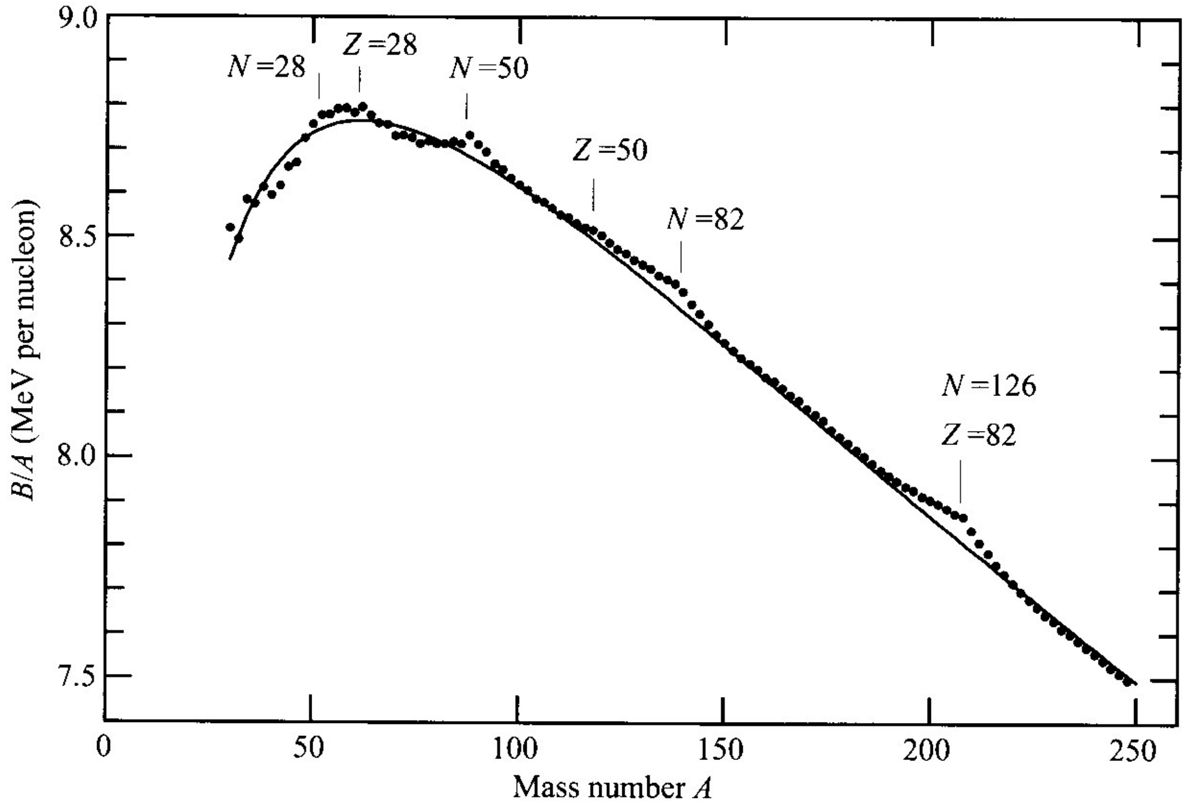
前回の復習

原子核の核子1つあたりの束縛エネルギー = B/A



半経験的な質量公式(液滴模型:原子核を古典的な液滴の球と仮定)

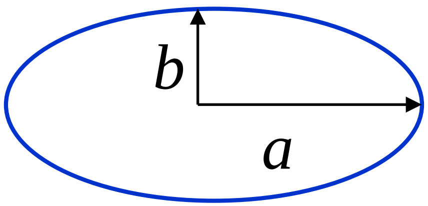
$$\boxed{B(N,Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\mathrm{sym}} \frac{(N-Z)^2}{A}}$$

原子核の表面振動・核分裂

$$B(N,Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\mathrm{sym}} \frac{(N-Z)^2}{A}$$

原子核を体積一定のまま変形してみるとどうなるか（原子核は体積を変えるのが大変なので）?

例）回転楕円体



$$\begin{aligned} a &= R \cdot (1+\epsilon) \\ b &= R \cdot (1+\epsilon)^{-1/2} \end{aligned}$$

$ab^2 = R^3 =$ 一定

変形したときのエネルギー変化:

- 体積項、対称項: 変化せず
- 表面項: 損をする（表面積が大きくなるため）
- クーロン項: 得をする（平均的な陽子間距離が大きくなるため）

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \text{表面項} & \rightarrow & \text{球形になる傾向} \\ \text{クーロン項} & \rightarrow & \text{変形になる傾向} \end{array} \right\} \longrightarrow \text{2つの力の競合}$$

□ 表面項

$$E_S(\epsilon) = \sigma \underbrace{\int_S dS}_{\text{表面積分}} \sim E_S^{(0)}\left(1 + \underline{\frac{2}{5}\epsilon^2} - \frac{4}{105}\epsilon^3 + \cdots\right)$$

損

表面張力

$$4\pi R^2\sigma \propto A^{2/3} \qquad\qquad E_S^{(0)} = +a_S A^{2/3}$$

□ クーロン項

$$\begin{aligned} E_C(\epsilon) &= \frac{1}{2}\int d\boldsymbol{r}d\boldsymbol{r}'\frac{e^2}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\rho(\boldsymbol{r})\rho(\boldsymbol{r}') \\ &\sim E_C^{(0)}\left(1 - \underline{\frac{1}{5}\epsilon^2} - \frac{4}{105}\epsilon^3 + \cdots\right) \end{aligned}$$

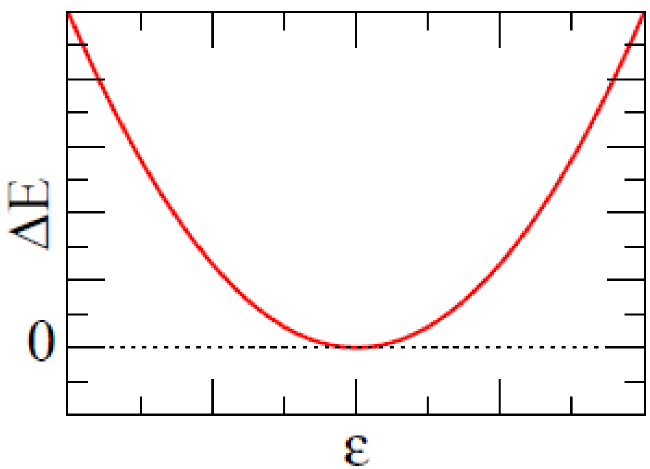
得

$$E_C^{(0)} = +a_C Z^2/A^{1/3}$$

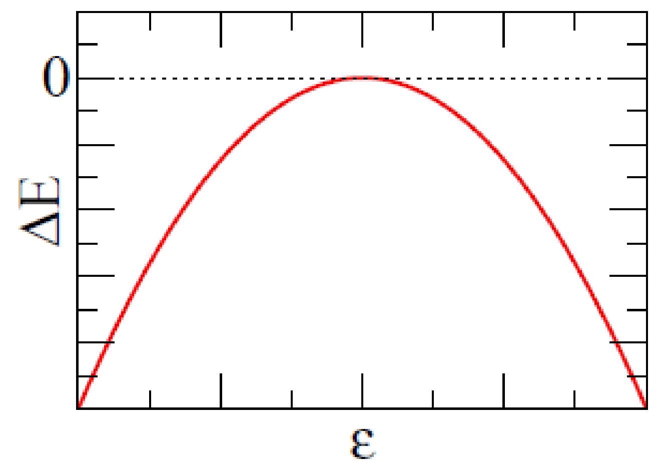
$$E_S + E_C - E_S^{(0)} - E_C^{(0)}$$
$$= \left(\frac{2}{5}E_S^{(0)} - \frac{1}{5}E_C^{(0)}\right)\epsilon^2 - \frac{4}{105}\left(E_S^{(0)} + E_C^{(0)}\right)\epsilon^3 + \cdots$$

■ まずは2次から

$\frac{2}{5}E_S^{(0)} > \frac{1}{5}E_C^{(0)}$ だと



$\frac{2}{5}E_S^{(0)} < \frac{1}{5}E_C^{(0)}$ だと



→ 核分裂に対して不安定

フィシリティ・パラメーター

$$\frac{2}{5}E_S^{(0)} - \frac{1}{5}E_C^{(0)} = \frac{2}{5}E_S^{(0)}\left(1 - \frac{E_C^{(0)}}{2E_S^{(0)}}\right) \equiv \frac{2}{5}E_S^{(0)}(1 - x)$$

$$E_S + E_C - E_S^{(0)} - E_C^{(0)}$$
$$= \left(\frac{2}{5}E_S^{(0)} - \frac{1}{5}E_C^{(0)}\right)\epsilon^2 - \frac{4}{105}\left(E_S^{(0)} + E_C^{(0)}\right)\epsilon^3 + \cdots$$

■ まずは2次から

$$\frac{2}{5}E_S^{(0)} - \frac{1}{5}E_C^{(0)} = \frac{2}{5}E_S^{(0)}\left(1 - \frac{E_C^{(0)}}{2E_S^{(0)}}\right)$$

