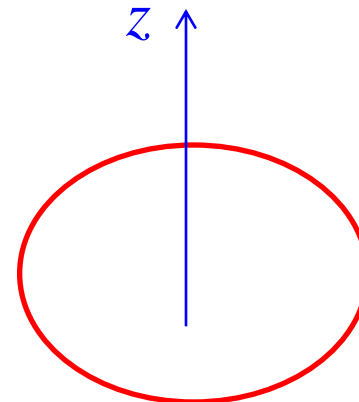
( $\gamma$  は軸対称性からのずれを表す)



半径は  $\phi$  によらない:  $z$  軸まわりの軸対称 (回転楕円体)



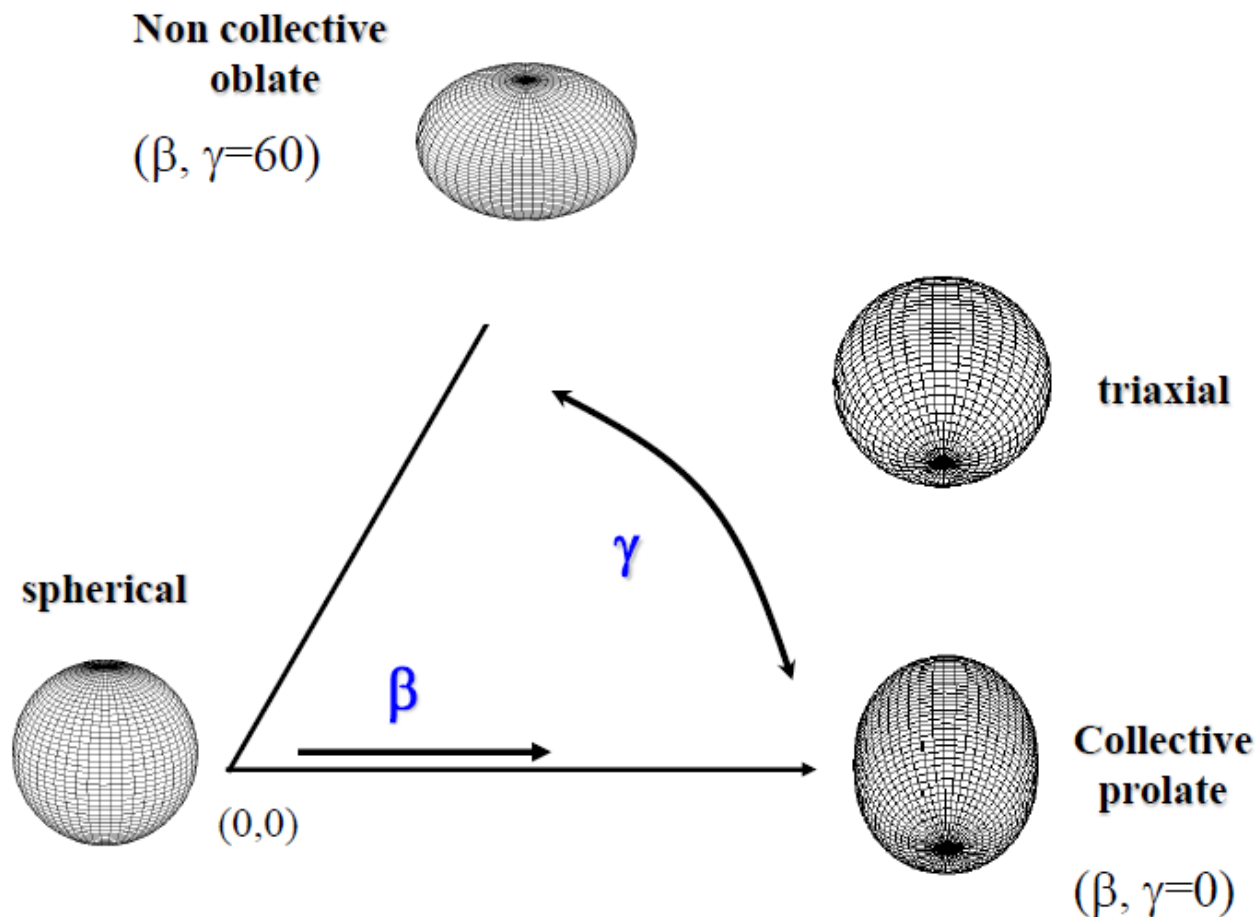
$\beta > 0$   
プロレート変形



$\beta < 0$   
オブレート変形

$\beta \geq 0, \quad 0 \leq \gamma \leq \pi/3$  で全ての四重極変形を表現できる

## ( $\beta, \gamma$ ) 平面



# 変形ポテンシャル中の一粒子運動

$$V(r) \sim \int v(r, r') \rho(r') dr' \sim -g\rho(r) \quad \text{if } v(r, r') = -g\delta(r - r')$$

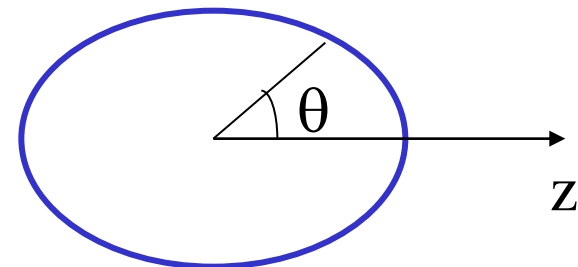
密度分布が変形すると、平均場ポテンシャルも同じように変形

(note) 軸対称な回転楕円体の半径:  $R(\theta) = R_0(1 + \beta_2 Y_{20}(\theta))$

Woods-Saxon ポテンシャル

$$V(r) = -V_0/[1 + \exp((r - R_0)/a)]$$

の半径  $R_0$  を  $R(\theta)$  に変えると



変形 Woods-Saxon ポテンシャル

$$\begin{aligned} V(r, \theta) &= -V_0/[1 + \exp((r - R_0 - R_0\beta_2 Y_{20}(\theta))/a)] \\ &\sim V_0(r) - \beta_2 R_0 \frac{dV_0}{dr} Y_{20}(\theta) + \dots \end{aligned}$$

