

電磁遷移

1. 遷移確率

$$\Gamma_{fi}(\lambda\mu) \sim \frac{8\pi(\lambda+1)}{\hbar\lambda((2\lambda+1)!!)^2} \left(\frac{E_\gamma}{\hbar c}\right)^{2\lambda+1} |\langle\Psi_f|\mathcal{M}_{\lambda\mu}|\Psi_i\rangle|^2 \quad (1)$$

- E λ 遷移

$$\mathcal{M}_{\lambda\mu} = \sum_{i=1}^Z er_i^\lambda Y_{\lambda\mu}(\hat{\mathbf{r}}_i) \equiv \hat{Q}_{\lambda\mu} \quad (2)$$

- M λ 遷移

$$\mathcal{M}_{\lambda\mu} = \mu_N \sum_{i=1}^A \left\{ g_s^{(i)} \mathbf{s}_i + \frac{2}{\lambda+1} g_l^{(i)} \mathbf{l}_i \right\} \cdot \left(\nabla r_i^\lambda Y_{\lambda\mu}(\hat{\mathbf{r}}_i) \right) \equiv \hat{M}_{\lambda\mu} \quad (3)$$

$\mu_N = e\hbar/2mc$, $g_l = 1$ (陽子) or 0 (中性子), $g_s = 5.586$ (陽子) or -3.826 (中性子) .

2. 換算遷移確率

角運動量の z 成分を区別しないとき、

$$\Gamma_{fi} = \frac{1}{2I_i+1} \sum_{M_f, M_i, \mu} \Gamma_{fi}(\lambda\mu) \quad (4)$$

$$= \frac{1}{2I_i+1} \sum_{M_f, M_i, \mu} \frac{8\pi(\lambda+1)}{\hbar\lambda((2\lambda+1)!!)^2} \left(\frac{E_\gamma}{\hbar c}\right)^{2\lambda+1} |\langle I_f M_f | \mathcal{M}_{\lambda\mu} | I_i M_i \rangle|^2 \quad (5)$$

Wigner-Eckart の定理 :

$$\langle I_f M_f | \mathcal{M}_{\lambda\mu} | I_i M_i \rangle = (-1)^{I_i - M_i} \frac{1}{\sqrt{2\lambda+1}} \langle I_f M_f I_i - M_i | \lambda\mu \rangle \langle I_f || \mathcal{M}_\lambda || I_i \rangle \quad (6)$$

C.G. 係数の性質 :

$$\sum_{M_i M_f} \langle I_f M_f I_i - M_i | \lambda\mu \rangle^2 = 1 \quad (7)$$

を用いると

$$\Gamma_{fi} = \frac{8\pi(\lambda+1)}{\hbar\lambda((2\lambda+1)!!)^2} \left(\frac{E_\gamma}{\hbar c}\right)^{2\lambda+1} \frac{1}{2I_i+1} |\langle I_f || \mathcal{M}_\lambda || I_i \rangle|^2 \quad (8)$$

ここで

$$B(E\lambda; I_i \rightarrow I_f) = \frac{1}{2I_i+1} |\langle I_f || Q_\lambda || I_i \rangle|^2 \quad (9)$$

$$B(M\lambda; I_i \rightarrow I_f) = \frac{1}{2I_i+1} |\langle I_f || M_\lambda || I_i \rangle|^2 \quad (10)$$

を換算遷移確率という。

Ⅳ γ崩壊

多体ハミルトン = \mathcal{H}

$$H = \sum_i \frac{P_i^2}{2m} + \sum_{i < j} v_{ij} = \frac{1}{8\pi} \int d\mathbf{r} [\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2]$$

$$\rightarrow H = \sum_i \left[\frac{1}{2m} \left(P_i - \frac{e_i}{c} A(\mathbf{r}_i, t) \right)^2 + e_i \phi_i \right]$$

$$+ \sum_{i < j} v_{ij} + \text{Hem}$$

$$e_i = \begin{cases} +e & \text{陽子} \\ 0 & \text{中性子} \end{cases}$$

* のようにすると古典的なローレンツ条件で済む。

* A : ベクトルポテンシャル

ϕ : スカラーポテンシャル

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \\ \phi = 0 \end{array} \right.$$

↓

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}} \\ \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \end{array} \right.$$

$$(P - \frac{e}{c} A)^2 = P^2 - \frac{e}{c} (P \cdot A + A \cdot P) + \underbrace{\frac{e^2}{c^2} A^2}_0 \text{ (高次)}$$

