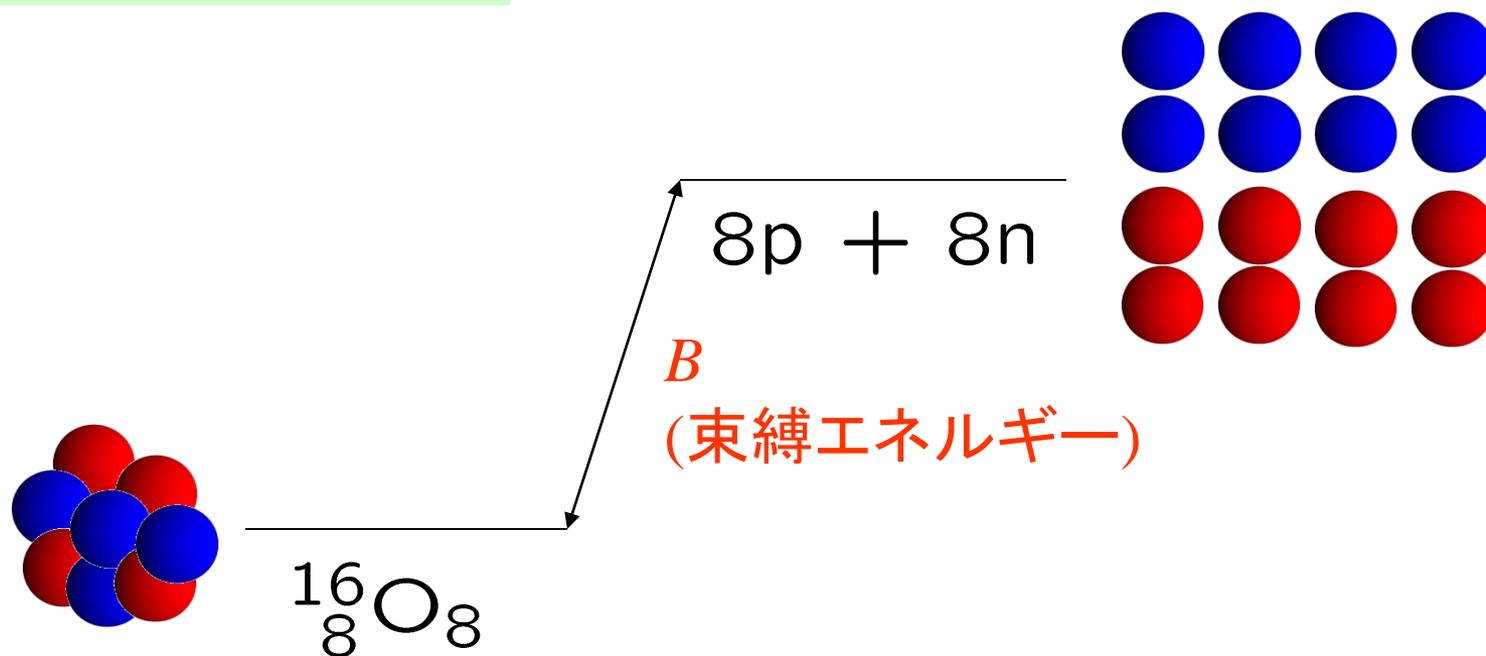


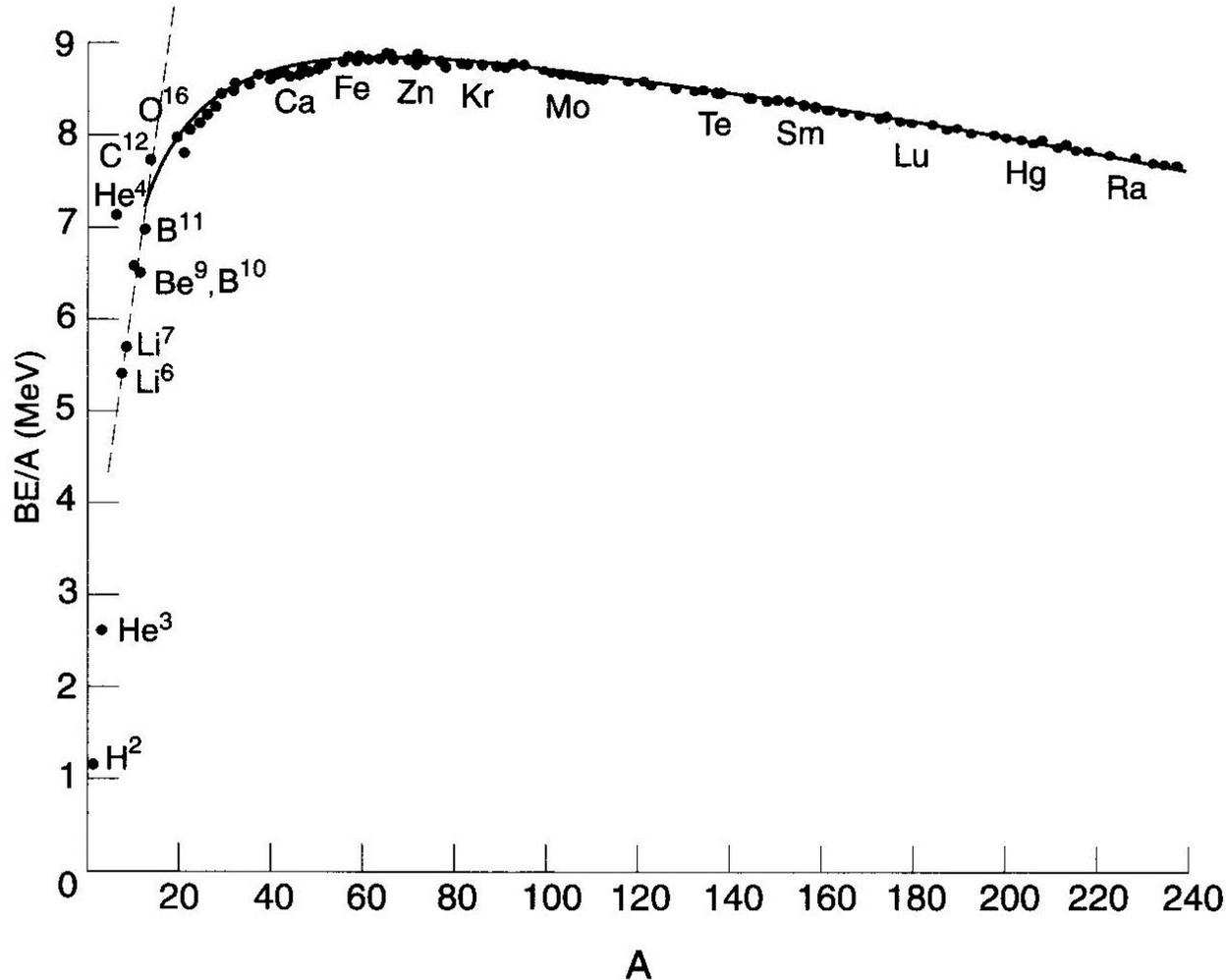
# 原子核の質量



$$m(N, Z)c^2 = Zm_p c^2 + Nm_n c^2 - B$$

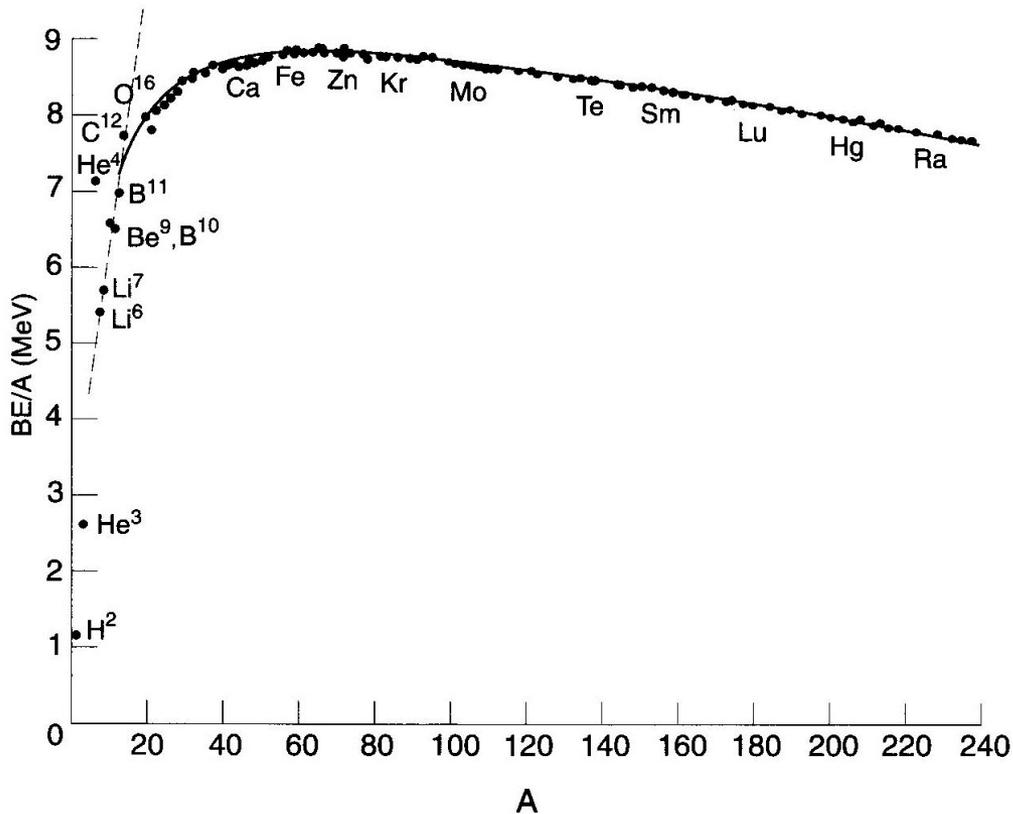
束縛エネルギー

\* 束縛エネルギーが大きいほど安定(質量が軽い)