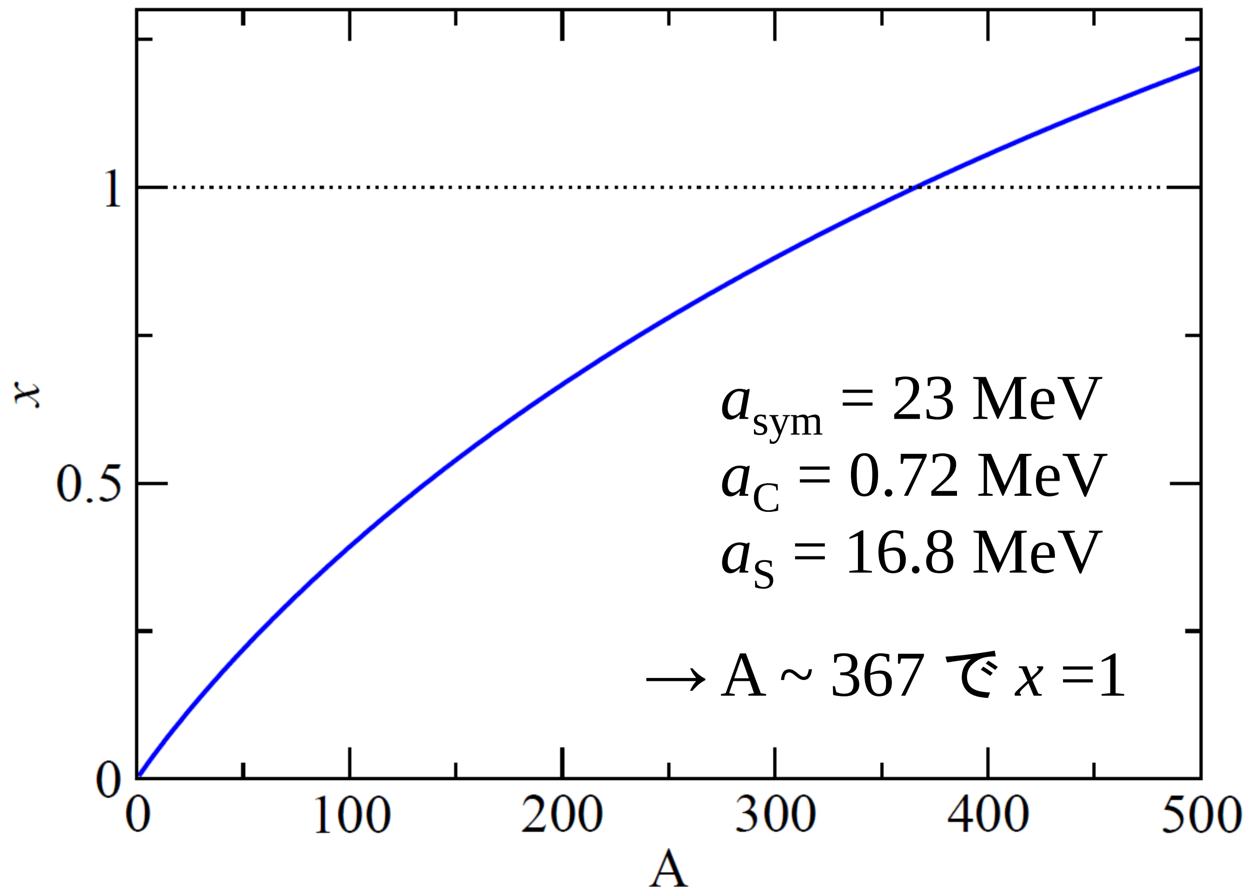
フィシリティ(fissility)パラメーター: *x*

$$E_S^{(0)} = +a_S A^{2/3} \sim 20 A^{2/3} \quad \text{(MeV)}$$
$$E_C^{(0)} = +a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} \sim 0.751 \frac{Z^2}{A^{1/3}} \quad \text{(MeV)}$$

$$\longrightarrow \quad x \equiv \frac{E_C^{(0)}}{2E_S^{(0)}} = \frac{a_C}{2a_S} \cdot \frac{Z^2}{A} \sim \frac{1}{53.3} \cdot \frac{Z^2}{A}$$

$$Z=\frac{4a_{\rm sym}}{2a_C/A^{1/3}+8a_{\rm sym}/A} \longleftarrow \left.\frac{\partial m}{\partial Z}\right|_{A=const.}=0$$

$$x\equiv\frac{E_C^{(0)}}{2E_S^{(0)}}=\frac{a_C}{2a_S}\cdot\frac{Z^2}{A}$$



原子核の表面振動

$$E_{\rm surf} = E_{\rm surf}^{(0)}\,(1+\frac{2}{5}\epsilon^2+\cdots)$$

$$E_C = E_C^{(0)}\,(1-\frac{1}{5}\epsilon^2+\cdots)$$

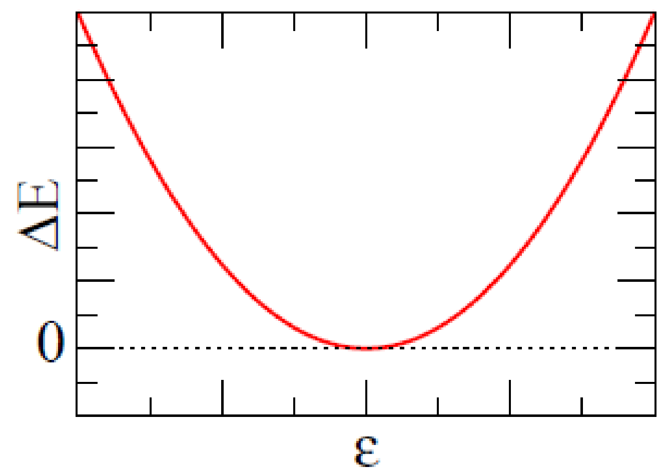
$$\boxed{\Delta E = E_{\rm surf}^{(0)}\cdot\frac{2}{5}(1-x)\epsilon^2}$$

$$x \equiv \frac{E_C^{(0)}}{2E_{\rm surf}^{(0)}}$$

（fissility パラメーター）

＊原子核が安定に存在するためには
$x < 1$ が必要

ε^2 に比例するようなポテンシャル



原子核の表面振動

$$E_{\text{surf}} = E_{\text{surf}}^{(0)}(1 + \frac{2}{5}\epsilon^2 + \cdots)$$

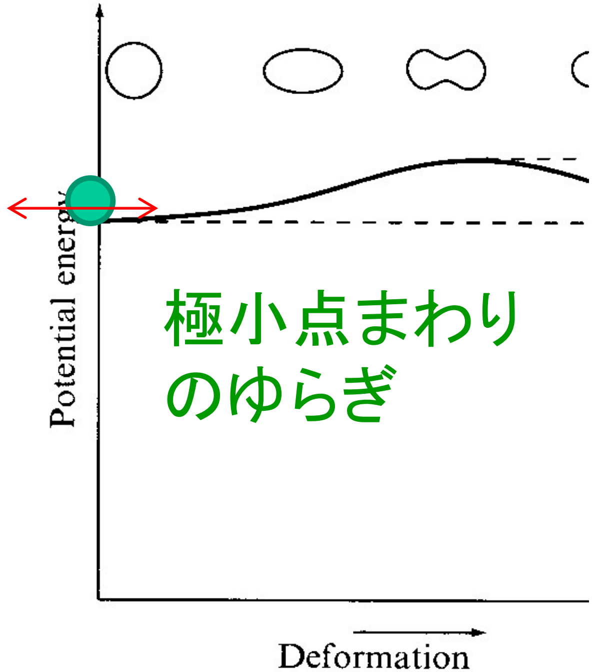
$$E_C = E_C^{(0)}(1 - \frac{1}{5}\epsilon^2 + \cdots)$$

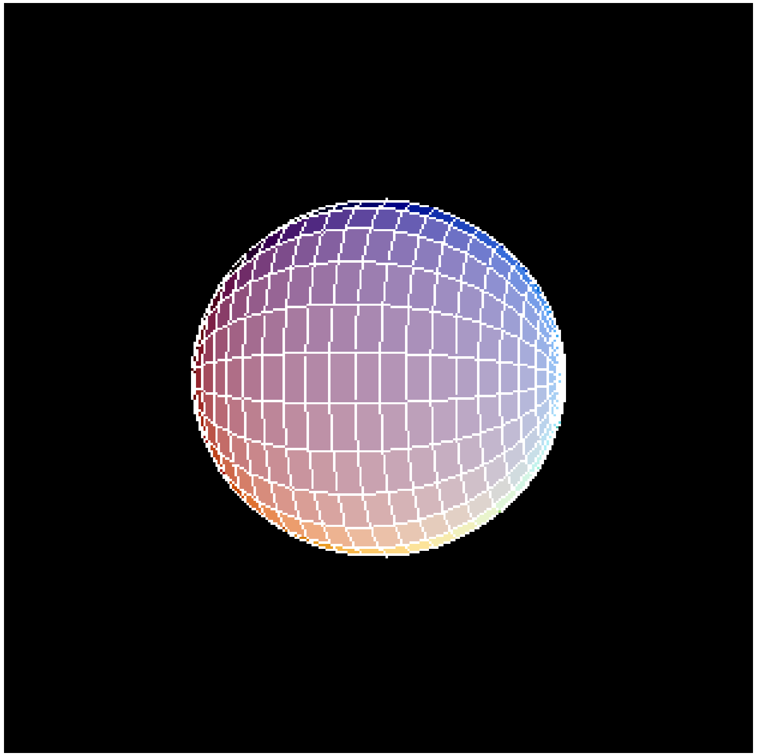
$$\boxed{\Delta E = E_{\text{surf}}^{(0)} \cdot \frac{2}{5}(1 - x)\epsilon^2}$$