# 変形ポテンシャル中の一粒子運動

## 変形Woods-Saxon ポテンシャル

$$\begin{aligned} V(r, \theta) &= -V_0/[1 + \exp((r - R_0 - R_0\beta_2 Y_{20}(\theta))/a)] \\ &\sim V_0(r) - \beta_2 R_0 \frac{dV_0}{dr} Y_{20}(\theta) + \dots \end{aligned}$$

ポテンシャルが回転対称性を持たない

————→ 角運動量がいい量子数にならない  
(保存しない)

■  $Y_{20}$  の項の効果を1次の摂動論を用いて考察してみよう

## (復習) 1次の摂動論

$$H = H_0 + H_1$$

$H_0$  の固有値、固有状態がわかっているとする:

$$H_0 |\phi_n^{(0)}\rangle = E_n^{(0)} |\phi_n^{(0)}\rangle$$

$H_1$  があることによって、固有値、固有関数は次のように変化する:

$$E_n = E_n^{(0)} + \langle \phi_n^{(0)} | H_1 | \phi_n^{(0)} \rangle + \dots$$

$$|\phi_n\rangle = |\phi_n^{(0)}\rangle + \sum_{m \neq n} \frac{\langle \phi_m^{(0)} | H_1 | \phi_n^{(0)} \rangle}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} |\phi_m\rangle + \dots$$



# 変形ポテンシャル中の一粒子運動

## 変形Woods-Saxon ポテンシャル

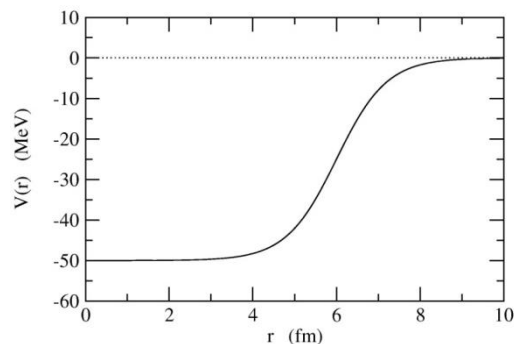
$$V(r, \theta) \sim V_0(r) - \beta_2 R_0 \frac{dV_0}{dr} Y_{20}(\theta) + \dots$$

■  $Y_{20}$  の項の効果をも1次の摂動論を用いて考察してみよう

$\beta=0$  (球形ポテンシャル) の時の固有関数:  $\psi_{nlK}(r) = R_{nl}(r) Y_{lK}(\hat{r})$   
固有値:  $E_{nl}$  ( $K$  には依存しない)

エネルギーの変化分:

$$\begin{aligned} E_{nl} &\rightarrow E_{nl} + \langle \psi_{nlK} | \Delta V | \psi_{nlK} \rangle \\ &= E_{nl} - \beta_2 R_0 \underbrace{\left[ \int_0^\infty r^2 dr \frac{dV_0}{dr} (R_{nl}(r))^2 \right]}_{\text{正の量}} \cdot \underbrace{\langle Y_{lK} | Y_{20} | Y_{lK} \rangle}_{\text{負の量}} \\ &= E_{nl} - \beta_2 R_0 \left[ \int_0^\infty r^2 dr \frac{dV_0}{dr} (R_{nl}(r))^2 \right] \cdot \underbrace{\langle Y_{lK} | Y_{20} | Y_{lK} \rangle}_{-(3K^2 - l(l+1))} \end{aligned}$$



# 変形ポテンシャル中の一粒子運動

## 変形Woods-Saxon ポテンシャル

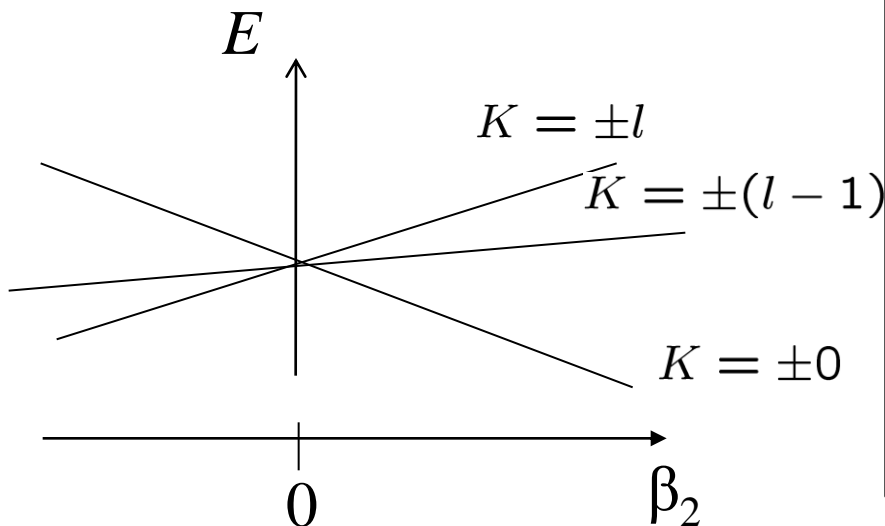
$$\psi_{nlK}(r) = R_{nl}(r)Y_{lK}(\hat{r})$$

$$V(r, \theta) \sim V_0(r) - \beta_2 R_0 \frac{dV_0}{dr} Y_{20}(\theta) + \dots$$