1.  $B(N,Z)/A \sim 8.5 \text{ MeV} (A > 12) \iff$  短距離力(核子間相互作用)
2. 重い原子核に対してはクーロン力の影響
  - $\longleftarrow$   $B/A$  が  $A$  に比例して減少  
(長距離力(クーロン力)がはたらいっている証拠)

# 半経験的質量公式



Aの関数としてどのように振る舞うか?

- ✓ 経験的
- ✓ 半経験的
- ✓ 非経験的

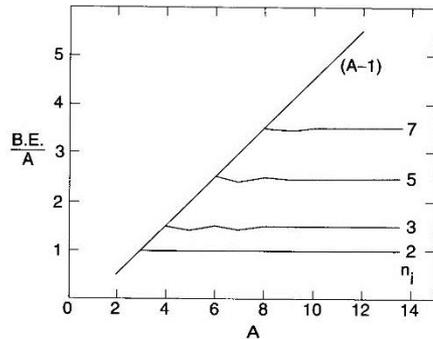
} アプローチ

# 半経験的質量公式

(Bethe-Weizacker 質量公式: 液滴模型)

$$B(N, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\text{sym}} \frac{(N - Z)^2}{A}$$

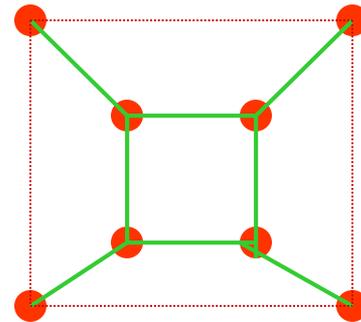
● 体積エネルギー:  $a_v A$



$$R_0 \sim 1.1 \times A^{1/3} \rightarrow V \propto A$$
$$S \propto A^{2/3}$$

● 表面エネルギー:  $-a_s A^{2/3}$

表面付近の核子は少ない数の核子と相互作用する。



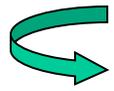
$$B(N, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\text{sym}} \frac{(N - Z)^2}{A}$$

● クーロン・エネルギー:  $-a_C Z^2 / A^{1/3}$

$$E_C = \frac{3}{5} \frac{Z^2 e^2}{R_C} \quad (\text{一様帯電球のクーロン・エネルギー})$$

● 対称エネルギー:  $-a_{\text{sym}} (N - Z)^2 / A$

ポテンシャル・エネルギー  $v_{nn} = v_{pp} = v, \quad v_{np} \sim 2v$

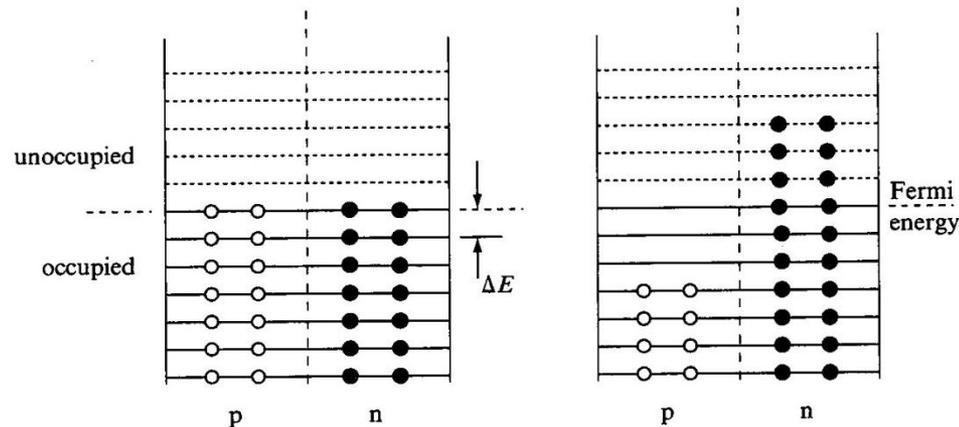


核物質と相互作用する核子のエネルギー:

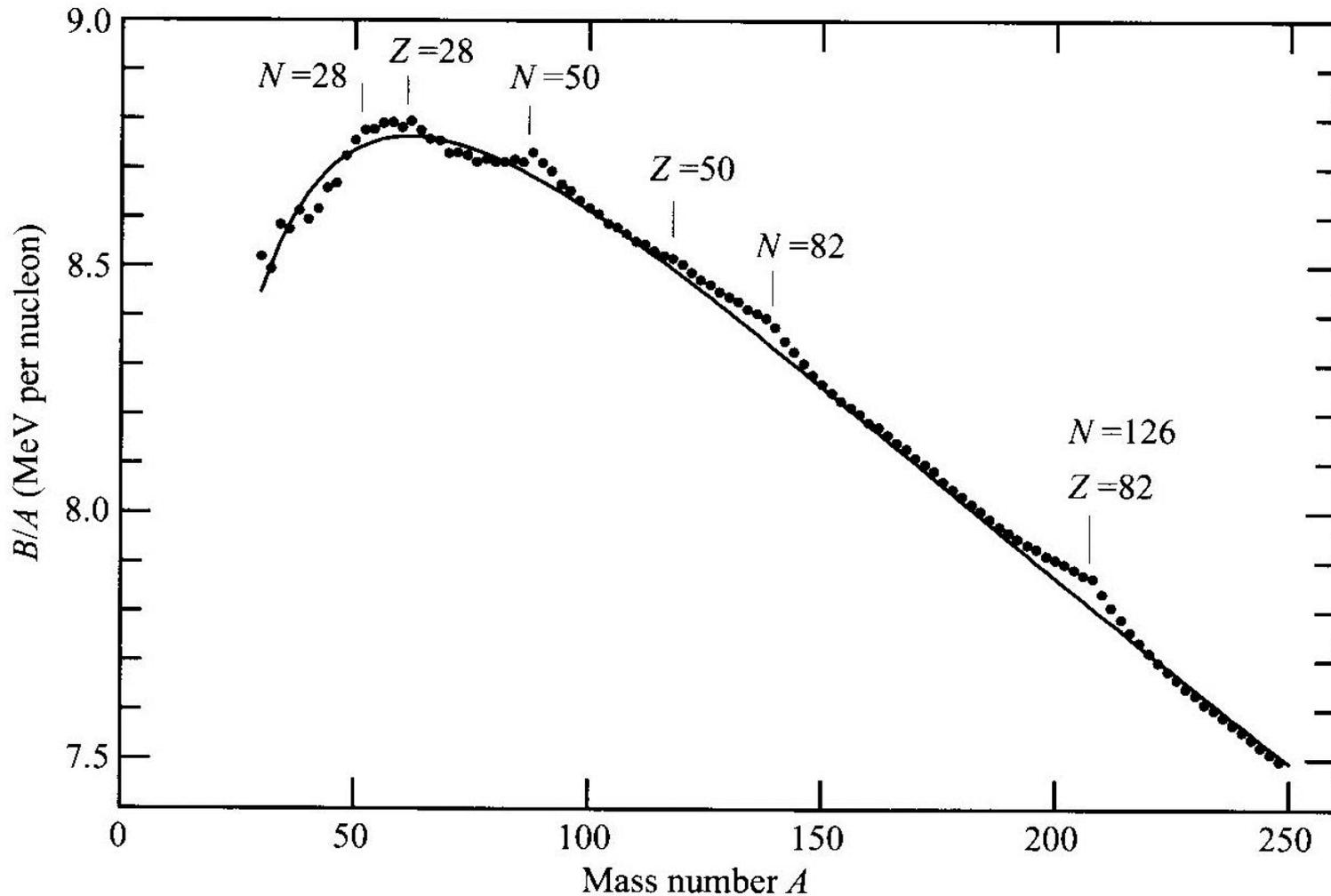
$$N(v_{nn}N/A + v_{pn}Z/A) + Z(v_{pn}N/A + v_{pp}Z/A) = \frac{v}{2}(3A - (N - Z)^2/A)$$

