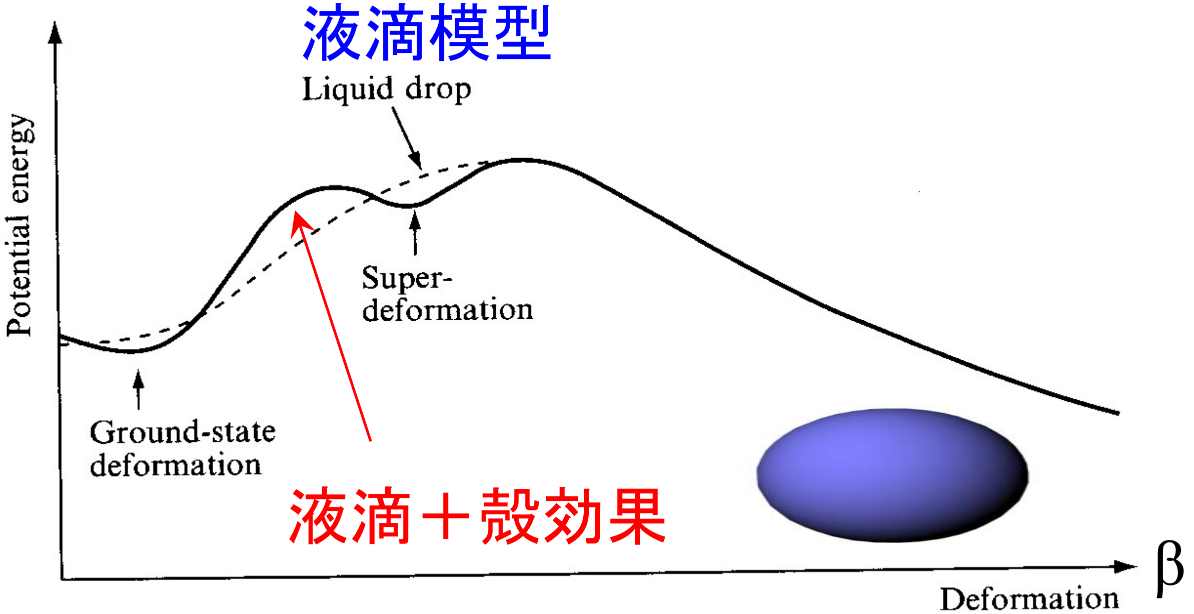
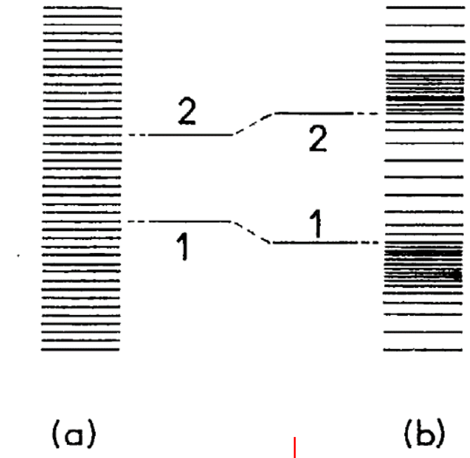
殻構造の帰結：原子核の変形





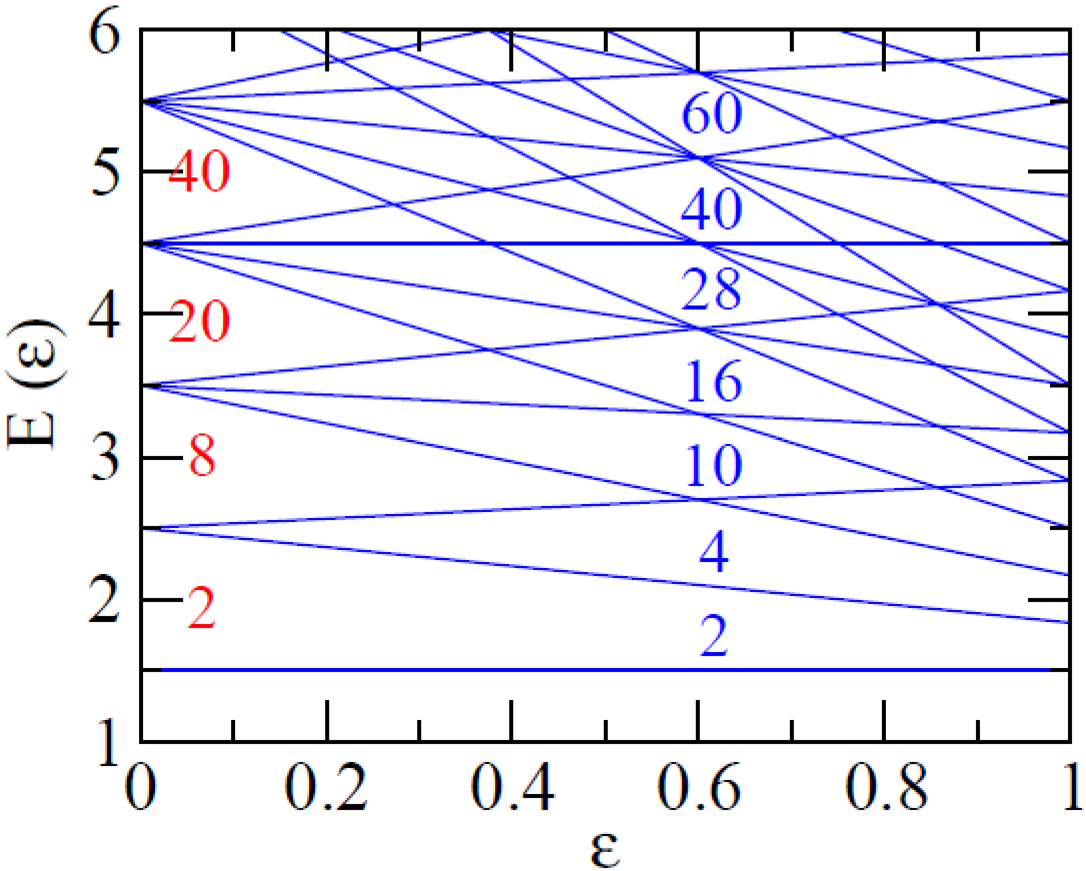
準位にギャップが開くと原子核が安定になる

$$E(\beta) = E_{LDM}(\beta) + E_{\mathrm{shell}}(\beta)$$

原子核が変形
→ 核子が感じるポテンシャルも変形
→ 変形度によって異なる量子力学的補正（殻効果）

例）3次元調和振動子 $H=\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega_z^2z^2+\frac{1}{2}m\omega_\perp^2(x^2+y^2)$

$$E=(n_z+\frac{1}{2})\hbar\omega_z+(n_x+n_y+1)\hbar\omega_\perp$$



$$\omega_\perp = \omega_0(1+\frac{\epsilon}{3})$$

$$\omega_z = \omega_0(1-\frac{2}{3}\epsilon)$$

球形のときとは
異なる殻構造

⇓

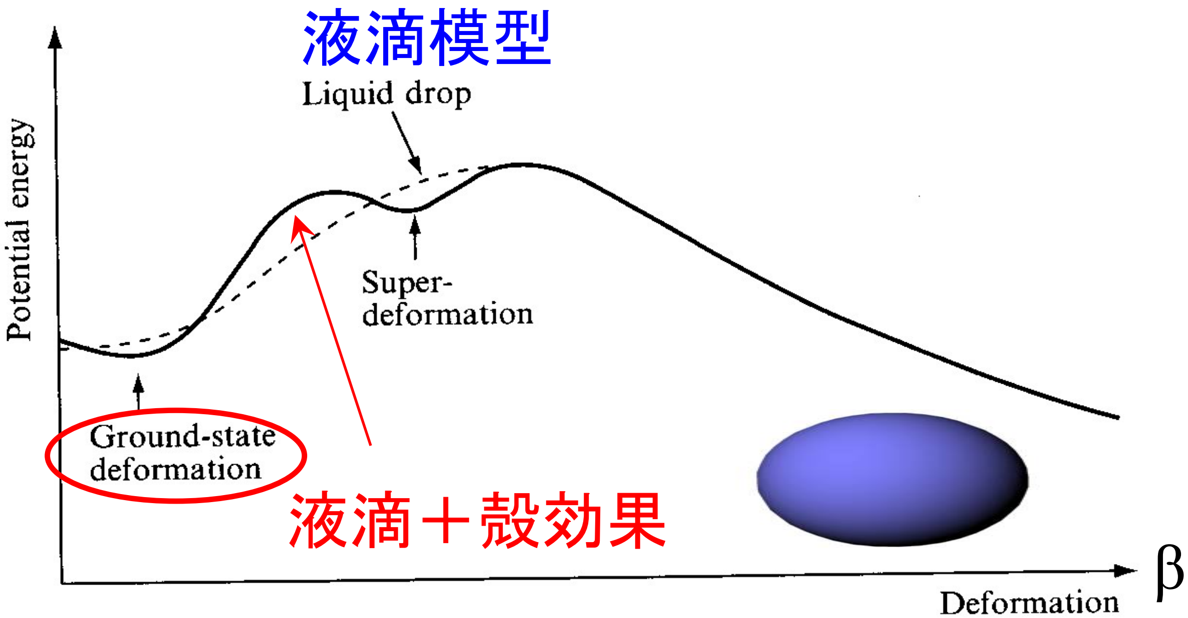
殻補正エネルギーは
変形に依存する

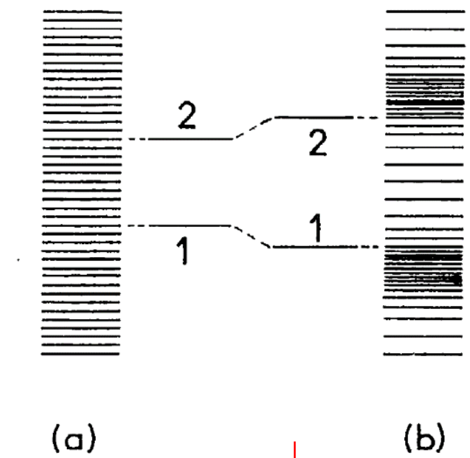
$$E(\epsilon) = E_{LDM}(\epsilon) + E_{\text{shell}}(\epsilon)$$

⇓

最も安定なεを
変え得る
（原子核の変形）

殻構造の帰結：原子核の変形





準位にギャップが開くと原子核が安定になる

$$E(\beta) = E_{LDM}(\beta) + E_{\mathsf{shell}}(\beta)$$

液滴模型 ⟹ 必ず球形

殻効果 ⟹ 変形状態が基底状態になる場合あり

→ 実験的証拠はあるか?