■  $Y_{20}$  の項の効果をもつて1次の摂動論を用いて考察してみよう

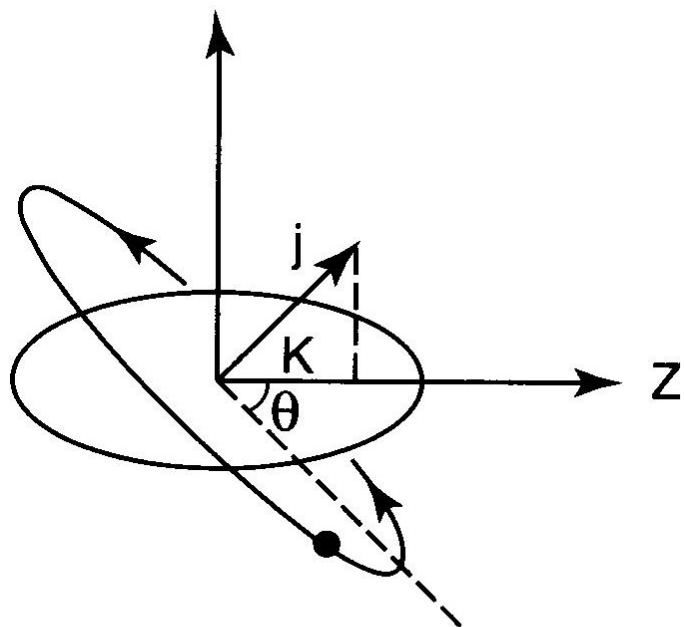
エネルギーの変化分:

$$E_{nl} \rightarrow E_{nl} + \alpha_{nl} \beta_2 (3K^2 - l(l+1)) \quad (\alpha_{nl} > 0)$$

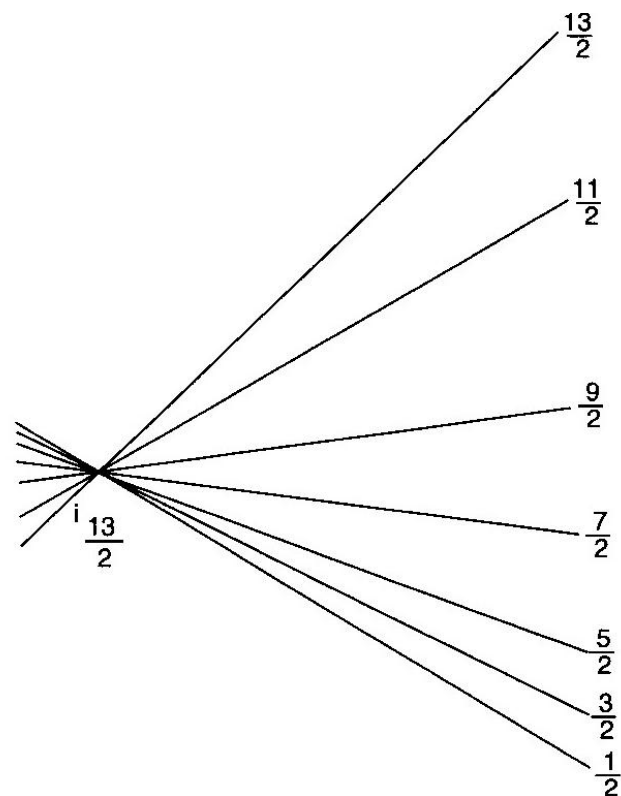


- $K$  ごとにエネルギー変化が異なる (縮退が解ける)
- $\beta_2 > 0$  では  $K$  が小さいほどエネルギーが低くなる。
- $\beta_2 < 0$  ではその逆
- $K$  と  $-K$  は縮退する

## 幾何学的解釈



$$\sin \theta \sim K / j$$



- $K$  は角運動量ベクトルの  $z$  軸への射影
- 核子の軌道は角運動量ベクトルに垂直な平面内
- プロレート変形の場合、小さな  $K$  ほど長軸に沿って運動。
- 従ってより引力を感じてエネルギーが下がる。
- 大きな  $K$  は短軸に沿って運動し、エネルギーを損する。

## 変形ポテンシャル中の一粒子運動

$$V(r, \theta) \sim V_0(r) - \beta_2 R_0 \frac{dV_0}{dr} Y_{20}(\theta) + \dots$$

■  $Y_{20}$  の項の効果を1次の摂動論を用いて考察してみよう

次に波動関数の変化分:  $|\phi_n\rangle = |\phi_n^{(0)}\rangle + \sum_{m \neq n} \frac{\langle \phi_m^{(0)} | H_1 | \phi_n^{(0)} \rangle}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} |\phi_m\rangle + \dots$