$$x \equiv \frac{E_C^{(0)}}{2E_{\text{surf}}^{(0)}}$$

（fissility パラメーター）

＊原子核が安定に存在するためには
$x < 1$ が必要





様々な原子核で調和振動子に近いスペクトル → 振動運動

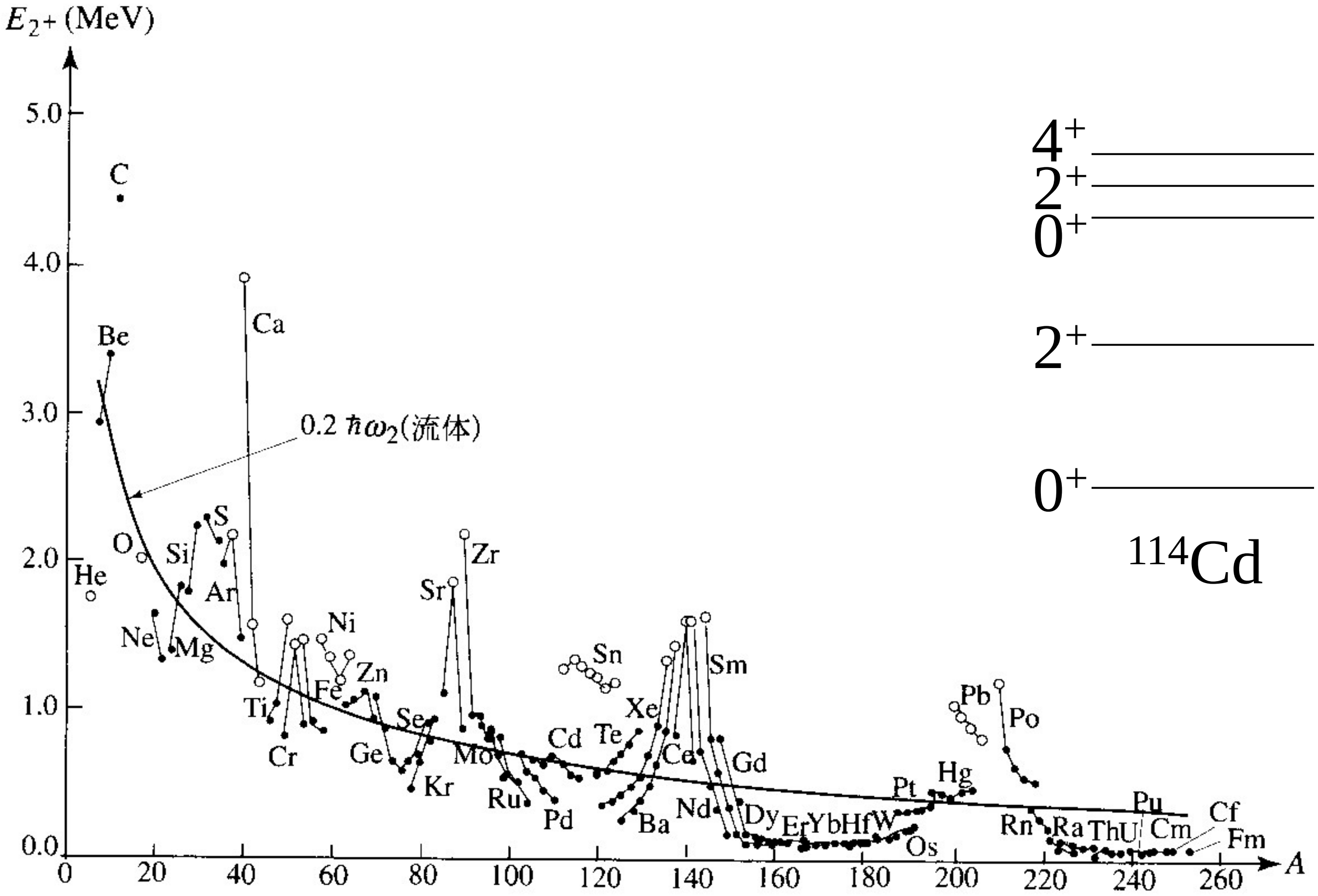
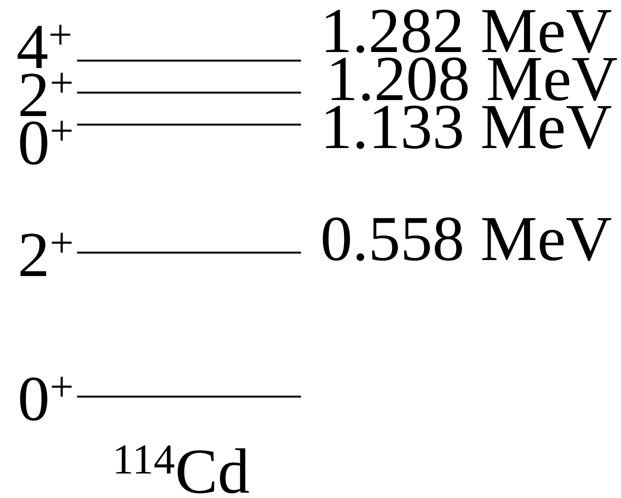
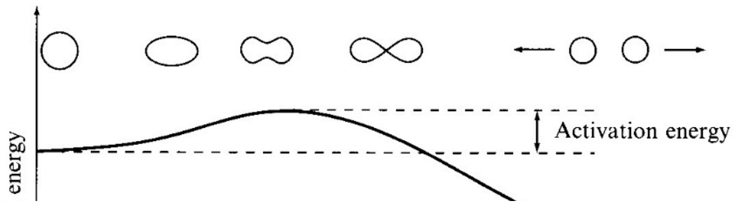


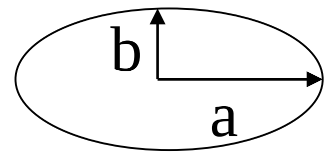
図 3.2 偶々核の第 1 励起 2^+ 状態の励起エネルギー



次回もう少し詳しく。
(なぜ、第二励起状態
のスピンが 0,2,4 になるのか?など)

もっと一般には:





$$
\begin{aligned}
a &= R \cdot (1+\epsilon) \\
b &= R \cdot (1+\epsilon)^{-1/2}
\end{aligned}
$$

一般的に, $R(\theta,\phi) = R_0 \left(1 + \sum_{\lambda,\mu} \alpha_{\lambda\mu} Y^*_{\lambda\mu}(\theta,\phi)\right)$

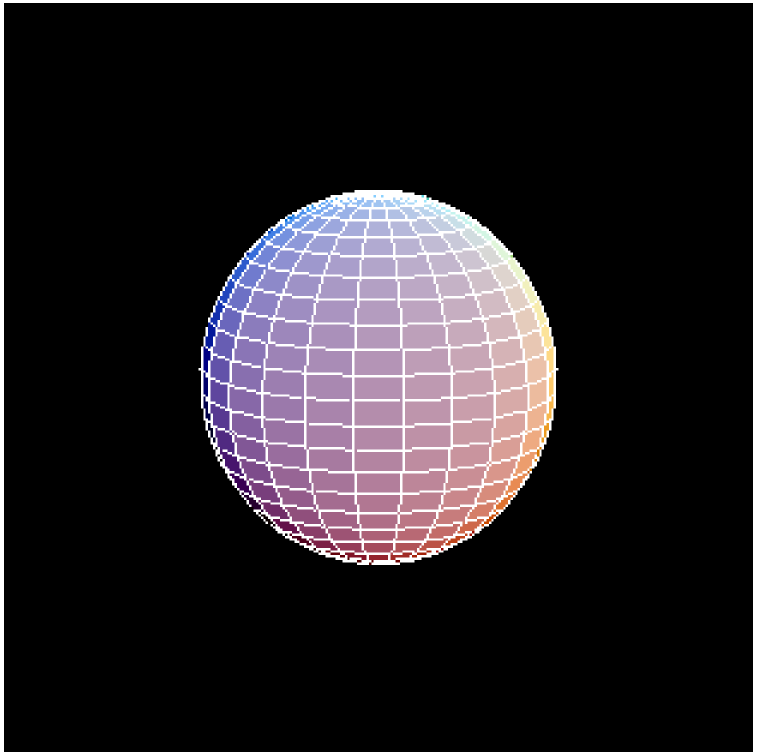
(回転楕円体は $\lambda = 2, \mu = 0$ に相当)

回転楕円体の時と同じように表面エネルギー、クーロンエネルギーを計算すると:

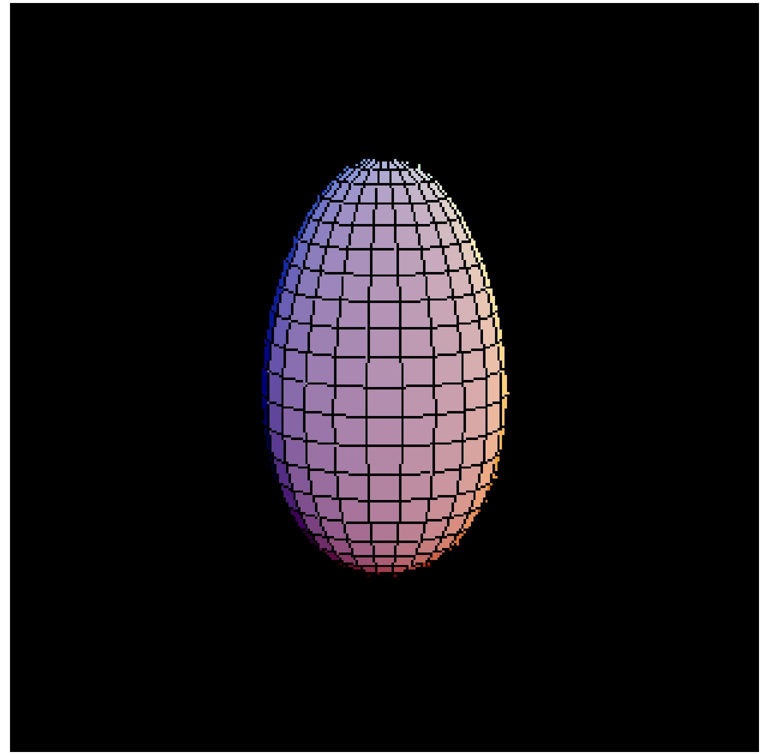
$$
V \sim \frac{1}{2} \sum_{\lambda,\mu} C_\lambda \left|\alpha_{\lambda\mu}\right|^2
$$

量子化: 調和振動子

$$R(\theta,\phi) = R_0\left(1 + \sum_{\lambda,\mu}\alpha_{\lambda\mu}Y^*_{\lambda\mu}(\theta,\phi)\right) \qquad V \sim \frac{1}{2}\sum_{\lambda,\mu}C_\lambda\left|\alpha_{\lambda\mu}\right|^2$$

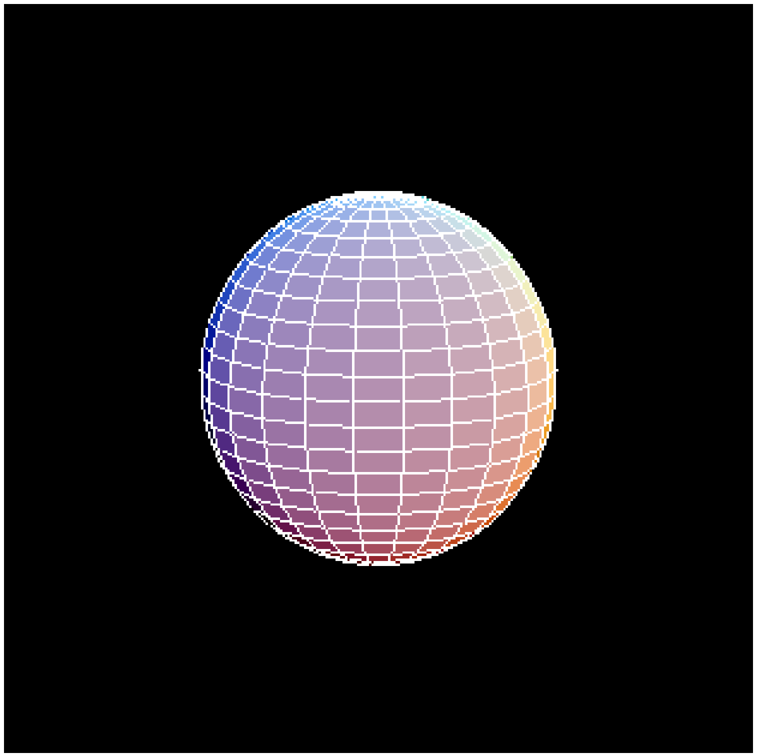


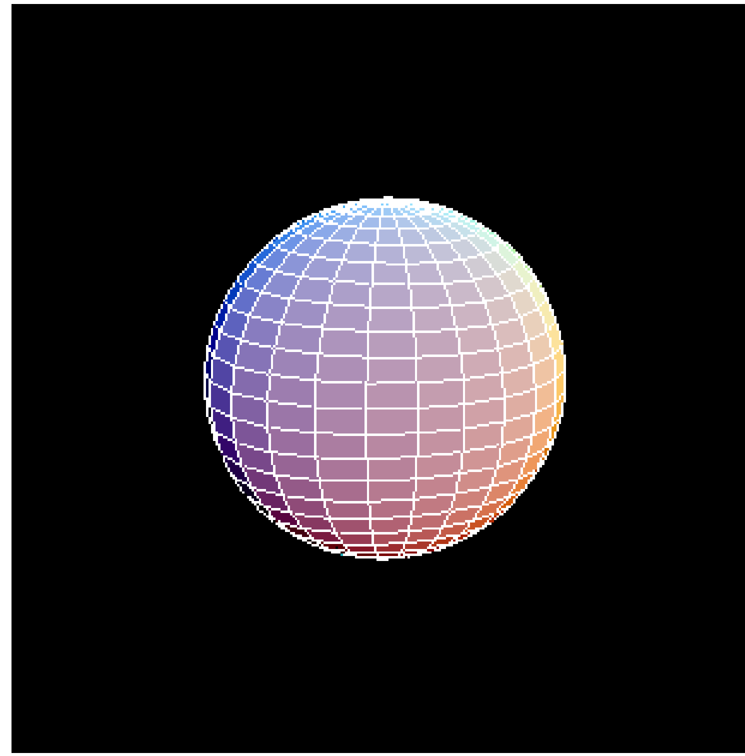
λ=2: 四重極型振動



λ=3: 八重極型振動

$$R(\theta,\phi) = R_0\left(1 + \sum_{\lambda,\mu} \alpha_{\lambda\mu} Y^*_{\lambda\mu}(\theta,\phi)\right) \qquad V \sim \frac{1}{2}\sum_{\lambda,\mu} C_\lambda \left|\alpha_{\lambda\mu}\right|^2$$