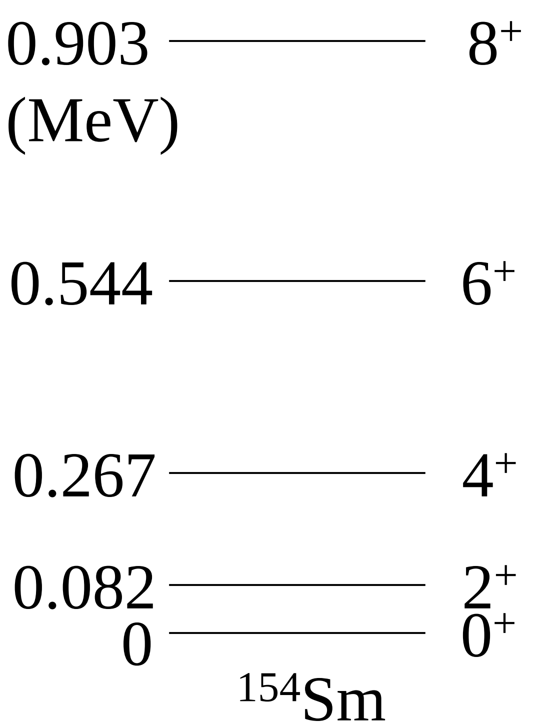
原子核の変形の証拠

cf. 剛体の回転エネルギー（古典力学）

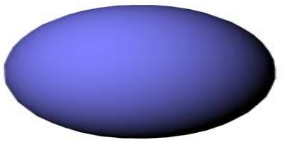
$$E = \frac{1}{2}\mathcal{J}\omega^2 = \frac{I^2}{2\mathcal{J}}$$

$$(I = \mathcal{J}\omega,\ \ \omega = \dot{\theta})$$

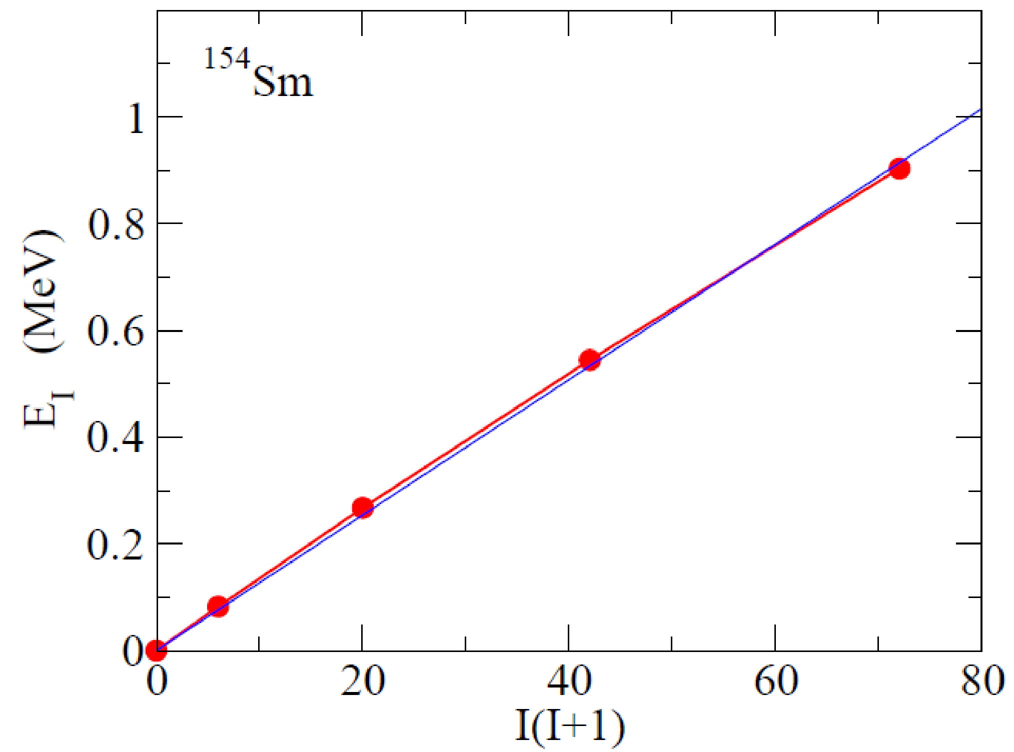
^{154}Sm の励起スペクトル



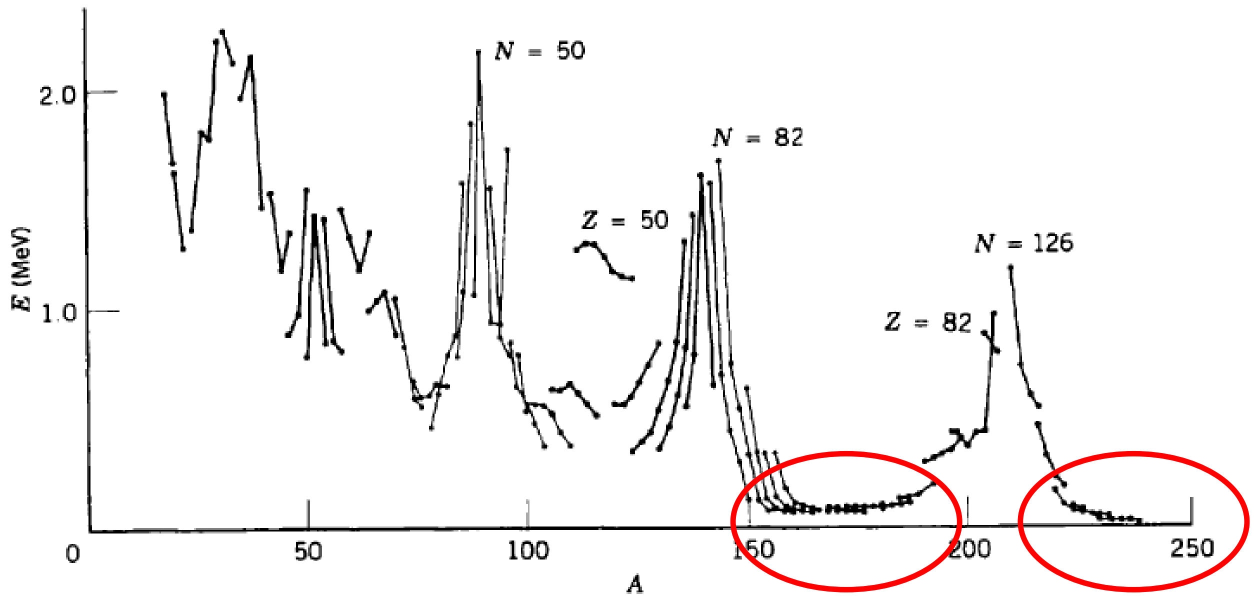
^{154}Sm は変形している



$$\boxed{E_I \sim \frac{I(I+1)\hbar^2}{2\mathcal{J}}}$$



偶偶核の 2+ 状態のエネルギー



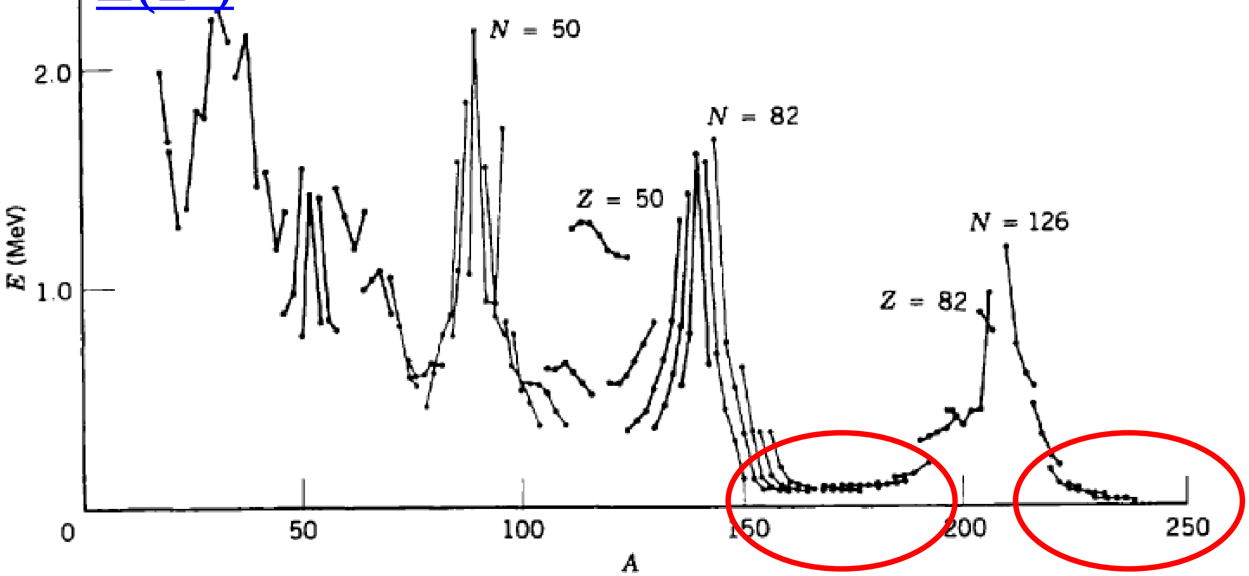
変形核

K.S. Krane, “Introductory Nuclear Physics”

原子核が変形すると励起エネルギーが小さくなる

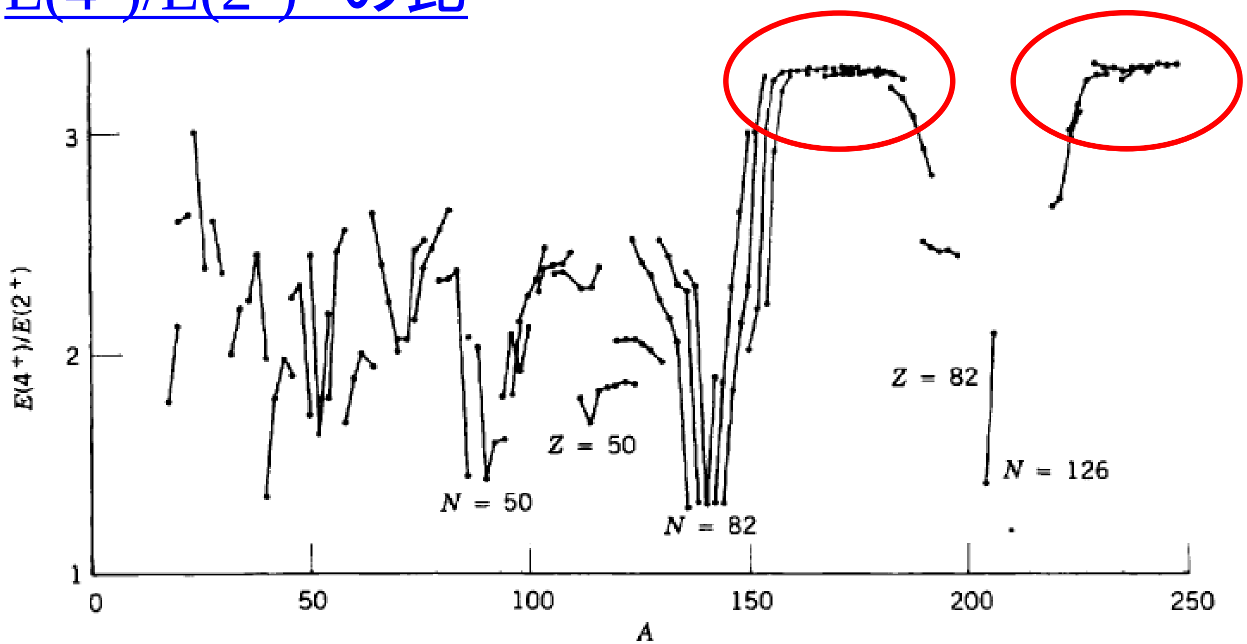
⟷　原子核の変形：対称性の自発的破れ
（ゼロ・モードの発生）

E(2^+)



