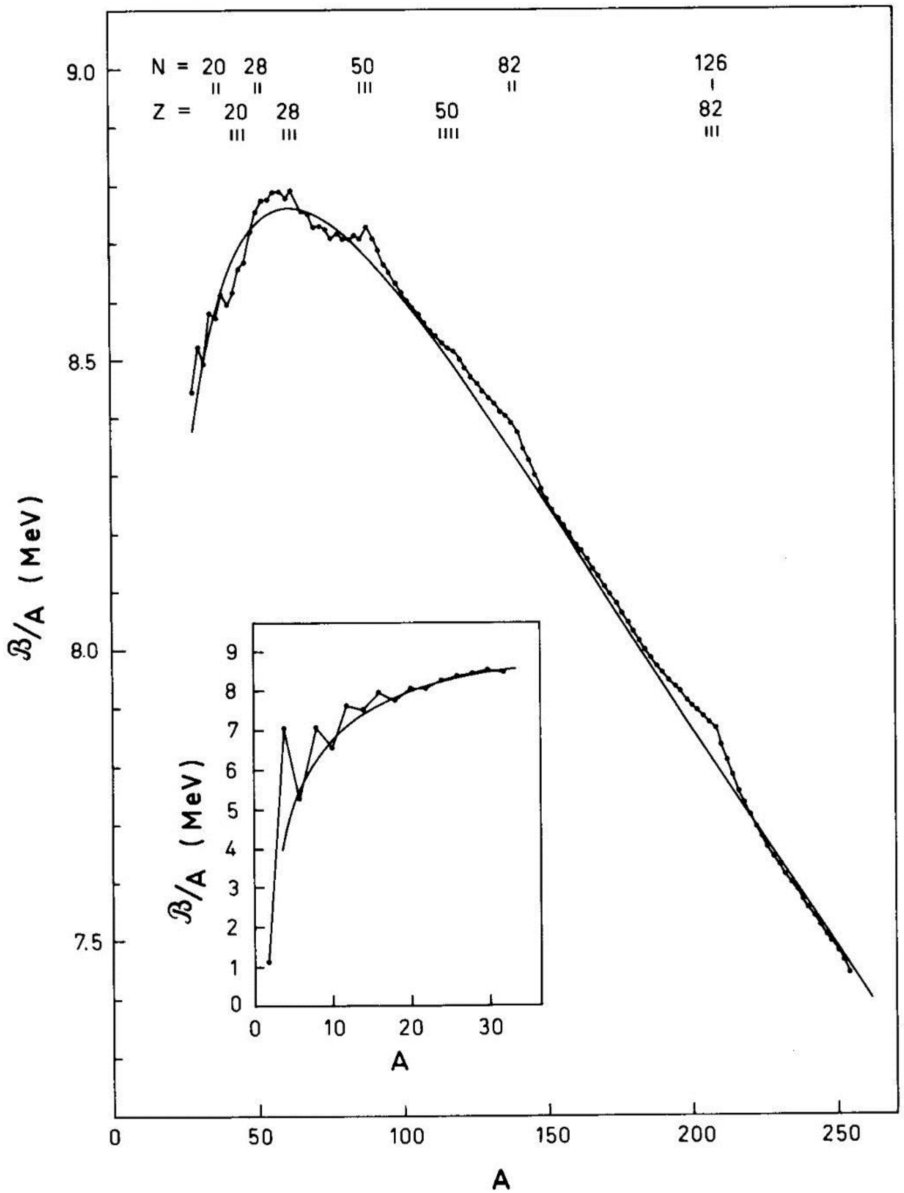
殻構造

$$B(N,Z) = B_{\rm macro}(N,Z) + B_{\rm micro}(N,Z)$$



- スムーズな関数

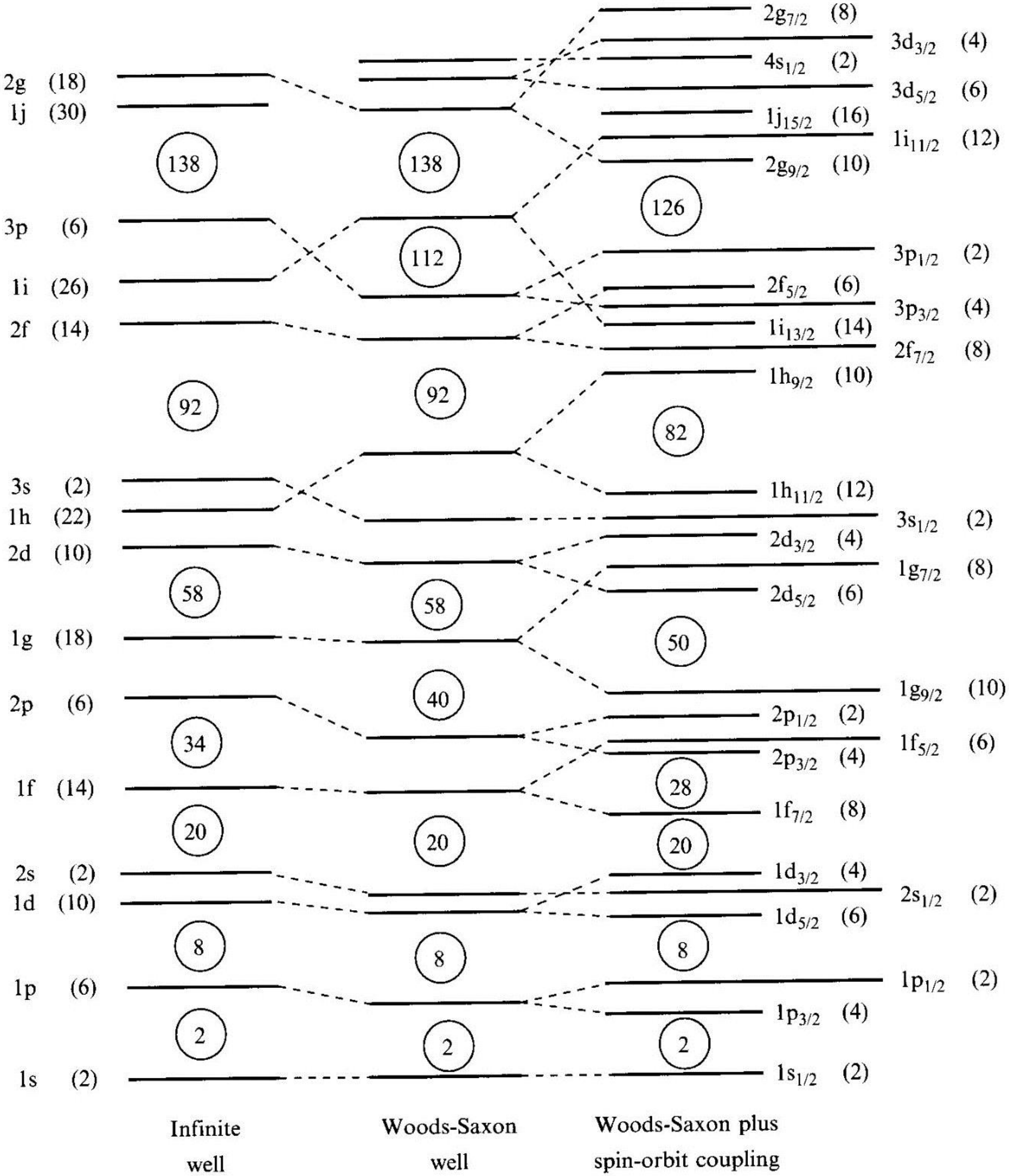
$$B_{\rm macro}(N,Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\rm sym}\frac{(N-Z)^2}{A}$$

- ゆらぎ

$$B_{\rm micro} = B_{\rm pair} + B_{\rm shell}$$

液滴模型:

$$B_{\rm LDM} = B_{\rm macro} + B_{\rm pair}$$

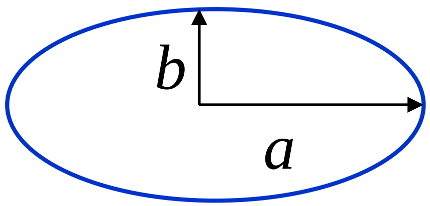


2g (18)
1j (30)
138
3p (6)
1i (26)
2f (14)
92
3s (2)
1h (22)
2d (10)
58
1g (18)
2p (6)
34
1f (14)
20
2s (2)
1d (10)
8
1p (6)
2
1s (2)
Infinite well
138
112
92
58
40
20
8
2
Woods-Saxon well
$2g_{7/2}$ (8)
$3d_{3/2}$ (4)
$4s_{1/2}$ (2)
$3d_{5/2}$ (6)
$1j_{15/2}$ (16)
$1i_{11/2}$ (12)
$2g_{9/2}$ (10)
126
$3p_{1/2}$ (2)
$2f_{5/2}$ (6)
$3p_{3/2}$ (4)
$1i_{13/2}$ (14)
$2f_{7/2}$ (8)
$1h_{9/2}$ (10)
82
$1h_{11/2}$ (12)
$3s_{1/2}$ (2)
$2d_{3/2}$ (4)
$1g_{7/2}$ (8)
$2d_{5/2}$ (6)
50
$1g_{9/2}$ (10)
$2p_{1/2}$ (2)
$1f_{5/2}$ (6)
$2p_{3/2}$ (4)
28
$1f_{7/2}$ (8)
20
$1d_{3/2}$ (4)
$2s_{1/2}$ (2)
$1d_{5/2}$ (6)
8
$1p_{1/2}$ (2)
$1p_{3/2}$ (4)
2
$1s_{1/2}$ (2)
Woods-Saxon plus spin-orbit coupling

液滴模型による原子核の変形

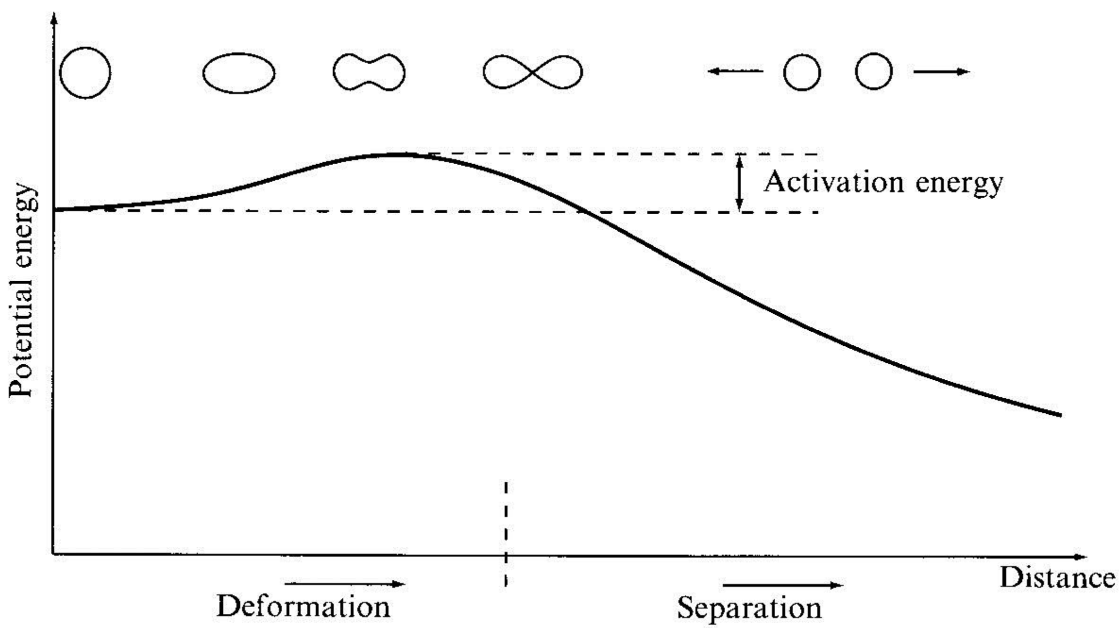
$$B(N,Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\mathrm{sym}} \frac{(N-Z)^2}{A}$$

回転楕円体



$$\begin{aligned} a &= R \cdot (1+\epsilon) \\ b &= R \cdot (1+\epsilon)^{-1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{surf}} &= E^{(0)}_{\mathrm{surf}} (1 + 2\epsilon^2/5 + \cdots) \\ E_C &= E^{(0)}_C (1 - \epsilon^2/5 + \cdots) \end{aligned}$$