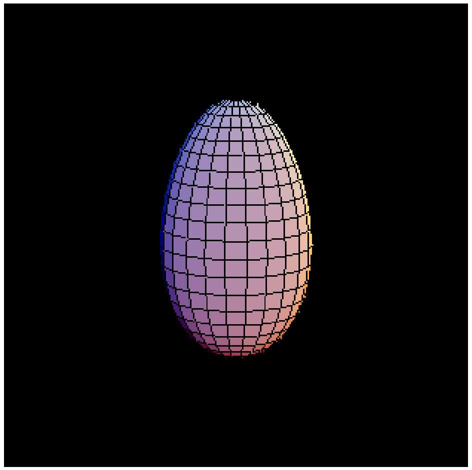
Y_{20} 型振動

$\lambda=2,\ \mu = 0$

Y_{22} 型振動

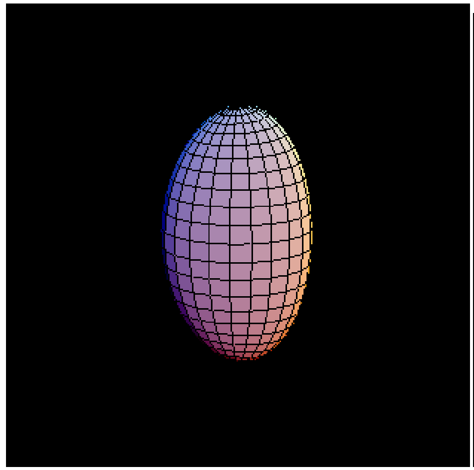
$\lambda=2,\ \mu = +/-\ 2$

$$R(\theta,\phi) = R_0 \left(1 + \sum_{\lambda,\mu} \alpha_{\lambda\mu} Y^*_{\lambda\mu}(\theta,\phi)\right) \qquad V \sim \frac{1}{2}\sum_{\lambda,\mu} C_\lambda \left|\alpha_{\lambda\mu}\right|^2$$



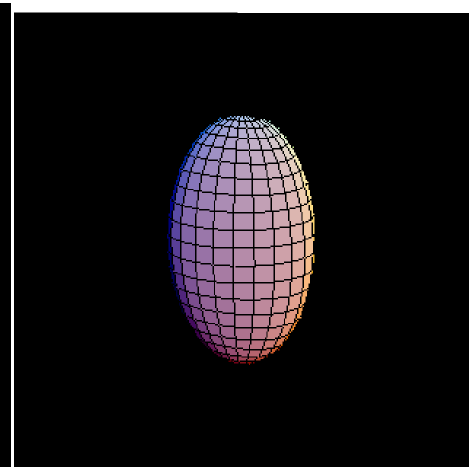
Y_{30} 型振動

$\lambda=3,\ \mu = 0$



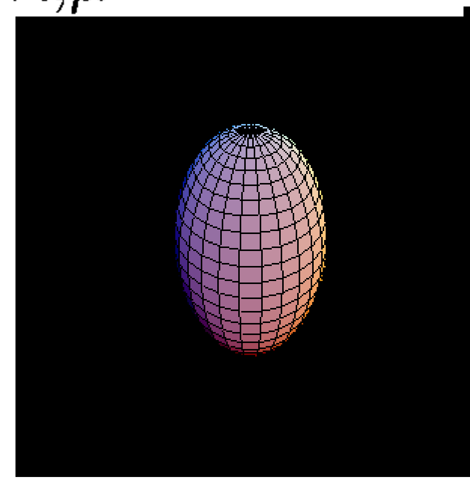
Y_{31} 型振動

$\lambda=3,\ \mu = +/-\ 1$



Y_{32} 型振動

$\lambda=3,\ \mu = +/-\ 2$



Y_{33} 型振動

$\lambda=3,\ \mu = +/-\ 3$

どのくらいのエネルギーを与えれば原子核は振動しはじめるのか？

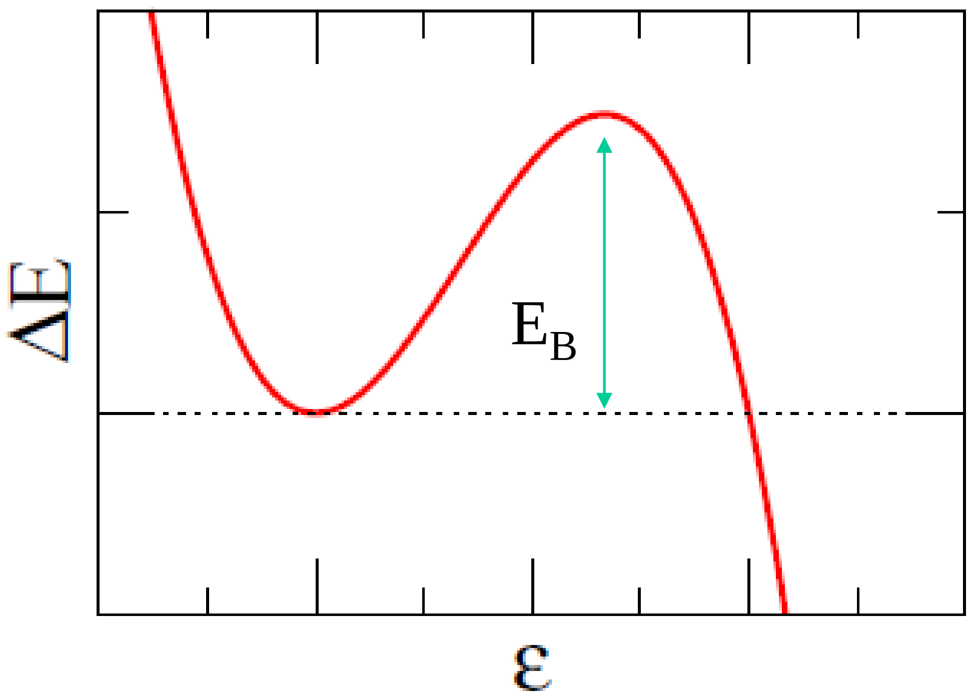
$\Longleftrightarrow$ 振動の励起エネルギー

ムービー：在田謙一郎氏（名古屋工大）

$$E_S + E_C - E_S^{(0)} - E_C^{(0)}$$
$$= \left(\frac{2}{5}E_S^{(0)} - \frac{1}{5}E_C^{(0)}\right)\epsilon^2 - \frac{4}{105}\left(E_S^{(0)} + E_C^{(0)}\right)\epsilon^3 + \cdots$$

■ 次に3次まで

$$\Delta E = E_S^{(0)}\left\{\frac{2}{5}(1-x)\epsilon^2 - \frac{4}{105}(1+2x)\epsilon^3 + \cdots\right\}$$



表面エネルギーとクーロンエネルギーの競合によるポテンシャル障壁

ポテンシャル障壁の高さ(^{236}U の場合)