変形核

E(4^+)/E(2^+) の比

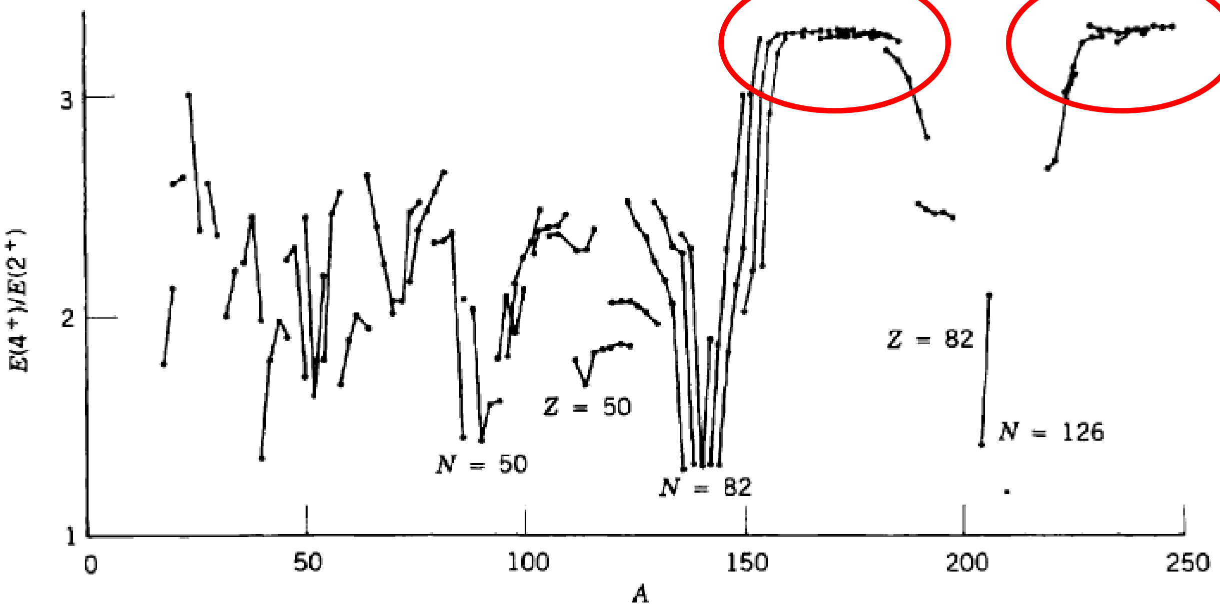


変形核なら
E(4^+)/E(2^+) ~ 3.3

球形核なら
E(4^+)/E(2^+) ~ 2

K.S. Krane, “Introductory Nuclear Physics”

偶偶核における E(4⁺)/E(2⁺) の比

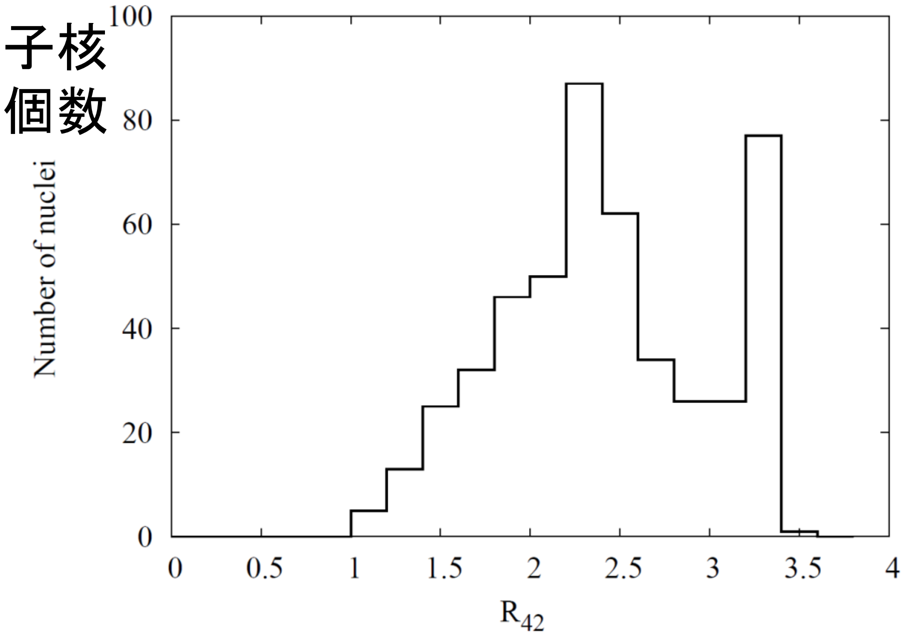


変形核なら
E(4⁺)/E(2⁺) ~ 3.3

球形核なら
E(4⁺)/E(2⁺) ~ 2

K.S. Krane, “Introductory Nuclear Physics”

原子核の個数



E(4⁺)/E(2⁺)

G.F. Bertsch,
in “Fifty Years of Nuclear BCS”, p. 26

偶偶核の 2^+ 状態の四重極モーメント

$$Q = e\sqrt{\frac{16\pi}{5}}\langle\Psi_{II}|r^2Y_{20}|\Psi_{II}\rangle$$

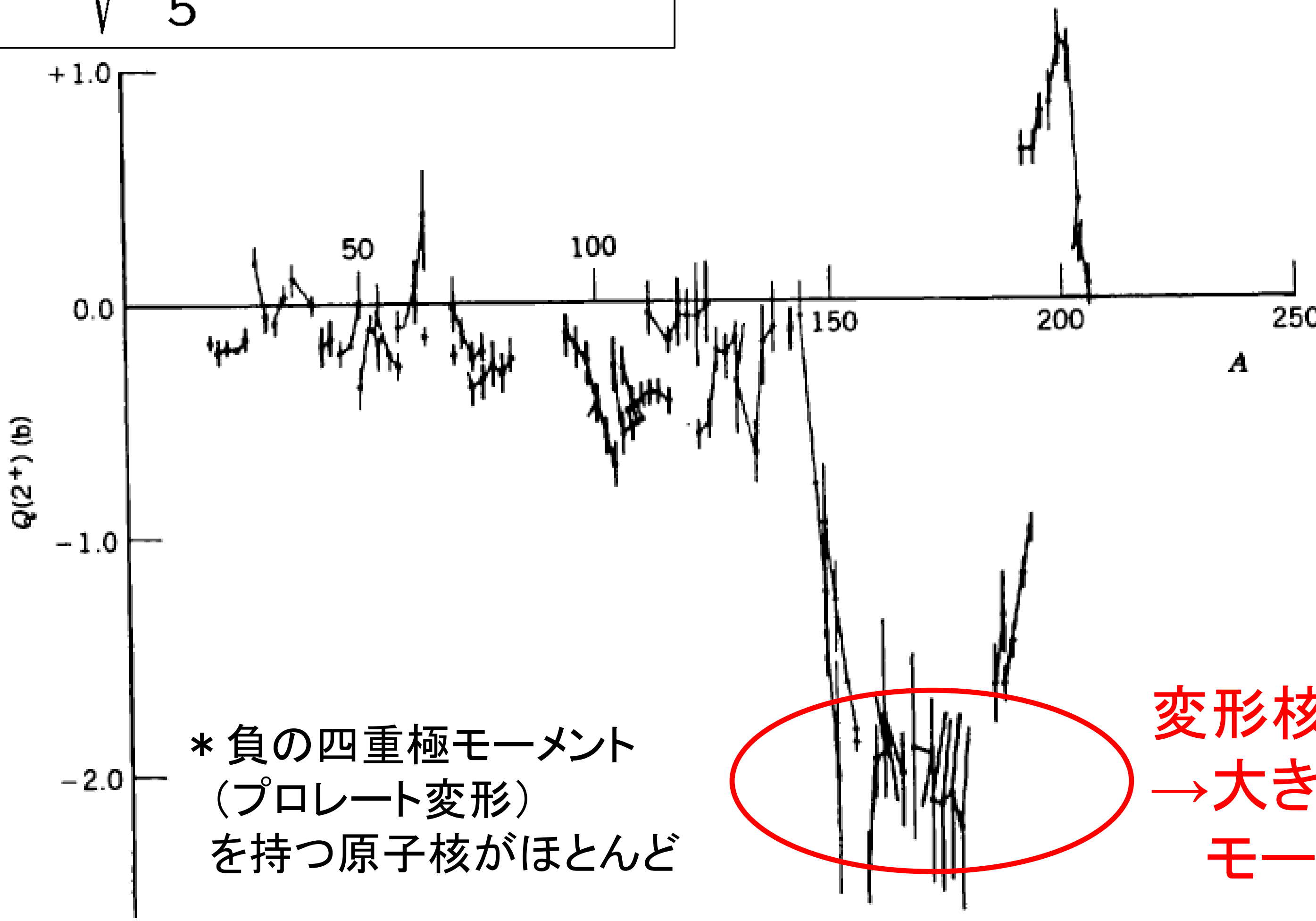


Figure 5.16b Electric quadrupole moments of lowest 2^+ states of even-Z, even-N nuclei. The lines connect sequences of isotopes.

K.S. Krane, “Introductory Nuclear Physics”