運動エネルギー

パウリ原理



# どのくらい実験を再現するか？

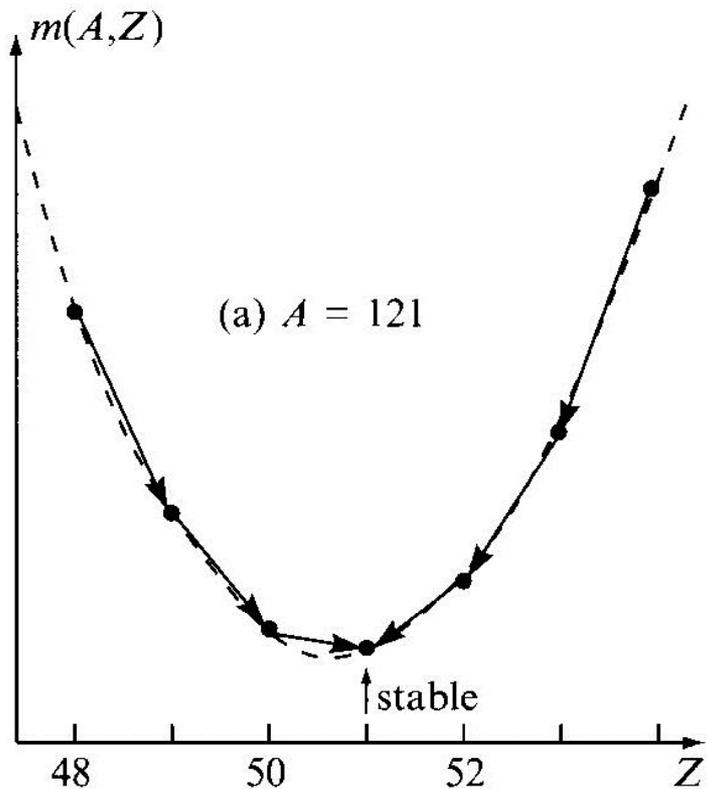


cf.  $N, Z = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126$  (魔法数) に対して束縛エネルギー大

# $\beta$ -安定線

$$B(N, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\text{sym}} \frac{(N - Z)^2}{A}$$

$$m(A, Z) = f(A) + a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_{\text{sym}} \frac{(A - 2Z)^2}{A}$$



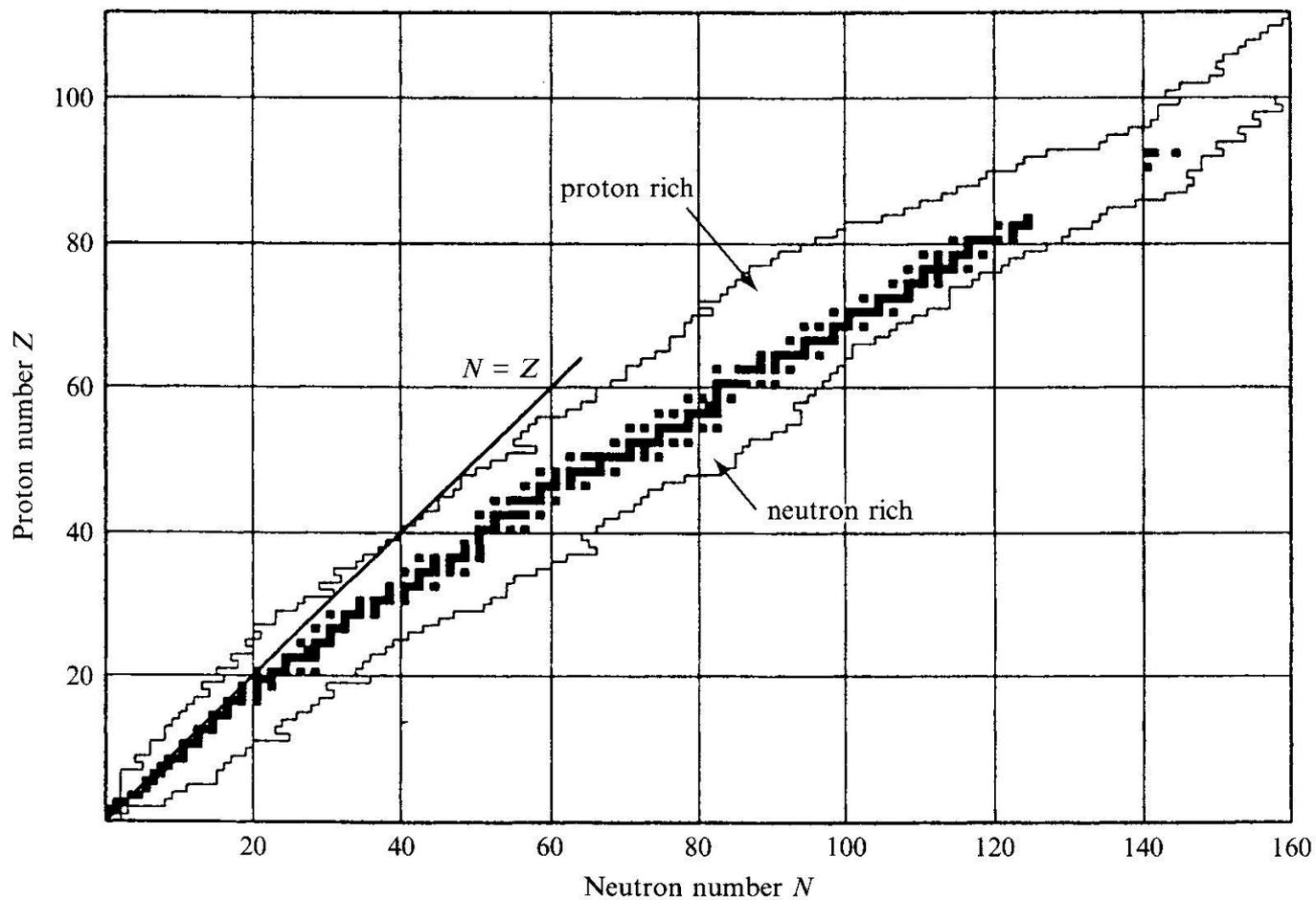
安定核 (beta-安定線)

$$\left. \frac{\partial m}{\partial Z} \right|_{A=\text{const.}} = 0$$

$$Z = \frac{4a_{\text{sym}}}{2a_C/A^{1/3} + 8a_{\text{sym}}/A}$$

$$\Rightarrow Z < A/2$$

# 核图表



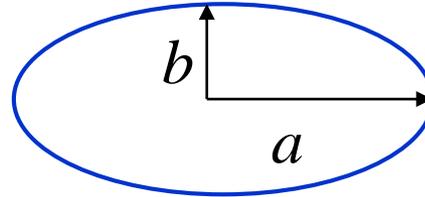
安定核:  $N \geq Z$

# 核分裂

$$B(N, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\text{sym}} \frac{(N - Z)^2}{A}$$

原子核を体積一定のまま変形してみる

例) 回転楕円体



$$a = R \cdot (1 + \epsilon)$$
$$b = R \cdot (1 + \epsilon)^{-1/2}$$
$$ab^2 = R^3 = \text{一定}$$

変形したときのエネルギー変化:

- 体積項、対称エネルギー項: 変化せず
  - クーロン項
  - 表面項
- } 変化

{ 表面項 → 球形になる傾向  
クーロン項 → 変形になる傾向 } → 2つの力の競合

## □ 表面項

$$E_S(\epsilon) = \underbrace{\sigma}_{\text{表面張力}} \underbrace{\int_S dS}_{\text{表面積分}} \sim E_S^{(0)} \left( 1 + \frac{2}{5}\epsilon^2 - \frac{4}{105}\epsilon^3 + \dots \right)$$

損

表面張力      表面積分

$$4\pi R^2 \sigma \propto A^{2/3}$$

$$E_S^{(0)} = +a_S A^{2/3}$$

## □ クーロン項

$$E_C(\epsilon) = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \frac{e^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \rho(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}') \\ \sim E_C^{(0)} \left( 1 - \frac{1}{5}\epsilon^2 - \frac{4}{105}\epsilon^3 + \dots \right)$$

得

$$E_C^{(0)} = +a_C Z^2 / A^{1/3}$$



$$E_S + E_C - E_S^{(0)} - E_C^{(0)}$$

$$= \left( \frac{2}{5} E_S^{(0)} - \frac{1}{5} E_C^{(0)} \right) \epsilon^2 - \frac{4}{105} \left( E_S^{(0)} + E_C^{(0)} \right) \epsilon^3$$