原子核の変形

原子核の変形にともなうエネルギーの変化

$$E(\beta) = E_{LDM}(\beta) + E_{\mathrm{shell}}(\beta)$$

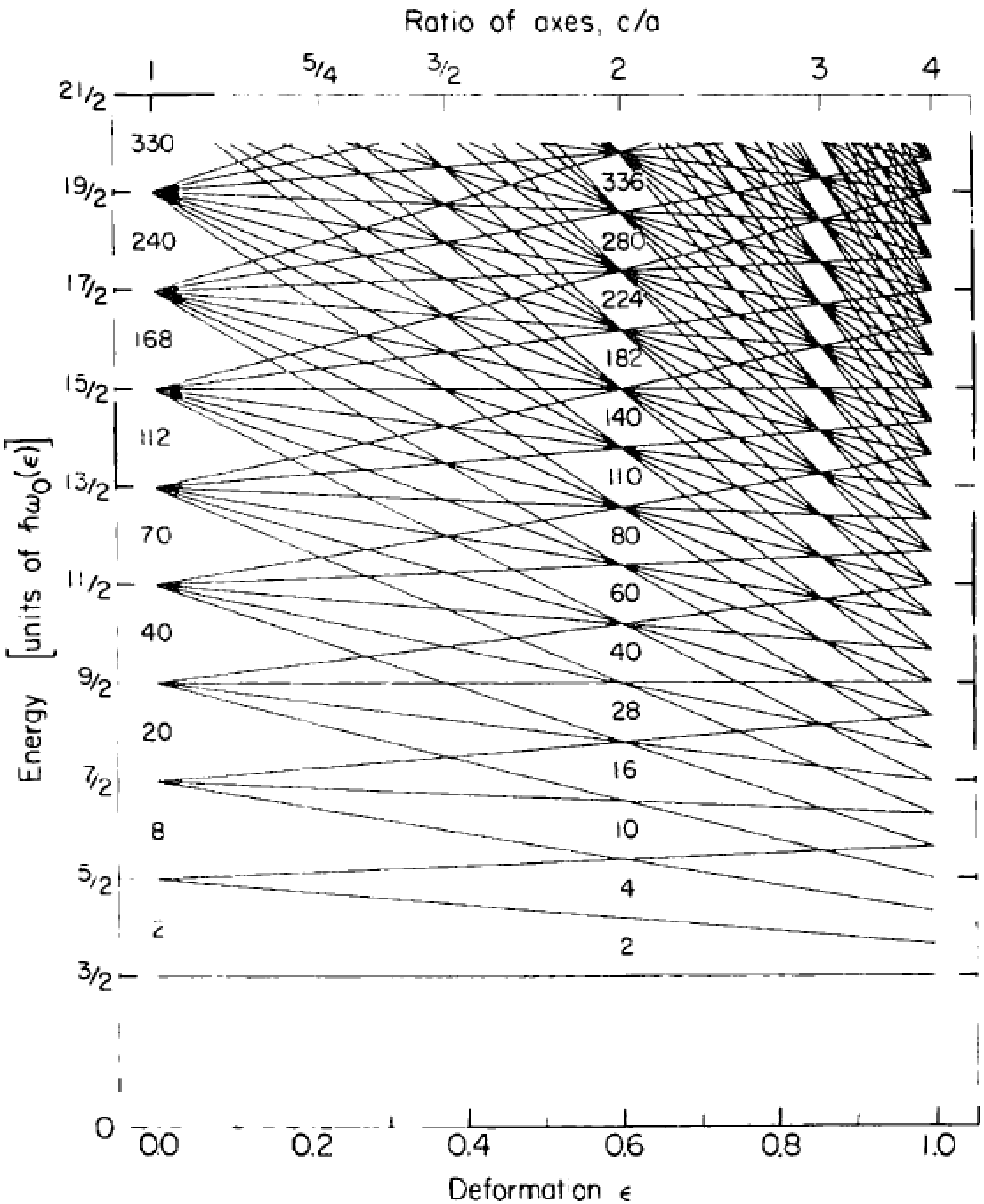
原子核が変形
$\longrightarrow$ 核子が感じるポテンシャルも変形
$\longrightarrow$ 変形度によって異なる量子力学的補正（殻効果）

変形したポテンシャル（球対称からずれたポテンシャル）

例）3次元調和振動子　$H = \dfrac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + \dfrac{1}{2}m\omega_z^2 z^2 + \dfrac{1}{2}m\omega_\perp^2(x^2+y^2)$

$$E = (n_z + 1/2)\hbar\omega_z + (n_x + n_y + 1)\hbar\omega_\perp$$

$\omega_z = \omega_\perp$ のとき	n$_x$	n$_y$	n$_z$	$\omega_z < \omega_\perp$ のとき
	0	0	0	
	0	0	1	
縮退	1	0	0	縮退
	0	1	0	
	0	0	2	
	0	1	1	縮退
	1	0	1	
縮退	1	1	0	
	2	0	0	縮退
	0	2	0	



$$\omega_\perp = \omega_0(1+\epsilon/3)$$
$$\omega_z = \omega_0(1-2\epsilon/3)$$

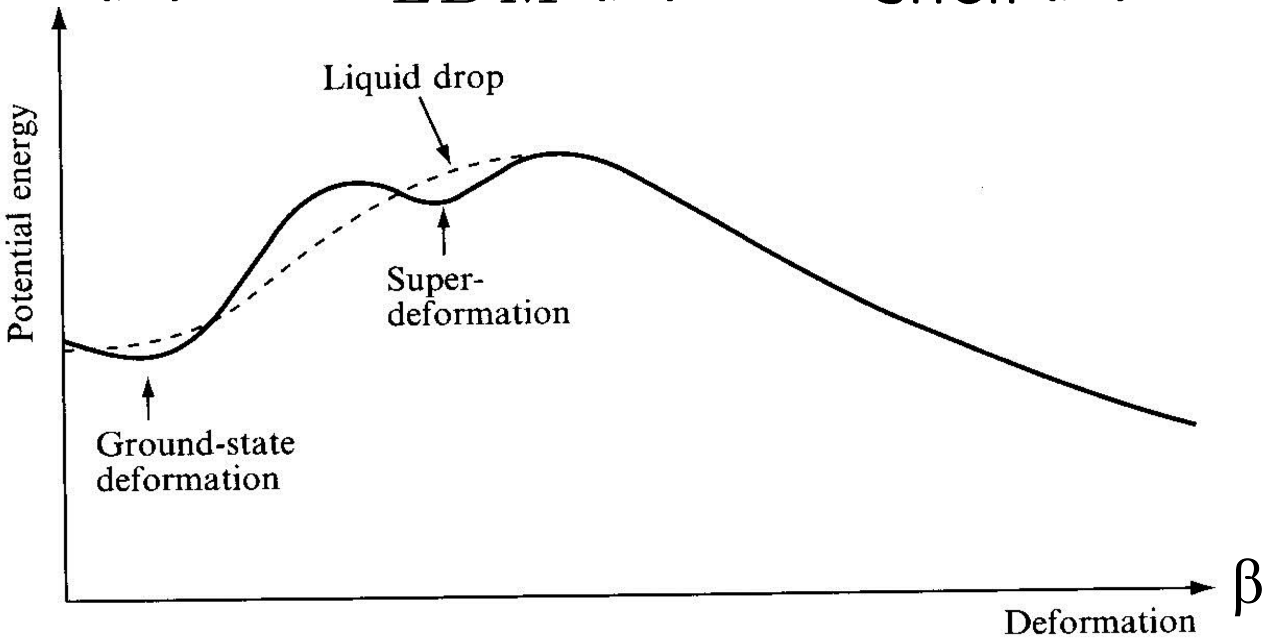
$$\epsilon = (\omega_\perp - \omega_z)/\omega_0$$

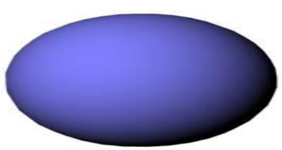
Figure 2.25. Energy levels of an harmonic-oscillator potential for prolate spheroidal deformations ϵ. (From [MN 73].)