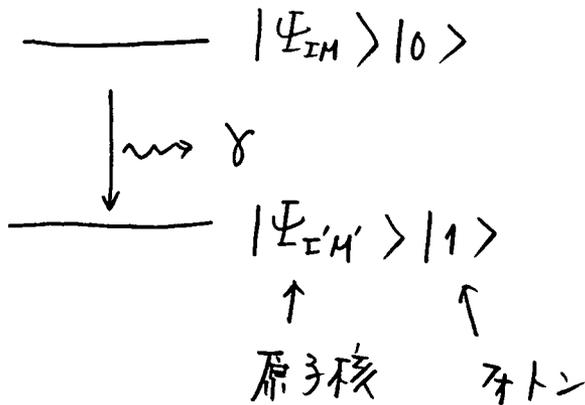
$$= P^2 - \frac{e}{c} (\underbrace{(P \cdot A)}_{\text{"}} + 2A \cdot P)$$

$$\frac{\hbar}{i} \nabla \cdot A = 0 \text{ (} \nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{E} \text{)}$$

$$= P^2 - \frac{2e}{c} A \cdot P$$

↓

$$H_{int} = - \sum_i \frac{e_i}{mc} A(\mathbf{r}_i, t) \cdot \mathbf{p}_i$$

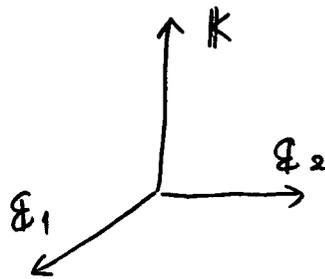


フェルミの黄金律

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_f |\langle f | H_{int} | i \rangle|^2$$

$$\text{Hint} = - \sum_i \frac{e_i}{mc} \underbrace{A(\mathbf{r}_i, t)}_{\int \underbrace{\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha \cdot \mathbf{a}_{\mathbf{k}\alpha}^\dagger e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i - \omega t)} + \text{h.c.}}_{\text{偏極ベクトル}}} \cdot \mathbf{p}_i \quad (\omega = ck)$$

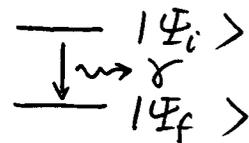
$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \rightarrow \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = 0 \quad (\text{横波条件})$$



2つの独立解
 $\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha \quad (\alpha = 1, 2)$

電磁遷移確率

$$|\Psi_i\rangle |0\rangle \rightarrow |\Psi_f\rangle |1\rangle$$



$$\langle f | \text{Hint} | i \rangle = - \sum_i \frac{e_i}{mc} \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha e^{+i\omega t} \underbrace{\langle \Psi_f | e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i} \mathbf{p}_i | \Psi_i \rangle}_{\substack{1 \\ 1}} \times \underbrace{\langle 1 | \mathbf{a}_{\mathbf{k}\alpha}^\dagger | 0 \rangle}_{1}$$

Ⅳ E1遷移

$$e^{-ik \cdot r} \sim 1$$

$$\leftarrow E_\gamma \ll \frac{\hbar c}{R}$$

例として $E_\gamma = 1 \text{ MeV}$ だと

$$k = \frac{E_\gamma}{\hbar c} \sim \frac{1}{200} \text{ fm}^{-1}$$

$$\text{したがって, } \langle \Psi_f | \sum_i e_i e^{-ik \cdot r_i} \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha \cdot \mathbf{p}_i | \Psi_i \rangle$$

$$\sim \sum_i e_i \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha \cdot \langle \Psi_f | \mathbf{p}_i | \Psi_i \rangle$$

(note)

$$[\mathbf{p}^2, \mathbf{r}] = -2i\hbar \mathbf{p}$$

$$\leadsto \left[\underbrace{\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r})}_{H_0}, \mathbf{r} \right] = -\frac{i\hbar}{m} \mathbf{p}$$

$$\leadsto \langle \Psi_f | \sum_i \mathbf{p}_i | \Psi_i \rangle = \langle \Psi_f | \frac{im}{\hbar} [H_0, \sum_i \mathbf{r}_i] | \Psi_i \rangle$$

$$= \frac{im}{\hbar} (E_f - E_i) \langle \Psi_f | \left(\sum_i \mathbf{r}_i \right) | \Psi_i \rangle$$

これは, $H_{\text{int}} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{d}$ (\mathbf{E} : 電場, $\mathbf{d} = \sum_i e_i \mathbf{r}_i$
双極子近似) に対する摂動と同じ形