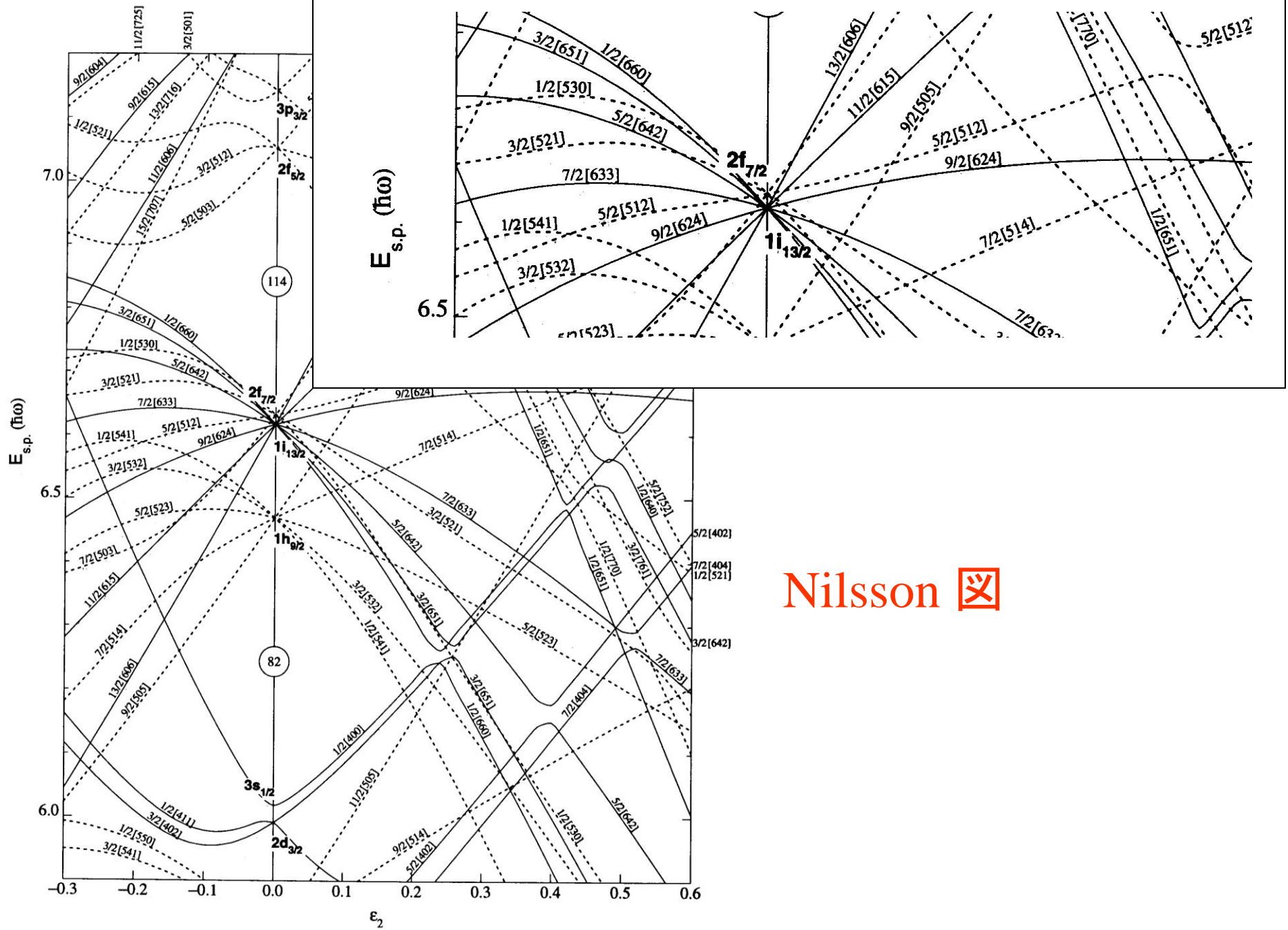
$\beta=0$  (球形ポテンシャル) の時の固有関数:  $\psi_{nlK}(r) = R_{nl}(r) Y_{lK}(\hat{r})$

$$\psi_{nlK} \rightarrow \psi_{nlK} + \sum_{n'l'K'} \frac{\langle \psi_{n'l'K'} | \Delta V | \psi_{nlK} \rangle}{E_{nl} - E_{n'l'}} \psi_{n'l'K'}$$



$\langle Y_{l'K'} | Y_{20} | Y_{lK} \rangle$  でつながる状態が波動関数に混ざる

- $l$  は保存せず、様々な  $l$  が波動関数に混ざる
- 軸対称変形 ( $Y_{20}$ ) の場合、 $K$  は変化しない ( $K' = K$ )、すなわち保存量
- $Y_{20}$  はパリティを変えない。従って、パリティも保存量。

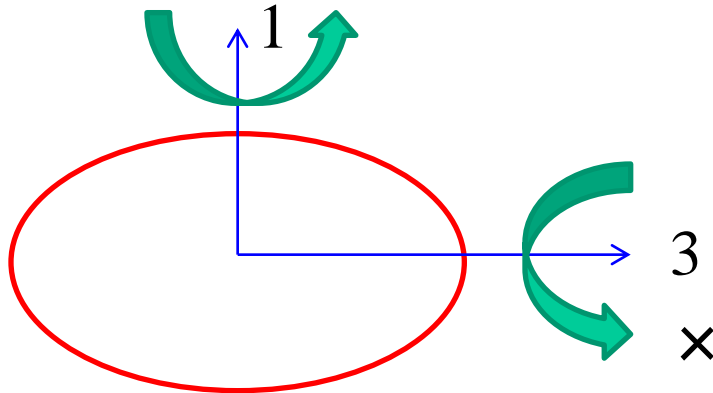


Nilsson

Figure 13. Nilsson diagram for protons,  $Z \geq 82$  ( $\epsilon_4 = \epsilon_2^2/6$ ).