■ まずは2次から

$$\frac{2}{5} E_S^{(0)} - \frac{1}{5} E_C^{(0)} = \frac{2}{5} E_S^{(0)} \left( 1 - \frac{E_C^{(0)}}{2E_S^{(0)}} \right)$$

フィシリティ(fissility)パラメーター:  $x$

$$E_S^{(0)} = +a_S A^{2/3} \sim 20 A^{2/3} \quad (\text{MeV})$$

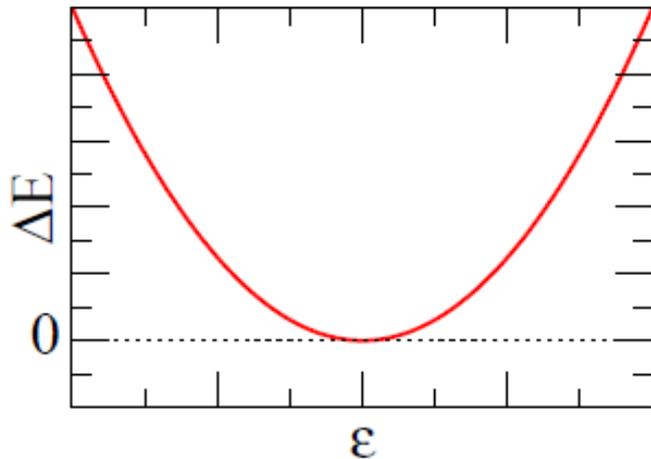
$$E_C^{(0)} = +a_C Z^2 / A^{1/3} \sim 0.751 Z^2 / A^{1/3}$$

$$\longrightarrow x \equiv \frac{E_C^{(0)}}{2E_S^{(0)}} = \frac{a_C}{2a_S} \cdot \frac{Z^2}{A} \sim \frac{1}{53.3} \cdot \frac{Z^2}{A}$$

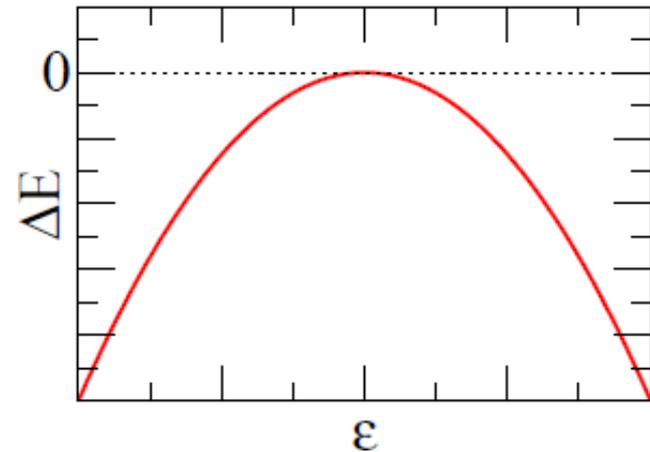
$$E_S + E_C - E_S^{(0)} - E_C^{(0)} \\ \sim \left( \frac{2}{5} E_S^{(0)} - \frac{1}{5} E_C^{(0)} \right) \epsilon^2 = \frac{2}{5} E_S^{(0)} (1 - x) \epsilon^2$$

$$x \equiv \frac{E_C^{(0)}}{2E_S^{(0)}} = \frac{a_C}{2a_S} \cdot \frac{Z^2}{A} \sim \frac{1}{53.3} \cdot \frac{Z^2}{A}$$

$x < 1$



$x > 1$



核分裂に対して不安定

$$Z^2 / A = 36.02 \text{ (}^{235}\text{U)}, 45.8 \text{ (}^{279}\text{113)}$$

# 原子核の表面振動

$$E_{\text{surf}} = E_{\text{surf}}^{(0)} (1 + 2\epsilon^2/5 + \dots)$$

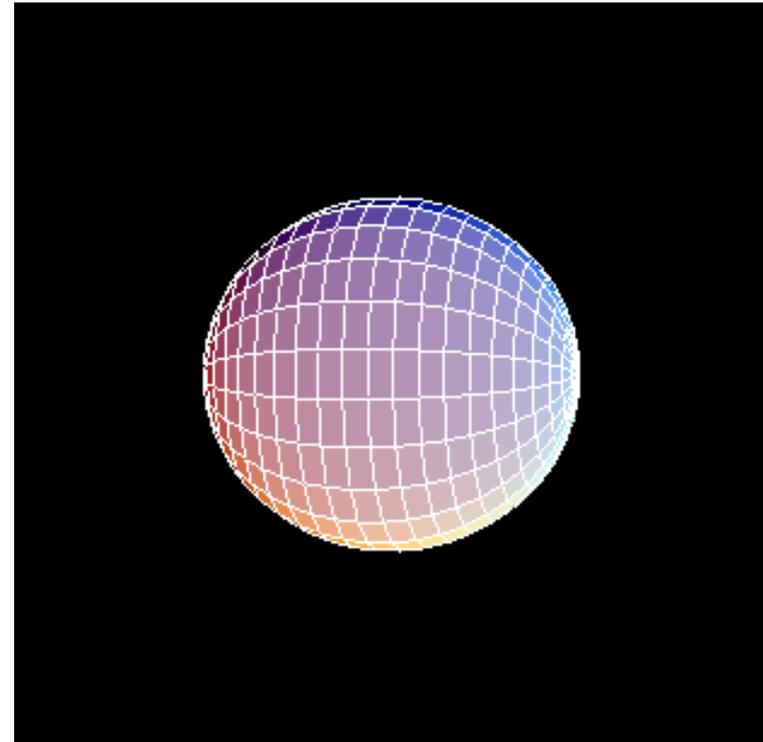
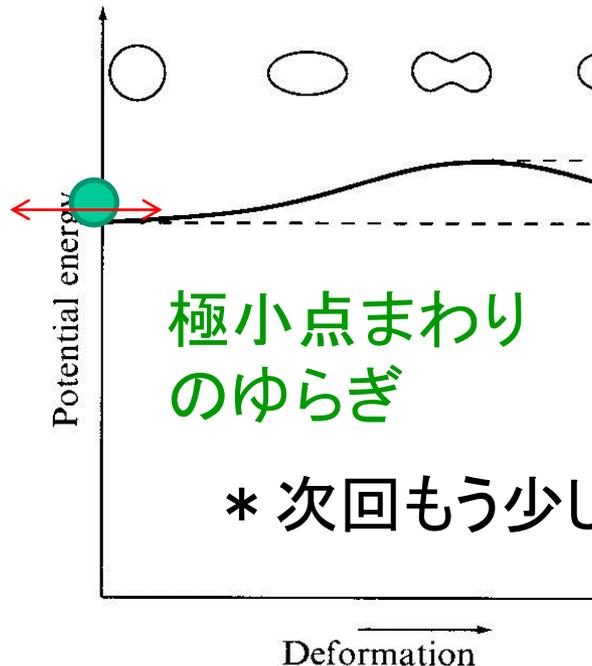
$$E_C = E_C^{(0)} (1 - \epsilon^2/5 + \dots)$$

➡ 
$$\Delta E = E_{\text{surf}}^{(0)} \cdot \frac{2}{5} (1 - x) \epsilon^2$$

\* 原子核が安定に存在するためには  
 $x < 1$  が必要

$$x \equiv \frac{E_C^{(0)}}{2E_{\text{surf}}^{(0)}}$$

(fissility パラメーター)