変形核の一粒子準位
（ニルソン･レベル）

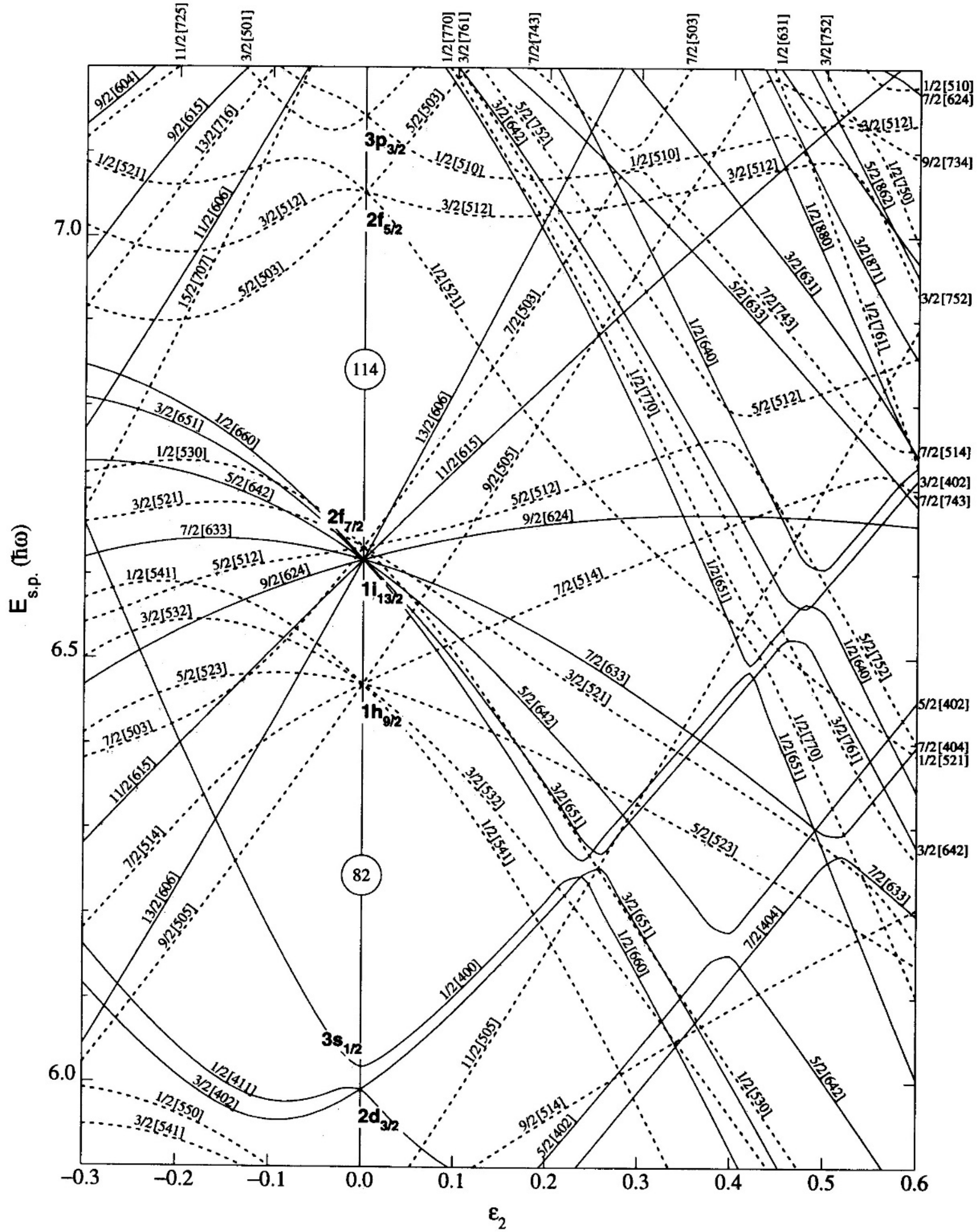
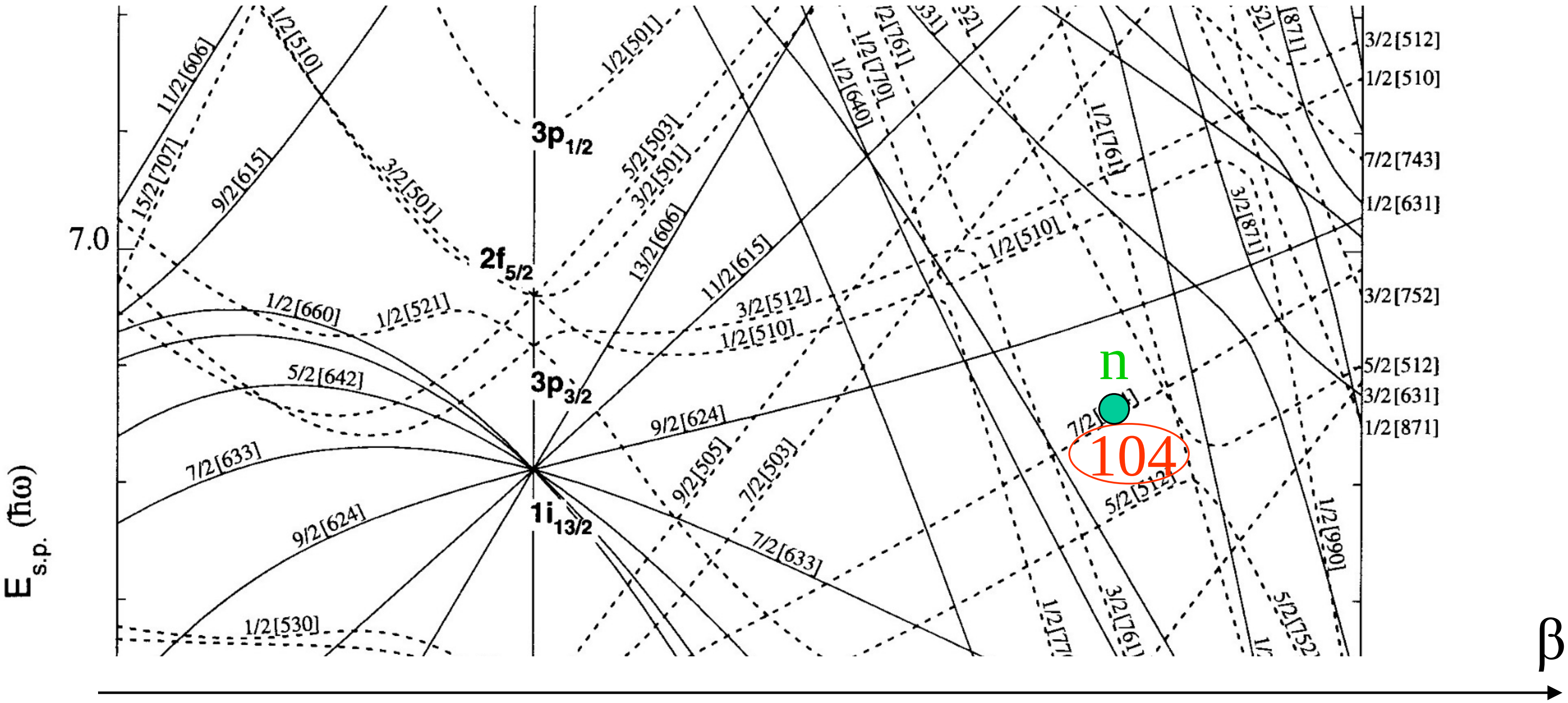


Figure 13. Nilsson diagram for protons, $Z \geq 82$ ($\varepsilon_4 = \varepsilon_2^2/6$).

変形核の一粒子準位

^{177}Hf のスペクトルが変形を考えると説明可：変形の証拠

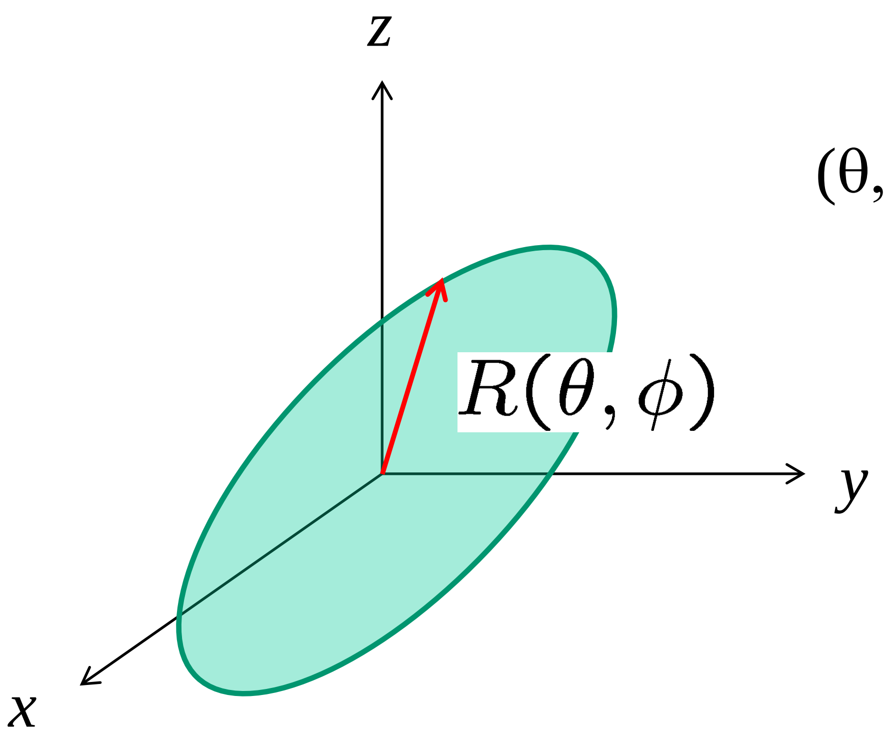


$5/2^-$ —— 0.508

$9/2^+$ —— 0.321 $\quad ^{177}_{72}\mathrm{Hf}_{105}$

$7/2^-$ —— 0

変形パラメーター



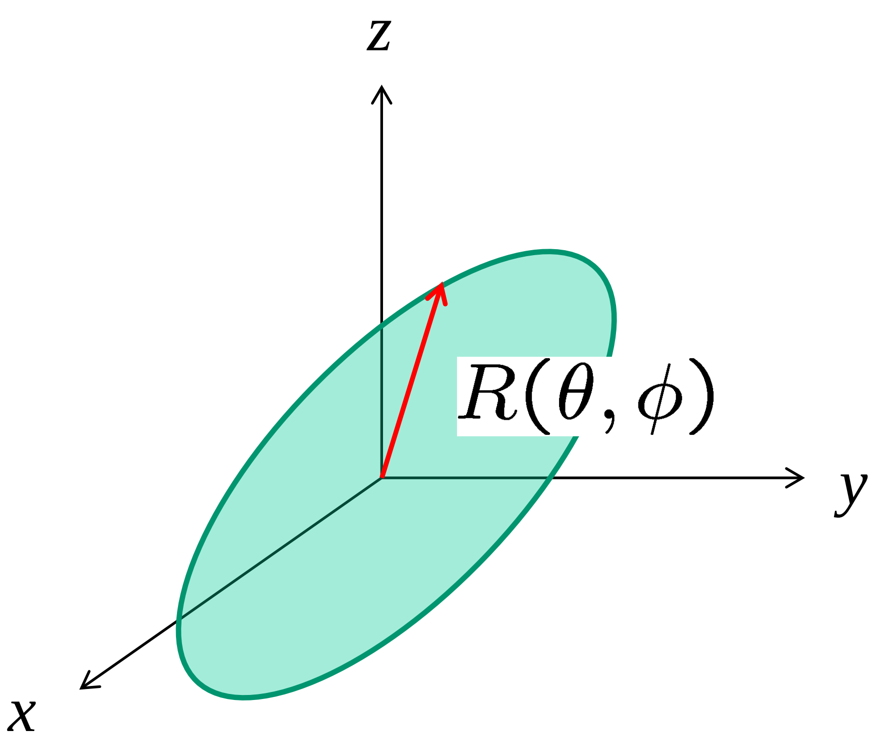
(θ,ϕ) 方向の半径: $R(\theta,\phi)$

任意の関数は球面調和関数で展開できる:

$$\boxed{R(\theta, \phi) = R_0 \left(1 + \sum_{\lambda,\mu} \alpha_{\lambda\mu} Y^*_{\lambda\mu}(\theta, \phi) \right)}$$

$\alpha_{\lambda\mu}$: 変形パラメーター

変形パラメーター



$$R(\theta,\phi) = R_0\left(1+\sum_{\lambda,\mu}\alpha_{\lambda\mu}Y^*_{\lambda\mu}(\theta,\phi)\right)$$