→ 電気双極子 (E1) 遷移

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) &= \epsilon_{ijk} k_i E_j \cdot \epsilon_{ij'k'} r_{i'} p_{j'} \\
 &= (\delta_{ii'} \delta_{jj'} - \delta_{ij'} \delta_{ji'}) k_i E_j r_{i'} p_{j'} \\
 &= (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{E} \cdot \mathbf{p}) - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{p})(\mathbf{E} \cdot \mathbf{r})
 \end{aligned}$$

□ E2 + M1 遷移

$$e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \sim 1 - \underbrace{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + \dots \quad \text{の 2 項目が寄与.} \\
 \text{(higher order)}$$

(note)

$$\langle \Psi_f | (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{E} \cdot \mathbf{p}) | \Psi_i \rangle$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \langle \Psi_f | \underbrace{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{E} \cdot \mathbf{p}) + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{p})(\mathbf{E} \cdot \mathbf{r})}_{\text{first term}} | \Psi_i \rangle \\
 &+ \frac{1}{2} \langle \Psi_f | (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{E} \cdot \mathbf{p}) - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{p})(\mathbf{E} \cdot \mathbf{r}) | \Psi_i \rangle.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{first term: } (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{E} \cdot \mathbf{p}) + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{p})(\mathbf{E} \cdot \mathbf{r}) &= k_i (r_i p_j + p_i r_j) E_j \\
 &= \mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}\mathbf{p} + \mathbf{p}\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}
 \end{aligned}$$

$$\frac{m\hbar}{\hbar} \parallel [H_0, \mathbf{r}\mathbf{r}]$$

↓
E2 遷移

$$\text{second term: } (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{E} \cdot \mathbf{p}) - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{p})(\mathbf{E} \cdot \mathbf{r})$$

$$= \underbrace{(\mathbf{k} \times \mathbf{E})}_{\mathbf{S}} \cdot \underbrace{(\mathbf{r} \times \mathbf{p})}_{\mathbf{L}}$$

\mathbf{S} \mathbf{L} \rightarrow $\lambda \ell \geq S$ の寄与も
 \mathbf{B} \mathbf{L} 手T"足す
 ↓
 M1 遷移

四 高次の項まで含めて一般的に

$$T_{fi}(\lambda\mu) \sim \frac{8\pi(\lambda+1)}{\hbar \lambda ((2\lambda+1)!!)^2} \left(\frac{E_\gamma}{\hbar c}\right)^{2\lambda+1} \\ \times |\langle \Psi_f | \hat{M}_{\lambda\mu} | \Psi_i \rangle|^2$$

• E λ 遷移

$$\hat{M}_{\lambda\mu} = \sum_{i=1}^Z e r_i^\lambda Y_{\lambda\mu}(\hat{r}_i) \equiv \hat{Q}_{\lambda\mu}$$

• M λ 遷移

$$\hat{M}_{\lambda\mu} = \mu_N \sum_{i=1}^A \left\{ g_s^{(i)} \mathcal{S}_i + \frac{2}{\lambda+1} g_l^{(i)} \mathcal{L}_i \right\}$$

$$\cdot (\nabla r_i^\lambda Y_{\lambda\mu}(\hat{r}_i)) \equiv \hat{M}_{\lambda\mu}$$

$$\mu_N = \frac{e\hbar}{2mc}$$

$$g_l = \begin{cases} 1 & \text{for } p \\ 0 & \text{for } n \end{cases}$$

$$g_s = \begin{cases} 5.586 & \text{for } p \\ -3.826 & \text{for } n \end{cases}$$

角運動量の z 成分を区別した時

$$T_{fi} = \frac{1}{2I_i + 1} \sum_{M_i, M_f, \mu} T_{fi}(\lambda, \mu)$$

$$= \frac{1}{2I_i + 1} \sum_{M_i, M_f, \mu} |\langle I_f M_f | \hat{m}_{\lambda, \mu} | I_i M_i \rangle|^2 \times \dots$$

