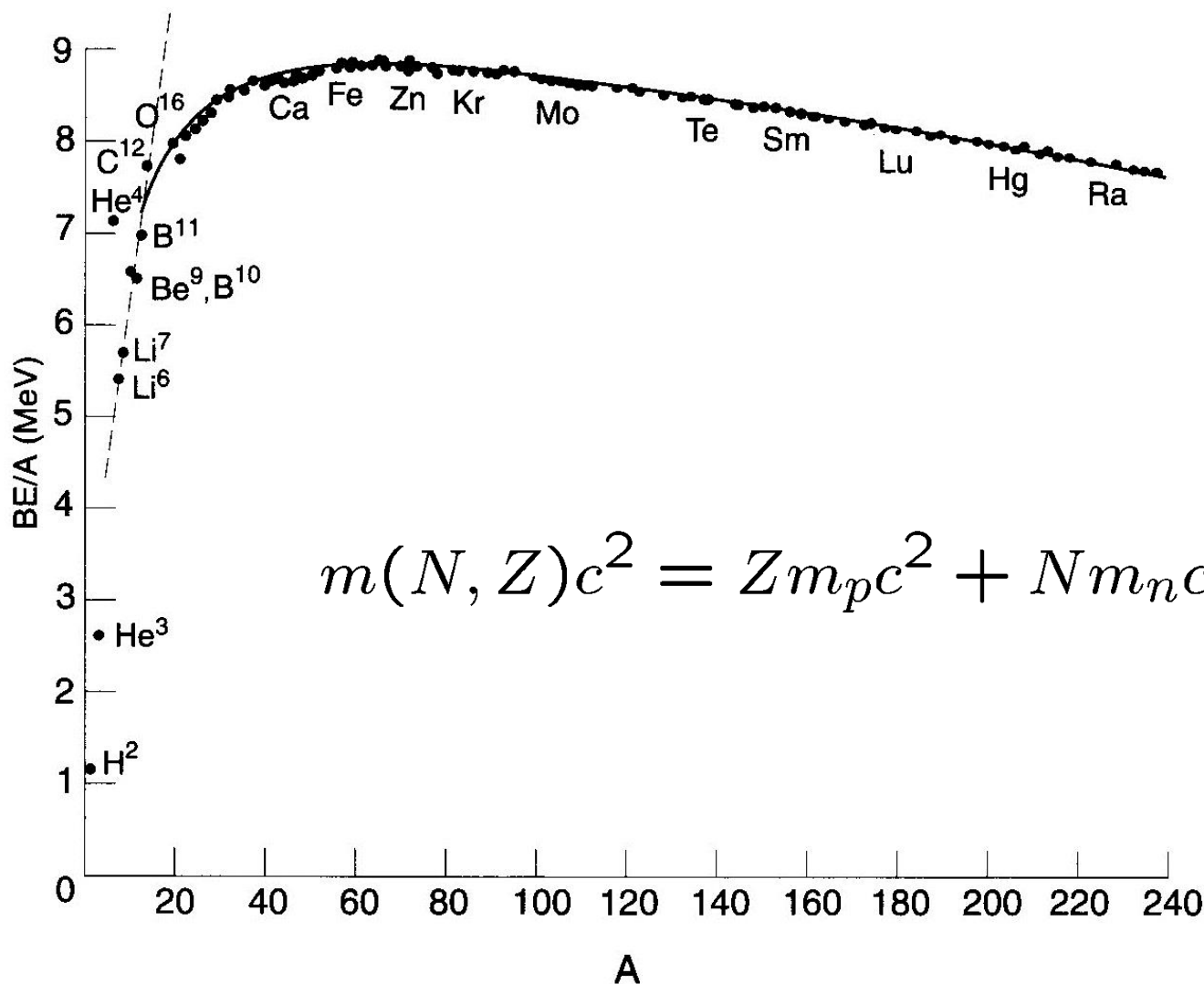


## 前回のおさらい: 束縛エネルギーの実験データ

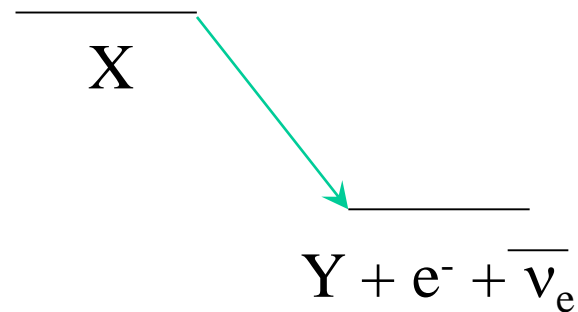
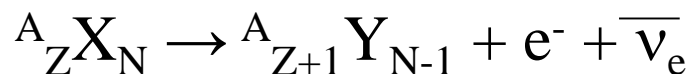


\* 何故このような関数になるのか?

# 原子核の質量

原子核の基本的な物理量の一つ

## 例1) ベータ崩壊



- $Q_\beta = m({}^A_Z X_N)c^2 - [m({}^A_{Z+1} Y_{N-1})c^2 + m_e c^2]$  が電子と反ニュートリノの運動エネルギーに分配
- ベータ崩壊の確率は  $Q_\beta$  に大きく依存

## 例2) 核融合反応

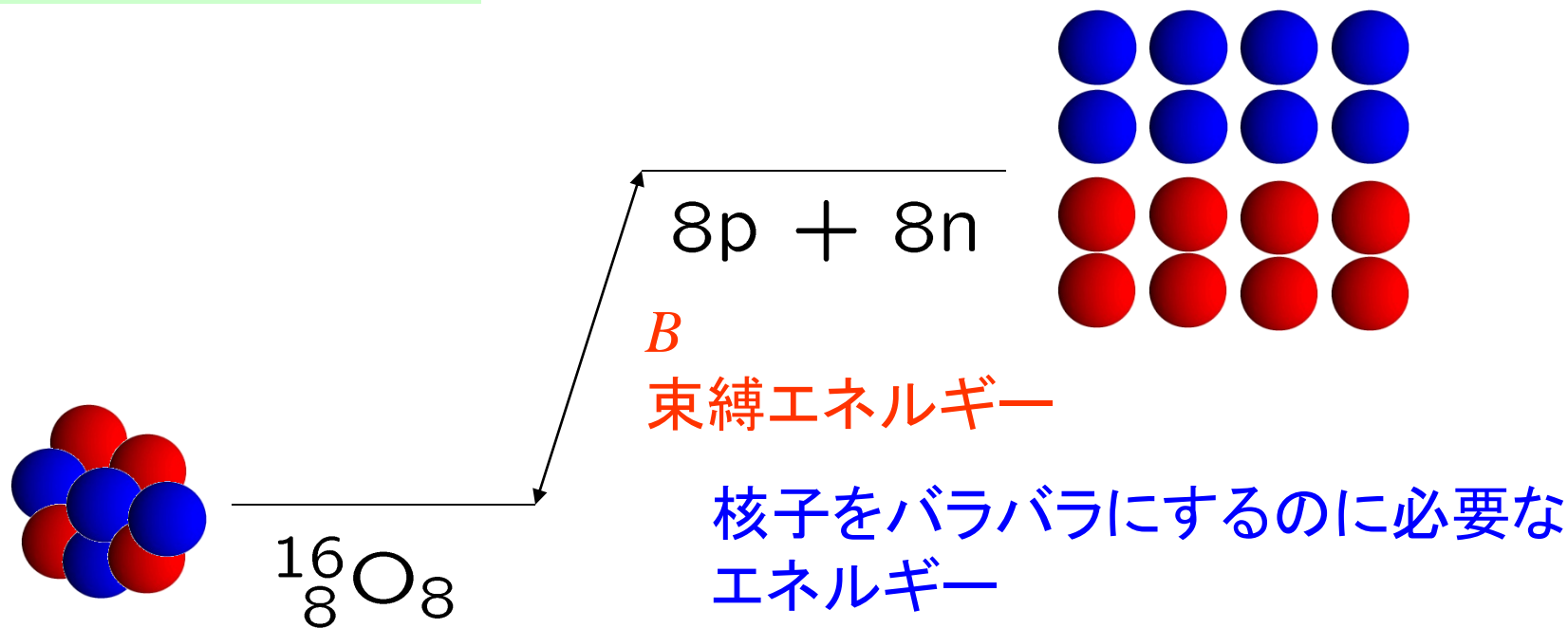


生成される  ${}^{279}\text{Nh}$  の励起エネルギー: 重心系で考えると

$$E^* = m({}^{70}\text{Zn})c^2 + m({}^{209}\text{Bi})c^2 + E_{\text{beam}} - m({}^{279}\text{Ni})c^2$$