最も重要な変形は $\lambda = 2$
（四重極変形）

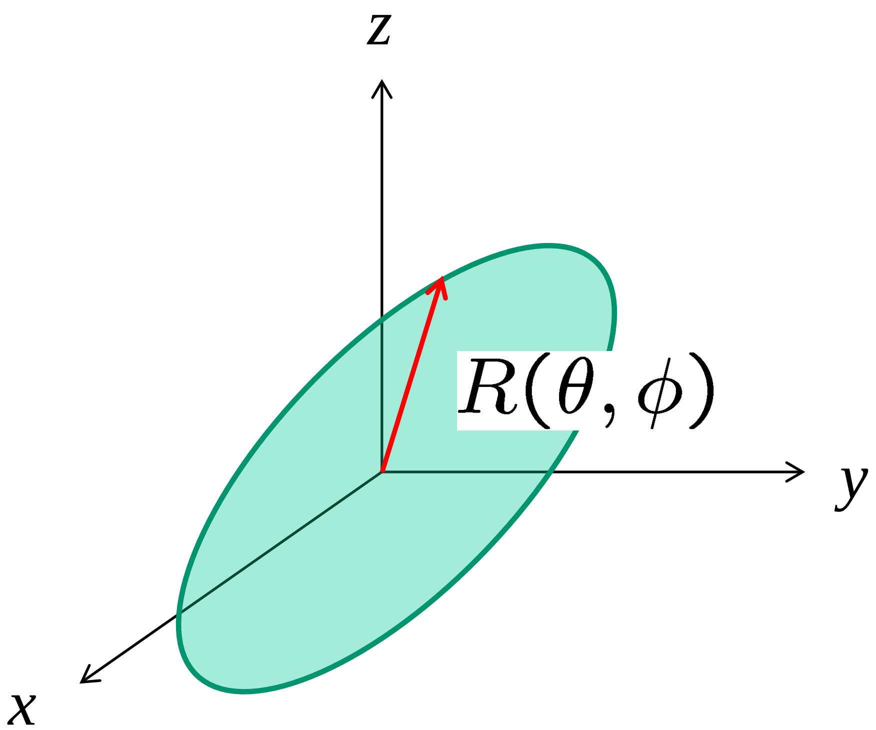
$\lambda = 0$: R_0 に吸収
$\lambda = 1$: 重心の位置を変えるだけ
（原点を適当にとれば
$\alpha_{1\mu} = 0$ とすることができる）
$\lambda = 2$:楕円体型の変形

以下、$\lambda = 2$ に話を限定

$$R(\theta,\phi) = R_0\left(1+\sum_{\mu}\alpha_{2\mu}Y^*_{2\mu}(\theta,\phi)\right)$$

以下、$\lambda = 2$ に話を限定　$R(\theta,\phi) = R_0\left(1 + \sum_{\mu} \alpha_{2\mu} Y^*_{2\mu}(\theta,\phi)\right)$