原子核の変形

原子核の変形にともなうエネルギーの変化

$$E(\beta) = E_{LDM}(\beta) + E_{\mathrm{shell}}(\beta)$$



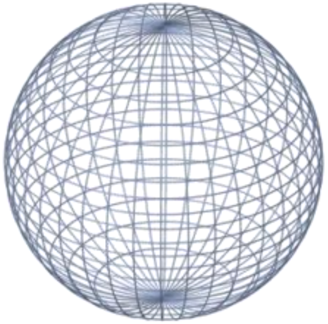


液滴模型 ⟹ 必ず球形

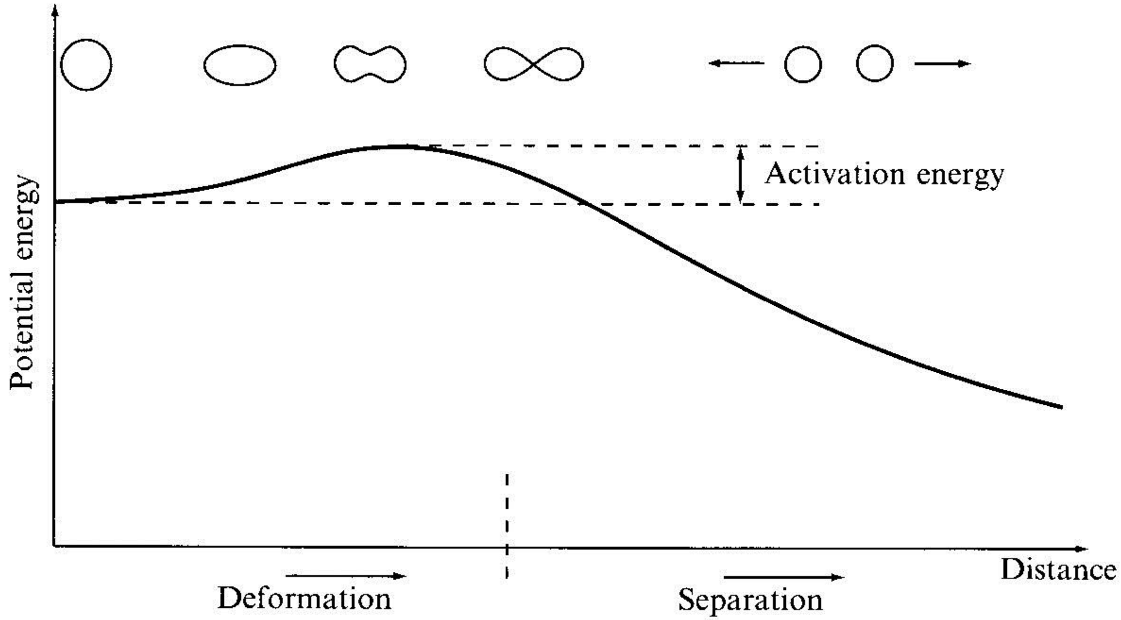
殻補正 ⟹ 変形状態が基底状態になる場合あり

＊対称性の自発的破れ

原子核の変形

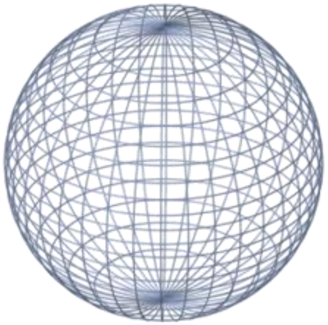


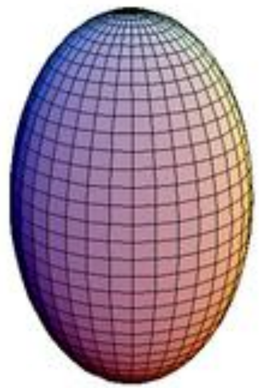
球形

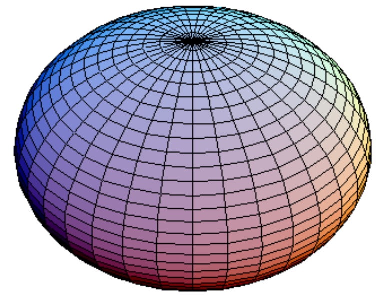


Potential energy
Activation energy
Distance
Deformation
Separation

回転楕円体





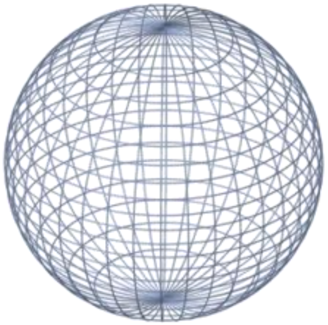


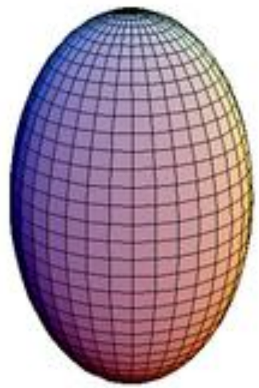
球形　プロレート　オブレート　三軸非対称

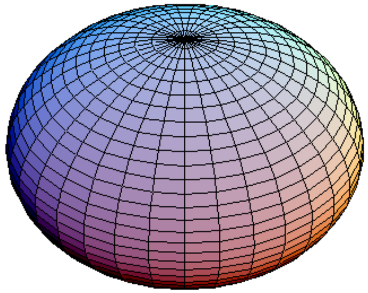
殻効果

$$B_{\mathrm{micro}} = B_{\mathrm{pair}} + B_{\mathrm{shell}}$$

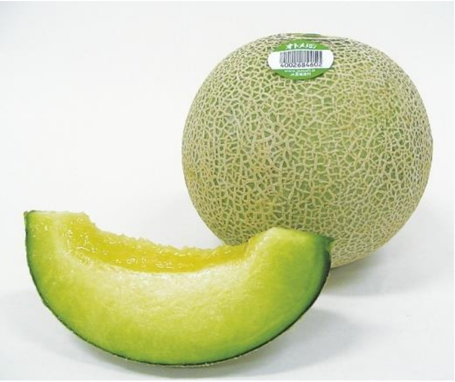
回転楕円体

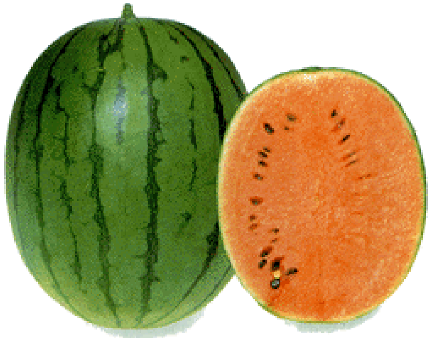






球形　　プロレート　　オブレート　　三軸非対称





$\beta = 0$

$\beta > 0$
$\gamma = 0$

$\beta < 0$
$\gamma = 0$

$\beta > 0$
$0 < \gamma < \pi/3$

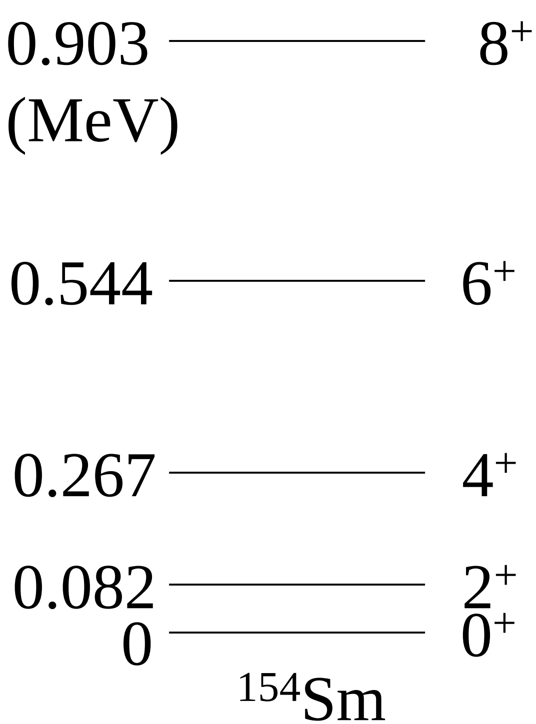
原子核の変形

cf. 剛体の回転エネルギー（古典力学）

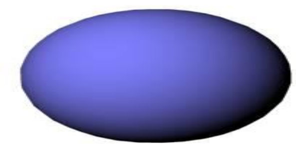
$$E = \frac{1}{2}\mathcal{J}\omega^2 = \frac{I^2}{2\mathcal{J}}$$

$$(I = \mathcal{J}\omega, \ \ \omega = \dot{\theta})$$

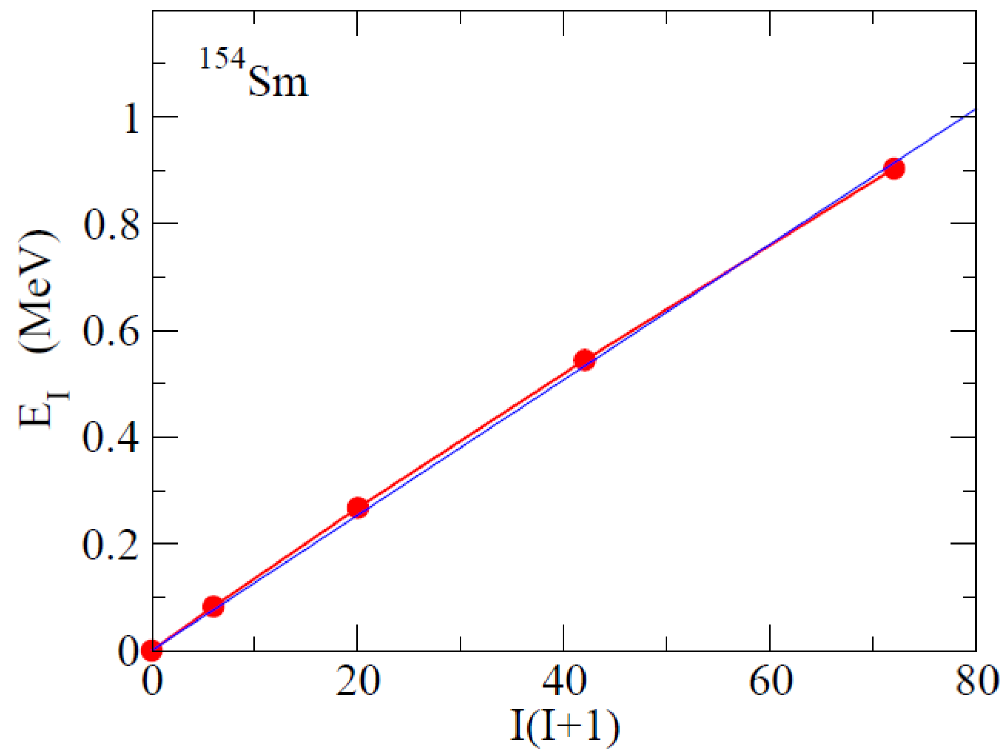
^{154}Sm の励起スペクトル



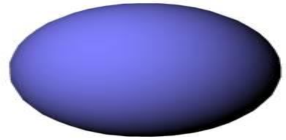
^{154}Sm は変形している



$$E_I \sim \frac{I(I+1)\hbar^2}{2\mathcal{J}}$$



原子核の変形



^{154}Sm の励起スペクトル

0.903 (MeV)	8^+
0.544	6^+
0.267	4^+
0.082	2^+
0	0^+

^{154}Sm

$$\boxed{E_I \sim \frac{I(I+1)\hbar^2}{2\mathcal{J}}}$$

Cf. 剛体の回転エネルギー（古典力学）

$$E = \frac{1}{2}\mathcal{J}\omega^2 = \frac{I^2}{2\mathcal{J}}$$

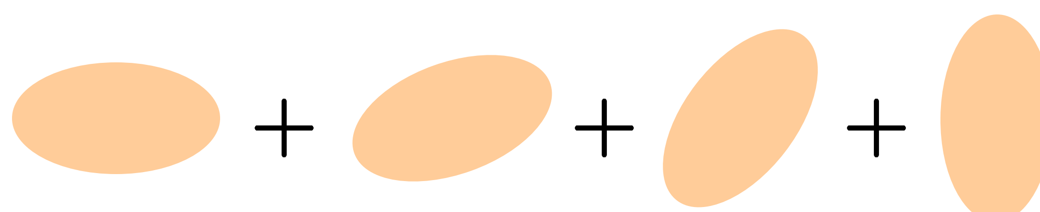
$$(I = \mathcal{J}\omega, \;\; \omega = \dot{\theta})$$