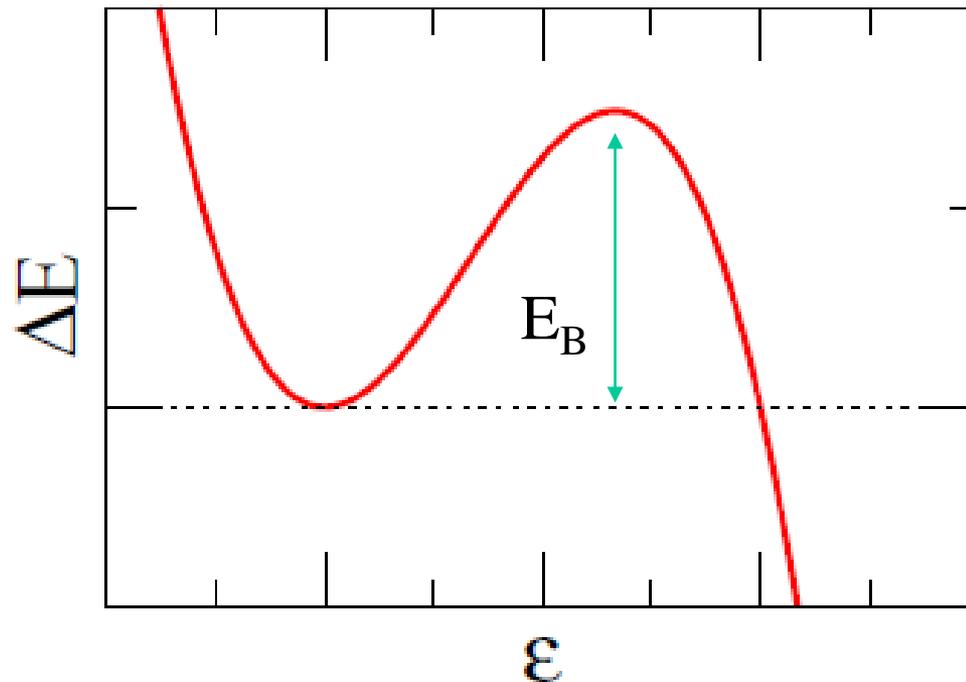


$$E_S + E_C - E_S^{(0)} - E_C^{(0)}$$

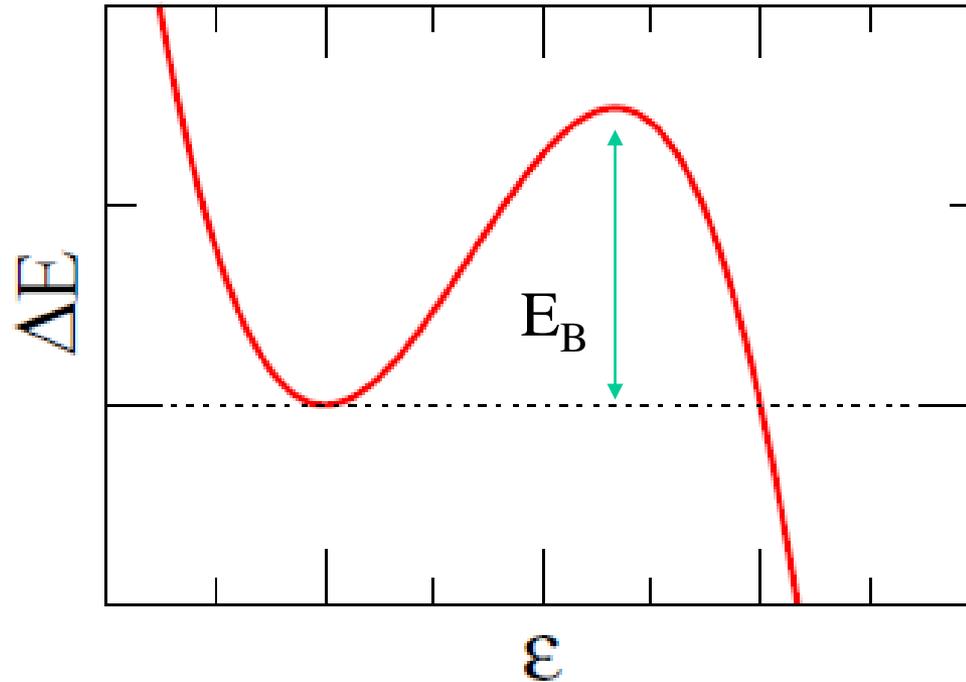
$$= \left( \frac{2}{5} E_S^{(0)} - \frac{1}{5} E_C^{(0)} \right) \epsilon^2 - \frac{4}{105} \left( E_S^{(0)} + E_C^{(0)} \right) \epsilon^3$$

■ 次に3次まで

$$\Delta E = E_S^{(0)} \left\{ \frac{2}{5} (1 - x) \epsilon^2 - \frac{4}{105} (1 + 2x) \epsilon^3 + \dots \right\}$$



$$\Delta E = E_S^{(0)} \left\{ \frac{2}{5}(1-x)\epsilon^2 - \frac{4}{105}(1+2x)\epsilon^3 + \dots \right\}$$



$$E_B = \frac{98}{15} \cdot \frac{(1-x)^3}{(1+2x)^2} \cdot E_S^{(0)}$$

重い核ほど障壁は低くなる

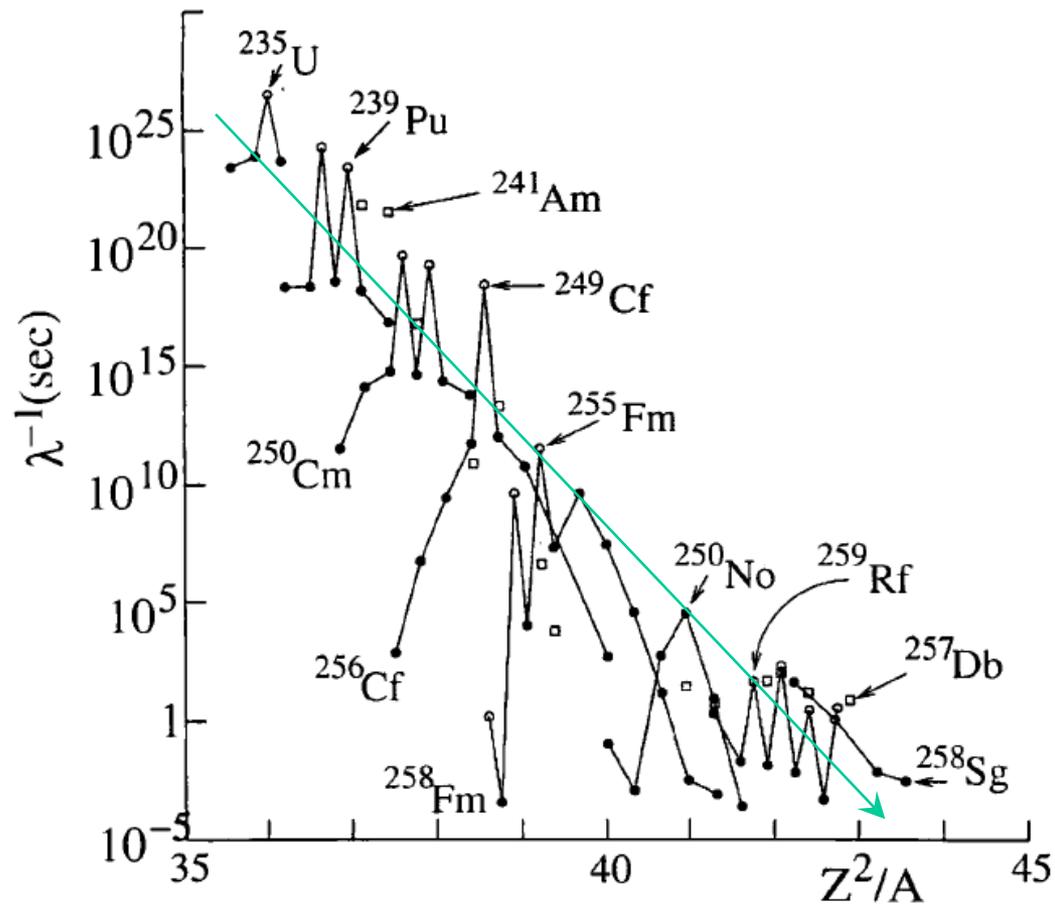
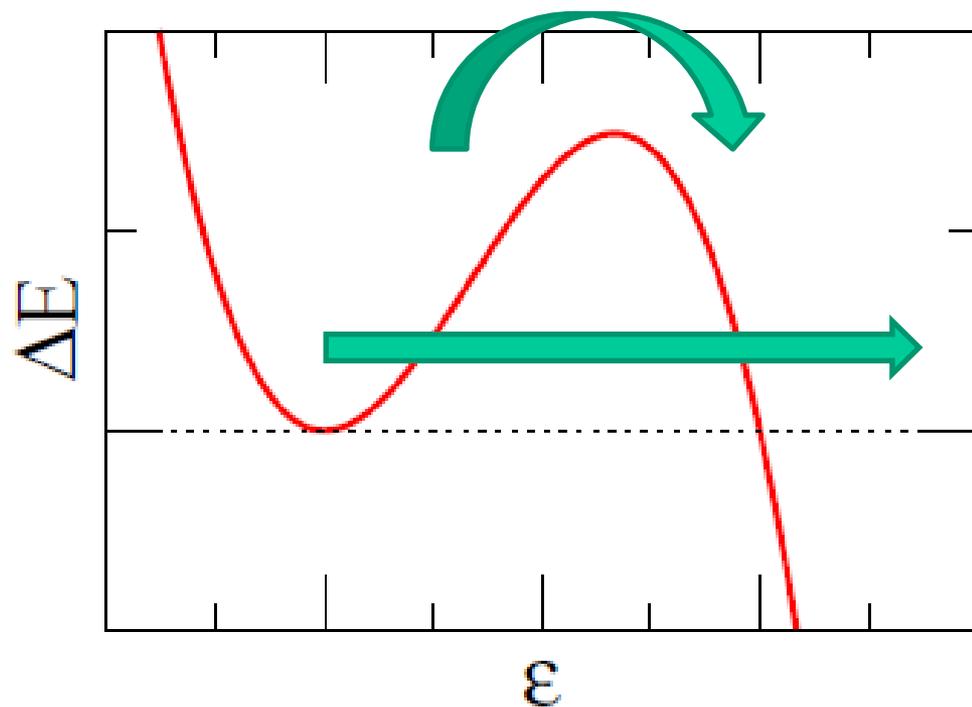


Fig. 6.4. Spontaneous fission lifetimes as a function of the fission parameter  $Z^2/A$  for selected nuclei. Circles are for even- $Z$  nuclei. filled circles for even-even nuclei and open circles for even-odd nuclei. Squares are for odd- $Z$  nuclei.