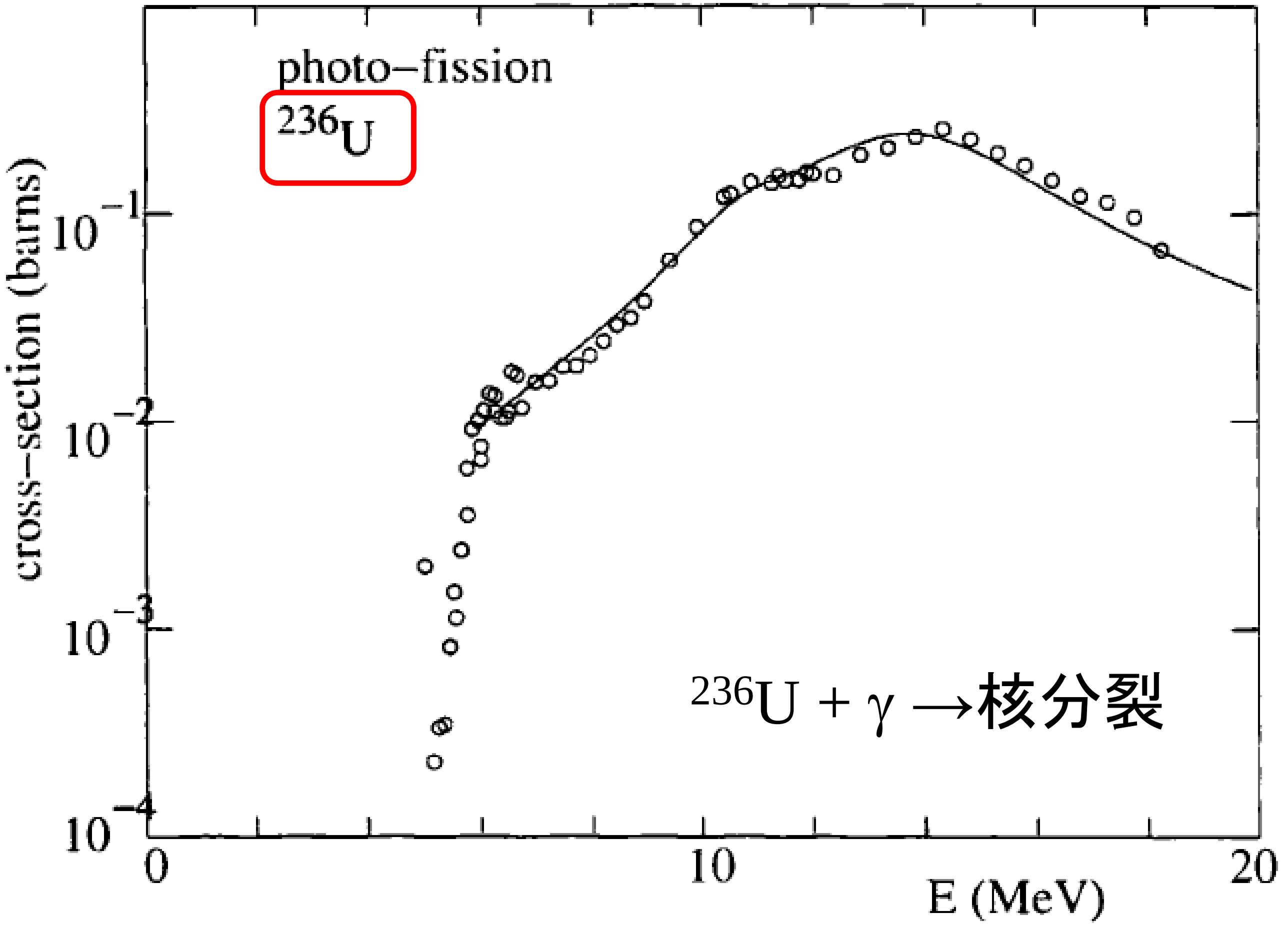
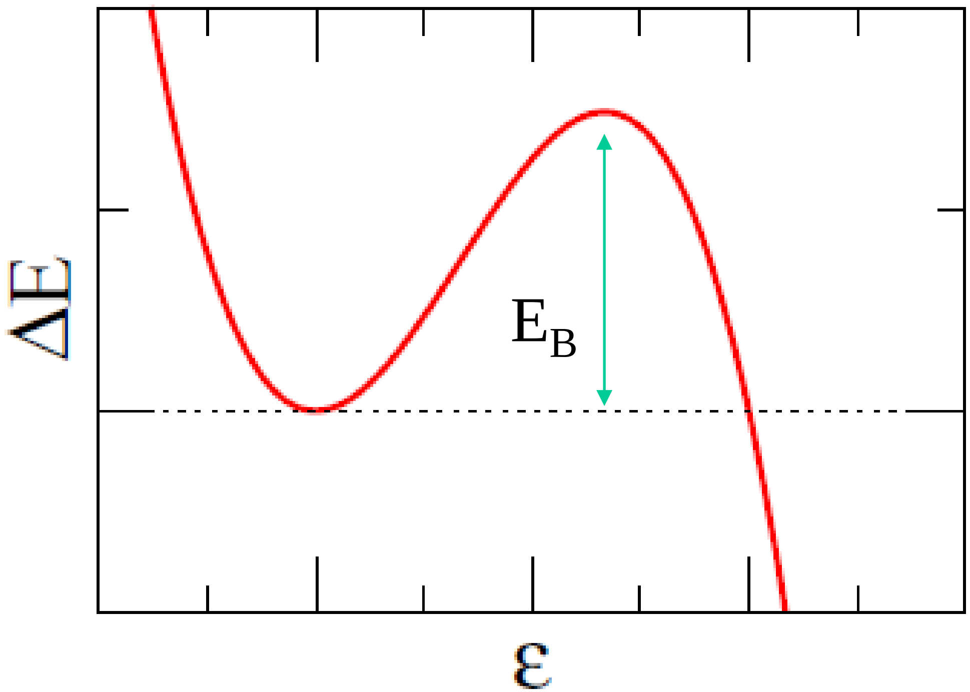


Fig. 6.5. Cross-section for $\gamma\,^{236}U \to$ fission [30].

photo-fission (光核分裂)の断面積:フォトンのエネルギーが 5.7 MeV のあたりから断面積が急に立ち上がる(障壁の高さが 5.7 MeV くらい)

$$\Delta E = E_S^{(0)} \left\{ \frac{2}{5}(1-x)\epsilon^2 - \frac{4}{105}(1+2x)\epsilon^3 + \cdots \right\}$$



$$E_B = \frac{98}{15} \cdot \frac{(1-x)^3}{(1+2x)^2} \cdot E_S^{(0)}$$

重い核ほど障壁は低くなる

⟵ クーロンの効果が大きくなる

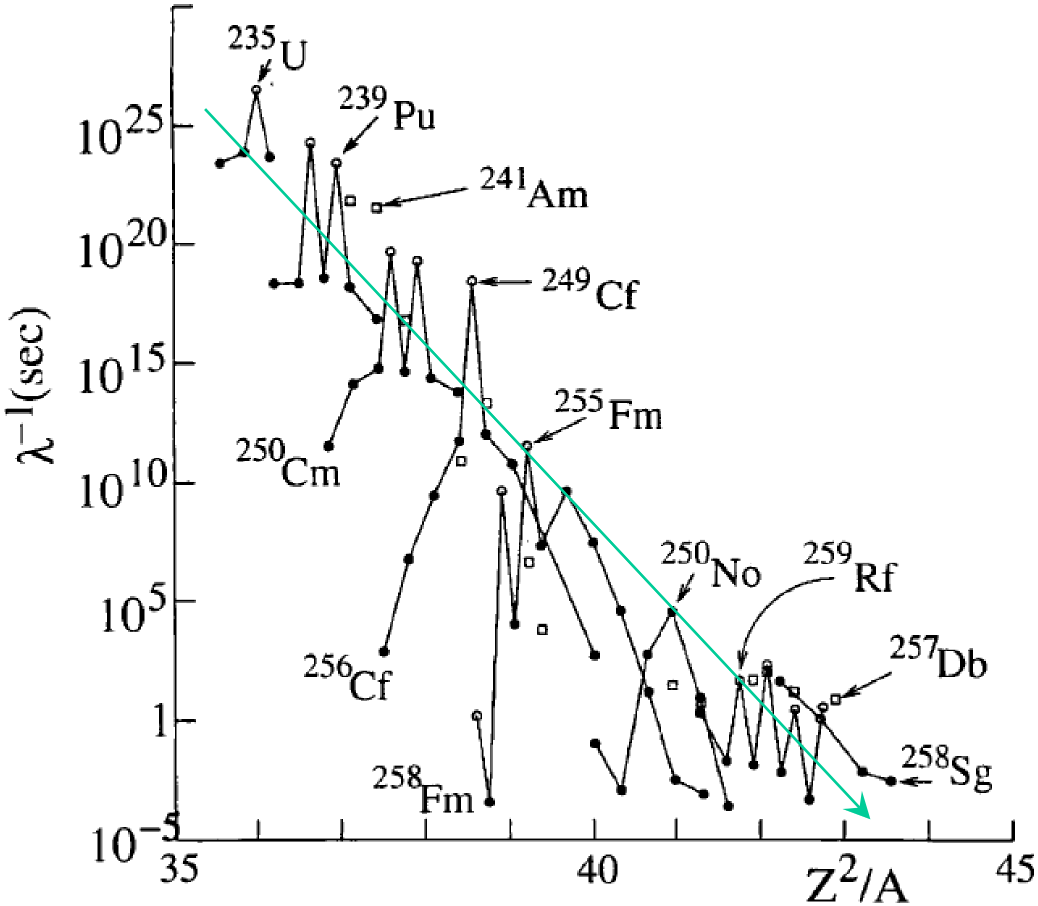
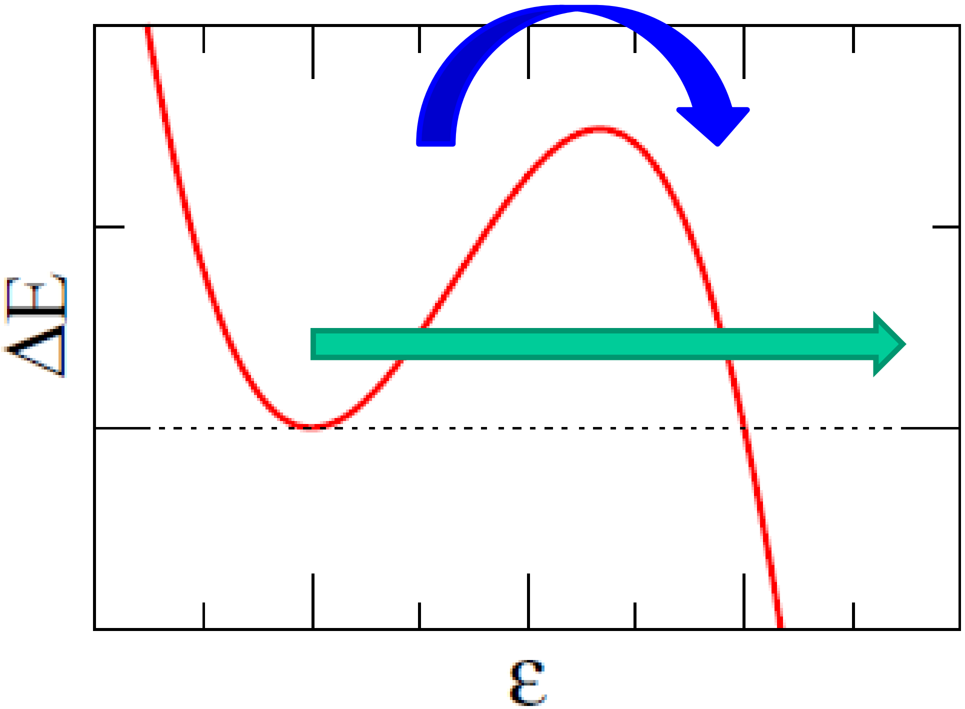


Fig. 6.4. Spontaneous fission lifetimes as a function of the fission parameter Z^2/A for selected nuclei. Circles are for even-Z nuclei. filled circles for even-even nuclei and open circles for even-odd nuclei. Squares are for odd-Z nuclei.