^{154}Sm は変形している

(note) 0^+ 状態とは（量子力学）？

0^+: 空間の異方性がない

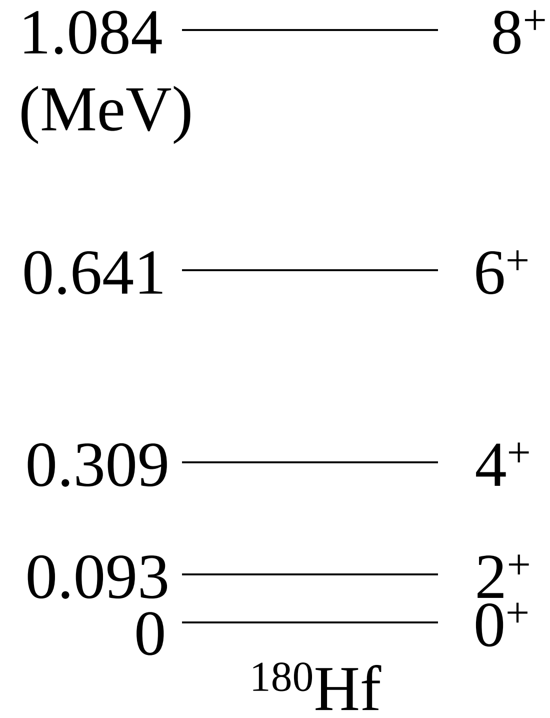
→ 色々な向きが等確率で混ざっている



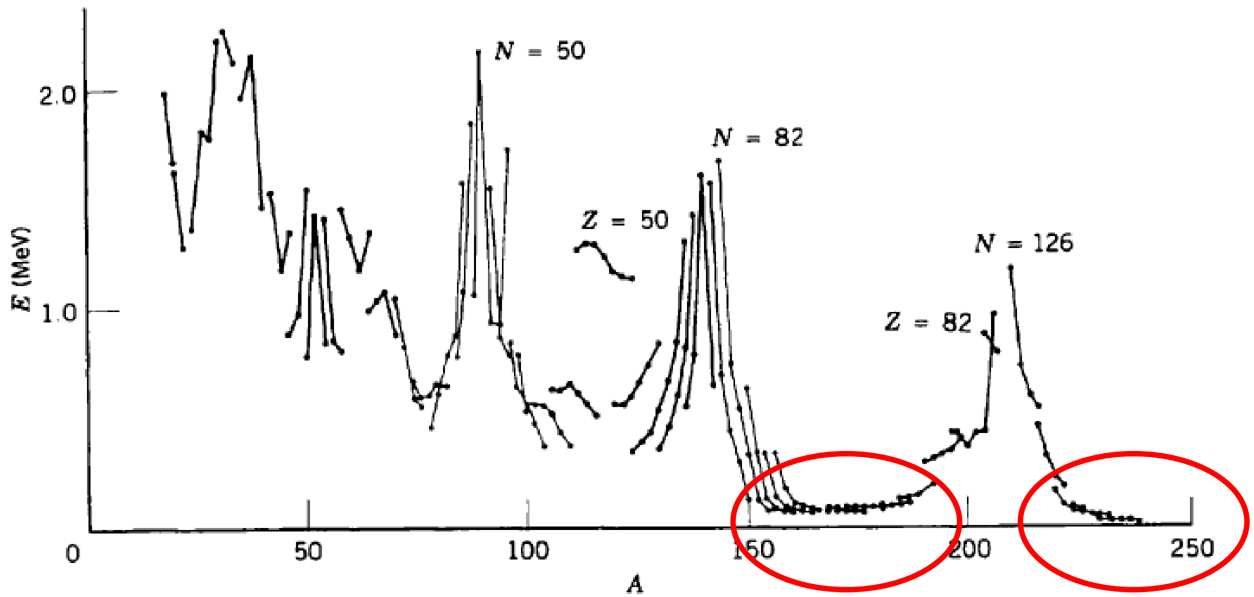
原子核が変形している証拠

- 回転バンドの存在

$$E_I = \frac{I(I+1)\hbar^2}{2\mathcal{J}}$$

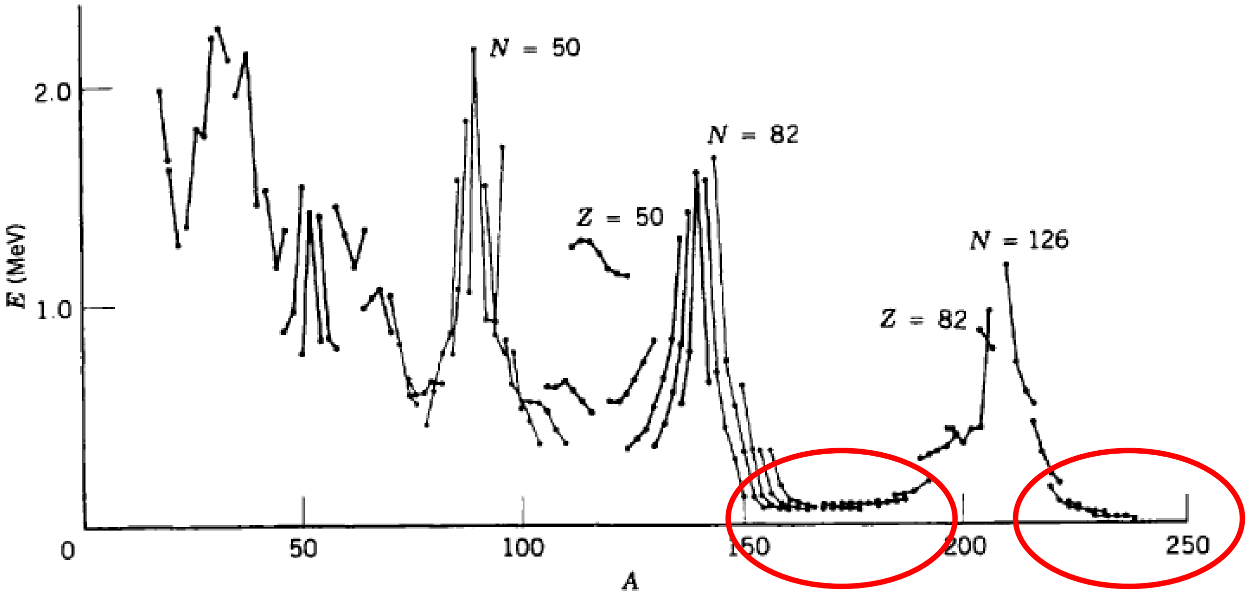


偶偶核の 2^+ 状態のエネルギー



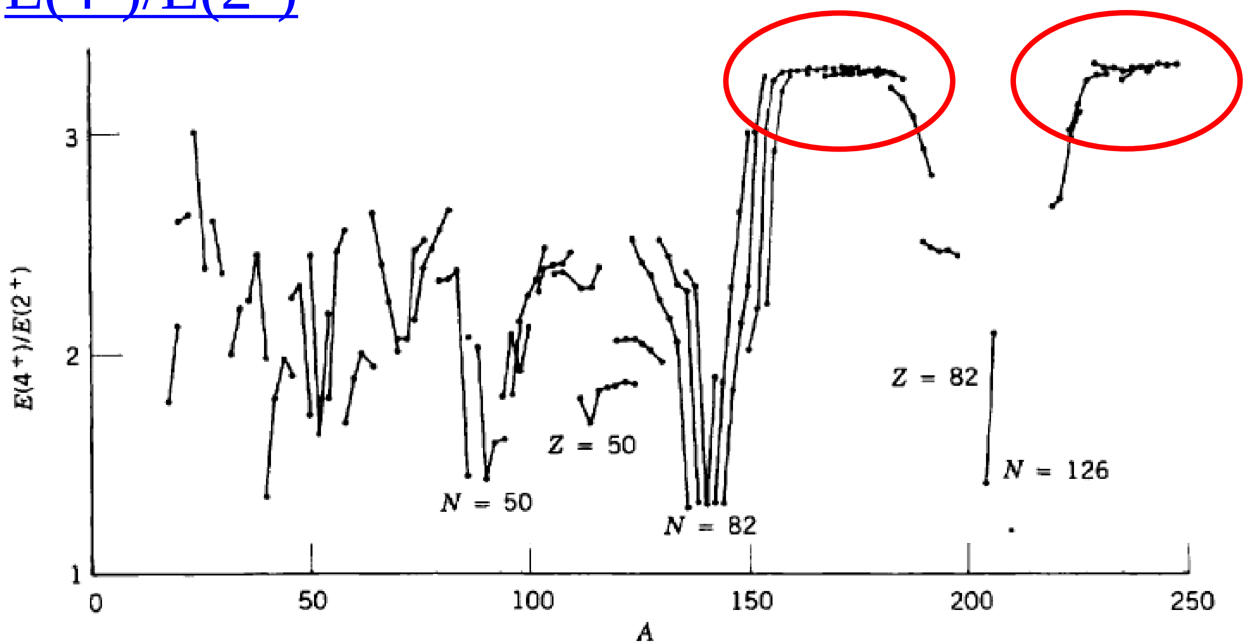
変形核

K.S. Krane, “Introductory Nuclear Physics”



変形核

E(4⁺)/E(2⁺)



変形核なら

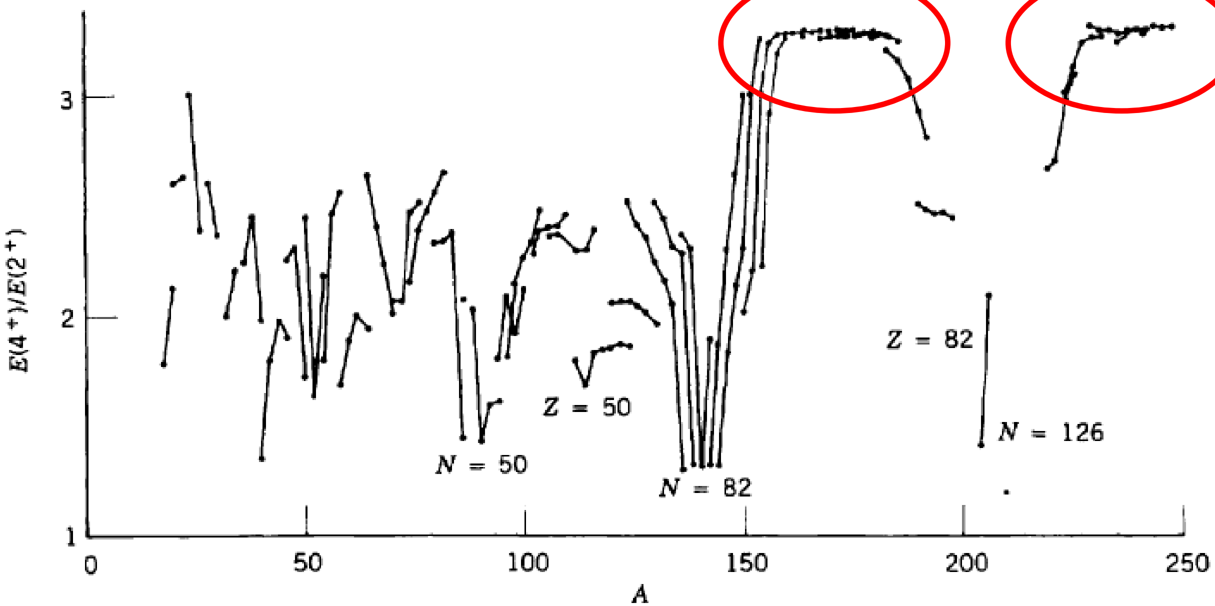
$E(4^+)/E(2^+) \sim 3.3$

球形核なら

$E(4^+)/E(2^+) \sim 2$

K.S. Krane, "Introductory Nuclear Physics"

偶偶核における E(4$^+$)/E(2$^+$)

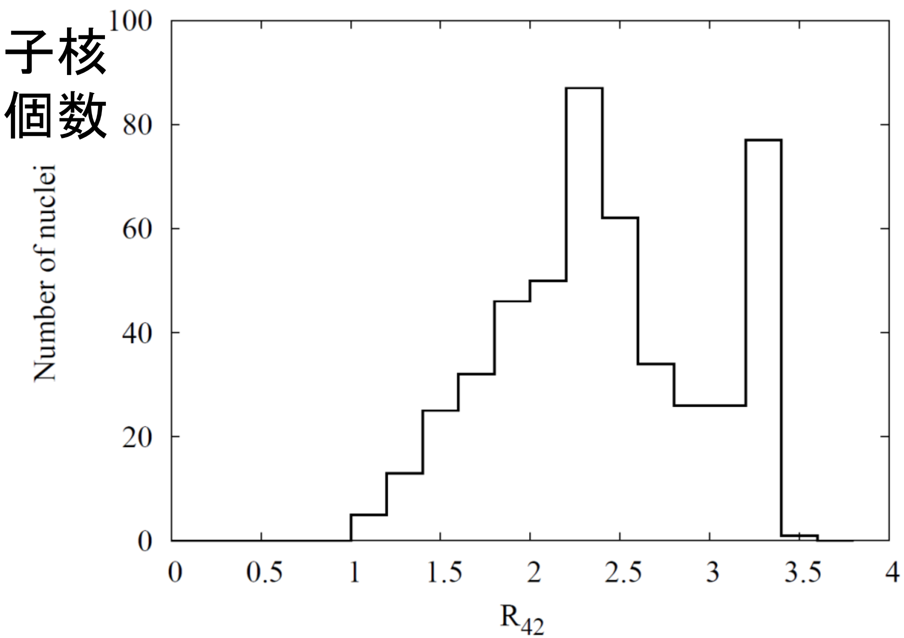


変形核なら
E(4$^+$)/E(2$^+$) ~ 3.3

球形核なら
E(4$^+$)/E(2$^+$) ~ 2

K.S. Krane, “Introductory Nuclear Physics”

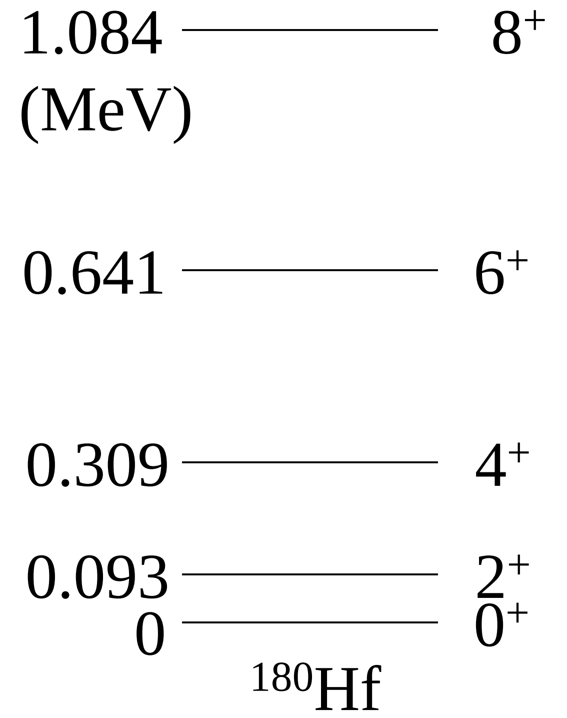
原子核の個数



E(4$^+$)/E(2$^+$)

G.F. Bertsch,
in “Fifty Years of Nuclear BCS”, p. 26

原子核が変形している証拠



- 回転バンドの存在

$$E_I = \frac{I(I+1)\hbar^2}{2\mathcal{J}}$$

- 非常に大きな四重極モーメント
  (奇数個の核子を持つ原子核や励起状態)

$$Q = e\sqrt{\frac{16\pi}{5}}\langle \Psi_{II} | r^2 Y_{20} | \Psi_{II} \rangle$$

- 四重極遷移確率の増大

偶偶核の 2$^+$ 状態の四重極モーメント

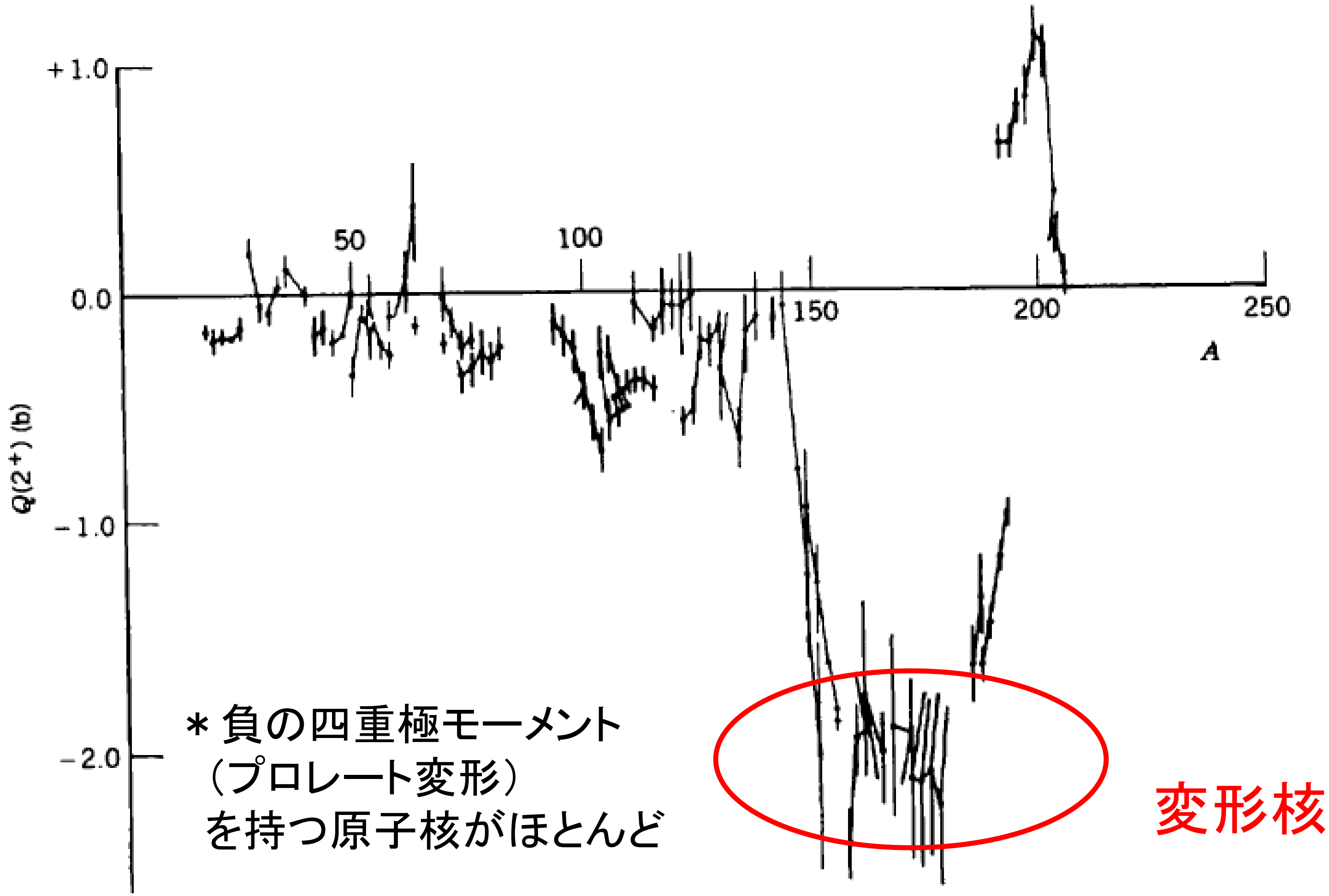


Figure 5.16*b* Electric quadrupole moments of lowest 2$^+$ states of even-Z, even-N nuclei. The lines connect sequences of isotopes.