自発核分裂の寿命:  $Z^2/A$  が大きくなるほど、核分裂障壁が低くなって寿命が短くなる

## 2種類の核分裂



### ②誘起核分裂(熱的崩壊)

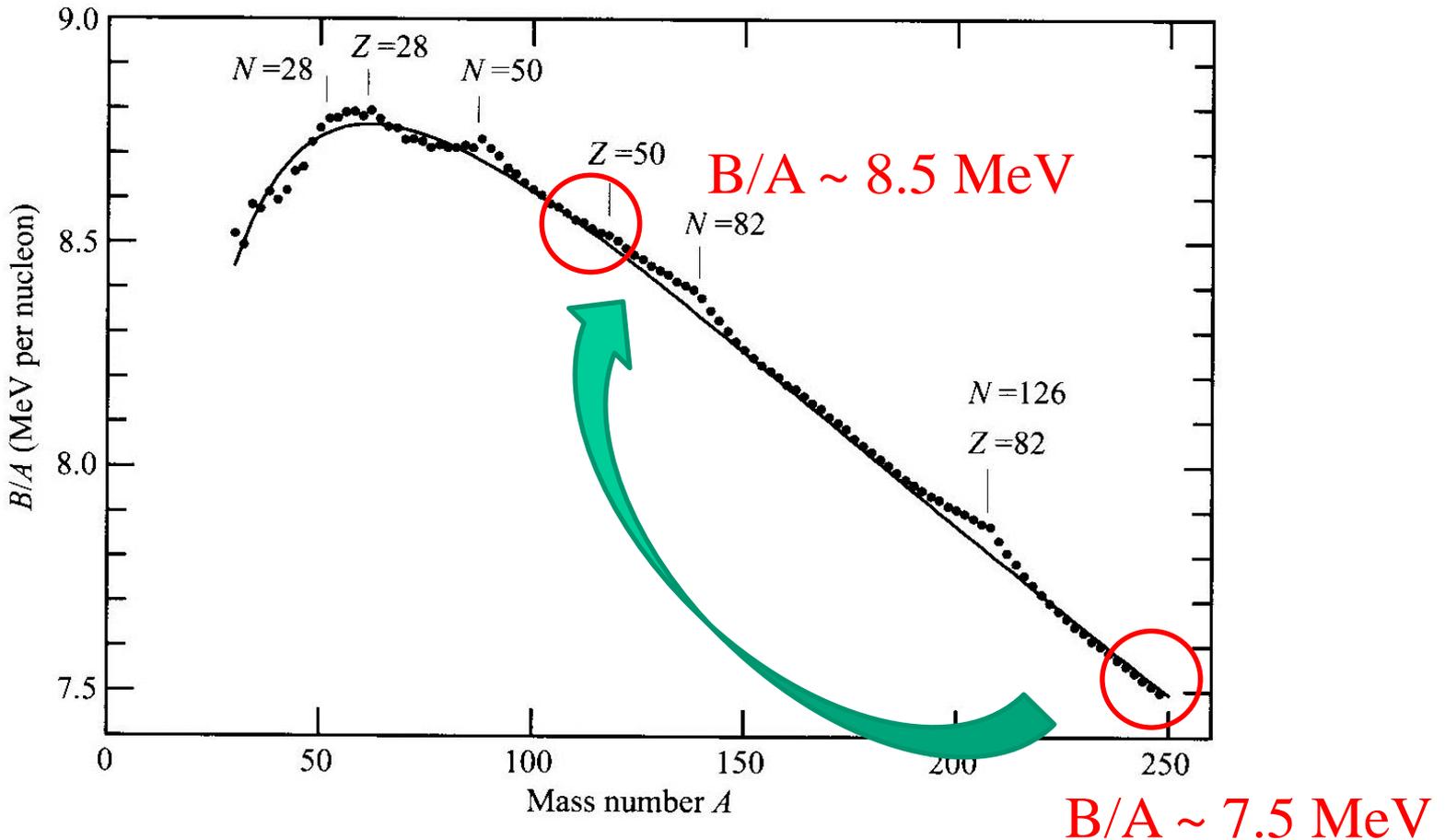
cf. 化学反応  
(アレニウスの式)

### ①自発核分裂

↑  
トンネル効果

↑  
後でもう少し詳しく  
(アルファ崩壊)

# エネルギーの解放



$(A=240) \rightarrow 2x (A=120)$

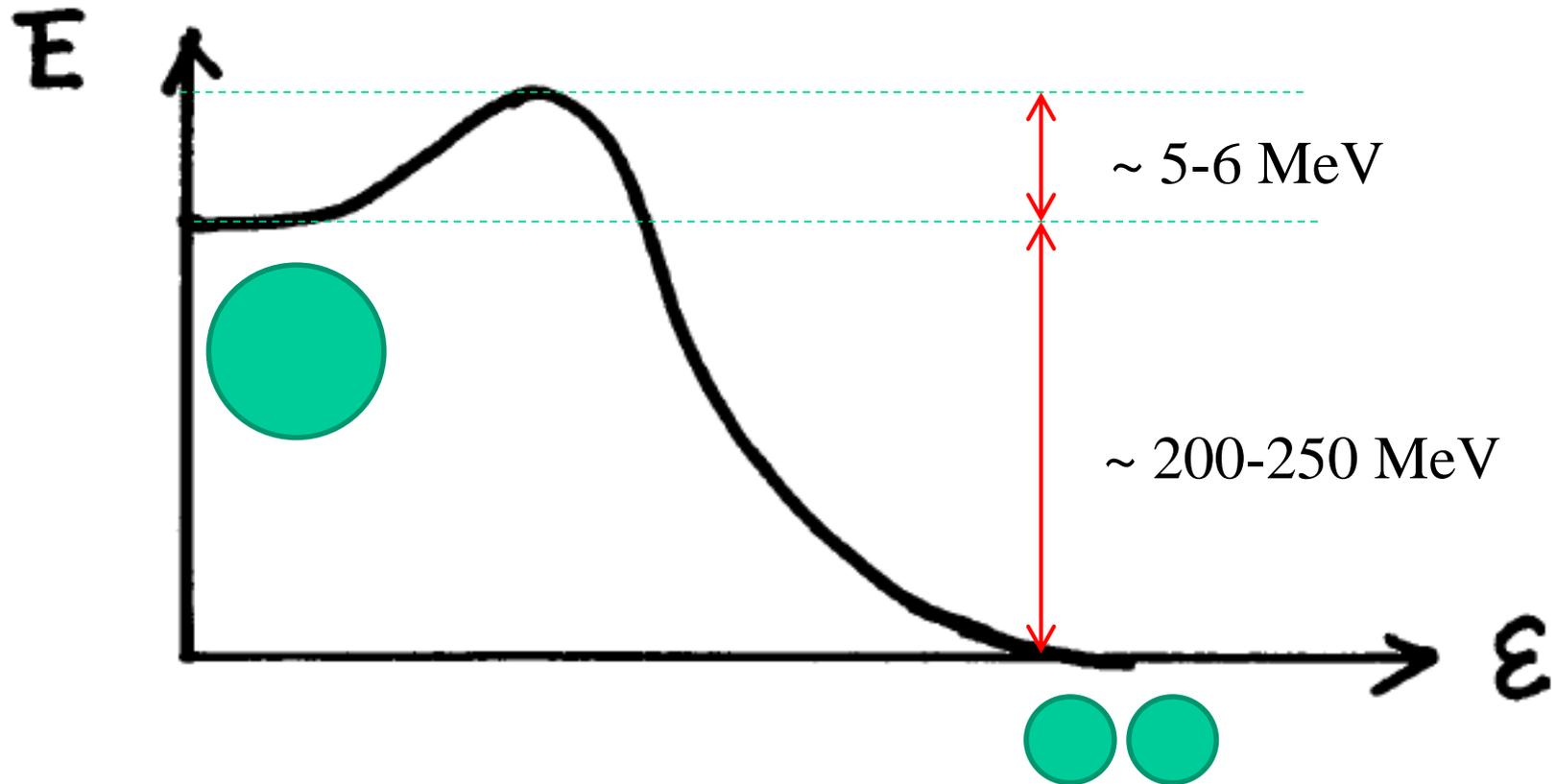
$$\Delta E = -7.5 \times 240 + 8.5 \times 120 \times 2 \sim 240$$