自発核分裂の寿命: Z^2/A が大きくなるほど、核分裂障壁
が低くなって寿命が短くなる

２種類の核分裂



①誘起核分裂（熱的崩壊）

cf. 化学反応
（アレニウスの式）

②自発核分裂

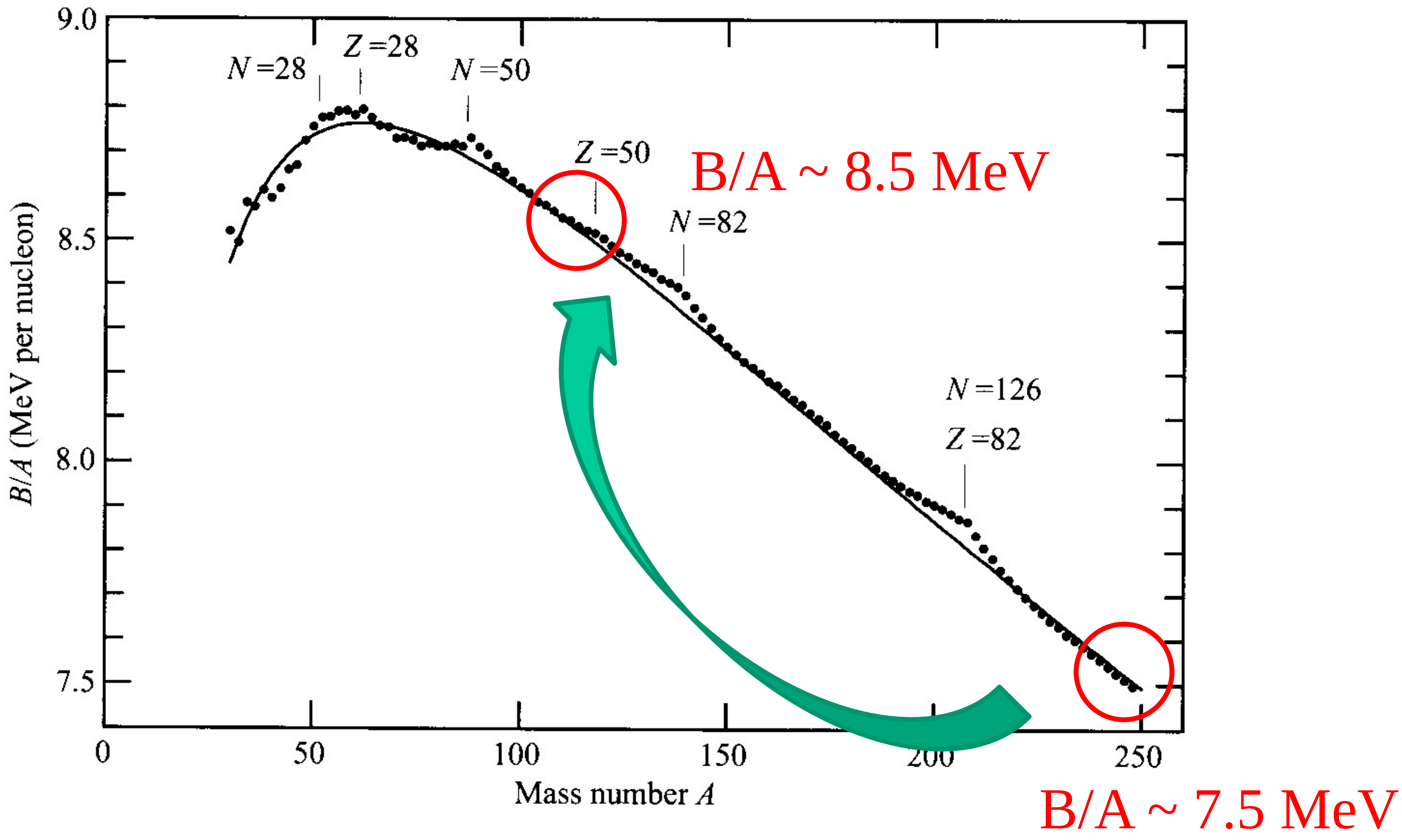
↑

トンネル効果

↑

後でもう少し詳しく
（アルファ崩壊）

エネルギーの解放



(A=240) → 2 x (A=120)

$$\Delta E = -7.5 \times 240 + 8.5 \times 120 \times 2 \sim 240$$

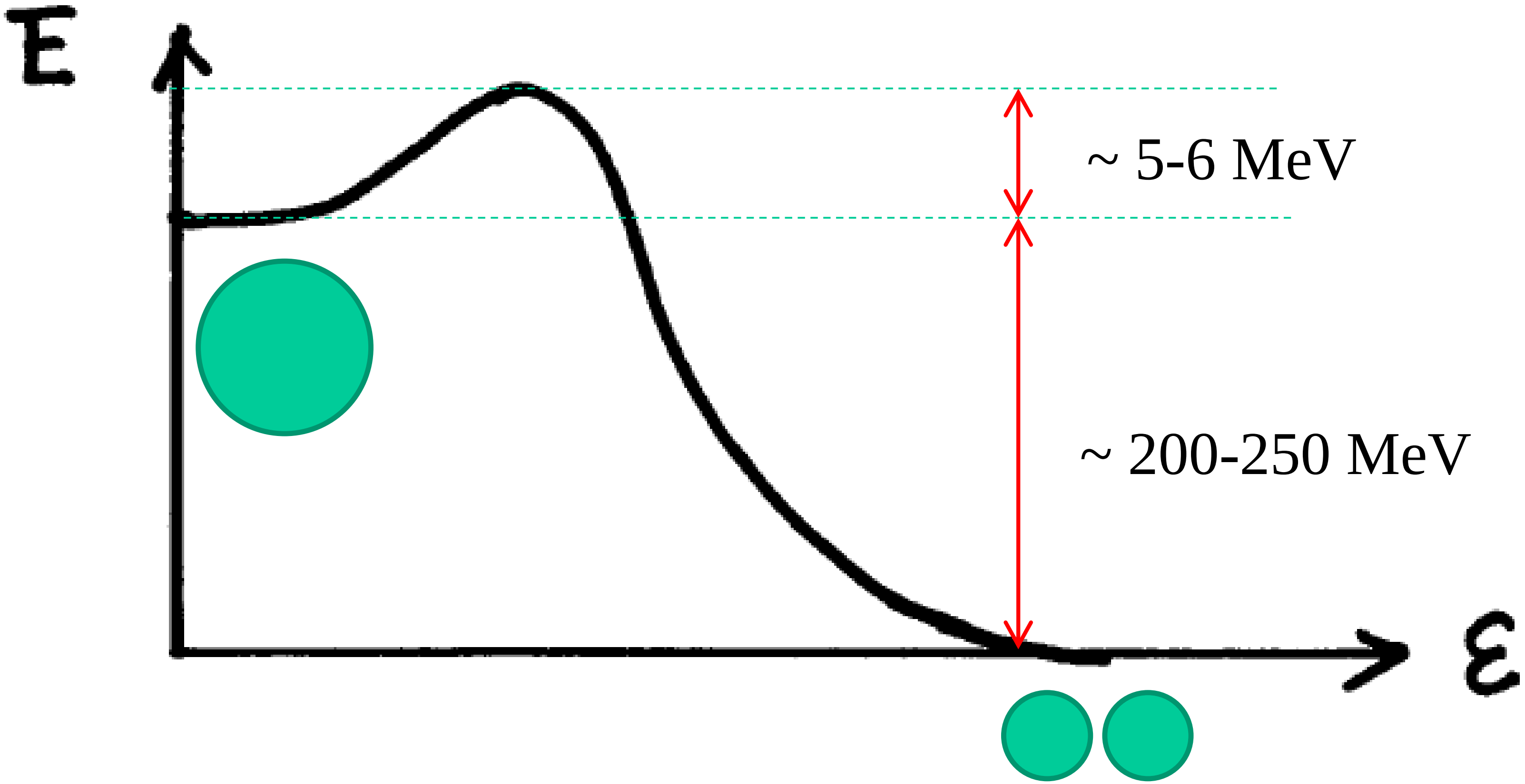
(MeV)

エネルギーの解放

(A=240) → 2 x (A=120)

$$\Delta E = -7.5 \times 240 + 8.5 \times 120 \times 2 \sim 240$$

(MeV)



どうして ^{235}U が“燃え”て ^{238}U が“燃え”ないのか(原発)?

天然ウラン:

^{238}U	99.2742%
^{235}U	0.7204%
^{234}U	0.0054%

このうち、^{235}U だけが「燃える」

$^{235}U + n \rightarrow {}^{236}U^* \rightarrow$ 核分裂

$^{238}U + n \rightarrow {}^{239}U^* \rightarrow$ 核分裂 はほとんど無視できる確率

なぜか?

どうして ^{235}U が“燃え”て ^{238}U が“燃え”ないのか（原発）?

障壁の高さ
が違うため?

↓

そうではない

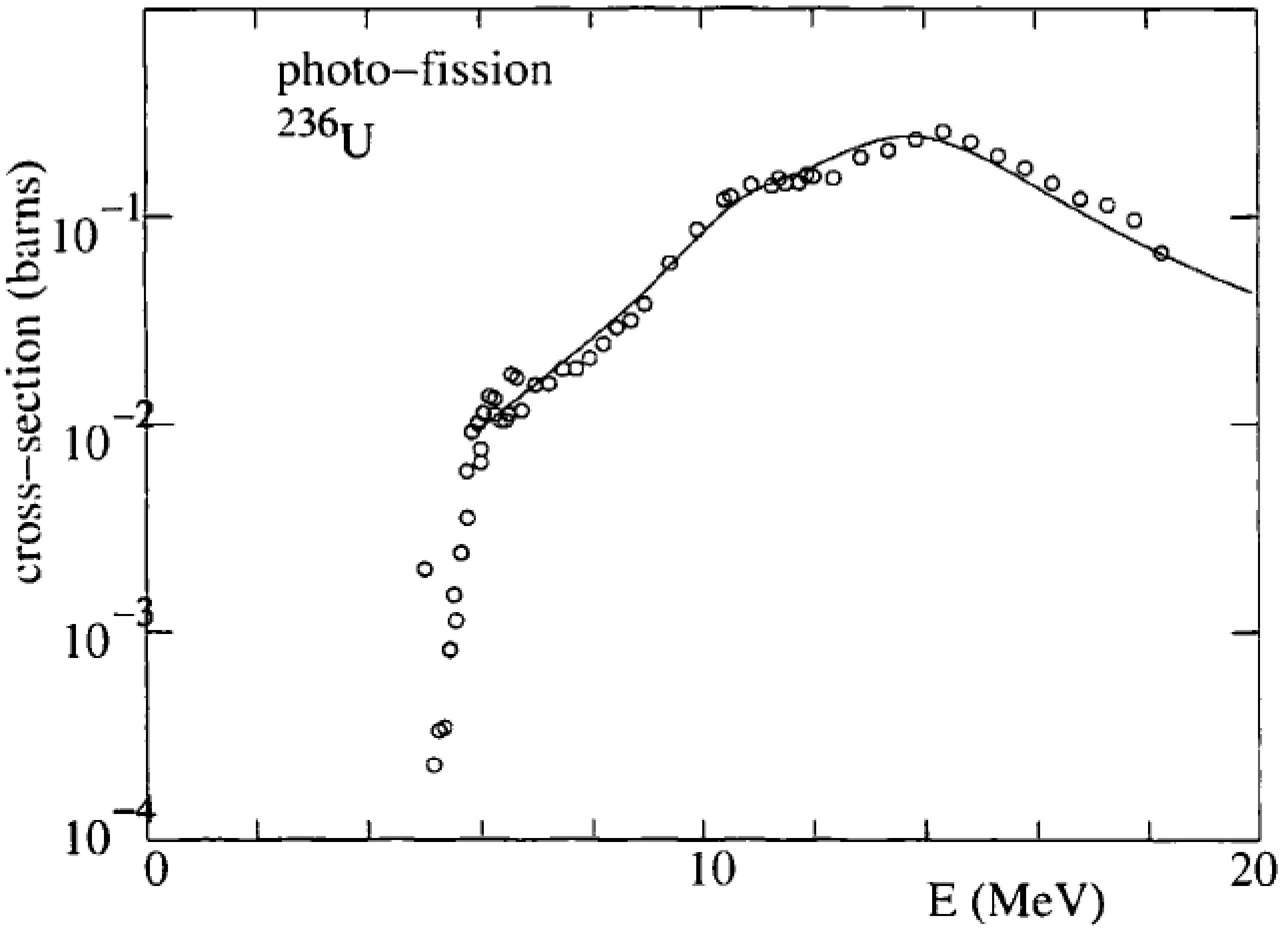


Fig. 6.5. Cross-section for $\gamma\,^{236}U \rightarrow$ fission [30].