# 軸対称変形核の回転運動

軸対称変形核を考える



量子力学的には対称  
軸周りの回転は存在  
しない

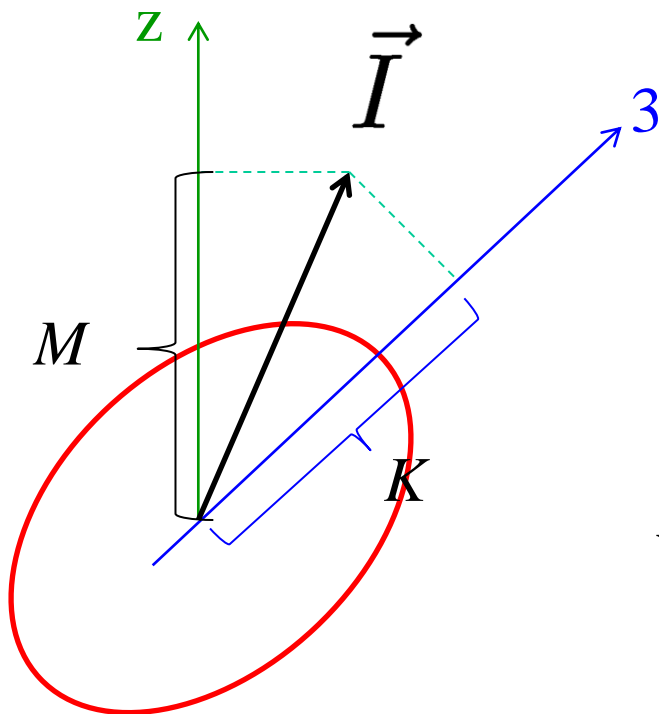
$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \mathcal{J} (\omega_1^2 + \omega_2^2) \rightarrow \frac{I_1^2 + I_2^2}{2\mathcal{J}}$$

(軸対称なので  
 $J_1 = J_2$ )

量子化

$$T_{\text{rot}} = \frac{I_1^2 + I_2^2}{2\mathcal{J}} = \frac{I^2 - I_3^2}{2\mathcal{J}}$$

固有状態は  $I, I_z (=M), I_3 (=K)$  の同時固有状態



$$|IMK\rangle = \sqrt{\frac{2I+1}{8\pi^2}} D_{MK}^I(\Omega)$$

Wigner の D 関数

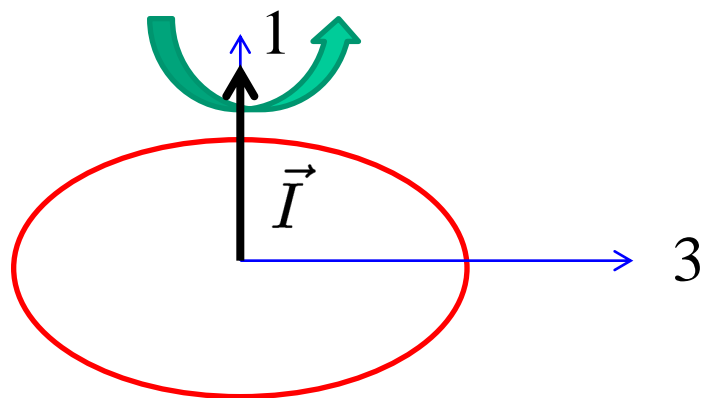
$$D_{MK}^I(\Omega) \equiv \langle IM | \hat{\mathcal{R}}(\Omega) | IK \rangle$$