✓  ${}^{279}\text{Nh}$  の崩壊の様子や核融合の確率は  $E^*$  に大きく依存

# 原子核の質量



$$m(N, Z)c^2 = Zm_p c^2 + Nm_n c^2 - B$$

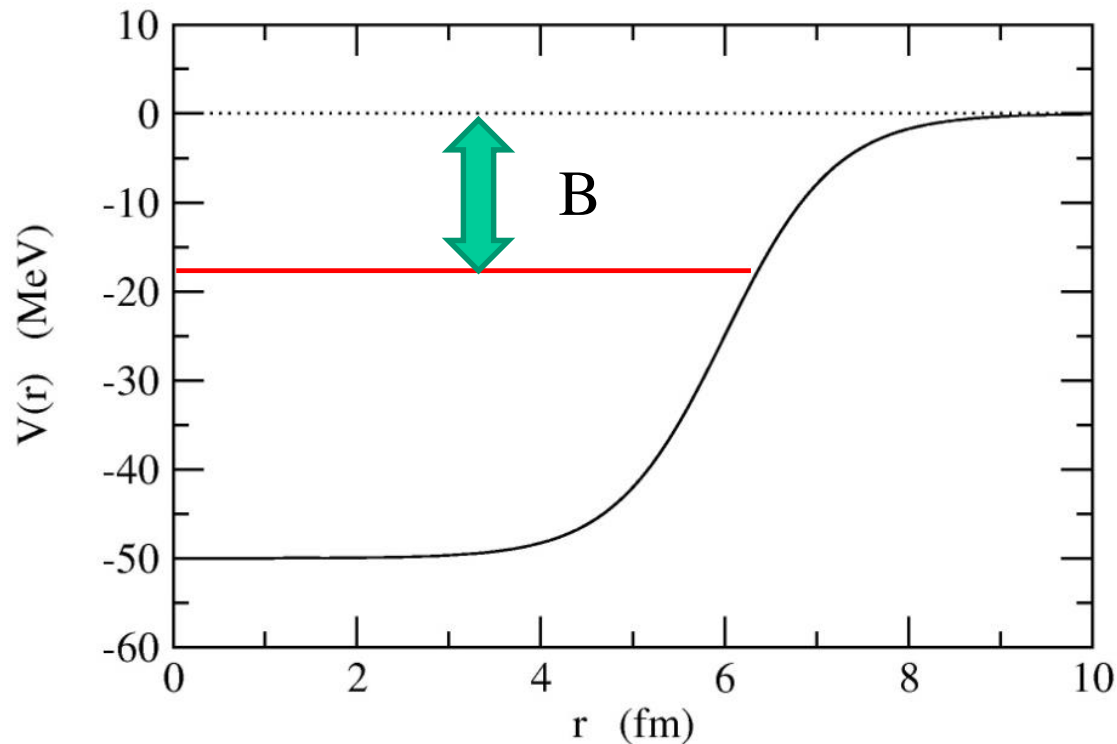
束縛エネルギー

\* 束縛エネルギーが大きいほど安定(質量が軽い)

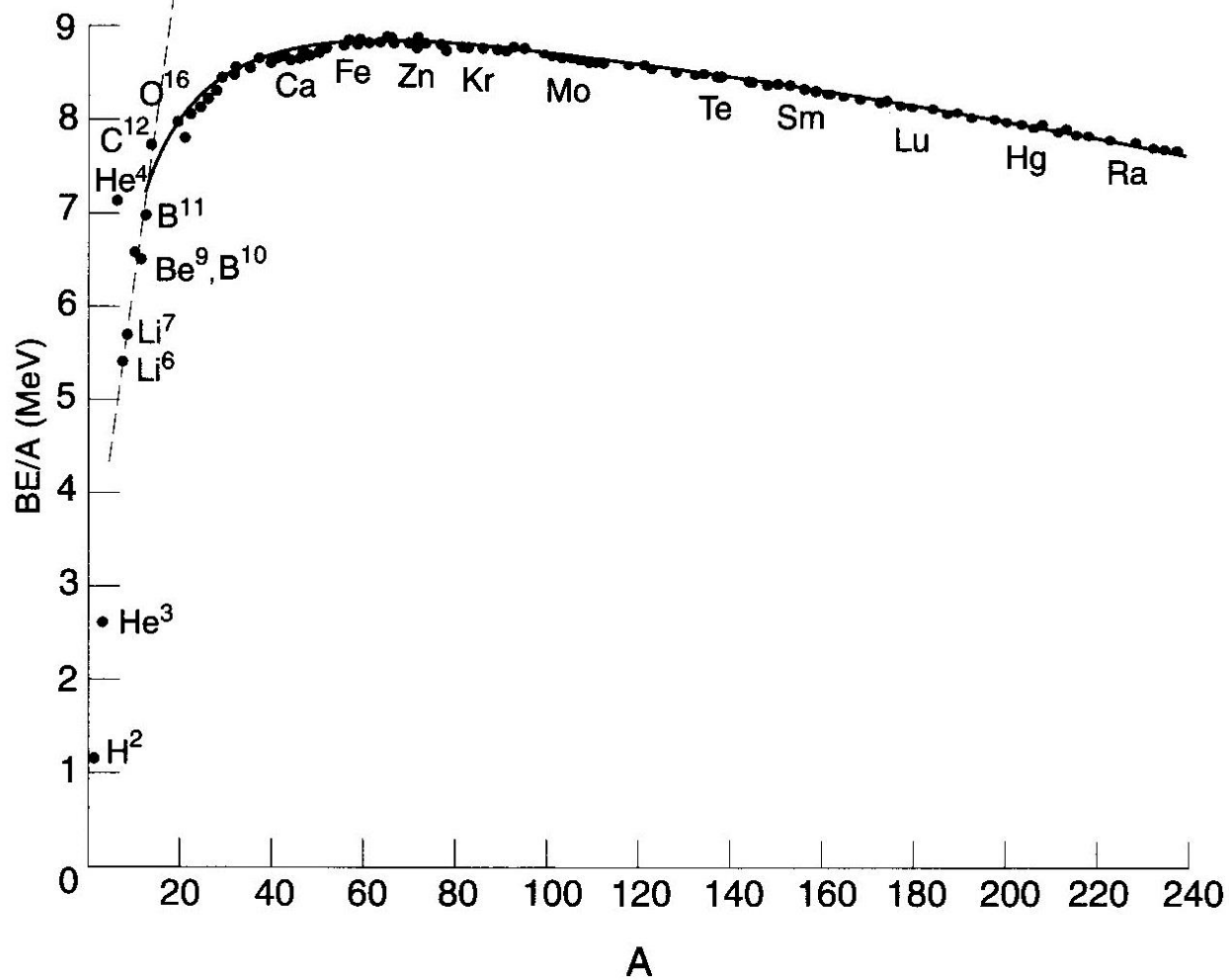
cf. 2粒子系の場合(例えば水素原子=陽子+電子):