photo-fission（光核分裂）の断面積：フォトンのエネルギーが 5.7 MeV のあたりから断面積が急に立ち上がる（障壁の高さが 5.7 MeV くらい）

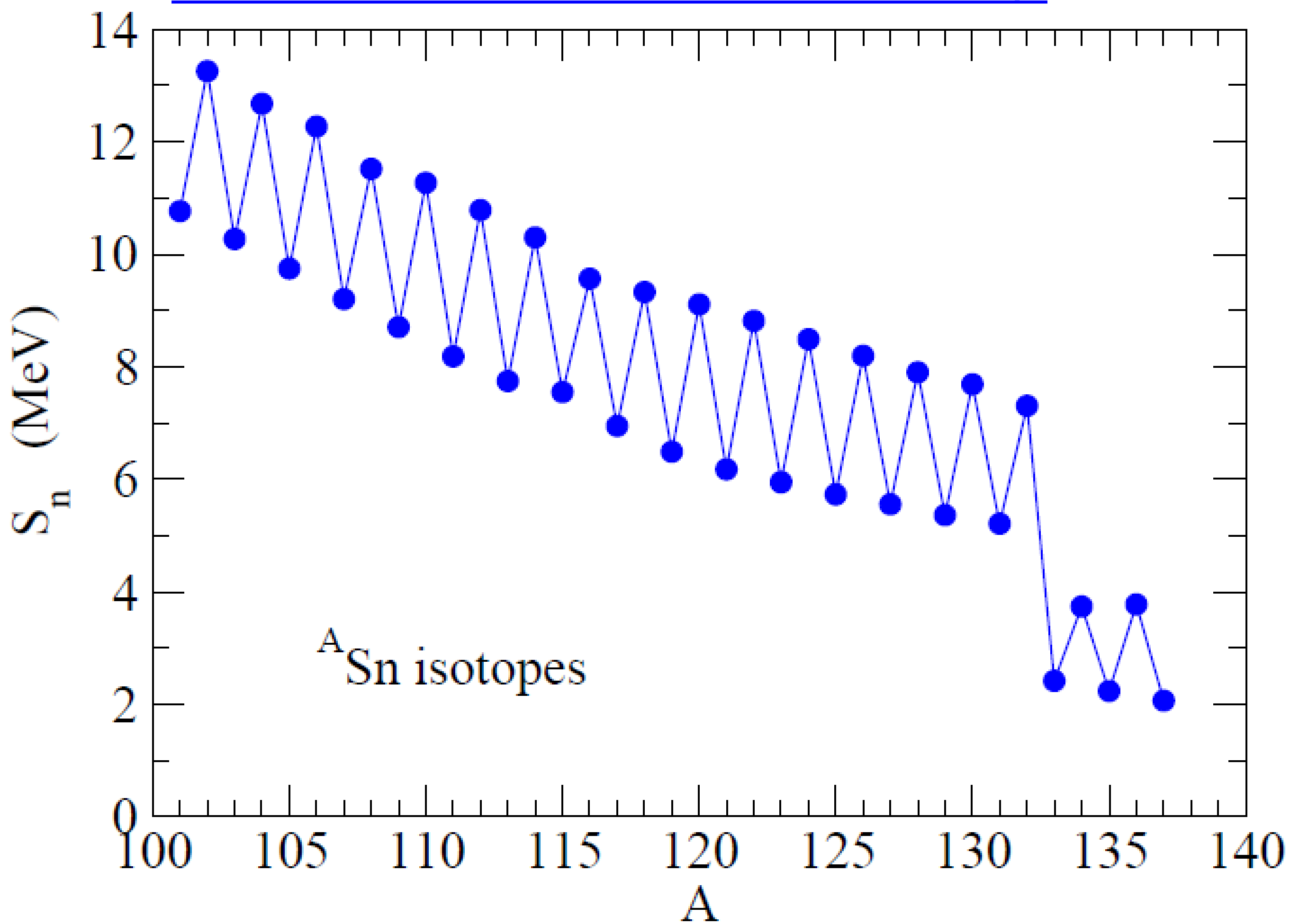
＊ ^{239}U の核分裂障壁の高さは同程度 (6.0 MeV)

^{236}U と ^{239}U で大きく違うのが1中性子分離エネルギー

$S_n(^{236}U) = 6.3$ MeV

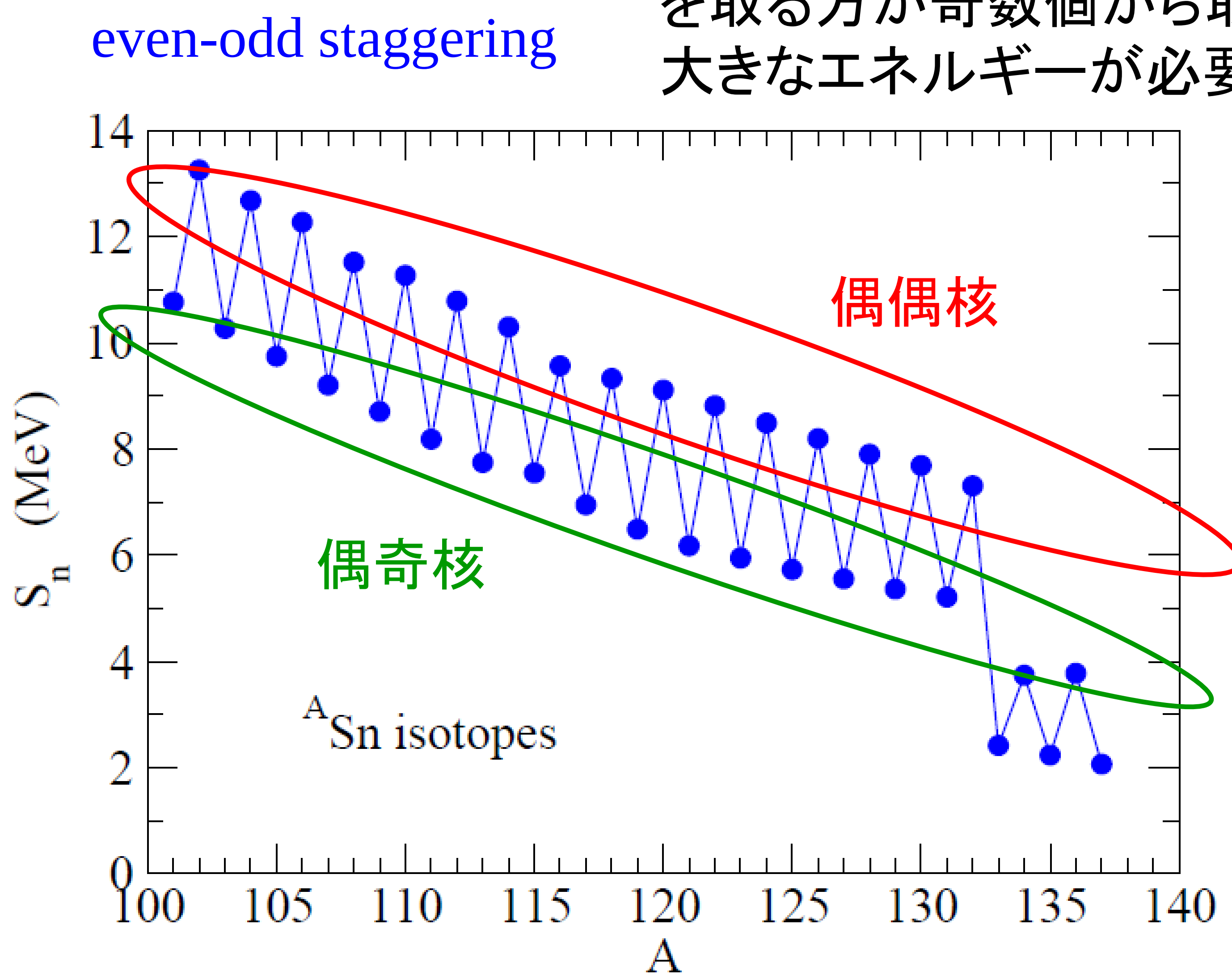
$S_n(^{239}U) = 4.8$ MeV

分離エネルギーにおける偶奇効果



1n separation energy: $S_n(A,Z) = B(A,Z) - B(A-1,Z)$

偶数個の中性子から1つ中性子を取る方が奇数個から取るより大きなエネルギーが必要：対相関



1n separation energy: S_n (A,Z) = B(A,Z) – B(A-1,Z)