＊この時点で5個の独立なパラメーター：$\alpha_{22} \sim \alpha_{2-2}$

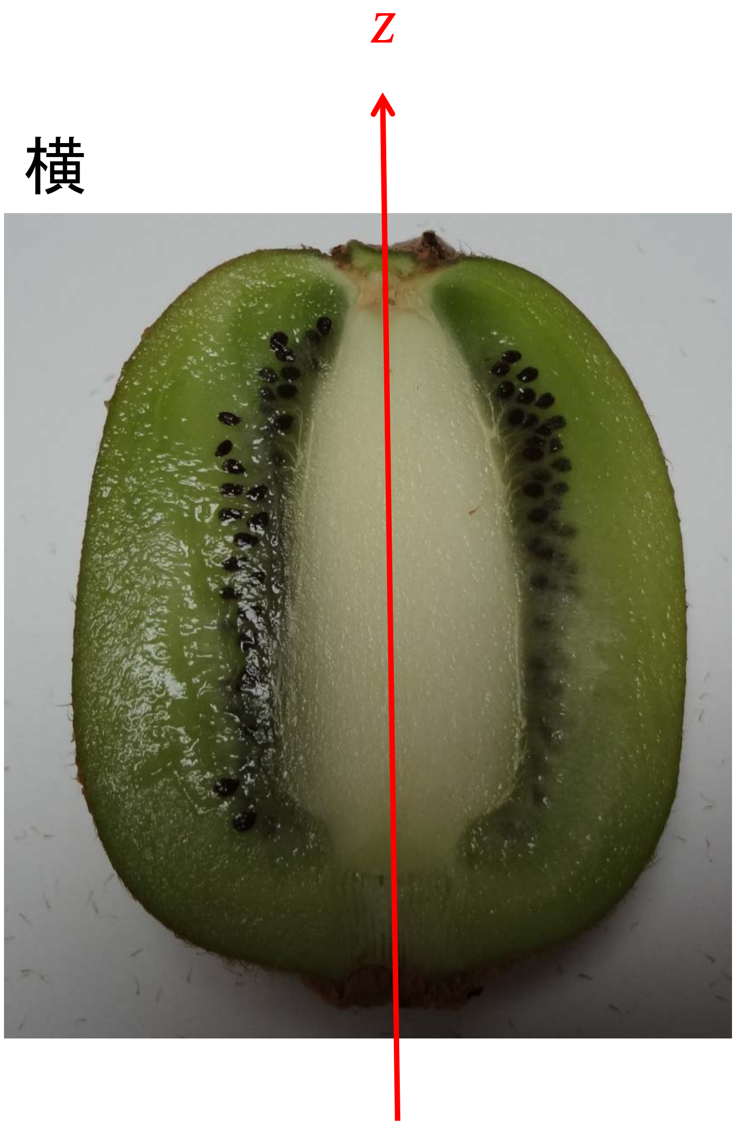


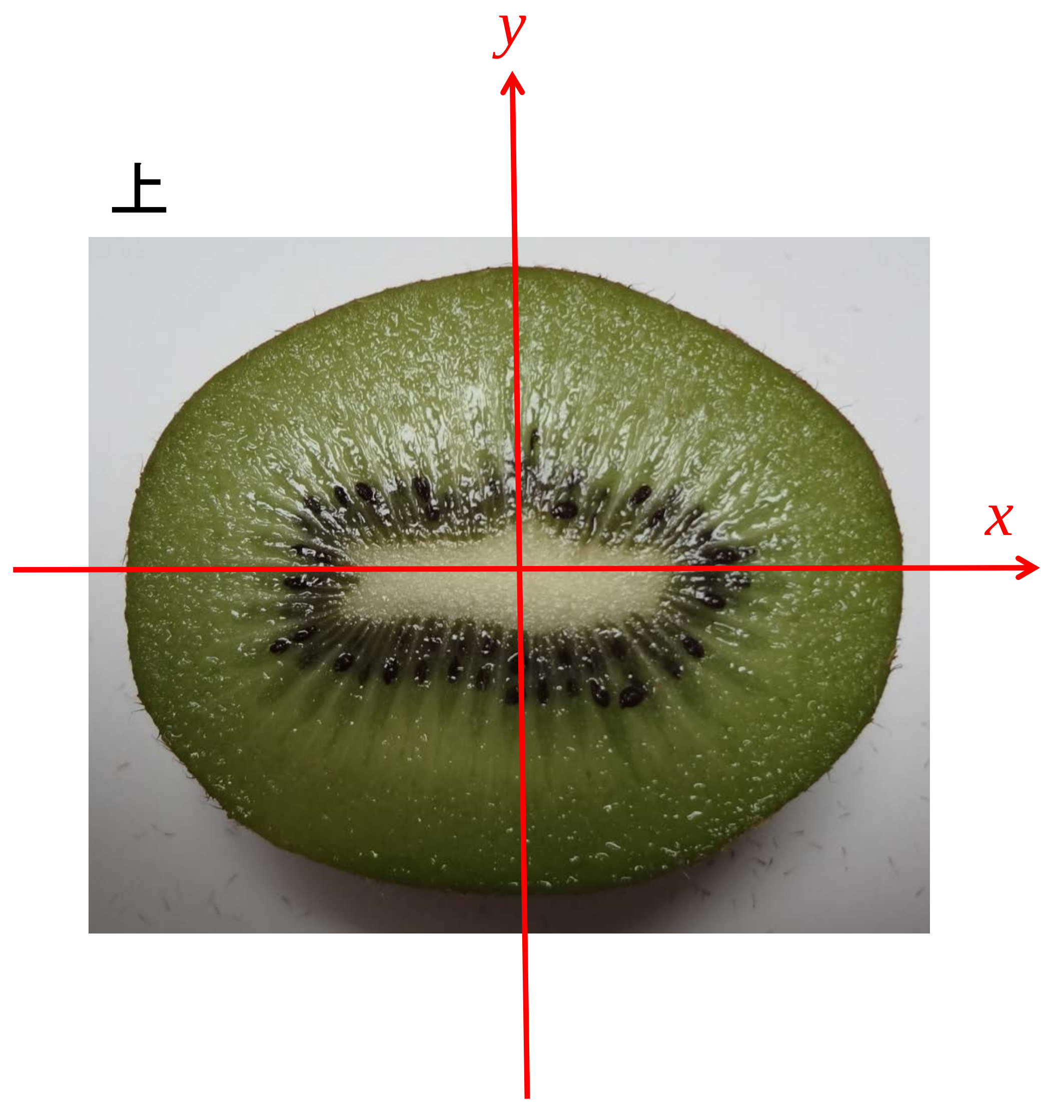
軸をうまく取りなおすことによってより表現が簡単になる

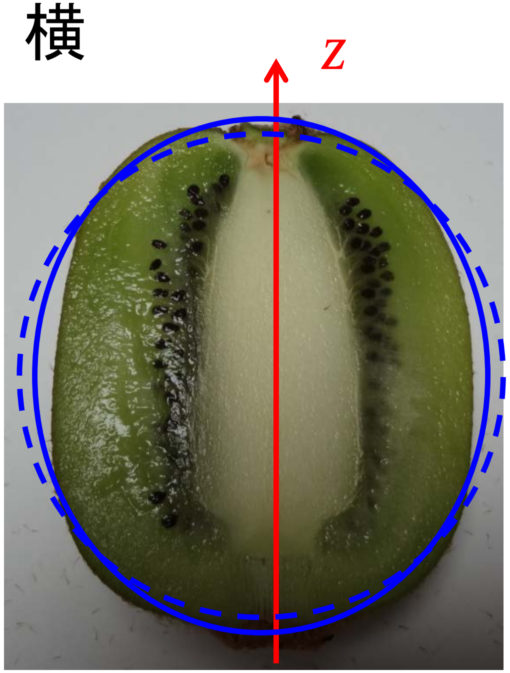
四重極変形の代表的な形はキウィ･フルーツ型

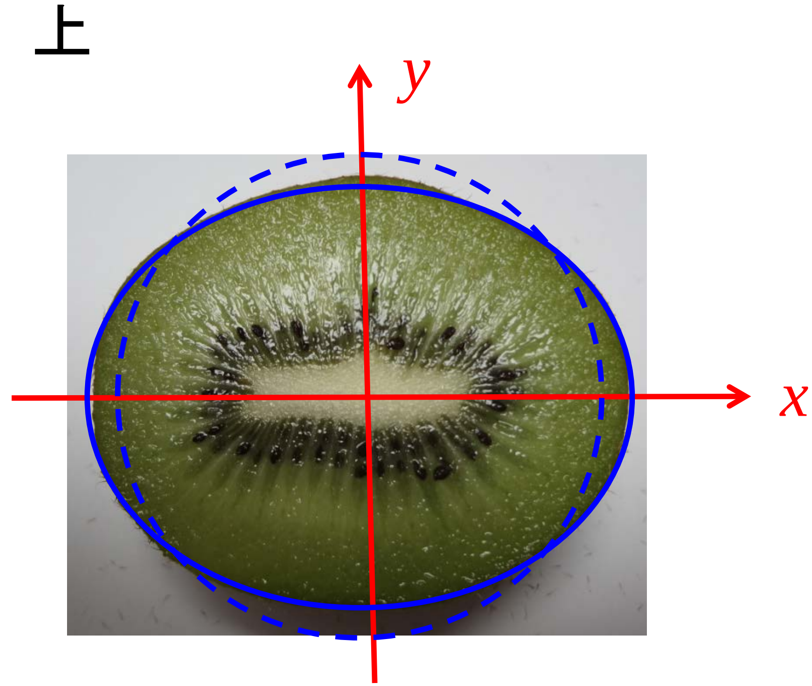
横からみた形

上からみた形


横
z


上
y
x





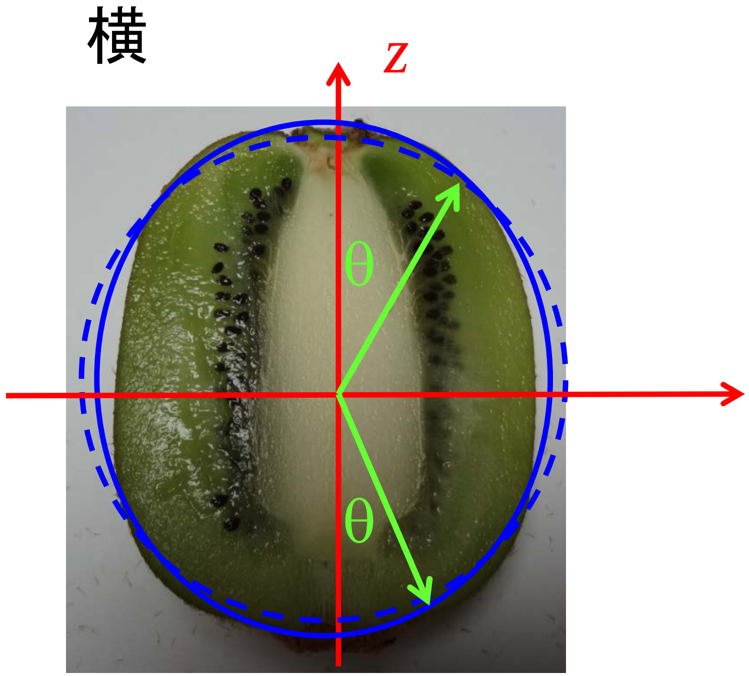
この形は2つのパラメーター（のみ）で記述できる

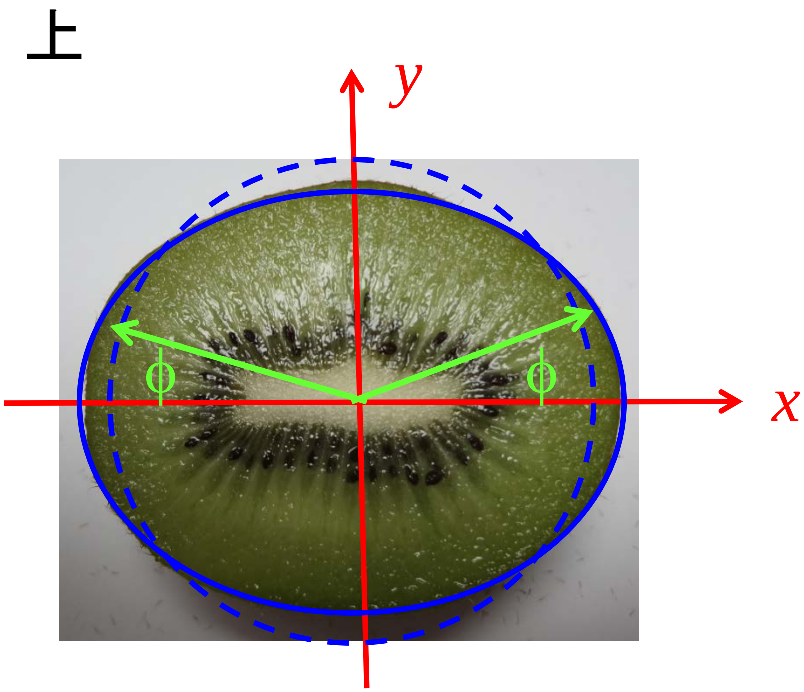
✓「横」から見た時にどのくらい円からずれているか

✓「上」から見た時にどのくらい円からずれているか

数学的には

$$R(\theta,\phi) = R_0\left[1 + a_{20}Y_{20}(\theta) + a_{22}(Y_{22}(\theta,\phi) + Y_{2-2}(\theta,\phi))\right]$$





数学的には

$$
\begin{aligned}
R(\theta,\phi) &= R_0\left[1 + a_{20}Y_{20}(\theta)\right.\\
&\quad \left.+a_{22}(Y_{22}(\theta,\phi) + Y_{2-2}(\theta,\phi))\right]
\end{aligned}
$$

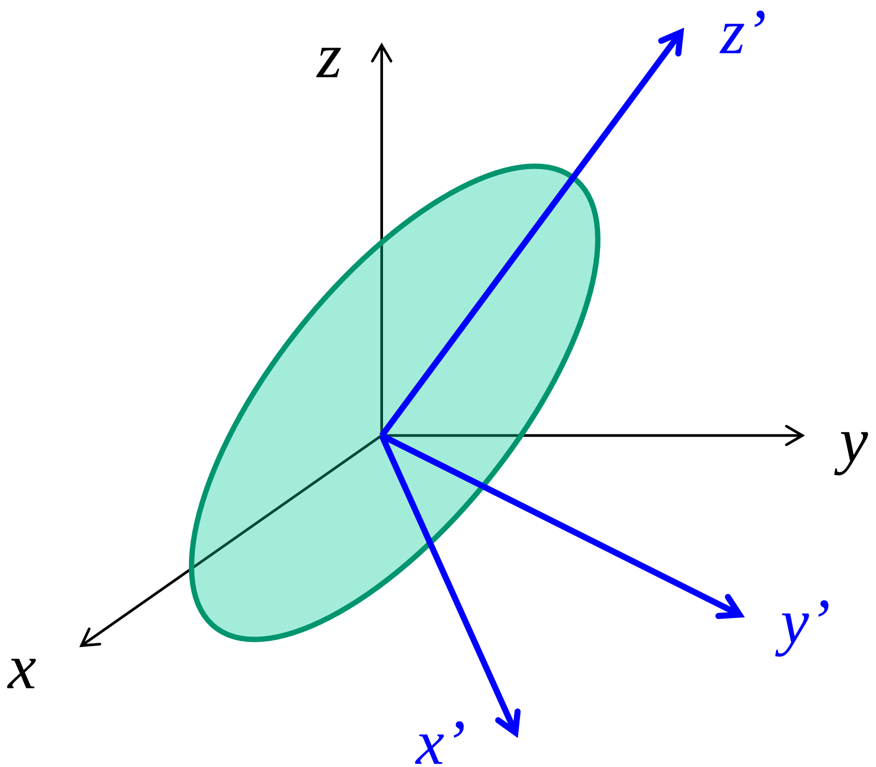
このようにとると、

$$
\begin{aligned}
R(\theta,\phi) &= R(\pi-\theta,\phi)\\
R(\theta,\phi) &= R(\theta,\pi-\phi)
\end{aligned}
$$

$$R(\theta,\phi) = R_0\left(1+\sum_\mu \alpha_{2\mu} Y^*_{2\mu}(\theta,\phi)\right)$$

5個の独立なパラメーター：

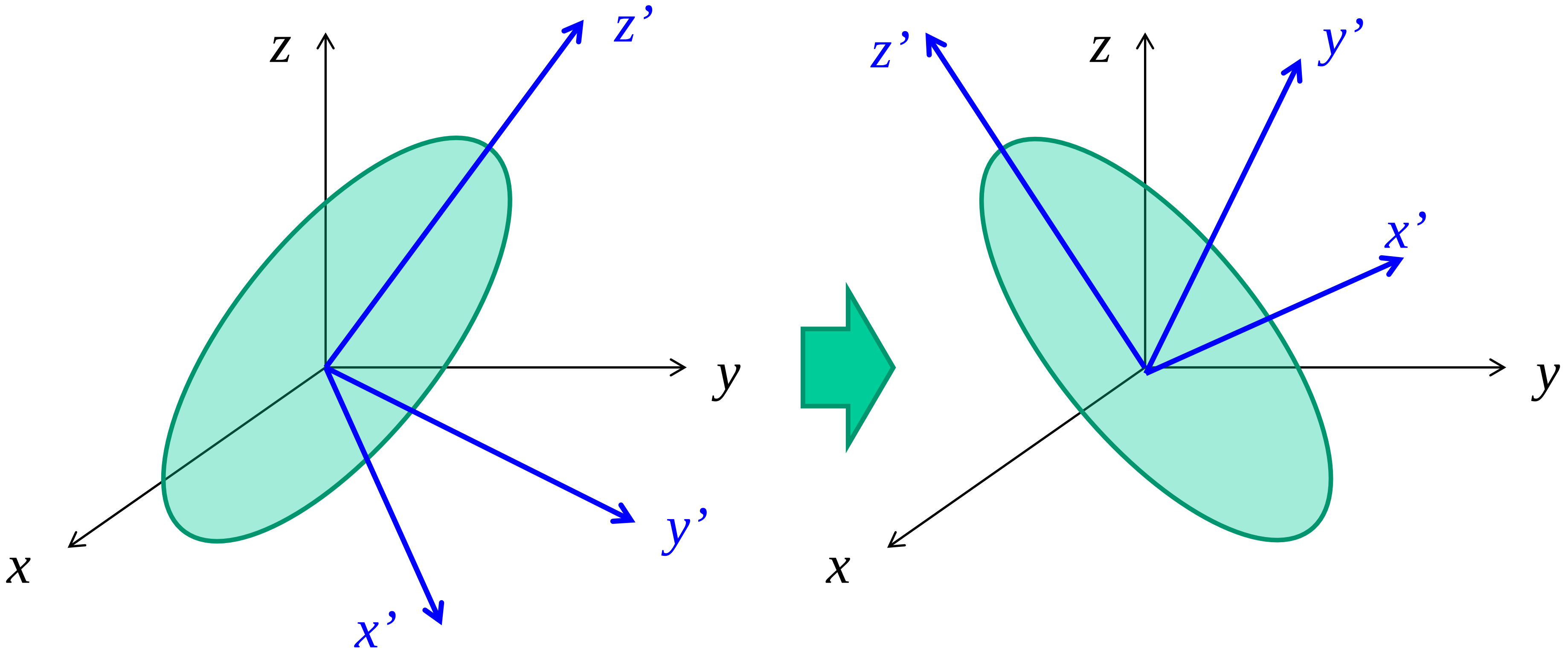
$\alpha_{22} \sim \alpha_{2-2}$



→ 原子核の形状を表すパラメーター2つ：a_{20}, a_{22}

+ 取りなおした軸の方向を表す角度3つ（オイラー角）

原子核が回転すると軸も一緒に回転（物体固定系）
物体固定系から見ると、半径の式 $R(\theta,\phi)$ はいつも同じ



→ 原子核の形状を表すパラメーター2つ：a_{20}, a_{22}
　+ 取りなおした軸の方向を表す角度3つ（オイラー角）

$$R(\theta,\phi) = R_0\left[1 + a_{20}Y_{20}(\theta) + a_{22}(Y_{22}(\theta,\phi) + Y_{2-2}(\theta,\phi))\right]$$

$$\boxed{a_{20} \equiv \beta\cos\gamma, \qquad a_{22} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\beta\sin\gamma}$$