K.S. Krane, “Introductory Nuclear Physics”

原子核が変形している証拠

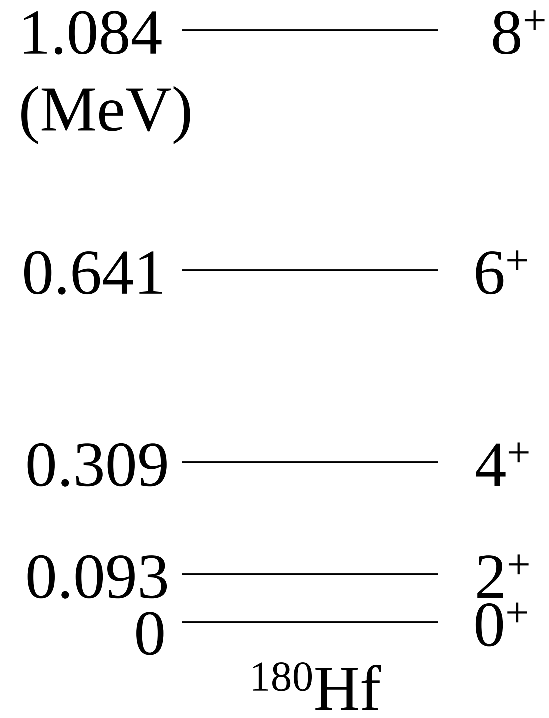
- 回転バンドの存在

$$E_I = \frac{I(I+1)\hbar^2}{2\mathcal{J}}$$

- 非常に大きな四重極モーメント
(奇数個の核子を持つ原子核や励起状態)

$$Q = e\sqrt{\frac{16\pi}{5}}\langle \Psi_{II} | r^2 Y_{20} | \Psi_{II} \rangle$$

- 四重極遷移確率の増大
- 一粒子スペクトル



変形核の一粒子準位
（ニルソン・レベル）

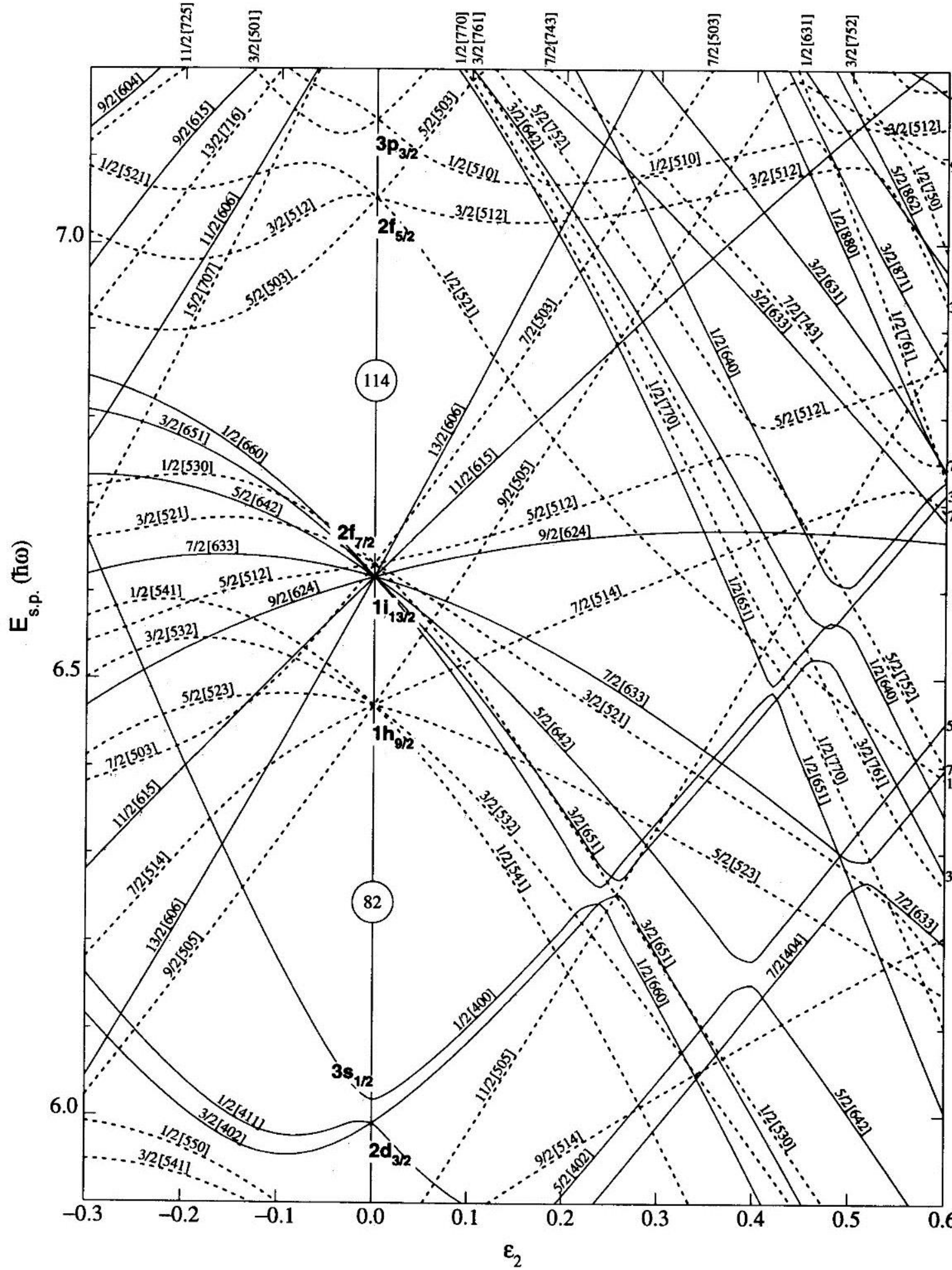
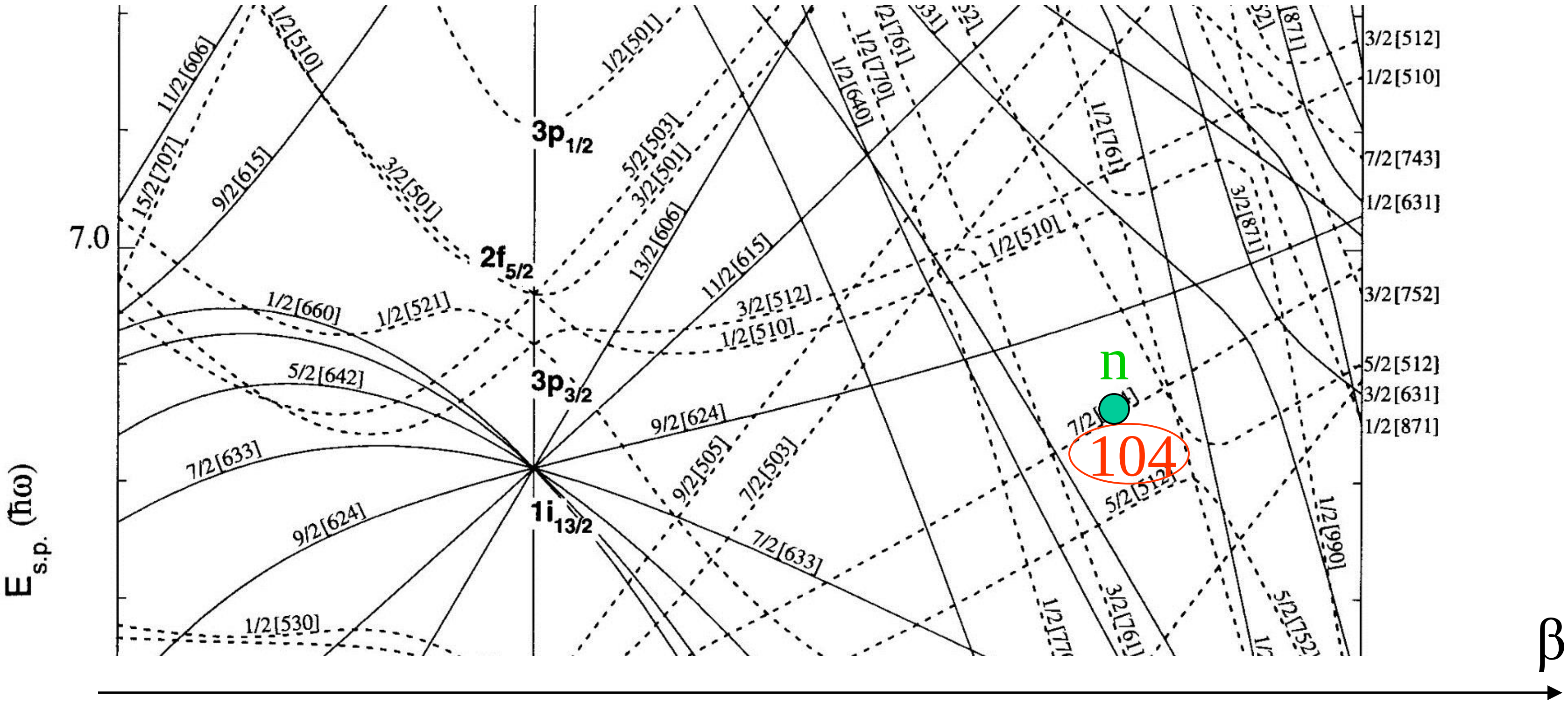


Figure 13. Nilsson diagram for protons, Z ≥ 82 ($\varepsilon_4 = \varepsilon_2^2/6$).