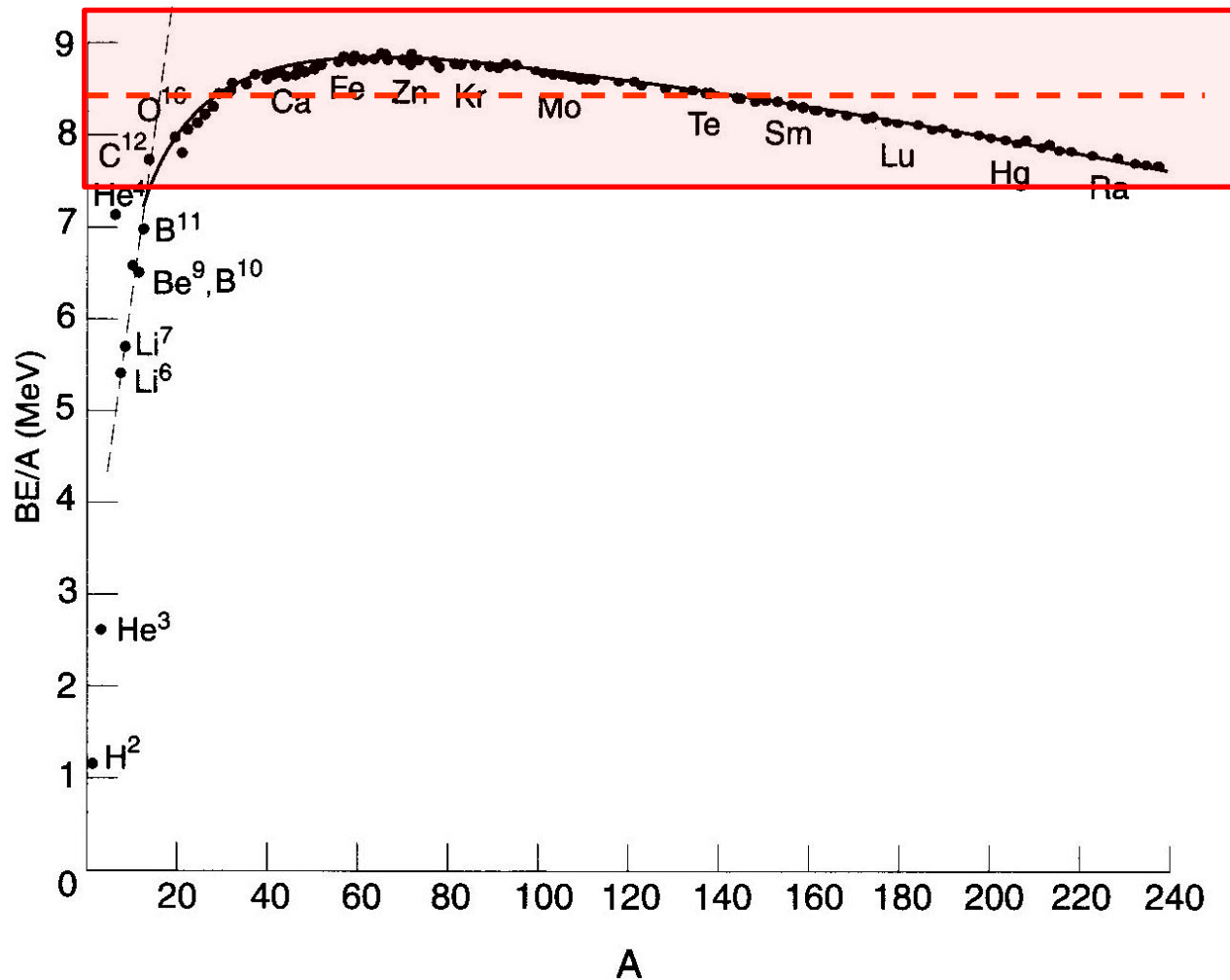
$$M c^2 = m_1 c^2 + m_2 c^2 - B$$



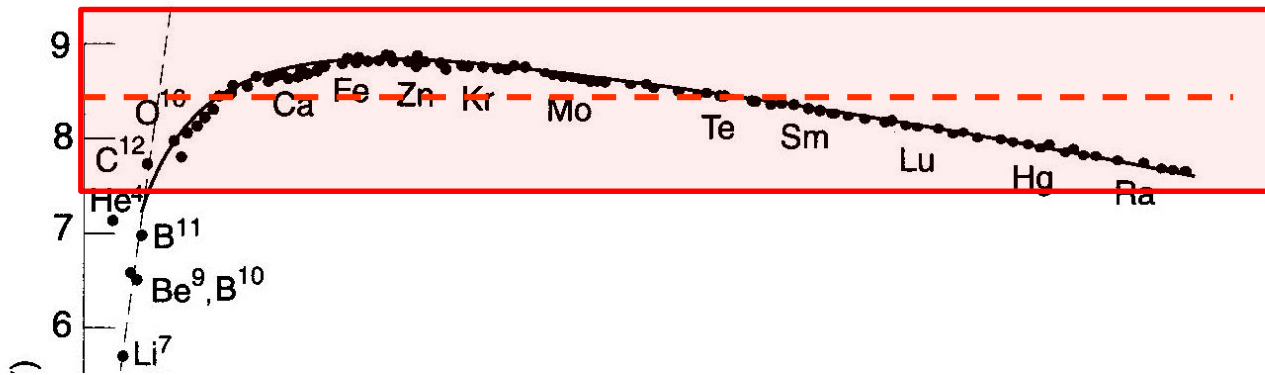
2粒子がバラバラの状態に比べて  $B$  だけエネルギーが下がる(束縛している)



$B/A$  (核子1つあたりの平均的な束縛エネルギー)  
の実験データ

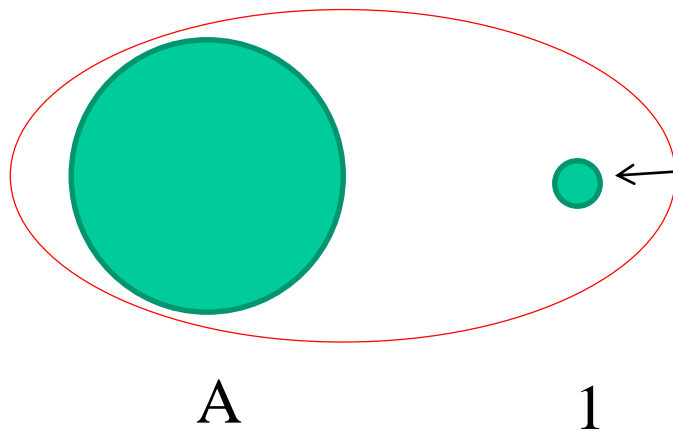


1.  $B(N,Z)/A \sim 8.5 \text{ MeV} (A > 12) \iff$  短距離力 (核子間相互作用)  
 (ほぼ一定)



### 1. $B(N,Z)/A \sim 8.5 \text{ MeV} (A > 12)$

これは、粒子を1つ増やすと、束縛エネルギーは一定の量 ( $\sim 8.5 \text{ MeV}$ )しか増えないことを意味している。



この核子は決まった個数の核子としか相互作用しない (短距離力)

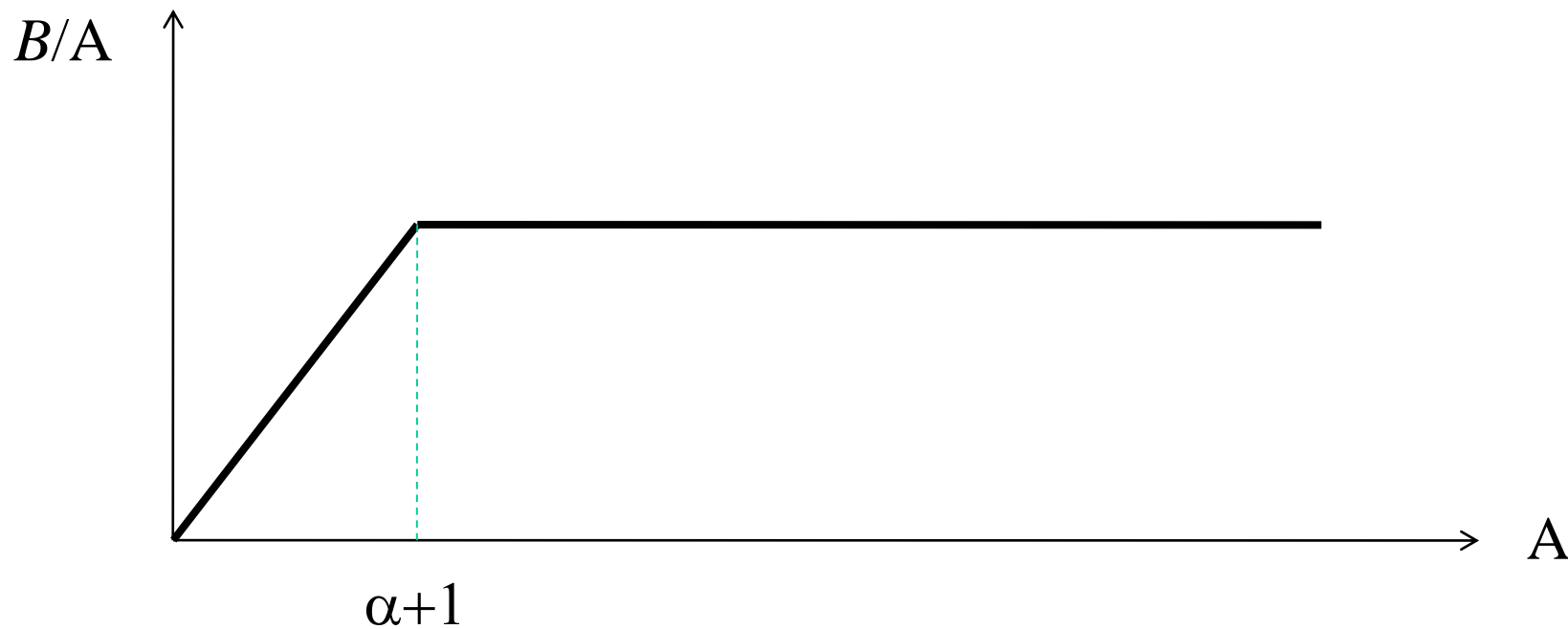
もし全ての核子と相互作用するとすると(長距離力)

$$B \propto A(A - 1)/2 \quad \curvearrowright \quad B/A \propto A \quad \text{となるはず。。。。}$$