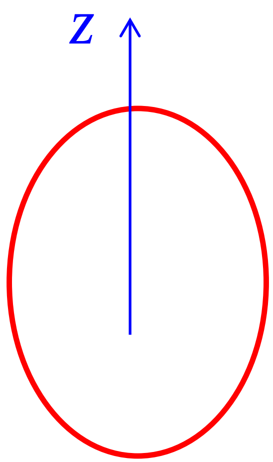
とよく書く。

（γ は軸対称性からのずれを表す）

$\gamma = 0$ のとき: $a_{20} = \beta,\ a_{22} = 0$

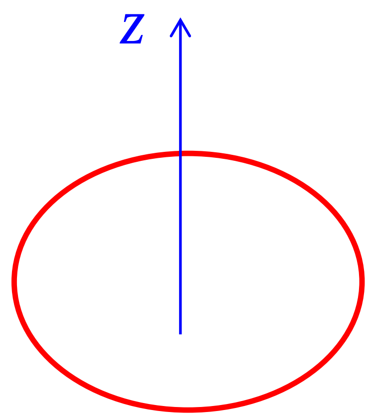
$$R(\theta,\phi) = R_0\left[1 + \beta Y_{20}(\theta)\right]$$

半径は ϕ によらない: z 軸まわりの軸対称（回転楕円体）



$\beta > 0$

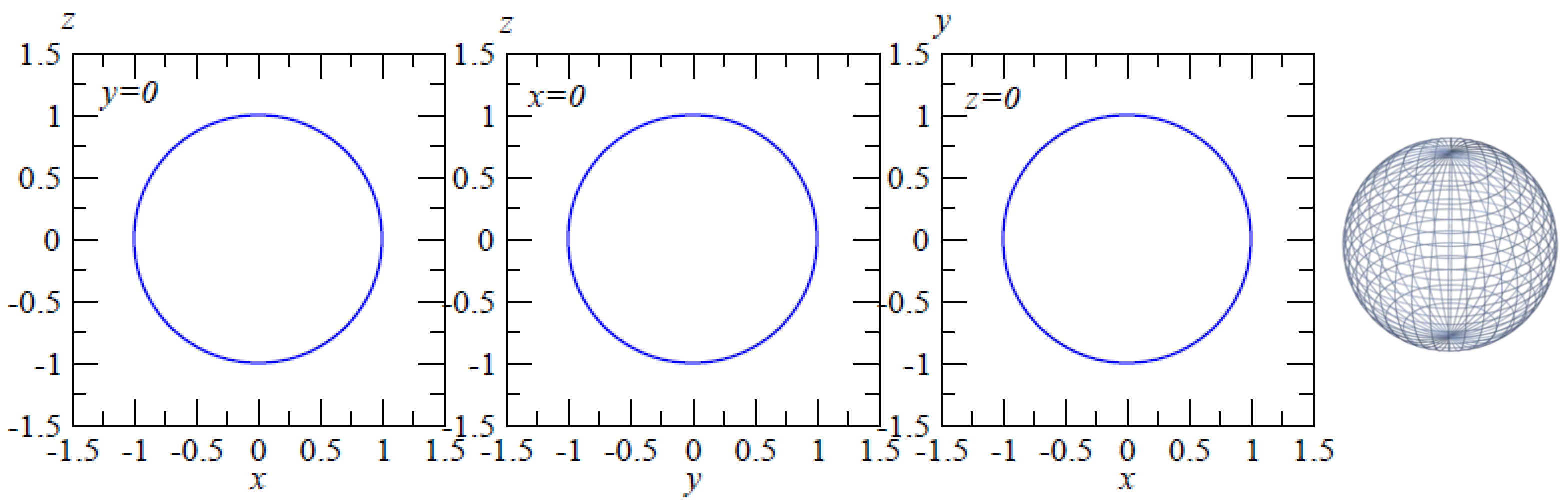
プロレート変形



$\beta < 0$

オブレート変形

$\beta = 0$
(球形)



$y = 0$ で
切った平面

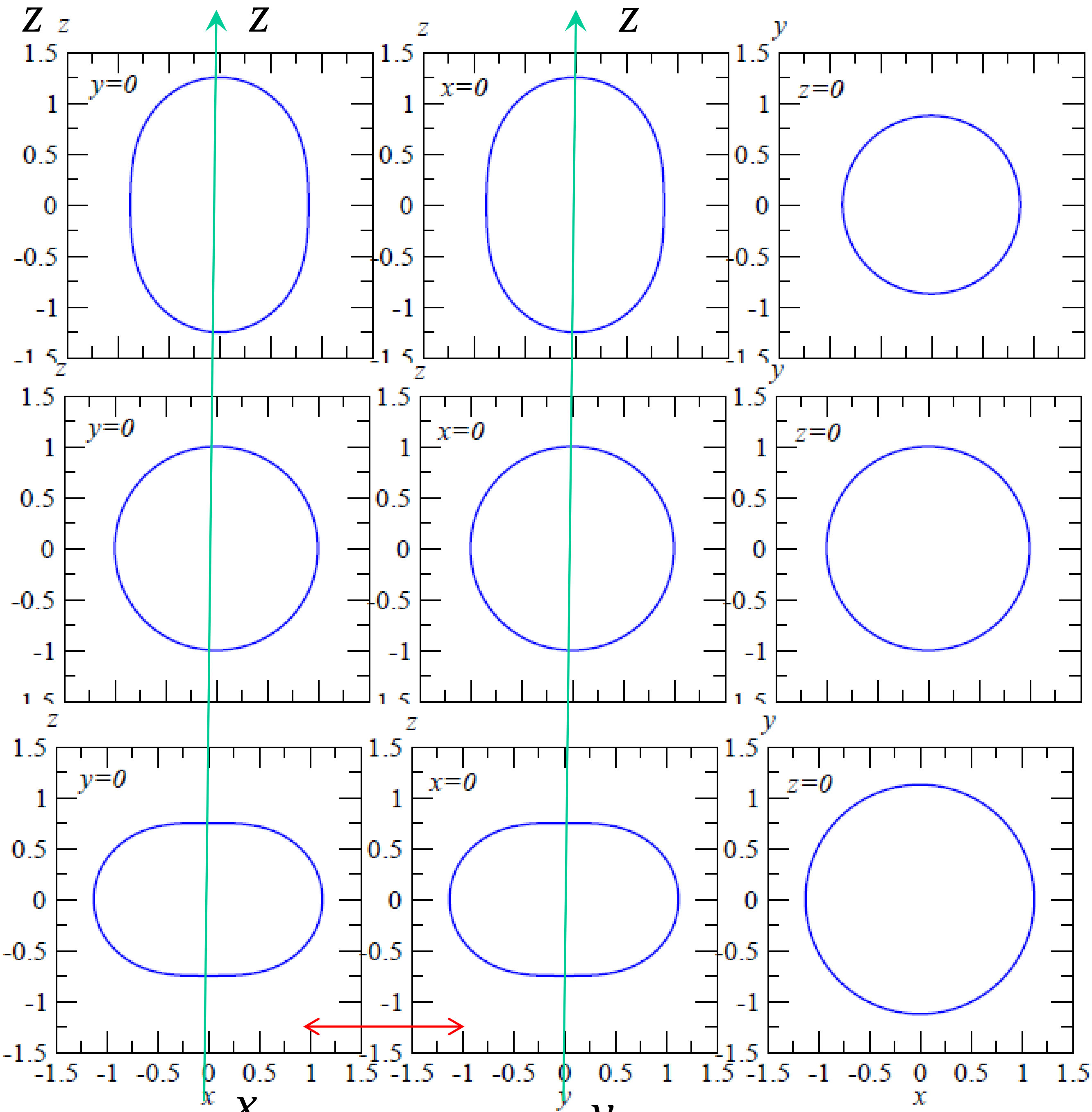
$x = 0$ で
切った平面

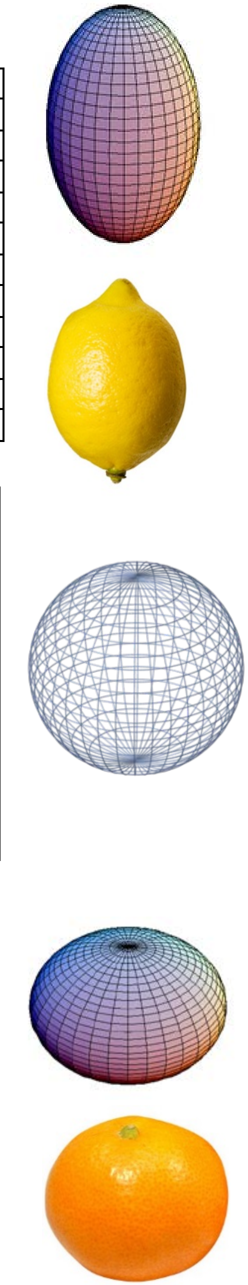
$z = 0$ で
切った平面

$\beta = 0.4$
$\gamma = 0$
プロレート変形

$\beta = 0$
（球形）

$\beta = -0.4$
$\gamma = 0$
オブレート変形

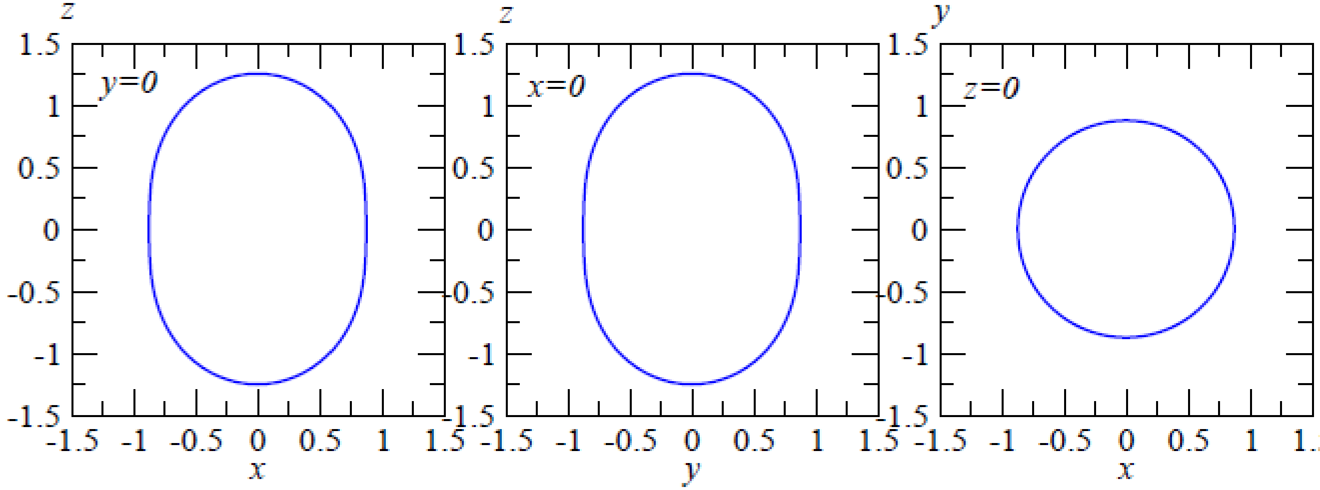




同じ

円（軸対称）

$\beta = 0.4$
$\gamma = 0$



三軸非対称
(どの平面で切っても円にならない)

$\beta \neq 0$

$\gamma \neq 0$

変形ポテンシャル中の一粒子運動

$$V(\boldsymbol{r}) \sim \int v(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}' \sim -g\rho(\boldsymbol{r}) \qquad \text{if} \quad v(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -g\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