(MeV)

## エネルギーの解放

$(A=240) \rightarrow 2x (A=120)$

$$\Delta E = -7.5 \times 240 + 8.5 \times 120 \times 2 \sim 240 \quad (\text{MeV})$$



## どうして $^{235}\text{U}$ が“燃え”て $^{238}\text{U}$ が“燃え”ないのか(原発)?

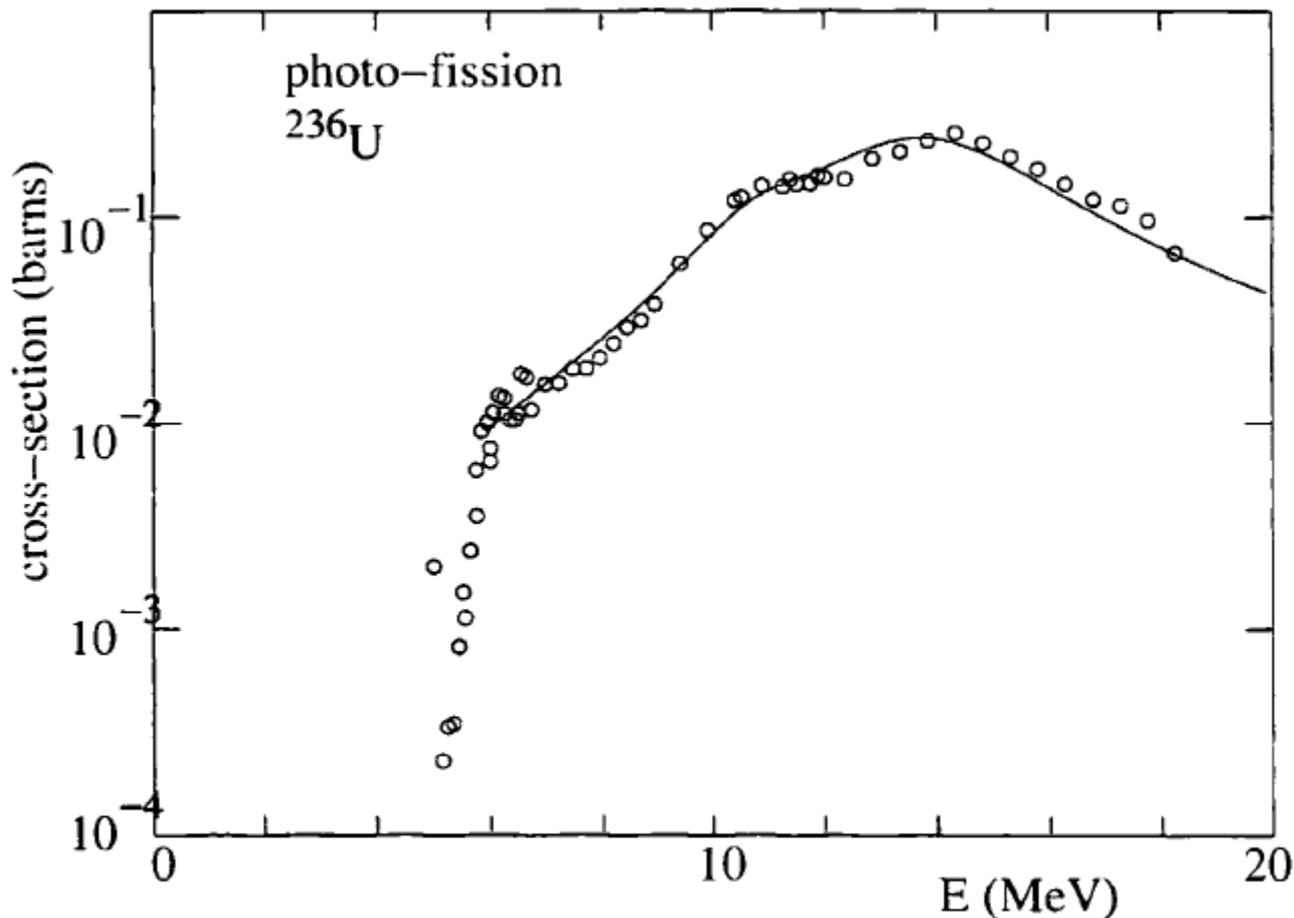


Fig. 6.5. Cross-section for  $\gamma^{236}\text{U} \rightarrow$  fission [30].

photo-fission (光核分裂)の断面積:フォトンのエネルギーが 5.7 MeV のあたりから断面積が急に立ち上がる(障壁の高さが 5.7 MeV くらい)

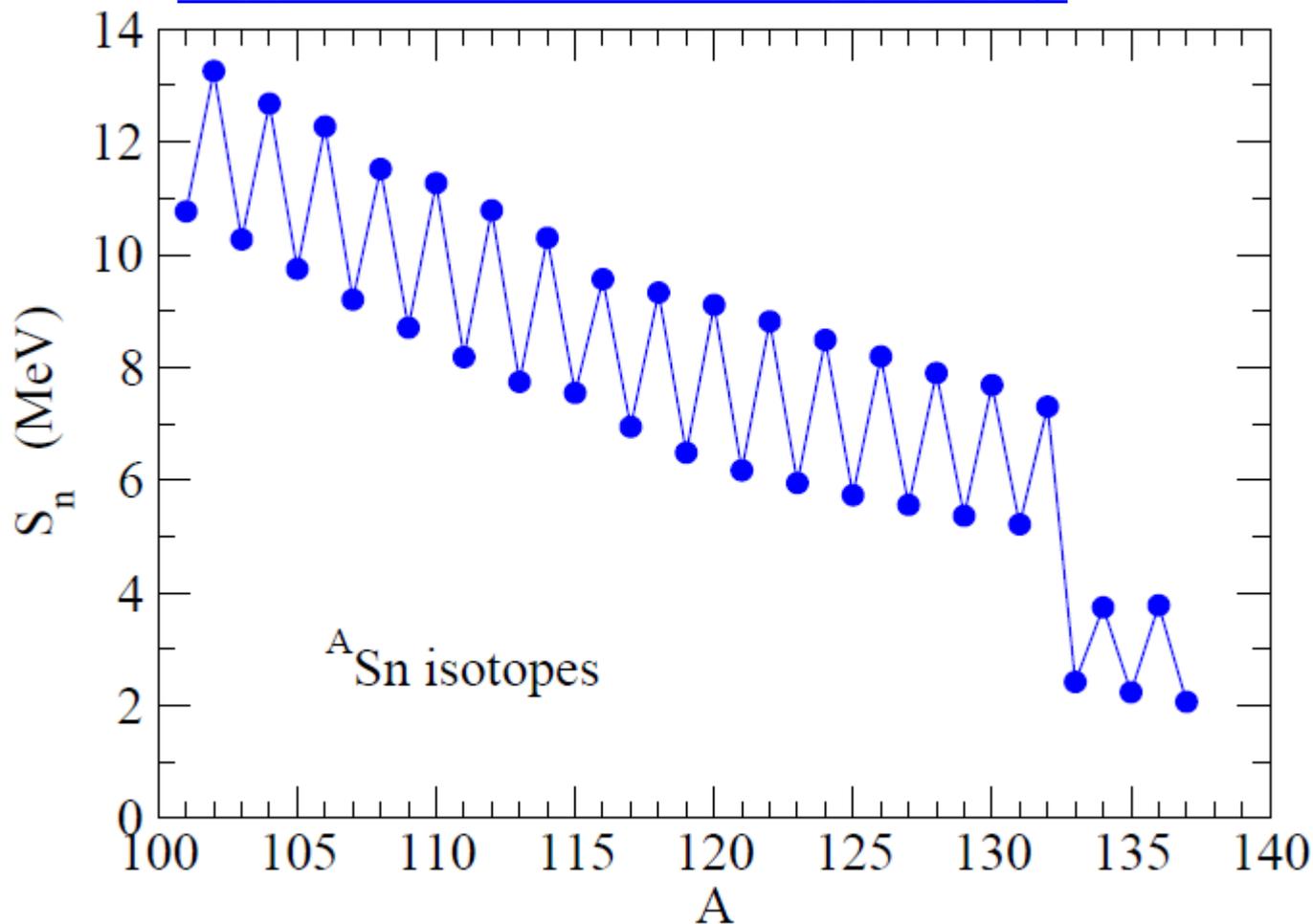
\*  $^{239}\text{U}$  の核分裂障壁の高さは同程度 (6.0 MeV)