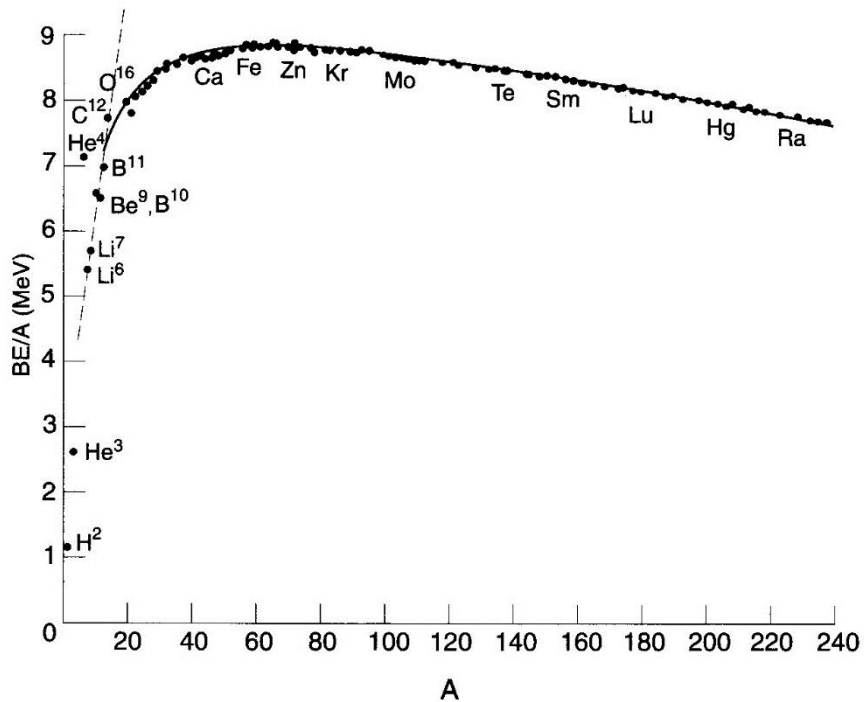
1つの核子が  $\alpha$  個の核子とのみ相互作用するとすると、

$$B \sim \alpha A/2 \longrightarrow B/A \sim \alpha/2 \text{ (const.)}$$

ただし、 $A < \alpha + 1$  の時は、すべての核子対が相互作用するので、  
 $B/A \propto A$







この図から  $\alpha$  の値を読み取ると、  
 $\alpha \sim 10$  くらい。

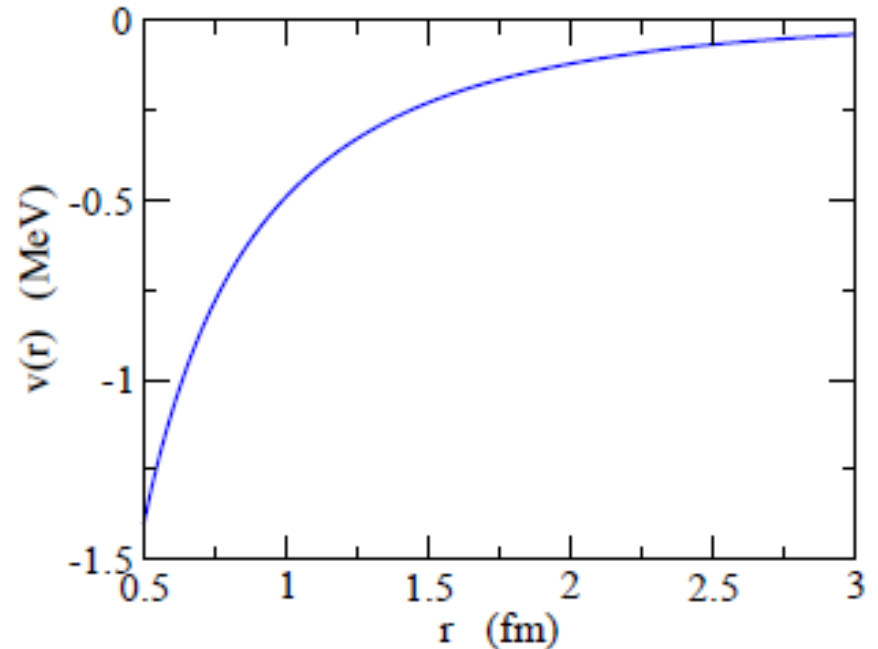


核力の到達距離は、  
 $1.1 \times 10^{1/3} = 2.37 \text{ fm}$  程度。

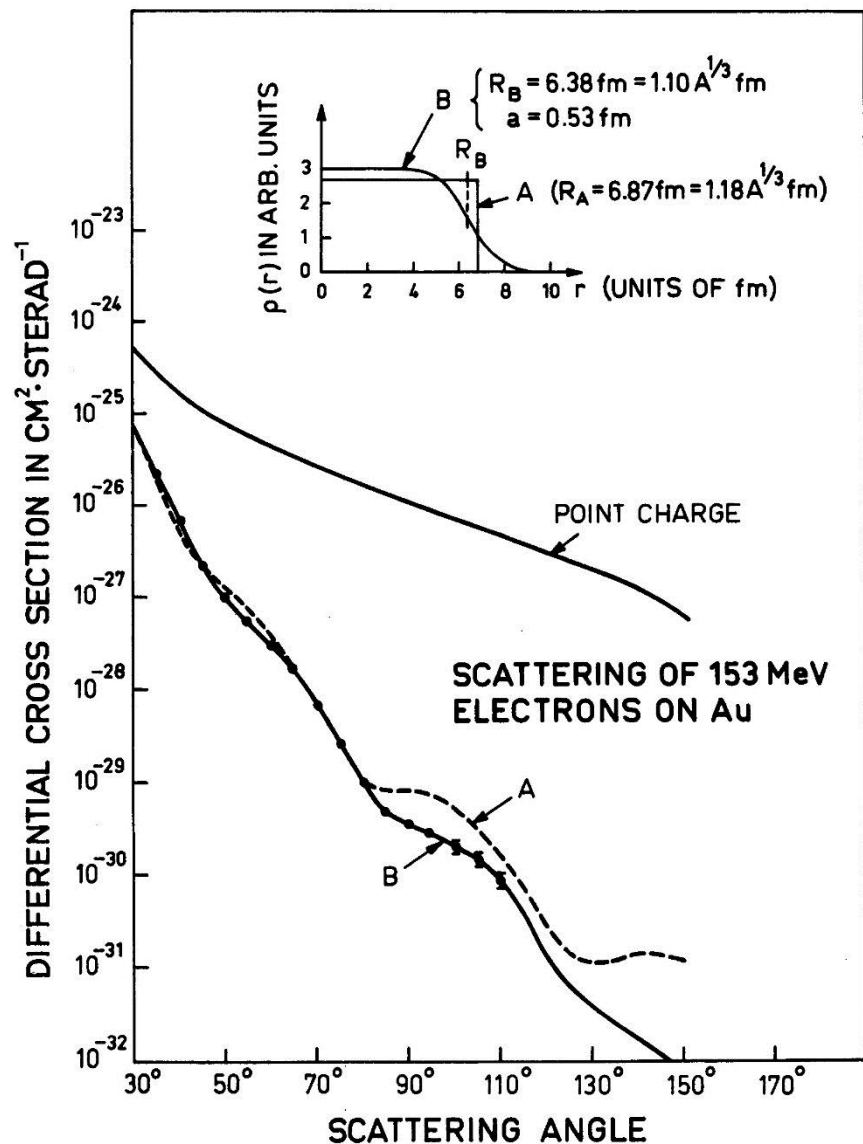
湯川相互作用:

$$v(r) = -g \frac{e^{-\kappa r}}{r}$$

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{\hbar}{m_{\pi} c} = 1.41 \text{ fm}$$

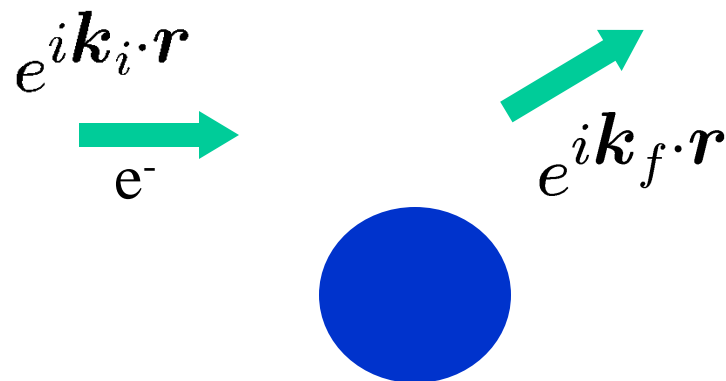


# 電荷分布： $R \sim 1.1A^{1/3}$ fm の根拠



高エネルギー  
電子散乱

ボルン近似:



$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z_P^2 e^4}{(4E \sin^2 \theta/2)^2} |F(\mathbf{q})|^2$$

形状因子 (form factor)

$$F(\mathbf{q}) = \int e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \rho(r) dr$$

(密度のフーリエ変換)

電子と原子核の相互作用:

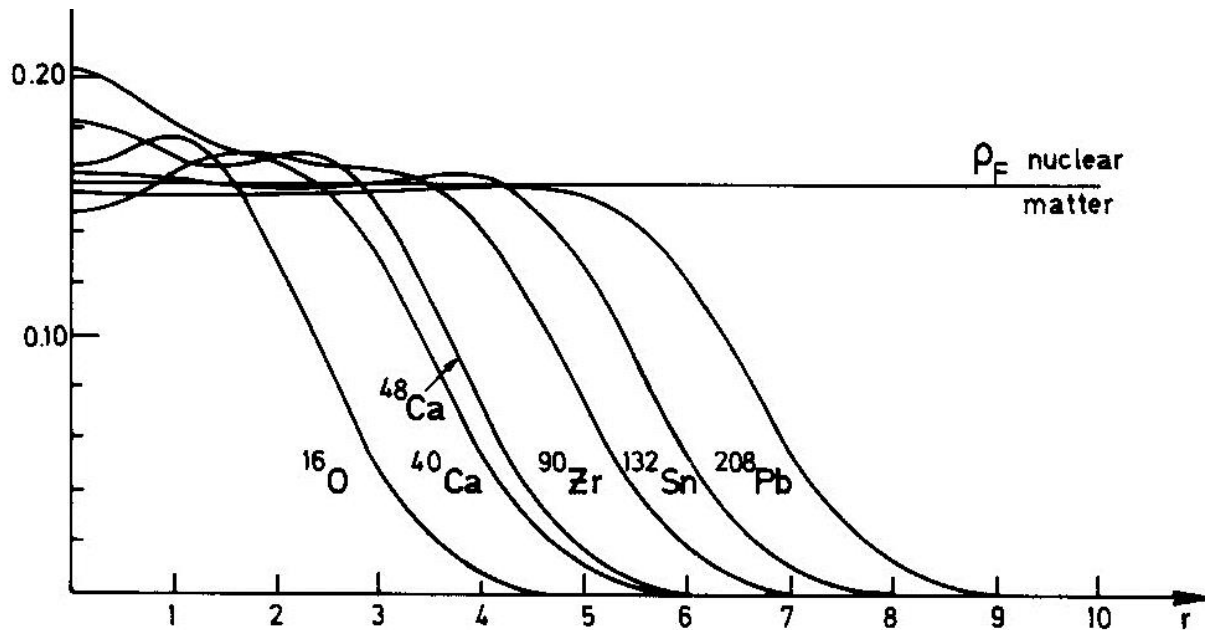
$$V(\mathbf{r}) = - \int d\mathbf{r}' \rho_{\text{ch}}(\mathbf{r}') \frac{e^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

(note)  $\nabla^2 V(\mathbf{r}) = 4\pi e^2 \rho_{\text{ch}}(\mathbf{r})$

$$\begin{aligned} M_{fi} &= \langle \psi_f | V | \psi_i \rangle = \int d\mathbf{r} \psi_f^*(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}) \psi_i(\mathbf{r}) \\ &= \int d\mathbf{r} e^{i(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f) \cdot \mathbf{r}} V(\mathbf{r}) \equiv \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} V(\mathbf{r}) \\ &= \frac{4\pi e^2}{q^2} \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \rho_{\text{ch}}(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