回転の演算子

$K=0$  のとき  $D_{MK=0}^I(\Omega) = \sqrt{\frac{4\pi}{2I+1}} Y_{IM}^*$

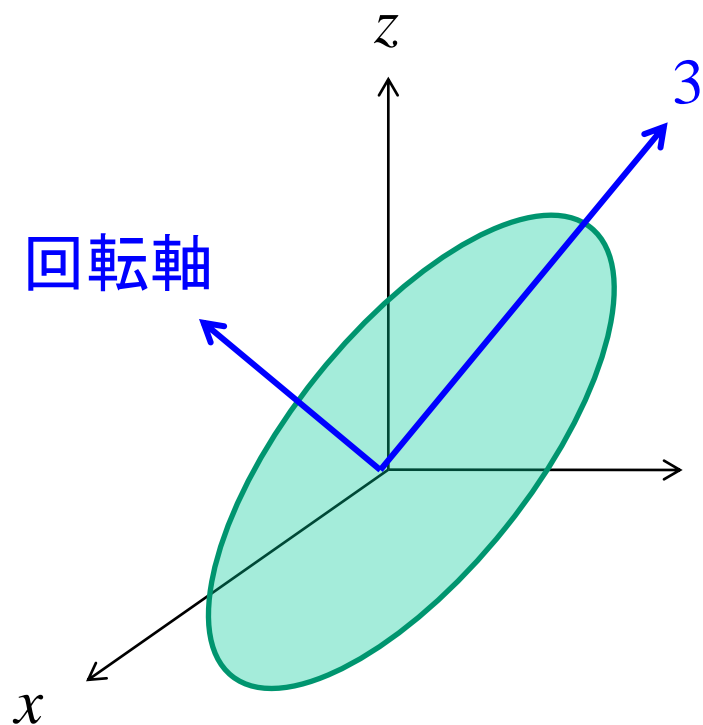
$K = 0$  のとき



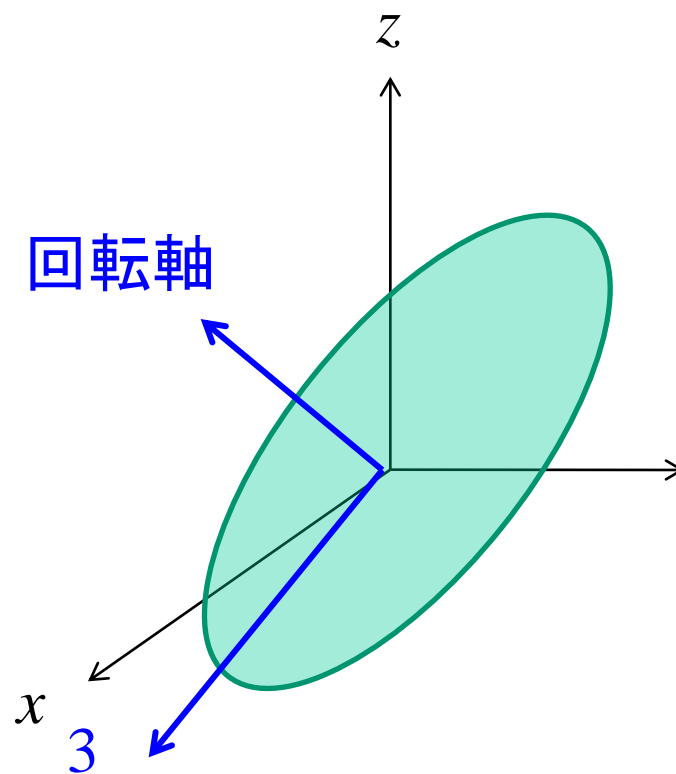
対称軸に垂直な軸のまわりの回転

$\pi$  回転に対して対称

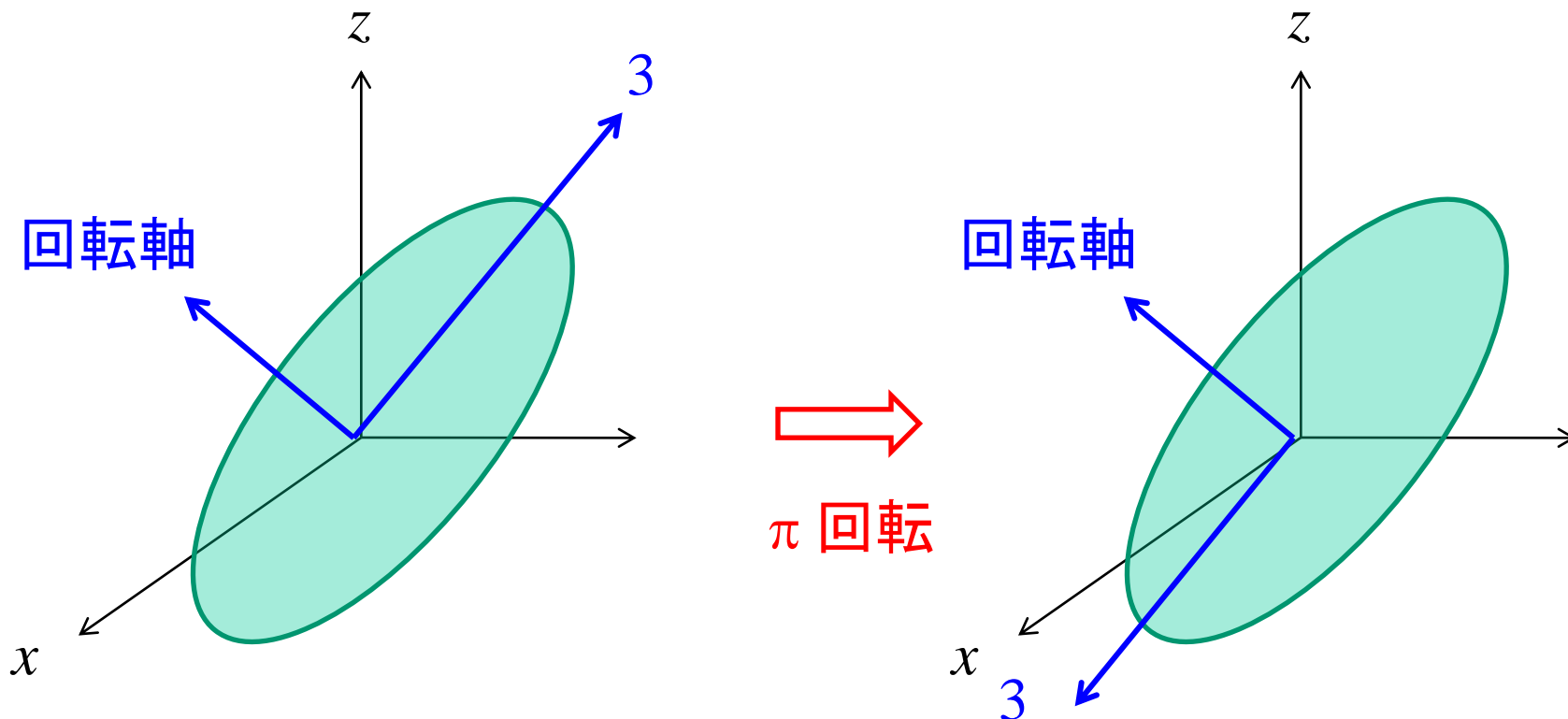
→ 偶数角運動量のみが現れる



→  
 $\pi$  回転





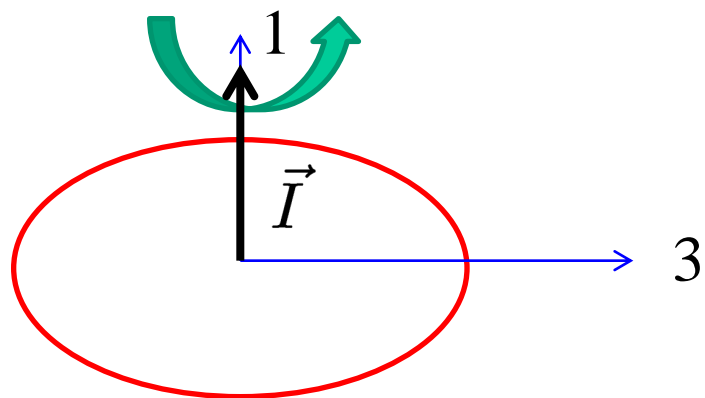


これは空間反転(パリティ変換)と同じ

$$Y_{IM}(\hat{r}) \rightarrow Y_{IM}(-\hat{r}) = (-1)^I Y_{IM}(\hat{r})$$

波動関数が変わらないためには  $I$  は偶数(偶パリティ状態の場合)