変形核の一粒子準位

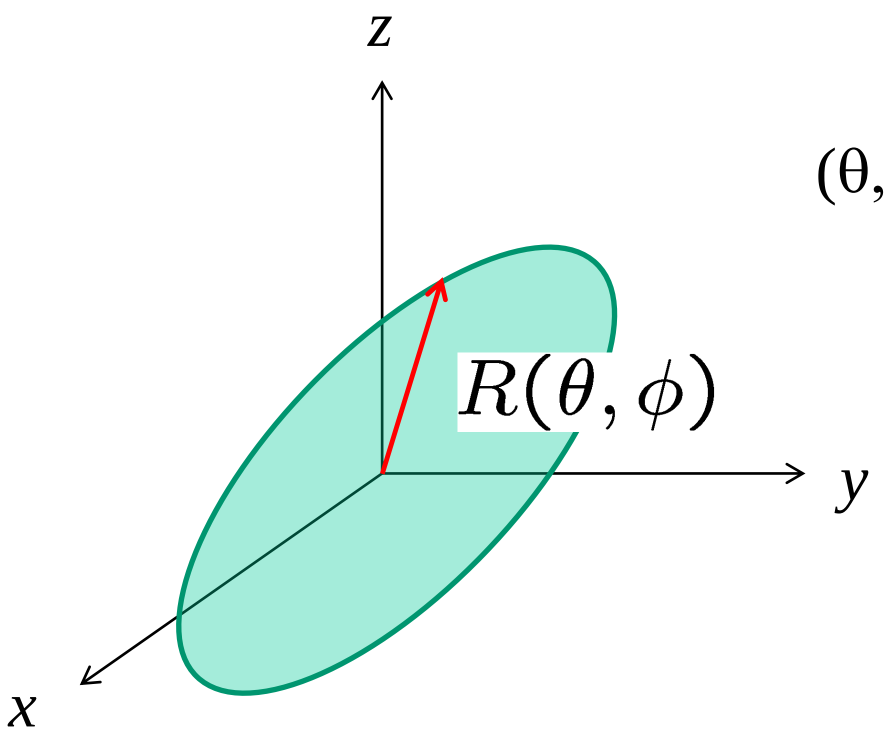


$5/2^-$ ——— 0.508

$9/2^+$ ——— 0.321 $\qquad {}^{177}_{72}\mathrm{Hf}_{105}$

$7/2^-$ ——— 0

変形パラメーター



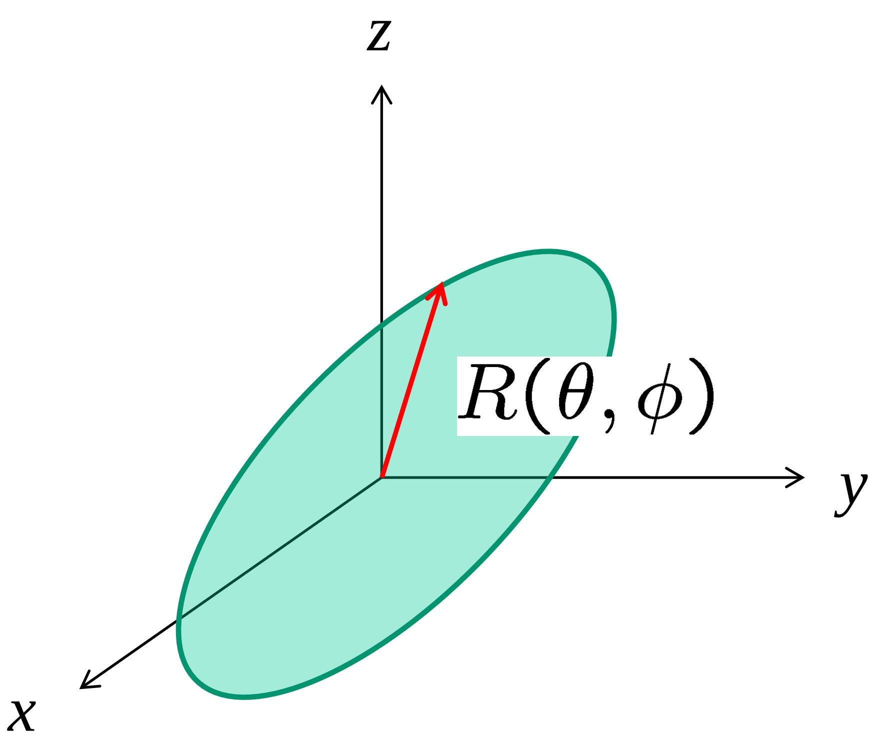
(θ,φ) 方向の半径: $R(\theta,\phi)$

任意の関数は球面調和関数で展開できる:

$$\boxed{R(\theta,\phi) = R_0\left(1 + \sum_{\lambda,\mu} \alpha_{\lambda\mu} Y^*_{\lambda\mu}(\theta,\phi)\right)}$$

$\alpha_{\lambda\mu}$: 変形パラメーター

変形パラメーター



$$R(\theta,\phi) = R_0\left(1+\sum_{\lambda,\mu}\alpha_{\lambda\mu}Y^*_{\lambda\mu}(\theta,\phi)\right)$$

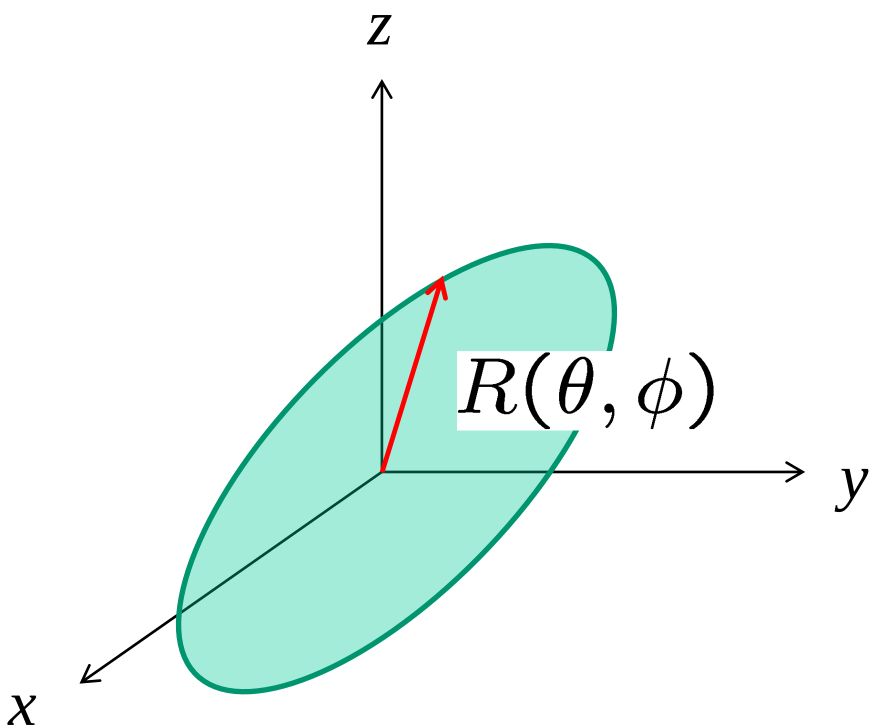
最も重要な変形は $\lambda = 2$
（四重極変形）

$\lambda = 0$: R_0 に吸収
$\lambda = 1$: 重心の位置を変えるだけ
（原点を適当にとれば
$\alpha_{1\mu} = 0$ とすることができる）
$\lambda = 2$:楕円体型の変形

以下、$\lambda = 2$ に話を限定 $$R(\theta,\phi) = R_0\left(1+\sum_{\mu}\alpha_{2\mu}Y^*_{2\mu}(\theta,\phi)\right)$$

以下、λ = 2 に話を限定　$$R(\theta,\phi) = R_0\left(1+\sum_\mu \alpha_{2\mu}Y^*_{2\mu}(\theta,\phi)\right)$$