↑

(部分積分2回)



フェルミ分布

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + \exp[(r - R_0)/a]}$$

$$\rho_0 \sim 0.17 \text{ (fm}^{-3}\text{)} \quad \leftarrow \text{原子核の飽和性}$$

$$R_0 \sim 1.1 \times A^{1/3} \text{ (fm)}$$

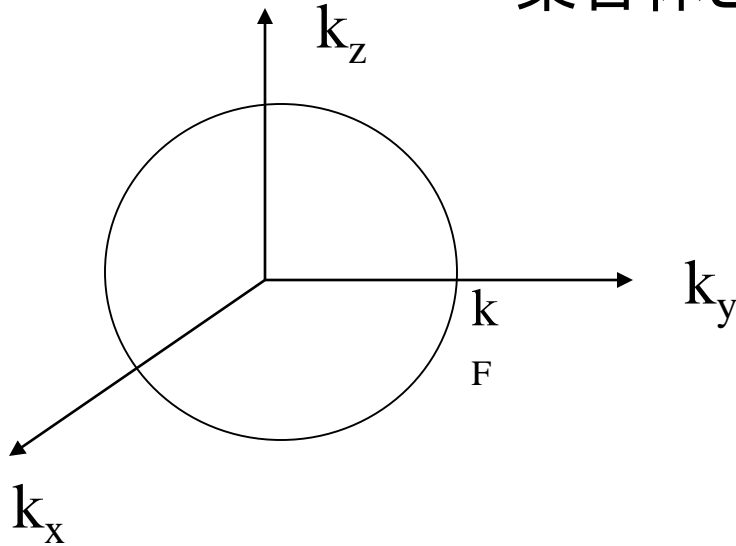
$$a \sim 0.57 \text{ (fm)}$$

cf. 核子の感じるポテンシャルも同じような形。下から軌道を詰めていくとフェルミ・エネルギーは約 -8.5 MeV

→ ポテンシャルの深さはフェルミガス近似で見積もれる

# 運動量分布

フェルミ・ガス近似: 原子核を相互作用していないフェルミオンの集合体とみなす



$$\begin{aligned}\rho &= 2 \times 2 \times 4\pi \int_0^{k_F} \frac{k^2 dk}{(2\pi)^3} \\ &= \frac{2}{3\pi^2} k_F^3\end{aligned}$$

(note: スピン・アイソスピンに関する縮退度)

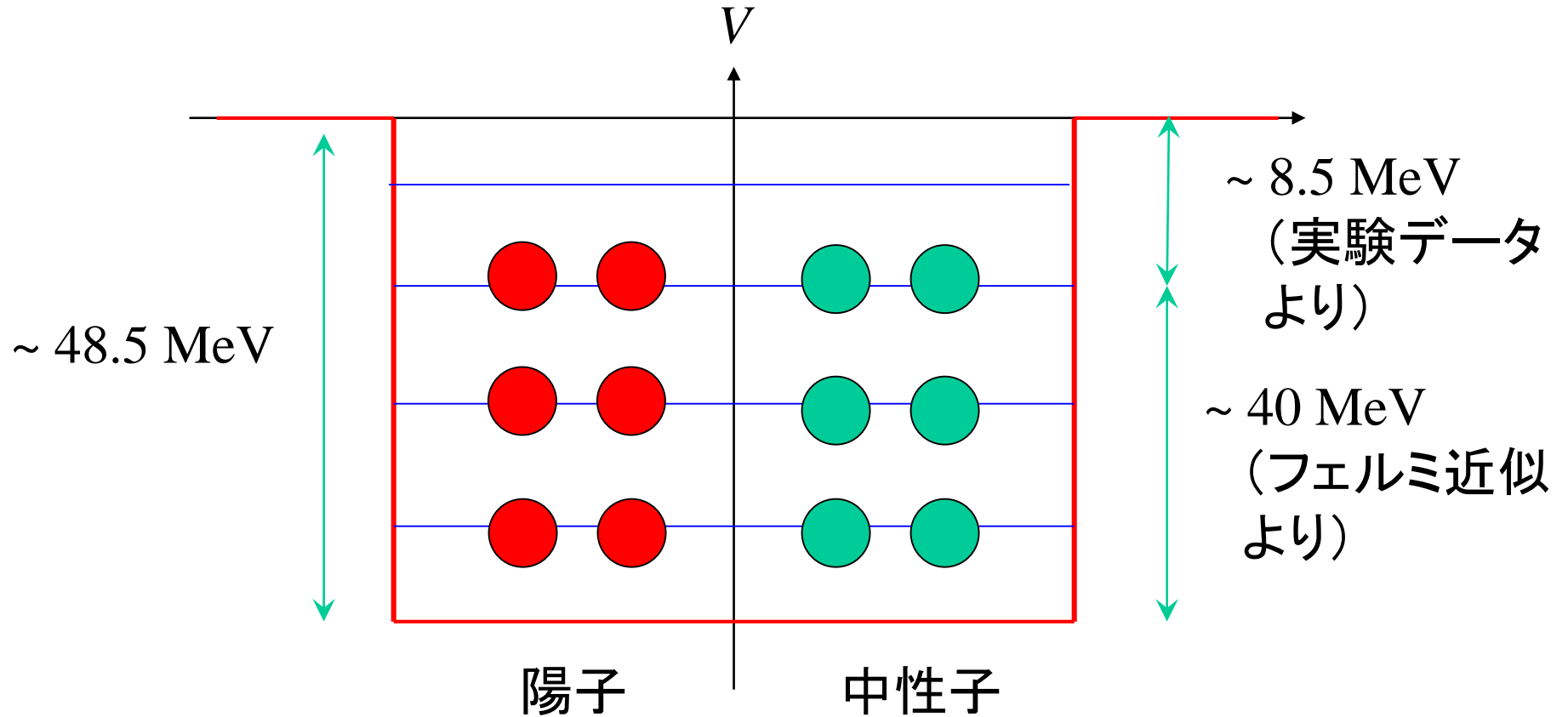


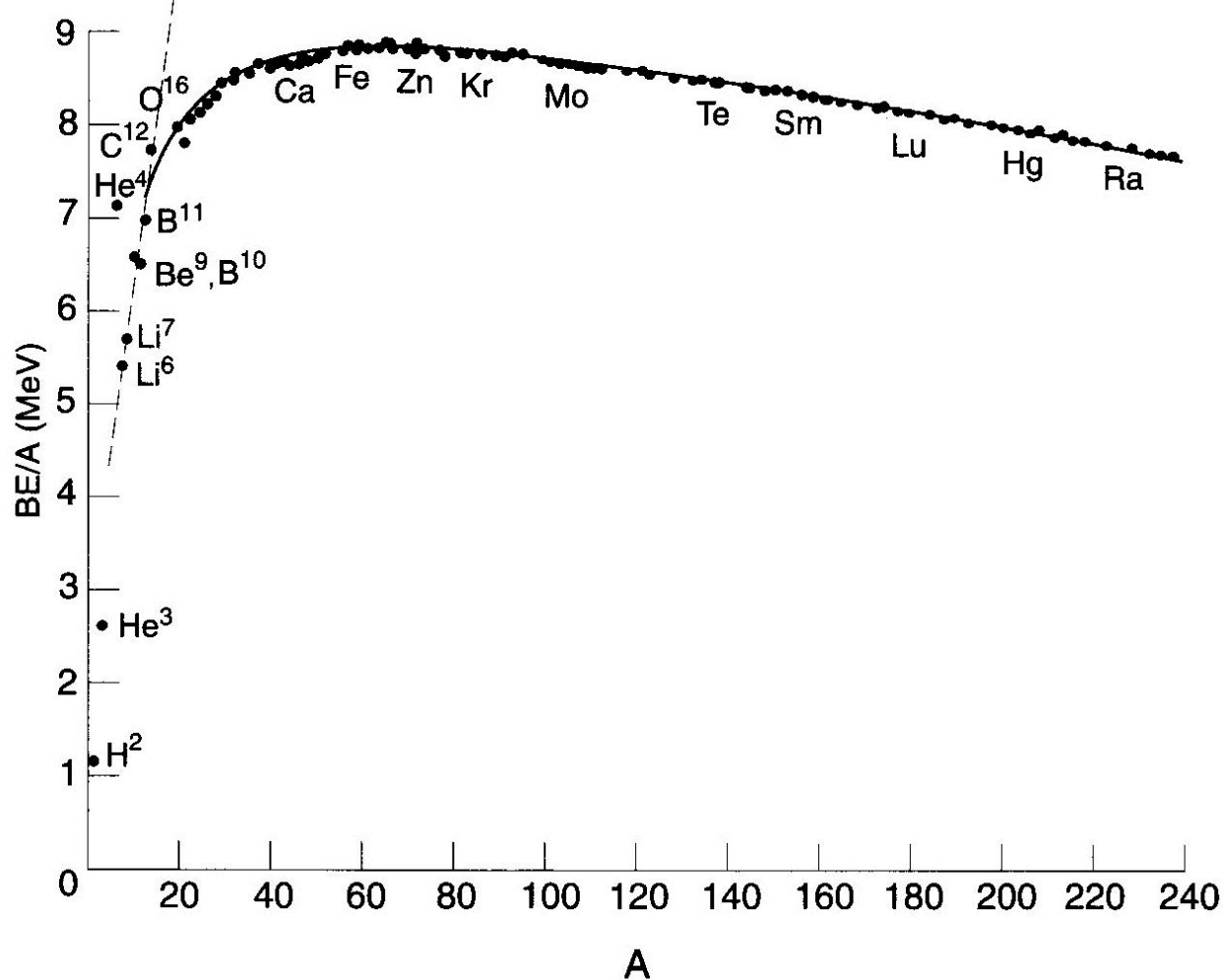
$$k_F \sim 1.36 \text{ (fm}^{-1}\text{)} \longleftarrow \rho = 0.17 \text{ fm}^{-3}$$

$$\longleftrightarrow \frac{v_F}{c} = \frac{k_F \cdot \hbar c}{mc^2} = 0.285$$

$$\text{フェルミ・エネルギー: } \epsilon_F = \frac{k_F^2 \hbar^2}{2m} \sim 37 \text{ (MeV)}$$