K = 0 のとき



対称軸に垂直な軸のまわりの回転

$\pi$  回転に対して対称

→ 偶数角運動量のみが現れる

0.903 ————— 8<sup>+</sup>  
(MeV)

0.544 ————— 6<sup>+</sup>

0.267 ————— 4<sup>+</sup>

0.082 ————— 2<sup>+</sup>

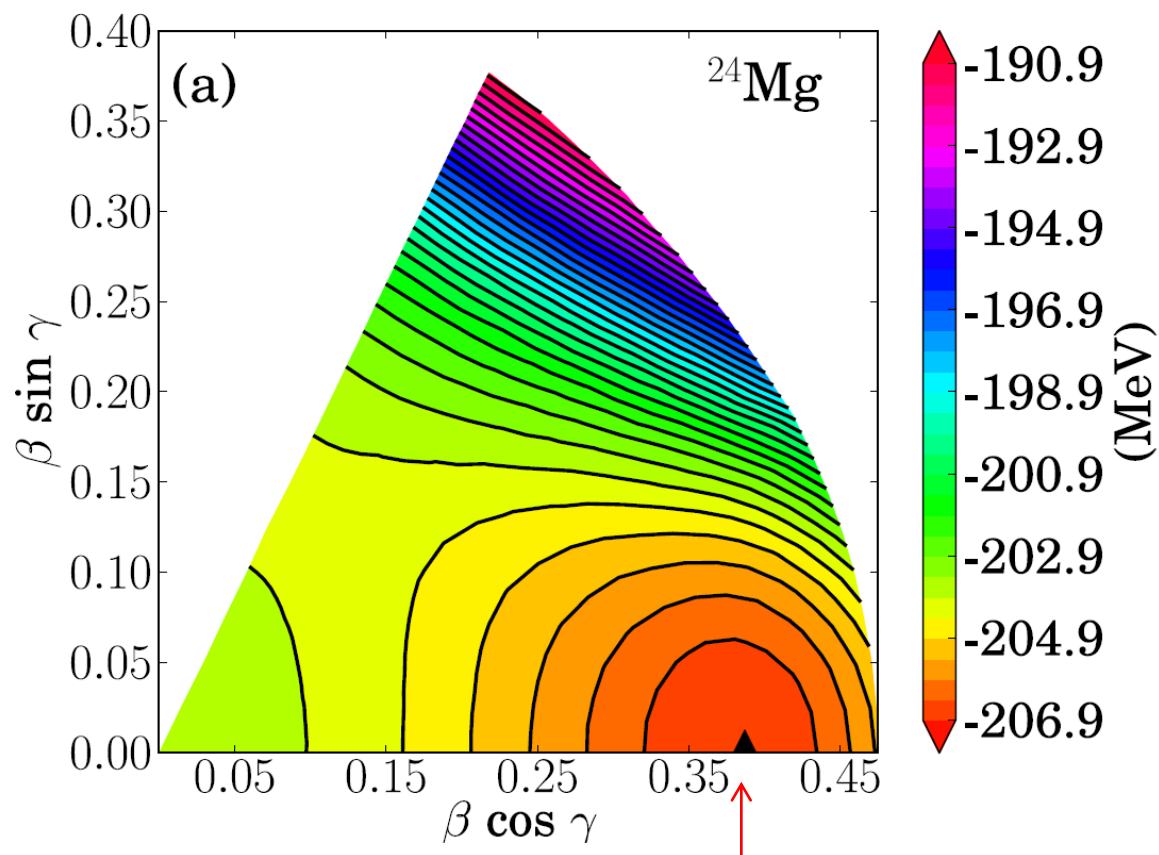
0 ————— 0<sup>+</sup>

<sup>154</sup>Sm

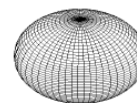
<sup>154</sup>Sm の励起スペクトル

# 軸対称変形核の振動運動

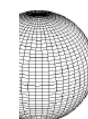
( $\beta, \gamma$ ) 平面におけるエネルギー一面の例



Non collective  
oblate  
( $\beta, \gamma=60$ )



triaxial



(0,0)

Collective  
prolate  
( $\beta, \gamma=0$ )