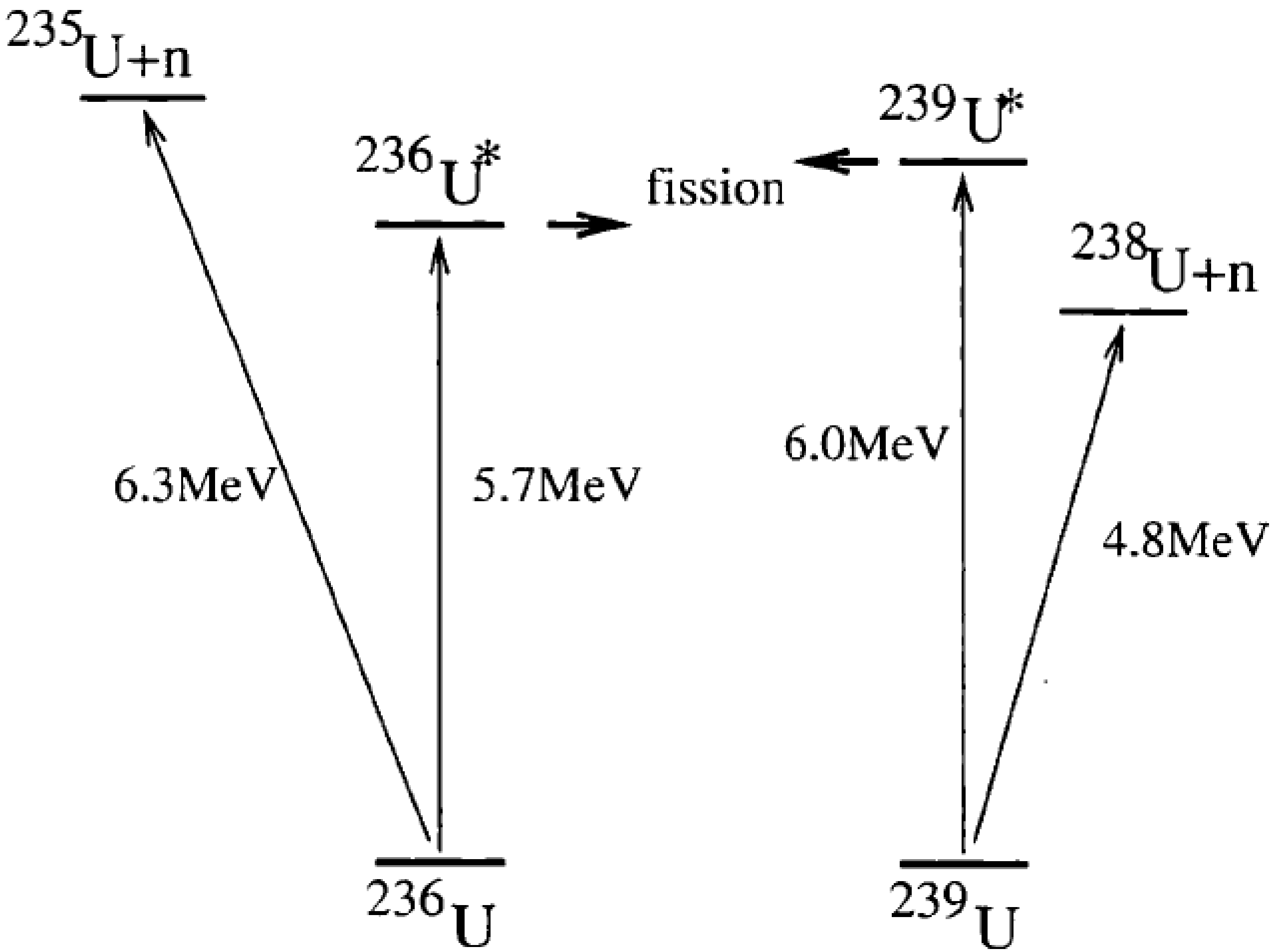
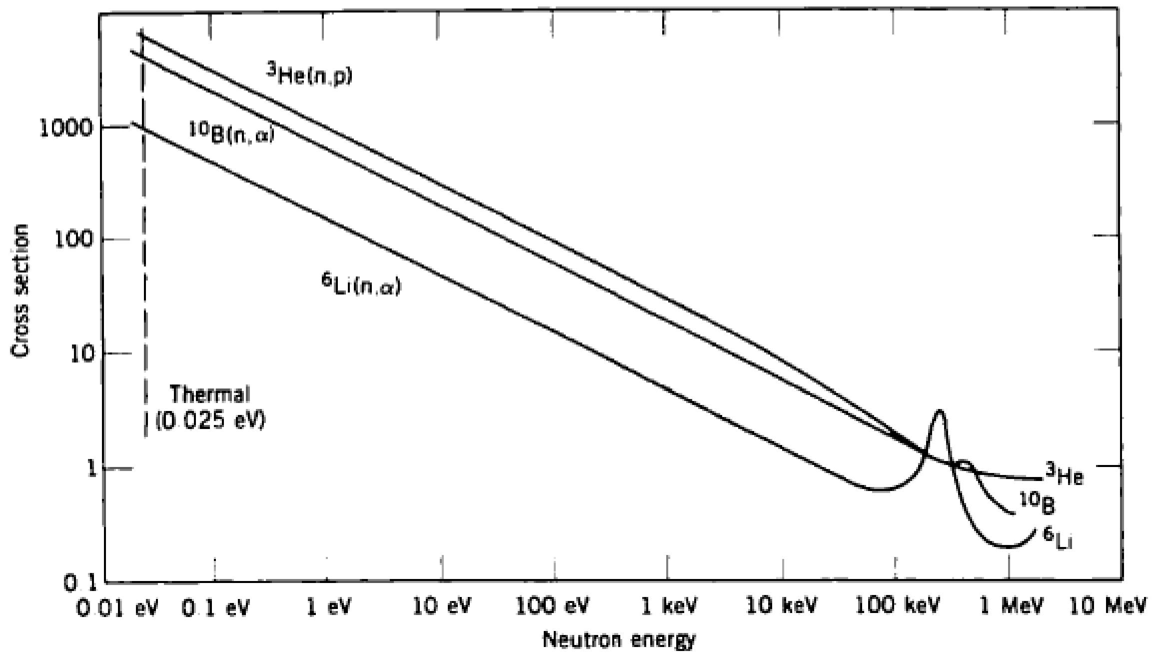


Fig. 6.6. Levels of the systems $A = 236$ and $A = 239$ involved in the fission of ^{236}U and ^{239}U. The addition of a motionless (or thermal) neutron to ^{235}U can lead to the fission of ^{236}U. On the other hand, fission of ^{239}U requires the addition of a neutron of kinetic energy $T_n = 6.0 - 4.8 = 1.2\,\text{MeV}$.

核分裂障壁の高さと1中性子分離エネルギーの関係

- 中性子の入射エネルギーをあげると核分裂障壁を越えれる ^{239}U の励起状態を作ることができるが、今度は中性子吸収の確率が小さくなって核分裂の効率が落ちる。

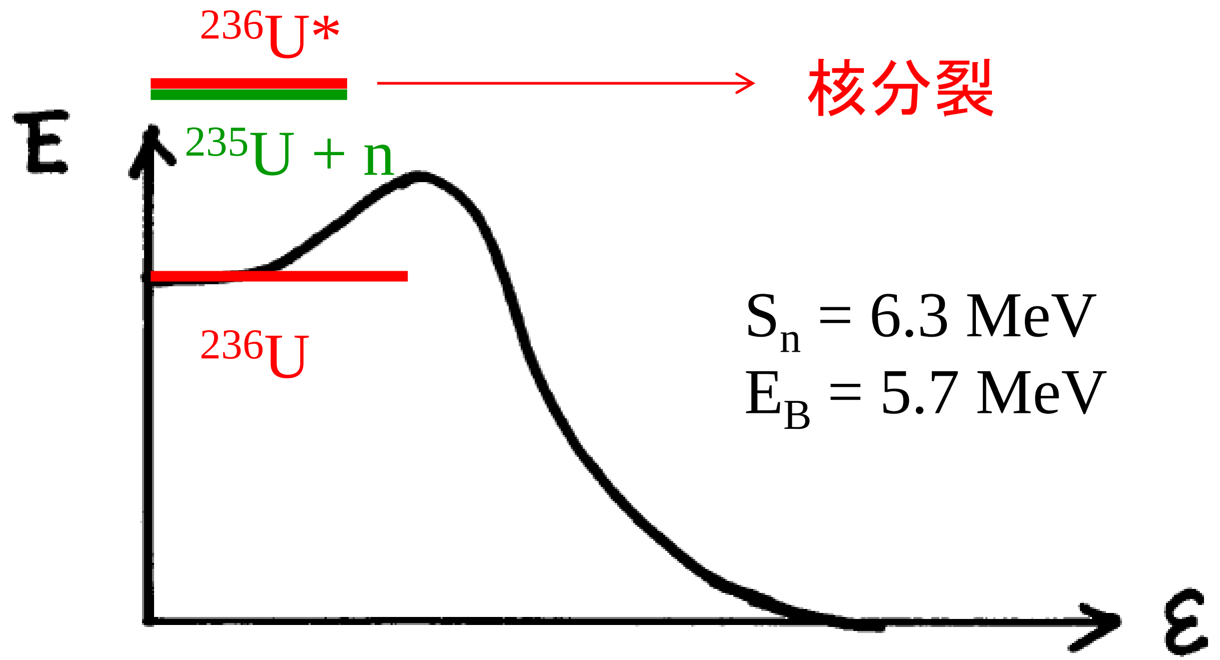


* 1 b = 100 fm^2

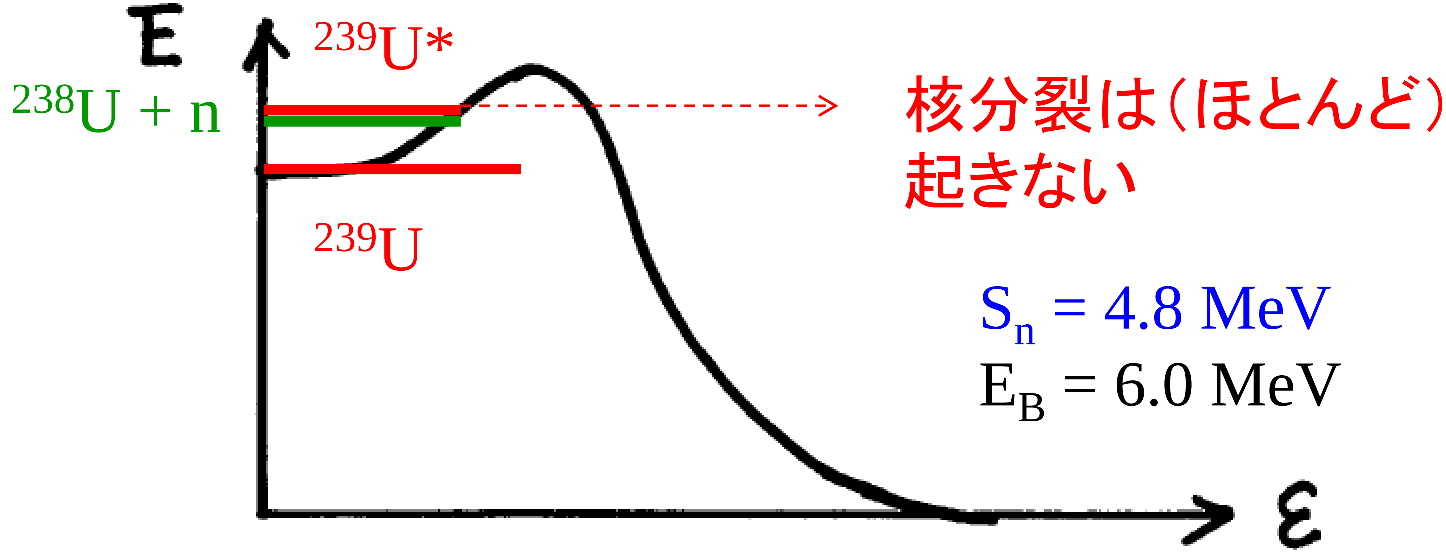
Figure 12.5 Neutron cross sections for ^{3}He(n, p), ^{10}B(n, α), and ^{6}Li(n, α). The cross section shows the $1/v$ behavior for $E < 1$ keV, but begins to show resonances above 100 keV.

吸収断面積は 1/v に比例 (1/v 則)

熱中性子 (0.025 eV) による核分裂断面積: 532 +/- 4 (b)
速い中性子 (~ 1 MeV) による核分裂断面積: 0.29 (b)



236U*
核分裂
E
235U + n
236U
Sn = 6.3 MeV
EB = 5.7 MeV
ε



E
239U*
238U + n
核分裂は（ほとんど）
起きない
239U
Sn = 4.8 MeV
EB = 6.0 MeV
ε