# 原子核の中で核子が感じるポテンシャル



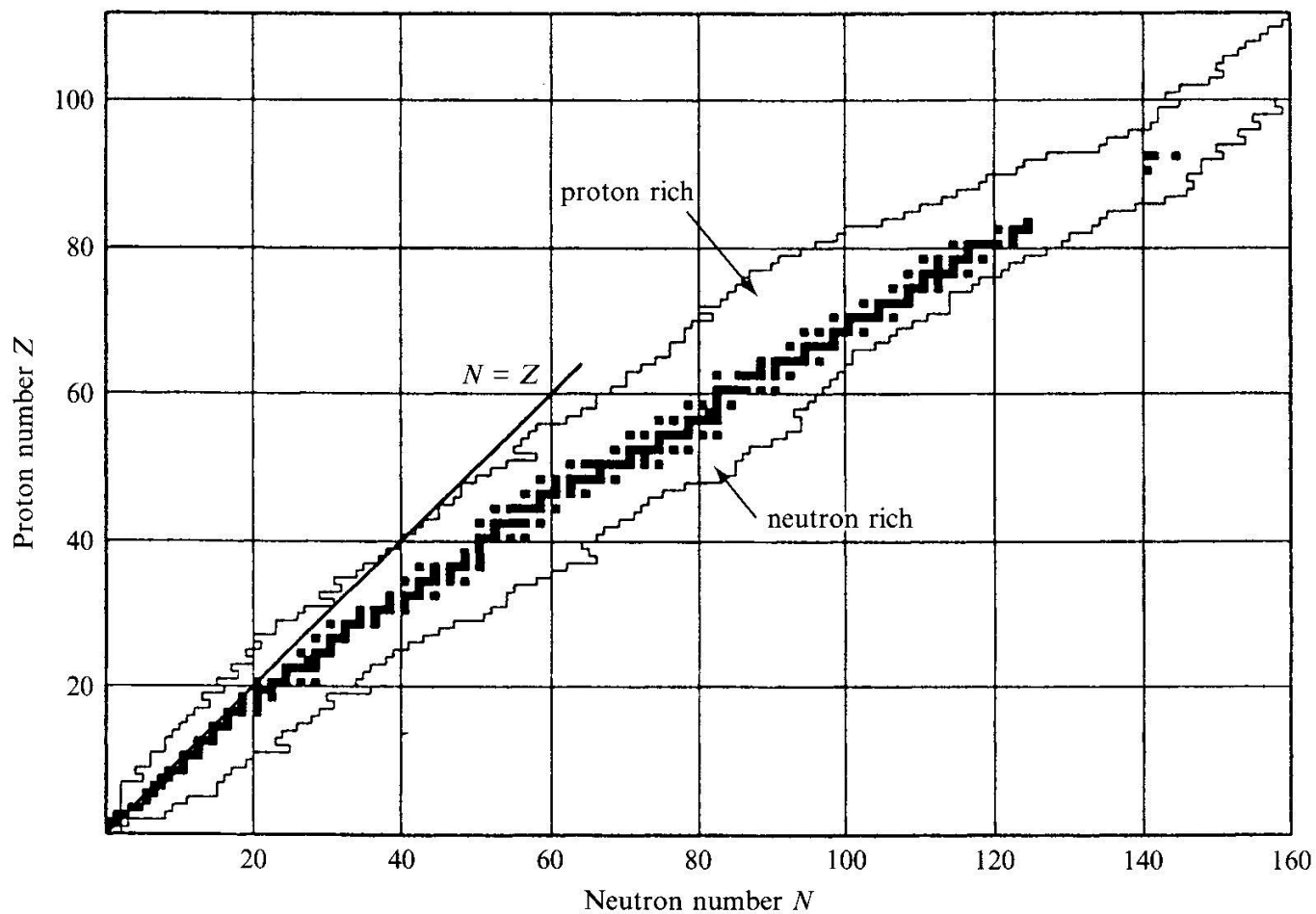


1.  $B(N,Z)/A \sim 8.5 \text{ MeV} (A > 12) \iff$  短距離力(核子間相互作用)

2. 重い原子核に対してはクーロン力の影響

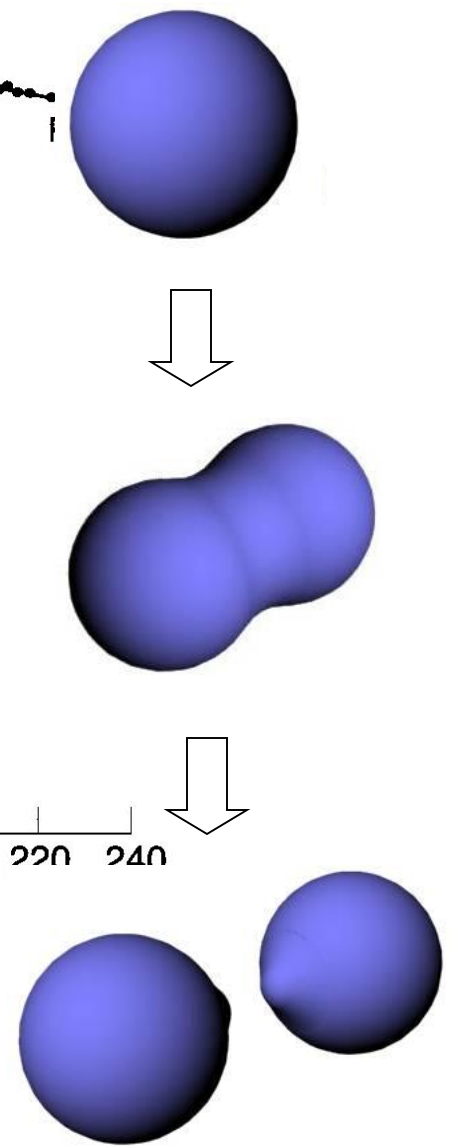
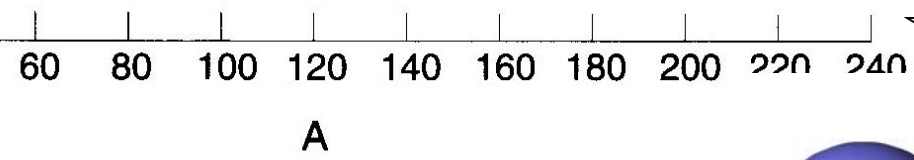
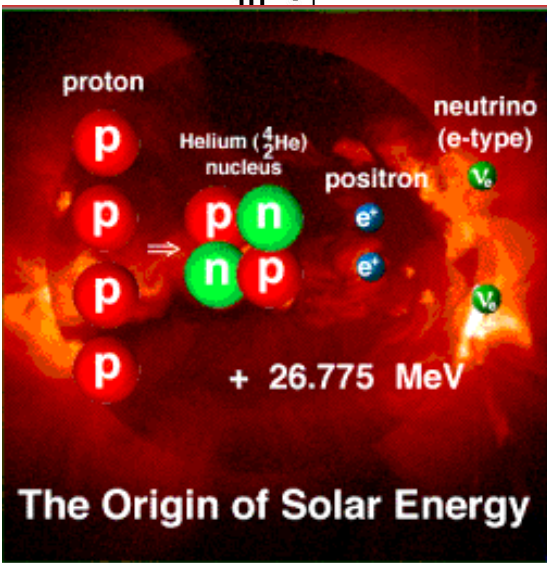
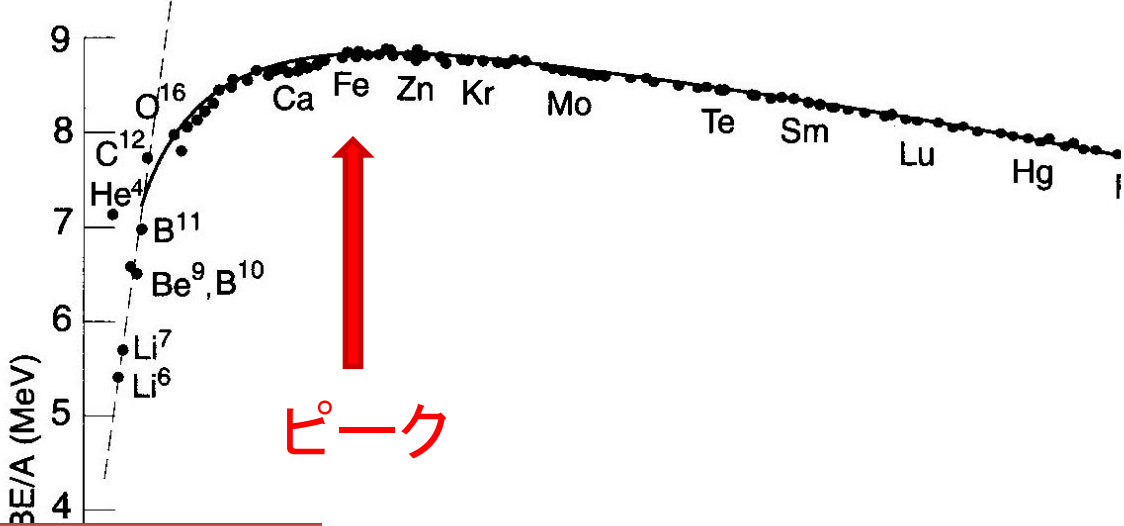
←  $B/A$  が  $A$  に比例して減少  
 (長距離力(クーロン力)がはたらいっている証拠)