＊この時点で5個の独立なパラメーター：$\alpha_{22} \sim \alpha_{2\text{-}2}$



軸をうまく取りなおすことによってより表現が簡単になる

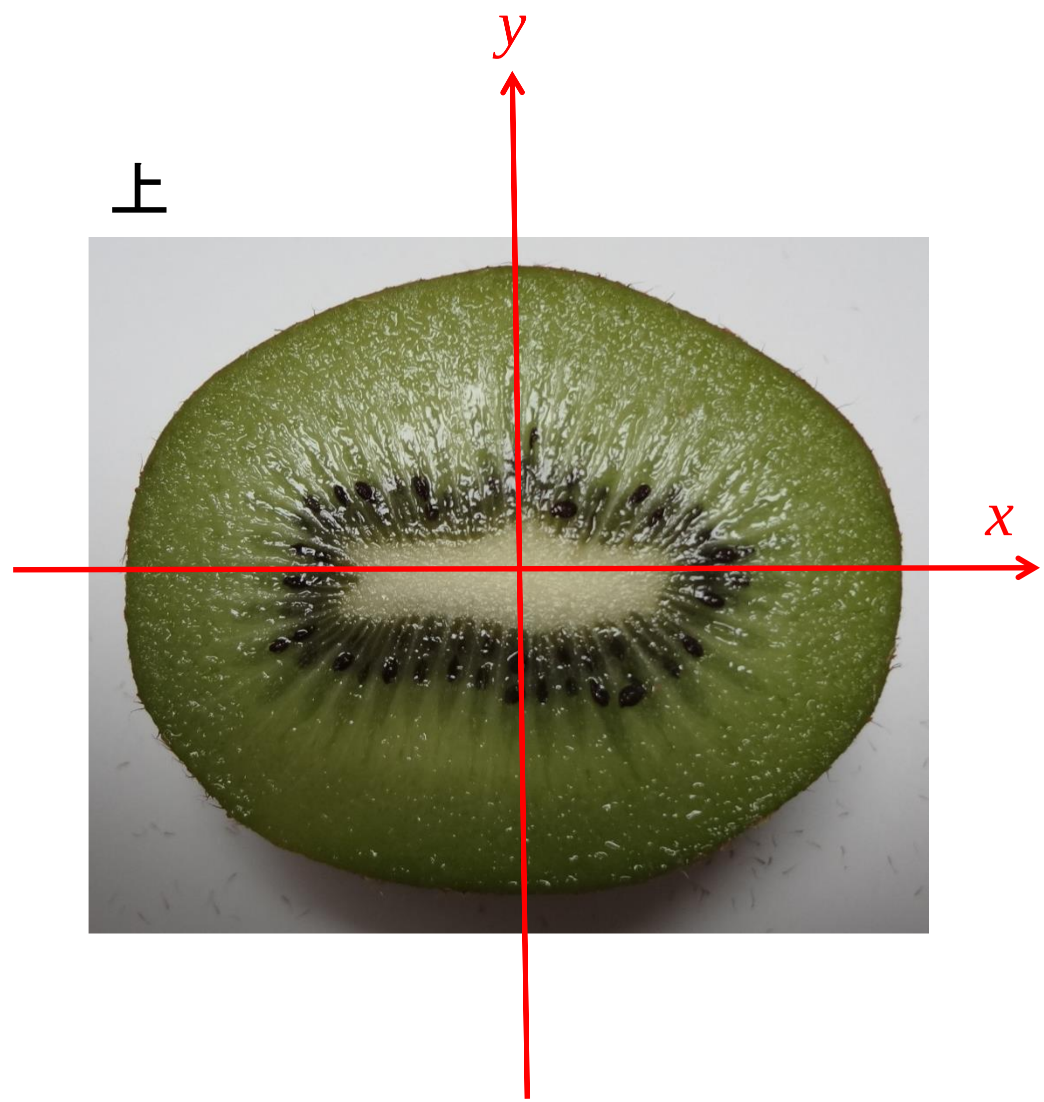
四重極変形の代表的な形はキウィ･フルーツ型

横からみた形

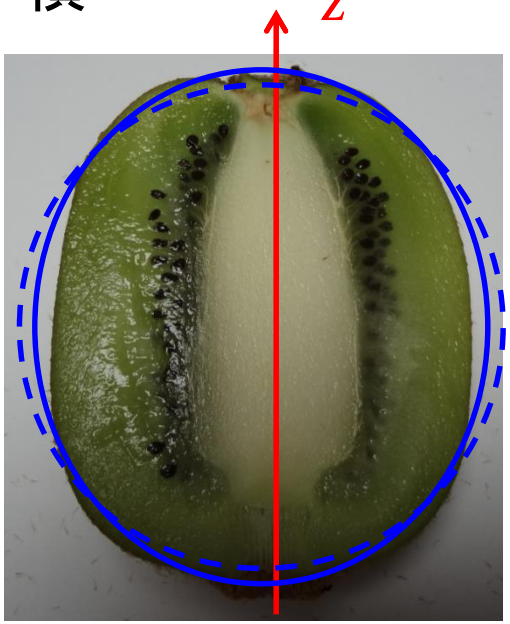
上からみた形

横

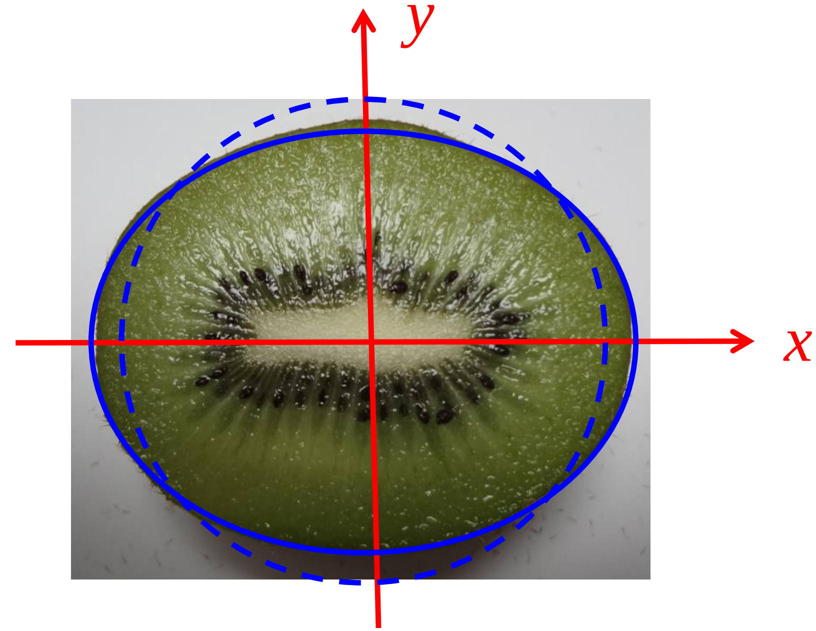
上



横



上



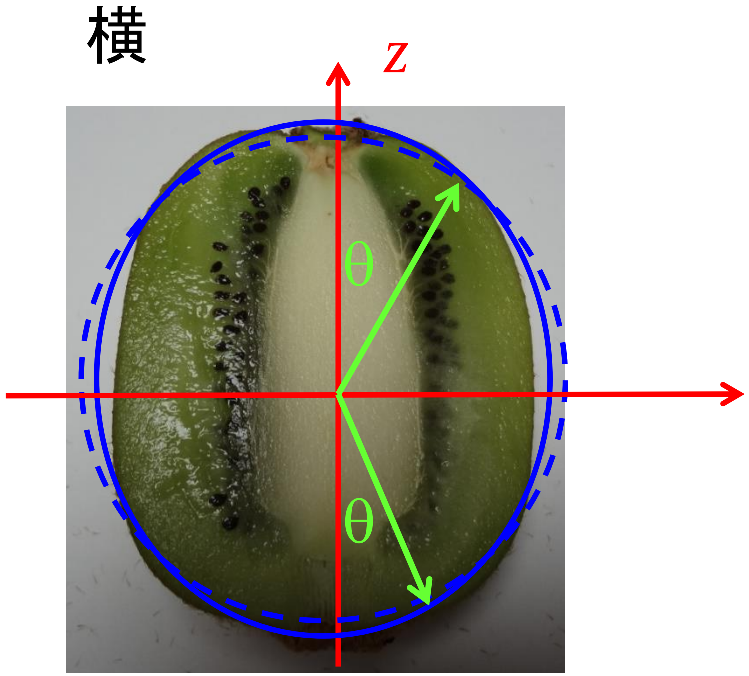
この形は2つのパラメーター（のみ）で記述できる

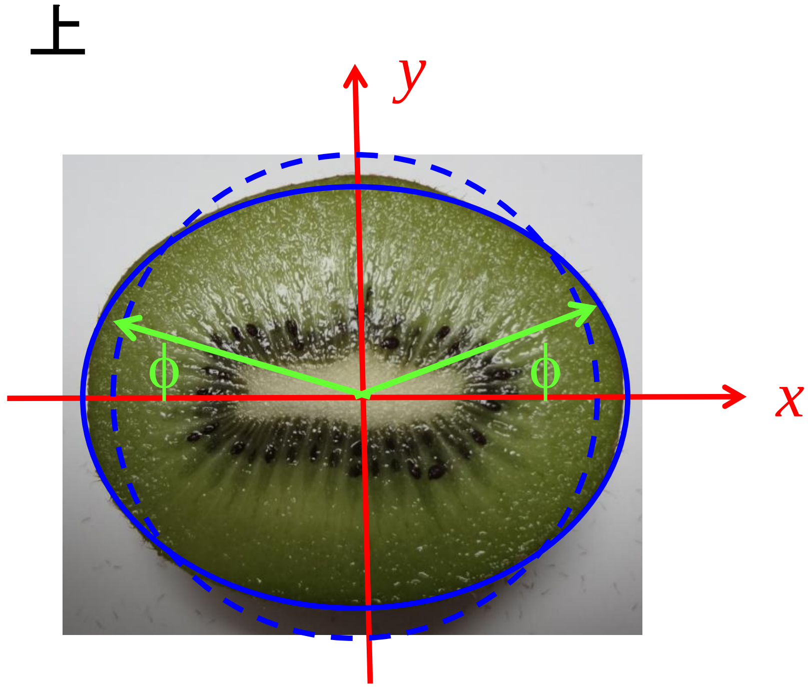
✓「横」から見た時にどのくらい円からずれているか

✓「上」から見た時にどのくらい円からずれているか

数学的には

$$R(\theta,\phi) = R_0\left[1 + a_{20}Y_{20}(\theta) + a_{22}\left(Y_{22}(\theta,\phi) + Y_{2-2}(\theta,\phi)\right)\right]$$





数学的には

$$
\begin{aligned}
R(\theta,\phi) &= R_0\left[1 + a_{20}Y_{20}(\theta)\right. \\
&\quad \left. + a_{22}(Y_{22}(\theta,\phi) + Y_{2-2}(\theta,\phi))\right]
\end{aligned}
$$

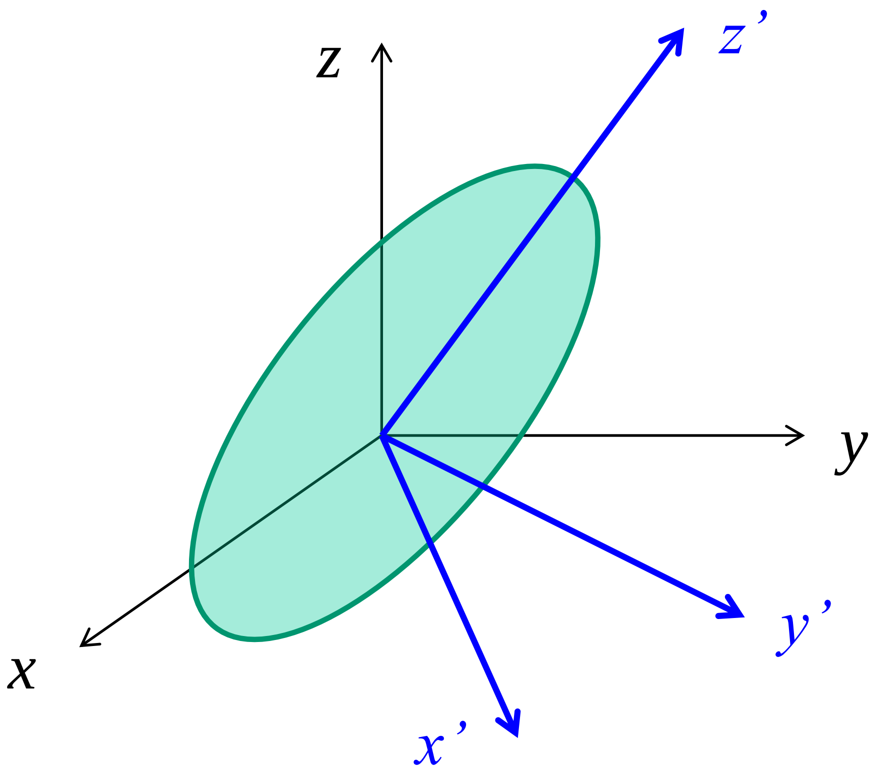
このようにとると、

$$
\begin{aligned}
R(\theta,\phi) &= R(\pi-\theta,\phi) \\
R(\theta,\phi) &= R(\theta,\pi-\phi)
\end{aligned}
$$

$$R(\theta,\phi) = R_0\left(1 + \sum_{\mu} \alpha_{2\mu} Y^*_{2\mu}(\theta,\phi)\right)$$

5個の独立なパラメーター：

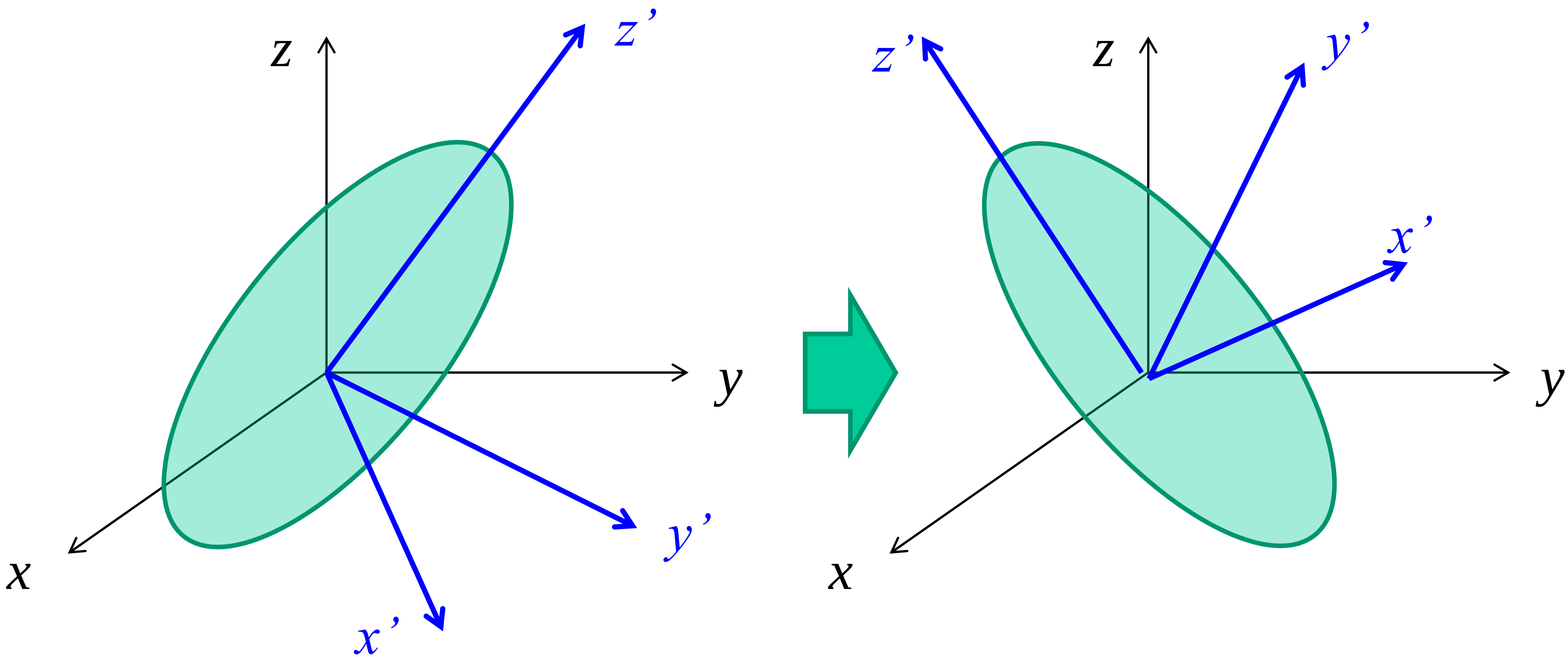
$\alpha_{22} \sim \alpha_{2\text{-}2}$



原子核の形状を表すパラメーター2つ：a_{20}, a_{22}

+取りなおした軸の方向を表す角度3つ（オイラー角）

原子核が回転すると軸も一緒に回転（物体固定系）
物体固定系から見ると、半径の式 $R(\theta,\phi)$ はいつも同じ



原子核の形状を表すパラメーター2つ：a_{20}, a_{22}
+取りなおした軸の方向を表す角度3つ（オイラー角）

$$R(\theta,\phi) = R_0\,[1 + a_{20}Y_{20}(\theta) + a_{22}(Y_{22}(\theta,\phi) + Y_{2-2}(\theta,\phi))]$$

$$\boxed{a_{20} \equiv \beta\cos\gamma, \quad a_{22} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\beta\sin\gamma}$$

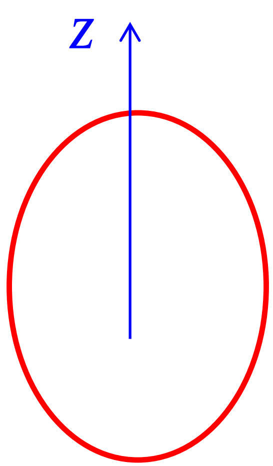
とよく書く。

（γ は軸対称性からのずれを表す）

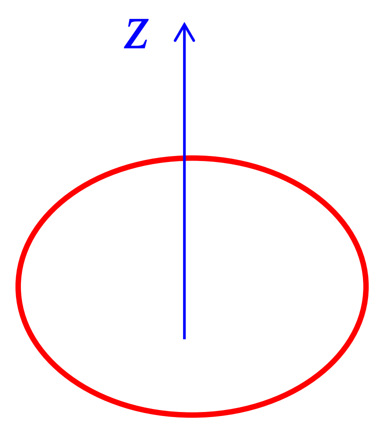
$\gamma = 0$ **のとき**: $a_{20} = \beta$, $a_{22} = 0$