## $^{236}\text{U}$ と $^{239}\text{U}$ で大きく違うのが1中性子分離エネルギー

$$S_n(^{236}\text{U}) = 6.3 \text{ MeV}$$

$$S_n(^{239}\text{U}) = 4.8 \text{ MeV}$$

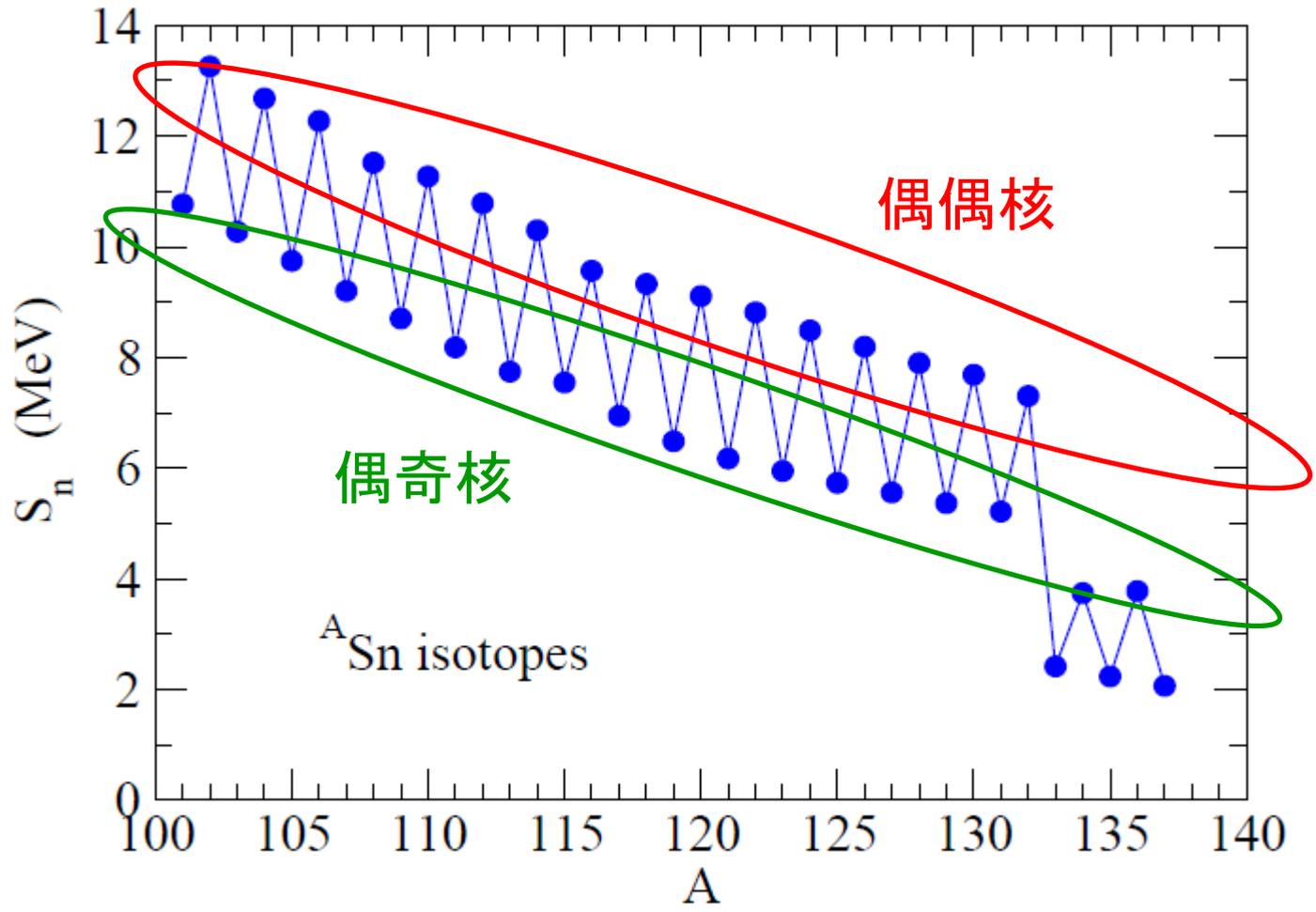
### 分離エネルギーにおける偶奇効果



1n separation energy:  $S_n(A,Z) = B(A,Z) - B(A-1,Z)$

偶数個の中性子から1つ中性子  
 を取る方が奇数個から取るより  
 大きなエネルギーが必要: 対相関

even-odd staggering



1n separation energy:  $S_n (A,Z) = B(A,Z) - B(A-1,Z)$

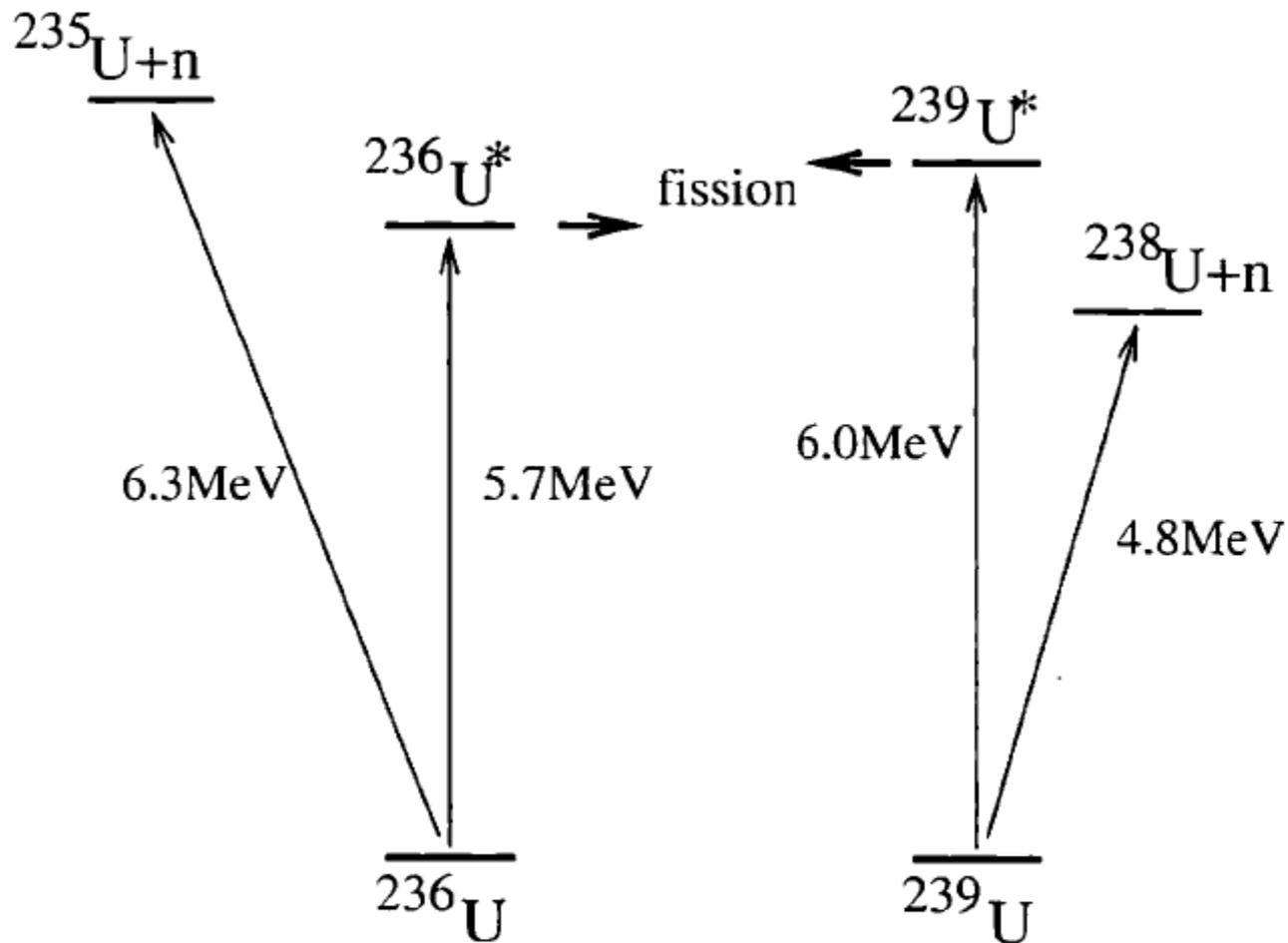


Fig. 6.6. Levels of the systems  $A = 236$  and  $A = 239$  involved in the fission of  $^{236}\text{U}$  and  $^{239}\text{U}$ . The addition of a motionless (or thermal) neutron to  $^{235}\text{U}$  can lead to the fission of  $^{236}\text{U}$ . On the other hand, fission of  $^{239}\text{U}$  requires the addition of a neutron of kinetic energy  $T_n = 6.0 - 4.8 = 1.2 \text{ MeV}$ .

核分裂障壁の高さと1中性子分離エネルギーの関係