# 核图表



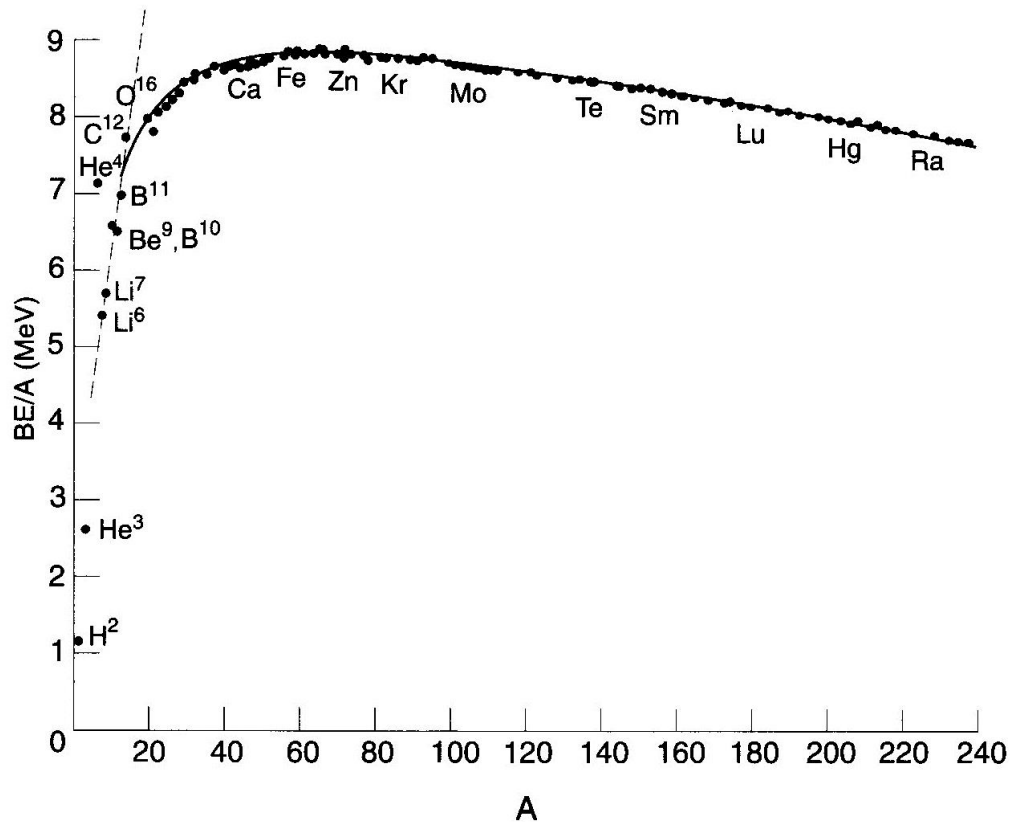
安定核:  $N \geq Z$





- 軽い核は核融合した方が安定
- 重い核は核分裂した方が安定

# 半経験的質量公式



Aの関数としてどのように振る舞うか?

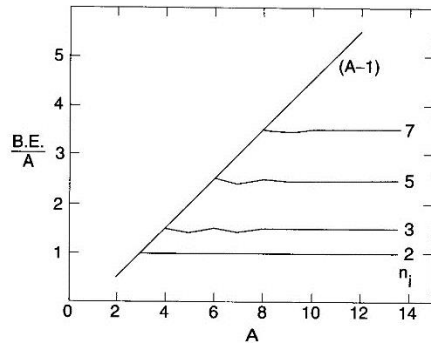
- ✓ 経験的
  - ✓ 半経験的
  - ✓ 非経験的
- } アプローチ

# 半経験的質量公式

(Bethe-Weizacker 質量公式: 液滴模型)

$$B(N, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\text{sym}} \frac{(N - Z)^2}{A}$$

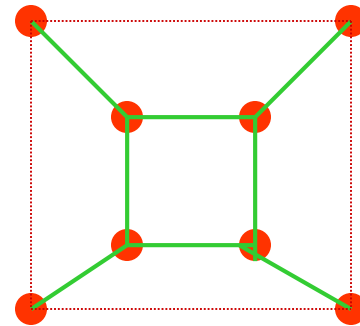
● 体積エネルギー:  $a_v A$



$$R_0 \sim 1.1 \times A^{1/3} \rightarrow V \propto A$$
$$S \propto A^{2/3}$$

● 表面エネルギー:  $-a_s A^{2/3}$

表面付近の核子は少ない数の核子と相互作用する。



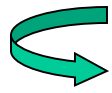
$$B(N, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\text{sym}} \frac{(N - Z)^2}{A}$$

● クーロン・エネルギー:  $-a_C Z^2 / A^{1/3}$

$$E_C = \frac{3}{5} \frac{Z^2 e^2}{R_C} \quad (\text{一様帯電球のクーロン・エネルギー})$$

● 対称エネルギー:  $-a_{\text{sym}} (N - Z)^2 / A$

ポテンシャル・エネルギー  $v_{nn} = v_{pp} = v, \quad v_{np} \sim 2v$

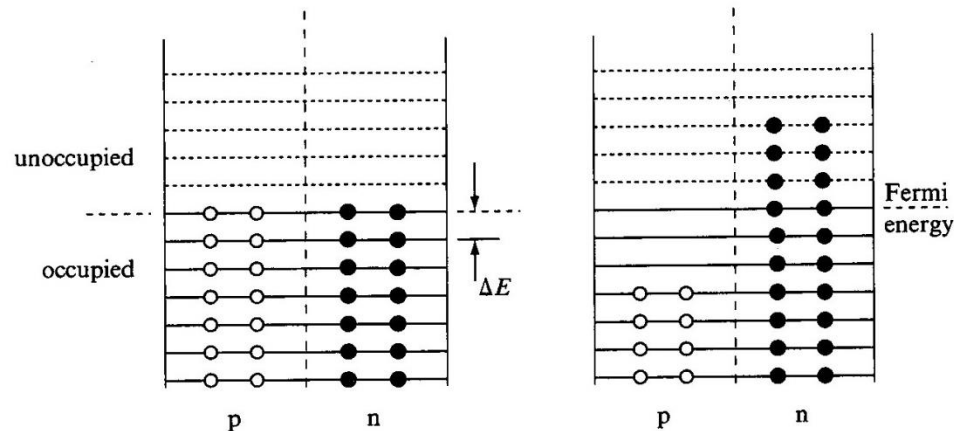


核物質と相互作用する核子のエネルギー:

$$N(v_{nn}N/A + v_{pn}Z/A) + Z(v_{pn}N/A + v_{pp}Z/A) = \frac{v}{2}(3A - (N - Z)^2/A)$$

運動エネルギー

パウリ原理



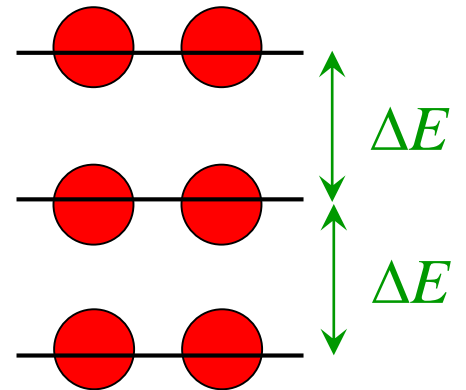
準位エネルギーが  $E_k = k \Delta E$  で与えられ、各準位の縮退度が 2 だとすると、