(note) Wigner-Eckart の定理

$$\langle I_f M_f | \hat{m}_{\lambda, \mu} | I_i M_i \rangle$$

$$= (-)^{I_i - M_i} \frac{1}{\sqrt{2\lambda + 1}} \underbrace{\langle I_f M_f I_i - M_i | \lambda, \mu \rangle}_{\text{---}}$$

$$\times \langle I_f || \hat{m}_{\lambda} || I_i \rangle$$

(note) $\sum_{M_i, M_f} \langle I_f M_f I_i - M_i | \lambda, \mu \rangle^2 = 1$

$$\downarrow T_{fi} = \frac{8\pi(\lambda + 1)}{\hbar \lambda ((2\lambda + 1)!!)^2} \left(\frac{E_f}{\hbar c} \right)^{2\lambda + 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{2I_i + 1} |\langle I_f || \hat{m}_{\lambda} || I_i \rangle|^2}_{\text{---}}$$

|| B(E λ ; I $_i$ \rightarrow I $_f$)

又は B(M λ ; I $_i$ \rightarrow I $_f$)

- 一般に $T(E\lambda) \gg T(M\lambda)$

$T(E\lambda) \gg T(E, \lambda + 1) \gg \dots$

E $_2$ と M $_1$ の競合が起ることも。

選 択 則

$$\langle I_f m_f | \hat{Q}_{\lambda\mu} | I_i m_i \rangle$$

終状態
初期状態

初期状態 + 1 個ト下状態

→ 合成角運動量

$$|\lambda - I_i|, \dots, \lambda + I_i$$

Z-成分: $\mu + m_i$

$|\Psi_i'\rangle \equiv \hat{Q}_{\lambda\mu} |\Psi_i\rangle$ として, $|\Psi_i'\rangle$ と $|\Psi_f\rangle$ が "同じ" 量子数を持たなければならぬ

$$|\lambda - I_i| \leq I_f \leq \lambda + I_i$$

$$m_f = \mu + m_i$$

パリティ: $(-)^I$ (E), $(-)^{I+1}$ (M)

例) $2^+ \rightarrow 0^+$: E2

$3^- \rightarrow 0^+$: E3

$4^+ \rightarrow 2^+$: (E2), E4, M3, E6, M5

$3^+ \rightarrow 2^+$: (E2, M1), E4, M3, M5

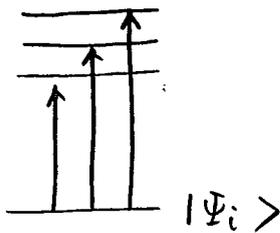
↑
unnatural parity

$2^+ \rightarrow 3^-$: (E1), E3, E5, M2, M4

四 和則

$$T_{i \rightarrow f} \sim |\langle \Psi_f | \sum_i z_i | \Psi_i \rangle|^2 \quad (E_f \text{ の場合})$$

$$T_{tot} = \sum_f T_{i \rightarrow f} \sim \left(\sum_f \right) \langle \Psi_i | \sum_i z_i | \Psi_f \rangle \times \langle \Psi_f | \sum_i z_i | \Psi_i \rangle$$



$$\sim \langle \Psi_i | (\sum_i z_i)^2 | \Psi_i \rangle$$

$$S_1 = \sum_f (E_f - E_i) T_{i \rightarrow f} \quad (\text{Energy Weighted Sum Rule})$$

(note)

$$\frac{1}{2} \langle 0 | [F, [H, F]] | 0 \rangle$$

$$= \frac{1}{2} \langle 0 | \underline{F(HF - FH)} - \underline{(HF - FH)F} | 0 \rangle$$

$$= \langle 0 | FH F | 0 \rangle - \frac{1}{2} \langle 0 | F^2 H + H F^2 | 0 \rangle$$

$$= \langle 0 | FH F | 0 \rangle - E_0 \langle 0 | F^2 | 0 \rangle$$

$$= \sum_k (E_k - E_0) |\langle k | F | 0 \rangle|^2$$

$$\downarrow S_1 = \frac{1}{2} \langle \Psi_i | [F, [H, F]] | \Psi_i \rangle$$

$$F = \sum_i z_i$$

$$\begin{aligned} \text{(note)} \quad [H, F] &= \left[\sum_i \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{ij} v_{ij}, \sum_i z_i \right] \\ &= -\sum_i i\hbar \cdot \frac{p_{zi}}{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [F, [H, F]] &= \left[\sum_i z_i, -\frac{i\hbar}{m} \sum_i p_{zi} \right] \\ &= -\sum_i \frac{(i\hbar)^2}{m} = -\frac{(i\hbar)^2}{m} \cdot Z \end{aligned}$$

$$\downarrow S_1 = \frac{\hbar^2}{2m} \cdot Z \quad (\text{Thomas-Reiche-Kuhn 和則})$$

• 和則

- 励起状態への遷移確率から基底状態の情報が得られる
- 計算や実験データのチェックに使える