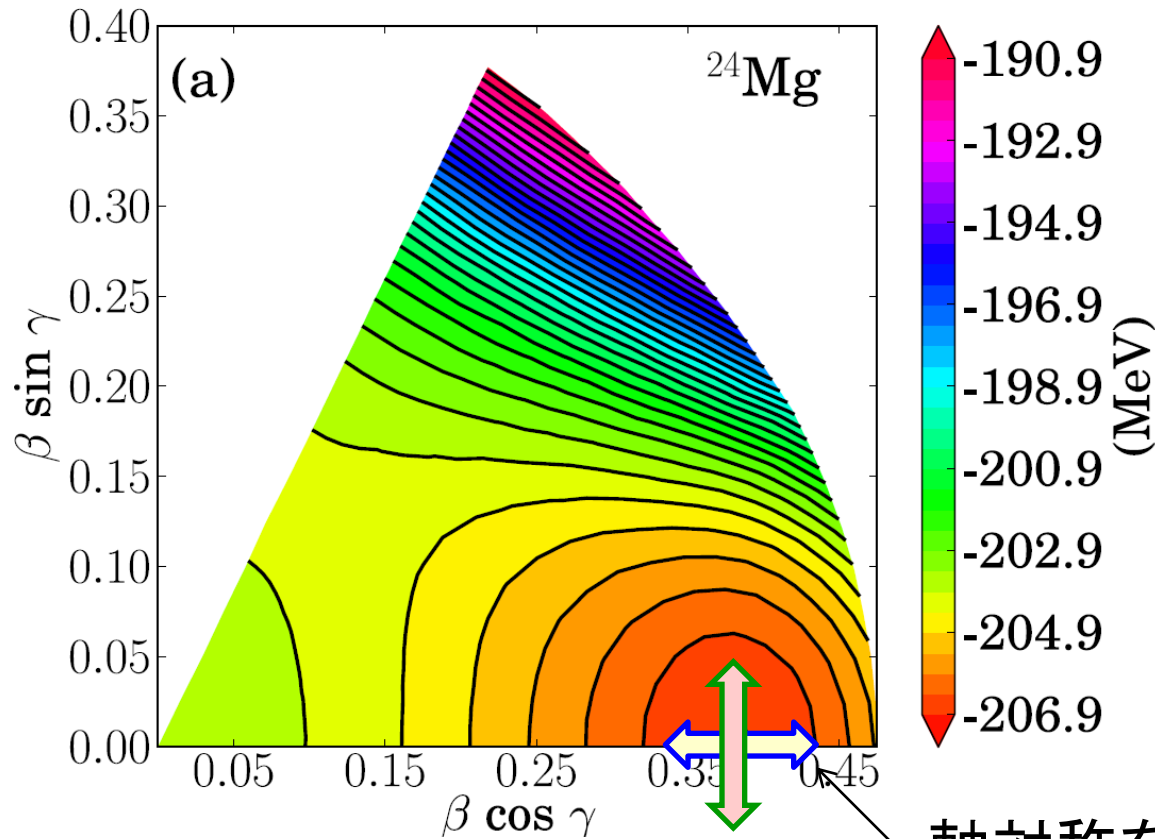
$\beta$

$\gamma$

極小点 (軸対称変形)

# 軸対称変形核の振動運動

( $\beta, \gamma$ ) 平面におけるエネルギー一面の例

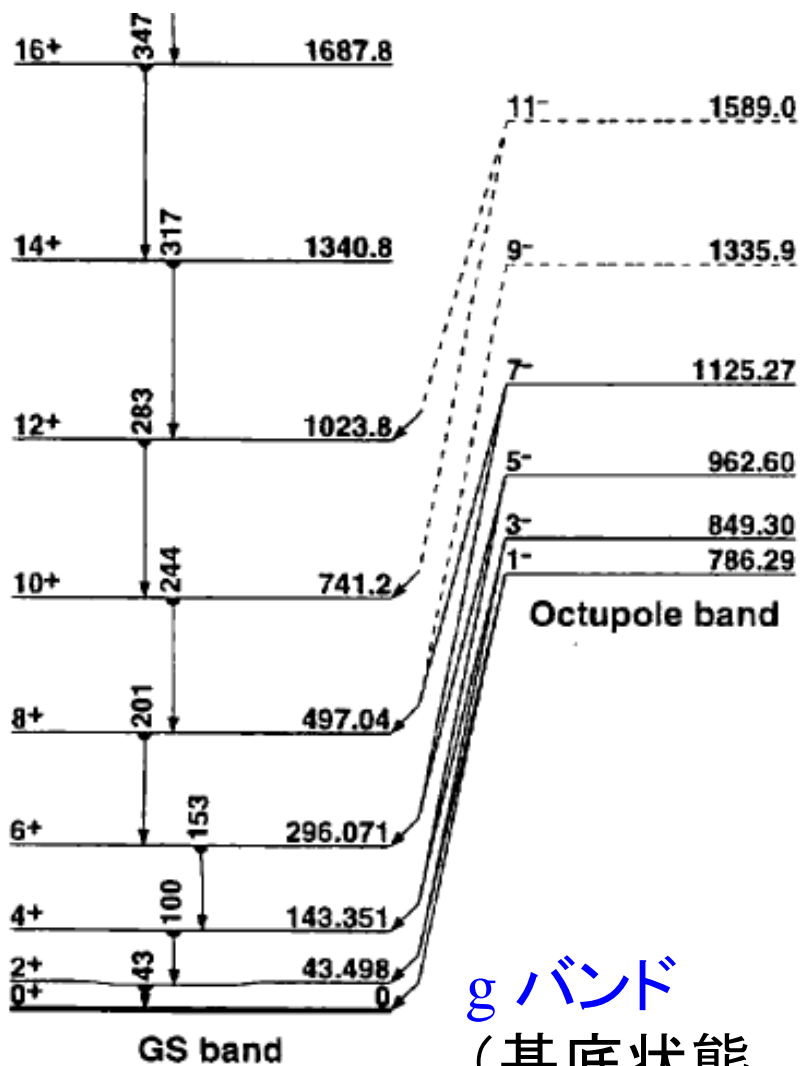


極小点のまわりの  
微小振動  
(2通り)

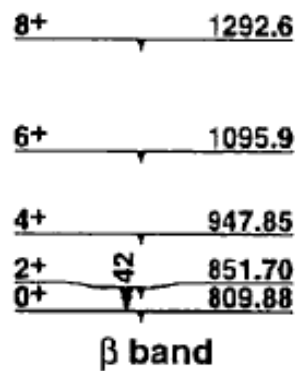
軸対称を保つ振動 ( $\beta$  振動)

軸対称を破る振動 ( $\gamma$  振動)

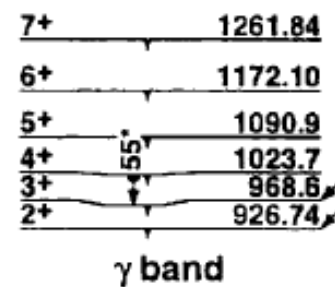
# $^{234}\text{U}$ のスペクトル



g バンド  
(基底状態  
の回転)



β バンド  
(β振動  
+ 回転)



γ バンド  
(γ振動  
+ 回転)