$$E = \sum_{k=1}^{N/2} 2k\Delta E + \sum_{k=1}^{Z/2} 2k\Delta E$$

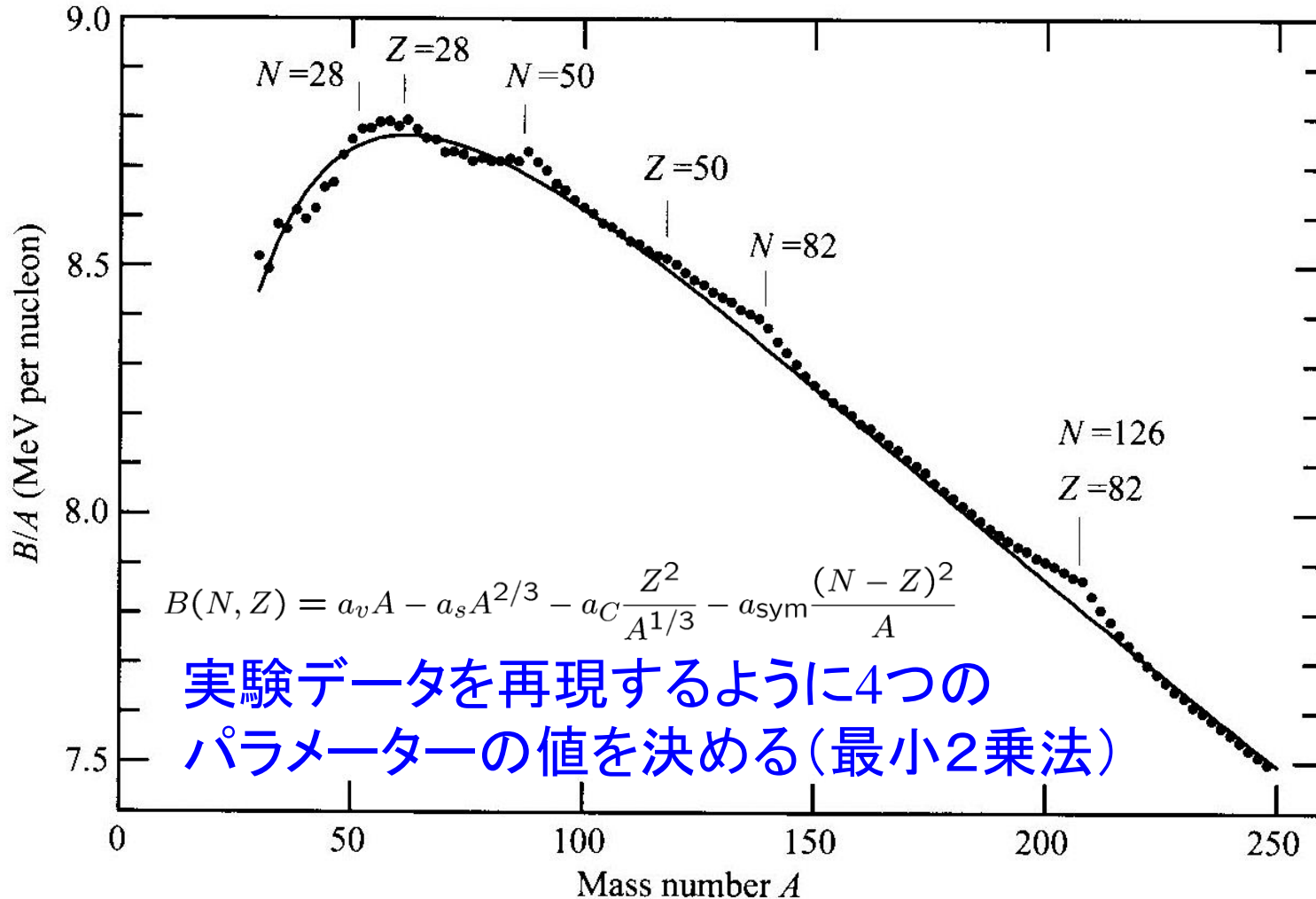
$$= 2\Delta E \left( \sum_{k=1}^{N/2} k + \sum_{k=1}^{Z/2} k \right)$$

$$= \frac{\Delta E}{2} \left( \frac{N^2 + Z^2}{2} + N + Z \right)$$

$$= \frac{\Delta E}{2} \left( \frac{A^2}{4} + A + \frac{1}{4} \cdot (N - Z)^2 \right)$$



# どのくらい実験を再現するか？



実験データを再現するように4つの  
パラメーターの値を決める(最小2乗法)

✓ 大体OK、だけど所々にずれ

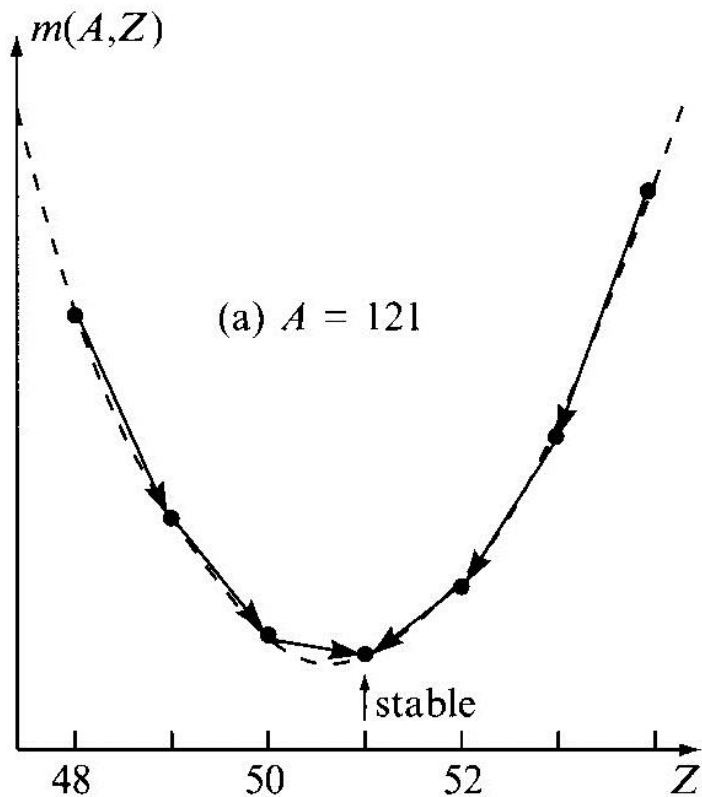
✓  $N, Z = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126$  (魔法数)に対して束縛エネルギー大

→ 「殻構造」 (あとで)

# $\beta$ -安定線

$$B(N, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\text{sym}} \frac{(N - Z)^2}{A}$$

$$m(A, Z) = f(A) + a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_{\text{sym}} \frac{(A - 2Z)^2}{A}$$



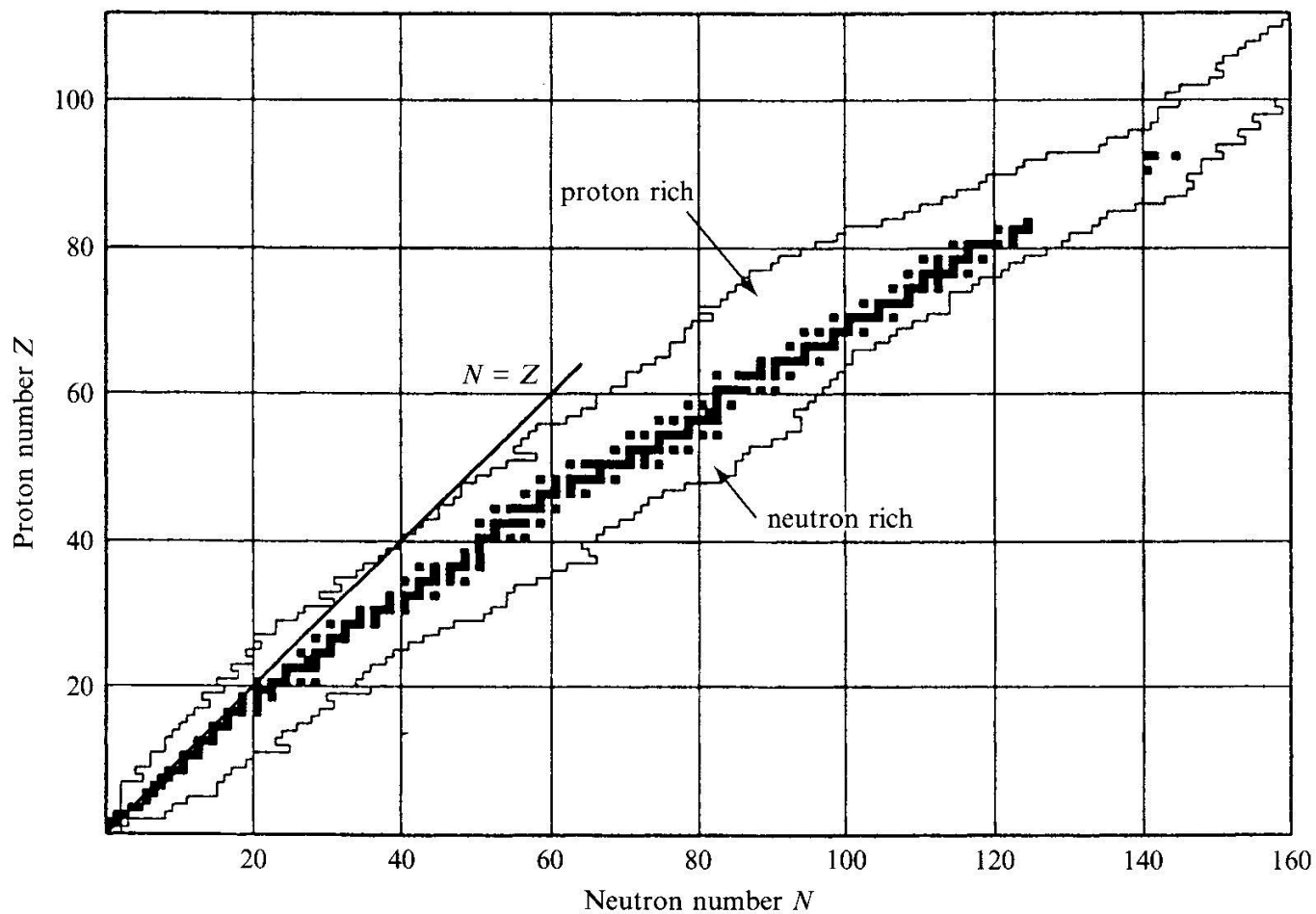
安定核 (beta-安定線)

$$\left. \frac{\partial m}{\partial Z} \right|_{A=\text{const.}} = 0$$

$$Z = \frac{4a_{\text{sym}}}{2a_C/A^{1/3} + 8a_{\text{sym}}/A}$$

$$\Rightarrow Z < A/2$$

# 核图表



安定核:  $N \geq Z$