$$R(\theta,\phi) = R_0\,[1 + \beta Y_{20}(\theta)]$$

半径は ϕ によらない：z 軸まわりの軸対称（回転楕円体）

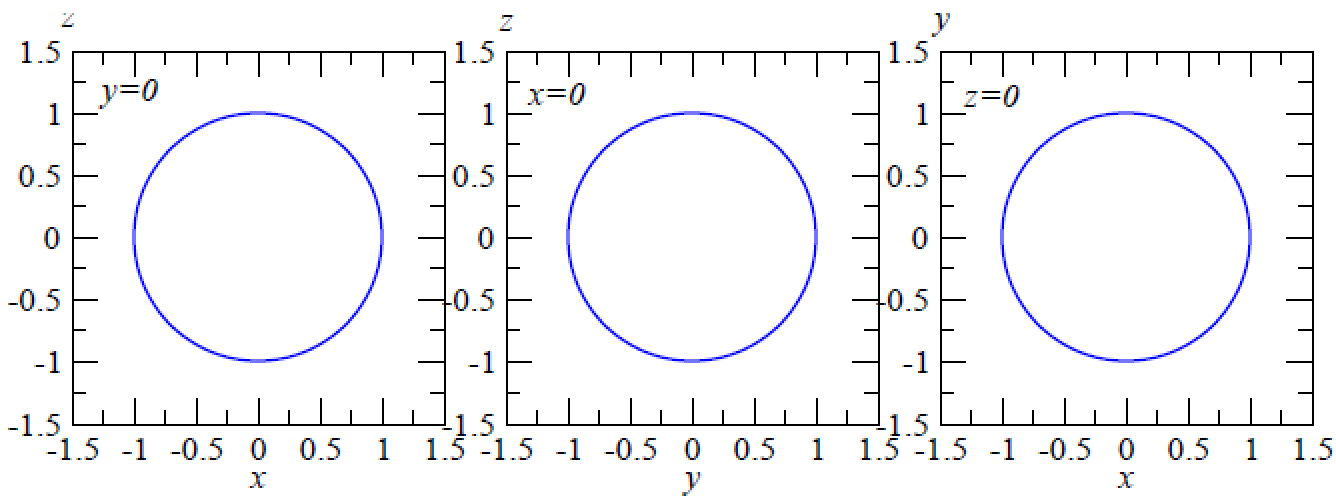


$\beta > 0$
プロレート変形



$\beta < 0$
オブレート変形

$\beta = 0$
（球形）



$y = 0$ で
切った平面

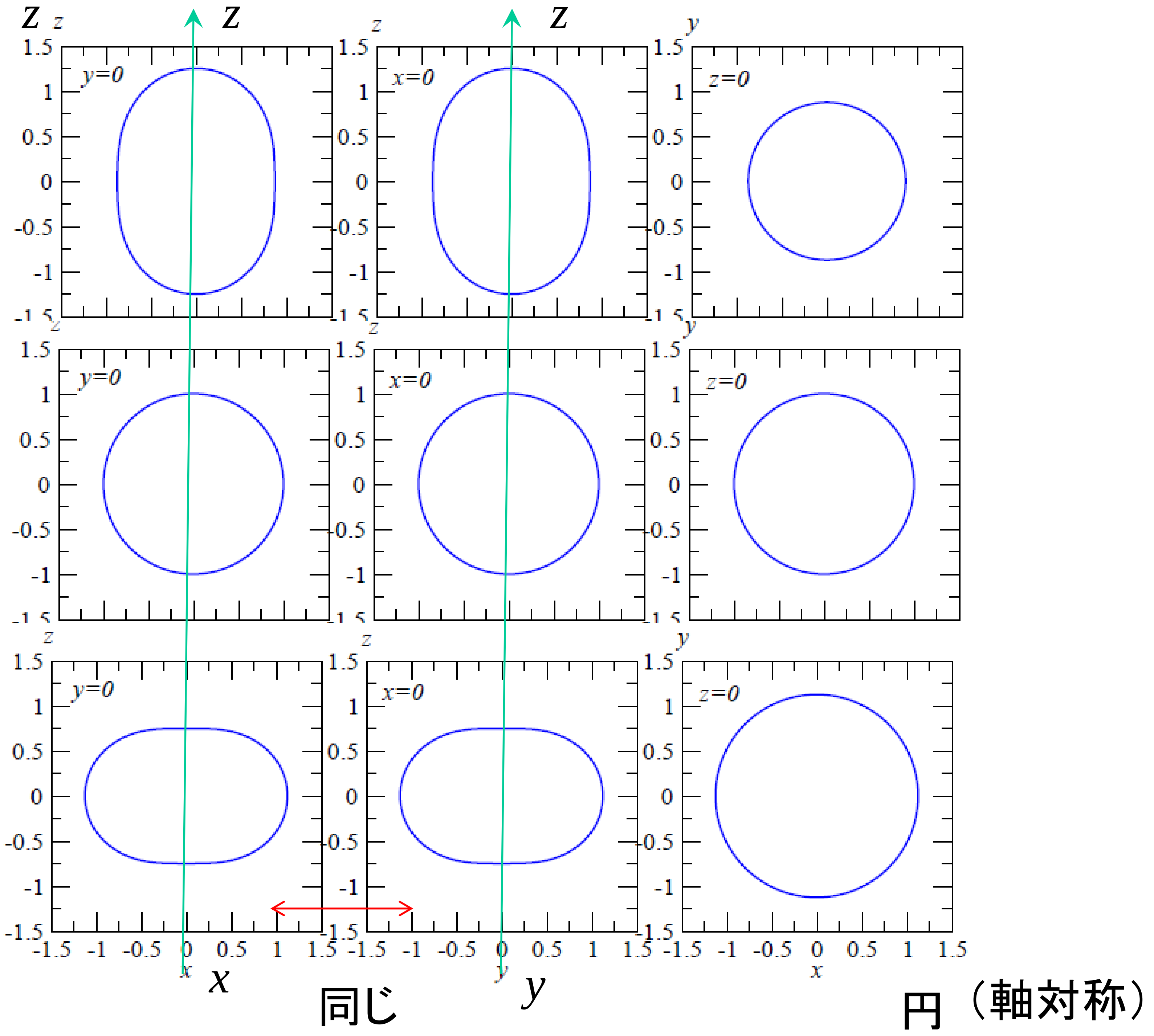
$x = 0$ で
切った平面

$z = 0$ で
切った平面

$\beta = 0.4$
$\gamma = 0$

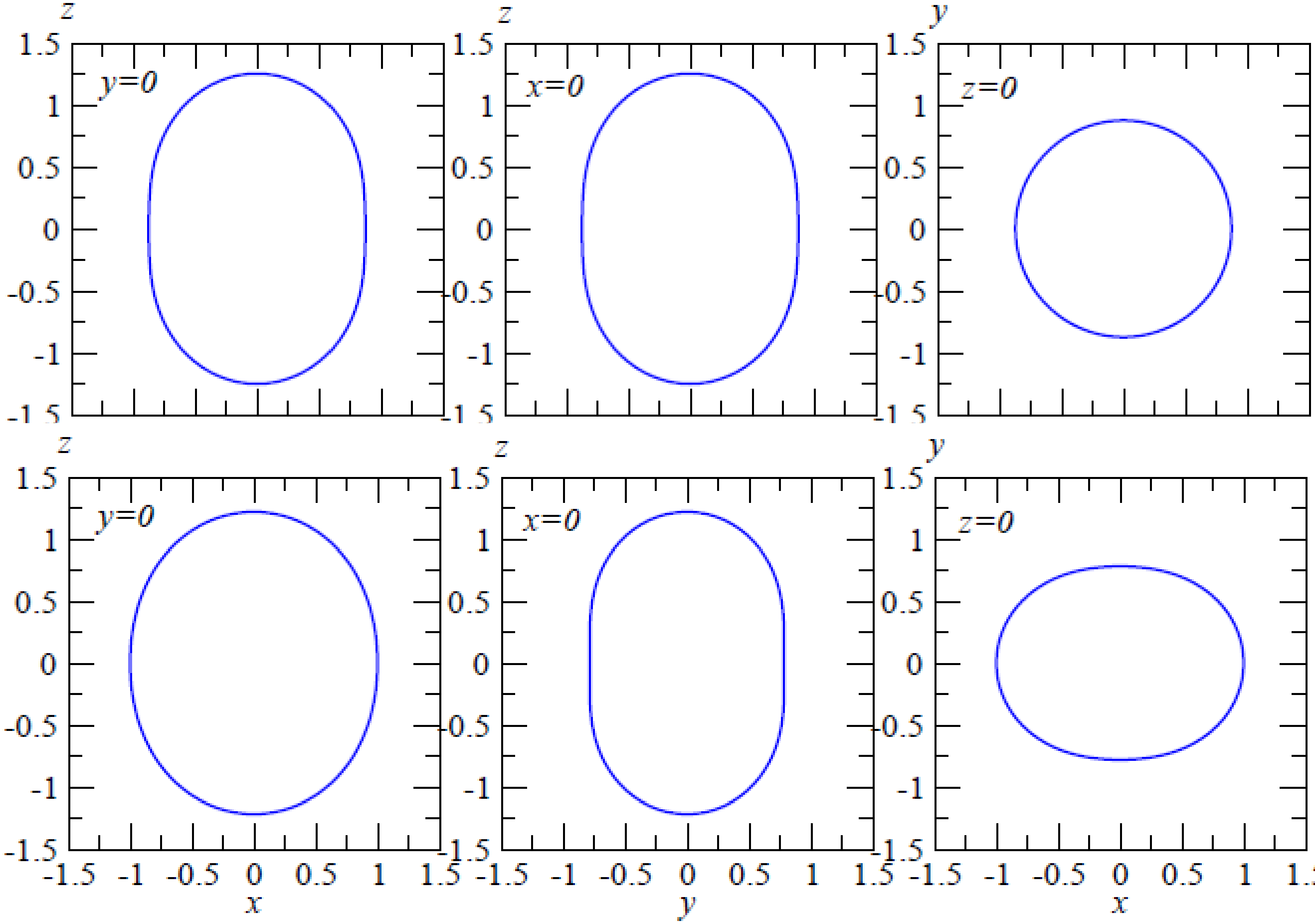
$\beta = 0$
（球形）

$\beta = -0.4$
$\gamma = 0$



$\beta = 0.4$
$\gamma = 0$

$\beta = 0.4$
$\gamma = \pi/6$

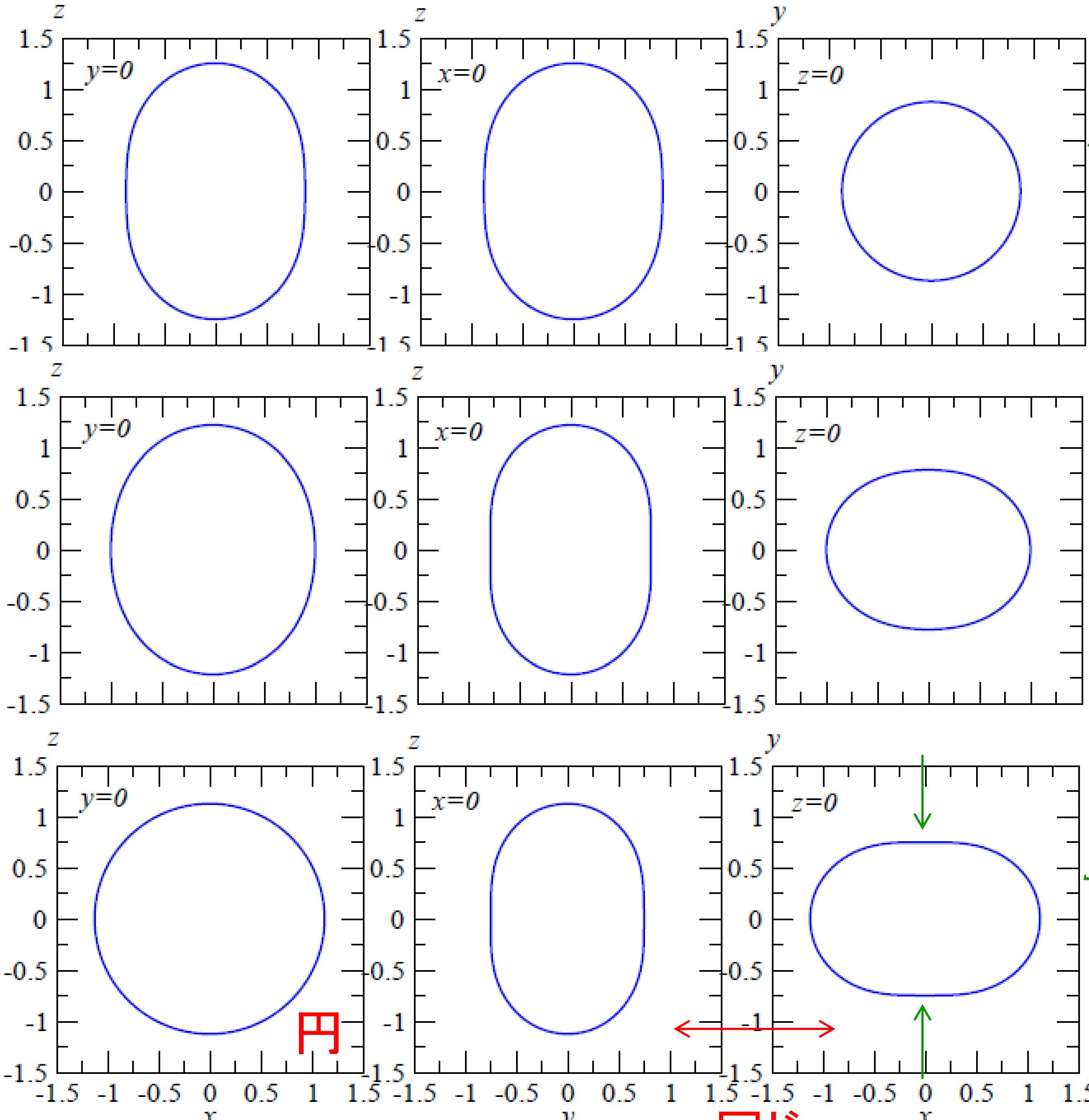


三軸非対称
(どの平面で切っても円にならない)

$\beta = 0.4$
$\gamma = 0$
（z 軸周りの軸対称プロレート変形）

$\beta = 0.4$
$\gamma = \pi/6$
（三軸非対称）

$\beta = 0.4$
$\gamma = \pi/3$
（y 軸周りの軸対称オブレート変形）



同じ

z 軸方向に伸びている

y 軸方向に縮んでいる

$\beta \geq 0, \quad 0 \leq \gamma \leq \pi/3$ で全ての四重極変形を表現できる

(β, γ) 平面