密度分布が変形すると、平均場ポテンシャルも同じように変形

$$\boxed{V(r,\theta) \sim V_0(r) + \beta V_2(r)\, Y_{20}(\theta)}$$

（ポテンシャルも四重極変形しているとする）

ポテンシャルが回転対称性を持たない

$\longrightarrow$ 角運動量がいい量子数にならない
（保存しない）

■Y_{20}の項の効果を1次の摂動論を用いて考察してみよう

（復習）1次の摂動論

$$H = H_0 + H_1$$

$\mathrm{H_0}$ の固有値、固有状態がわかっているとする:

$$H_0|\phi_n^{(0)}\rangle = E_n^{(0)}|\phi_n^{(0)}\rangle$$

$\mathrm{H_1}$ があることによって、固有値、固有関数は次のように変化する:

$$\begin{aligned} E_n &= E_n^{(0)} + \langle\phi_n^{(0)}|H_1|\phi_n^{(0)}\rangle + \cdots \\ |\phi_n\rangle &= |\phi_n^{(0)}\rangle + \sum_{m\neq n} \frac{\langle\phi_m^{(0)}|H_1|\phi_n^{(0)}\rangle}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} |\phi_m^{(0)}\rangle + \cdots \end{aligned}$$

変形ポテンシャル中の一粒子運動

変形ポテンシャル

$$\boxed{V(r,\theta) \sim V_0(r) + \beta V_2(r)\,Y_{20}(\theta)}$$

■Y_{20}の項の効果を1次の摂動論を用いて考察してみよう

$\beta=0$（球形ポテンシャル）の時の固有関数: $\psi_{nlK}(\boldsymbol{r}) = R_{nl}(r)Y_{lK}(\hat{\boldsymbol{r}})$

固有値: E_{nl} （K には依存しない）

エネルギーの変化分:

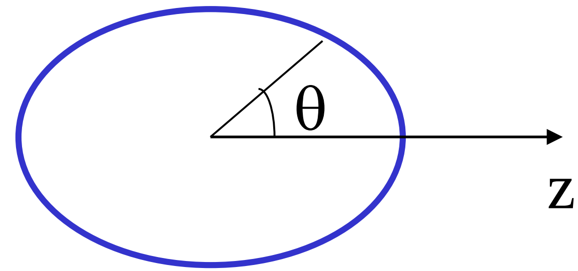
$$\begin{aligned} E_{nl} &\rightarrow E_{nl} + \langle \psi_{nlK}|\Delta V|\psi_{nlK}\rangle \\ &= E_{nl} + \beta \underbrace{\left[\int_0^\infty r^2 dr\, V_2(r)(R_{nl}(r))^2\right]}_{V_2(r)<0\text{ であれば負の量}} \cdot \underbrace{\langle Y_{lK}|Y_{20}|Y_{lK}\rangle}_{\propto -(3K^2 - l(l+1))} \end{aligned}$$

(note) 変形 Woods-Saxon ポテンシャル

軸対称な回転楕円体の半径: $$R(\theta) = R_0(1 + \beta Y_{20}(\theta))$$

Woods-Saxon ポテンシャル

$$V(r) = -\frac{V_0}{1+\exp((r-R_0)/a)}$$

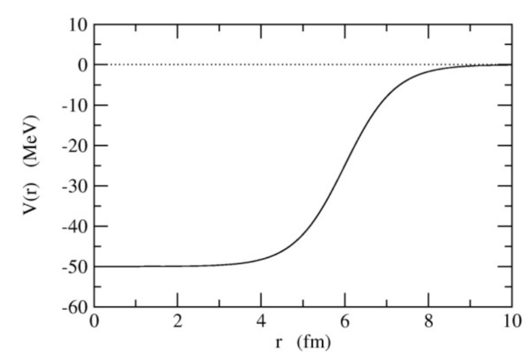


の半径 R_0 を $R(\theta)$ に変えると

$$V(r,\theta) = -\frac{V_0}{1+\exp((r-R_0-R_0\beta Y_{20}(\theta))/a}$$

$$\sim V_0(r) - \beta R_0 \frac{dV_0}{dr} Y_{20}(\theta) + \cdots$$

$$\boxed{V_2(r) = -R_0\frac{dV_0(r)}{dr} < 0}$$



($V_0(r)$ は r の増加関数なので)

変形ポテンシャル中の一粒子運動

変形Woods-Saxon ポテンシャル

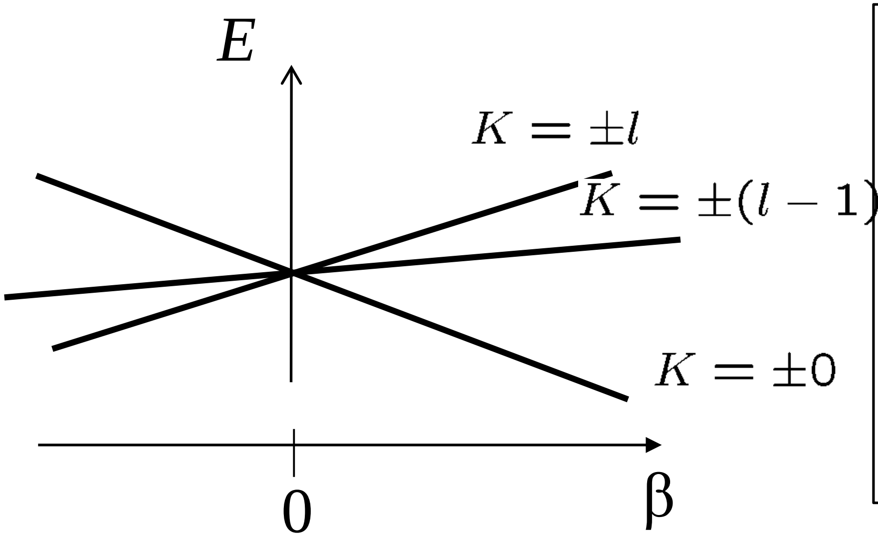
$$\psi_{nlK}(\boldsymbol{r}) = R_{nl}(r)Y_{lK}(\hat{\boldsymbol{r}})$$

$$\boxed{V(r,\theta) \sim V_0(r) + \beta V_2(r)\,Y_{20}(\theta)}$$

■Y_{20}の項の効果を1次の摂動論を用いて考察してみよう

エネルギーの変化分:

$$E_{nl} \;\to\; E_{nl} + \alpha_{nl}\,\beta\,(3K^2 - l(l+1)) \qquad (\alpha_{nl} > 0)$$



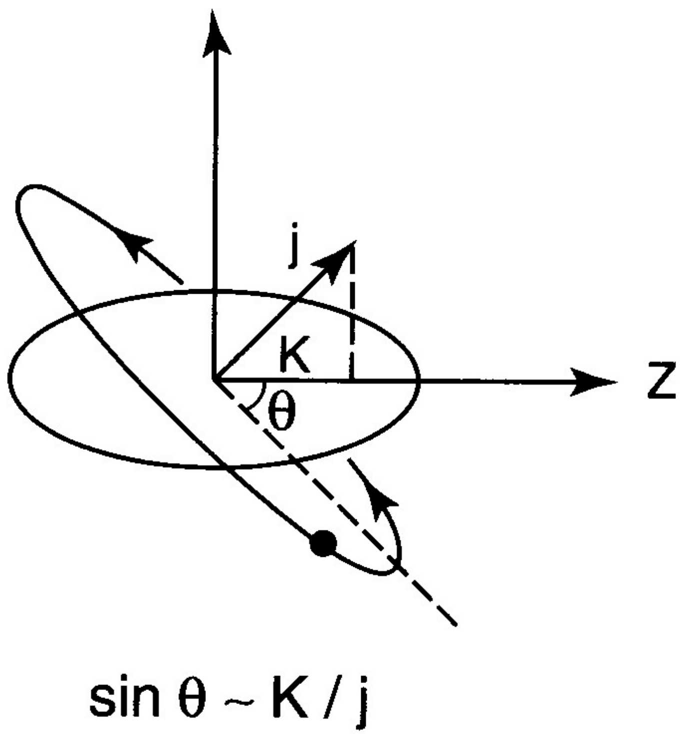
✓ K ごとにエネルギー変化が異なる（縮退が解ける）

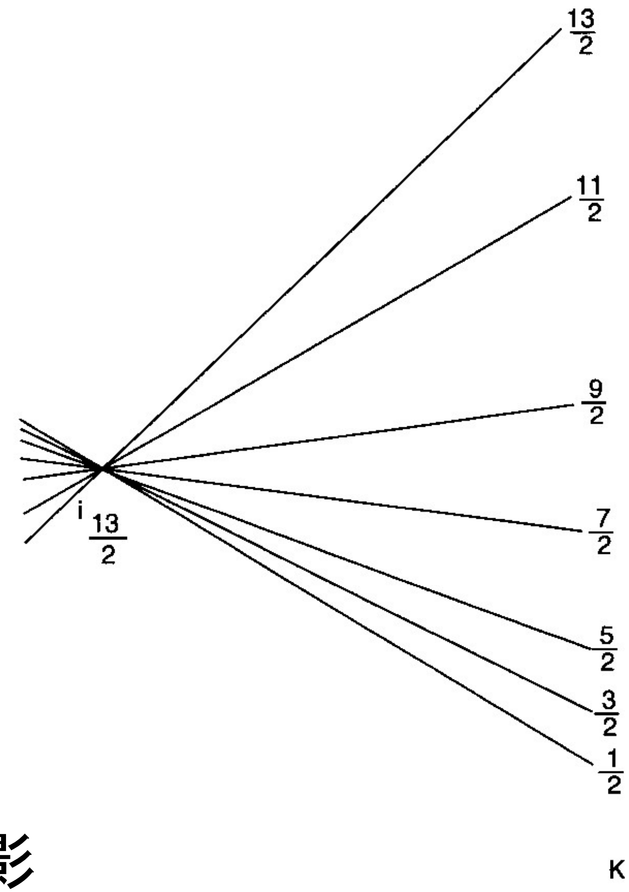
✓ β > 0 では K が小さいほどエネルギーが低くなる。

✓ β < 0 ではその逆

✓ K と $-K$ は縮退する

幾何学的解釈





- K は角運動量ベクトルの z 軸への射影
- 核子の軌道は角運動量ベクトルに垂直な平面内
- プロレート変形の場合、小さな K ほど長軸に沿って運動。
  → 従ってより引力を感じてエネルギーが下がる。
- 大きな K は短軸に沿って運動し、エネルギーを損する。

変形ポテンシャル中の一粒子運動

$$\boxed{V(r,\theta) \sim V_0(r) + \beta V_2(r)\, Y_{20}(\theta)}$$

■Y_{20}の項の効果を1次の摂動論を用いて考察してみよう

次に波動関数の変化分:
$$|\phi_n\rangle \;=\; |\phi_n^{(0)}\rangle + \sum_{m\neq n} \frac{\langle \phi_m^{(0)}|H_1|\phi_n^{(0)}\rangle}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} |\phi_m^{(0)}\rangle + \cdots$$

β=0（球形ポテンシャル）の時の固有関数: $\psi_{nlK}(\boldsymbol{r}) = R_{nl}(r)Y_{lK}(\hat{\boldsymbol{r}})$

$$\psi_{nlK} \to \psi_{nlK} + \sum_{n'l'K'} \frac{\langle \psi_{n'l'K'}|\Delta V|\psi_{nlK}\rangle}{E_{nl} - E_{n'l'}} \psi_{n'l'K'}$$

$\langle Y_{l'K'}|Y_{20}|Y_{lK}\rangle$ でつながる状態が波動関数に混ざる

- l は保存せず、様々な l が波動関数に混ざる
- 軸対称変形 (Y_{20}) の場合、K は変化しない ($K' = K$)
  すなわち保存量
- Y_{20} はパリティを変えない。従って、パリティも保存量。

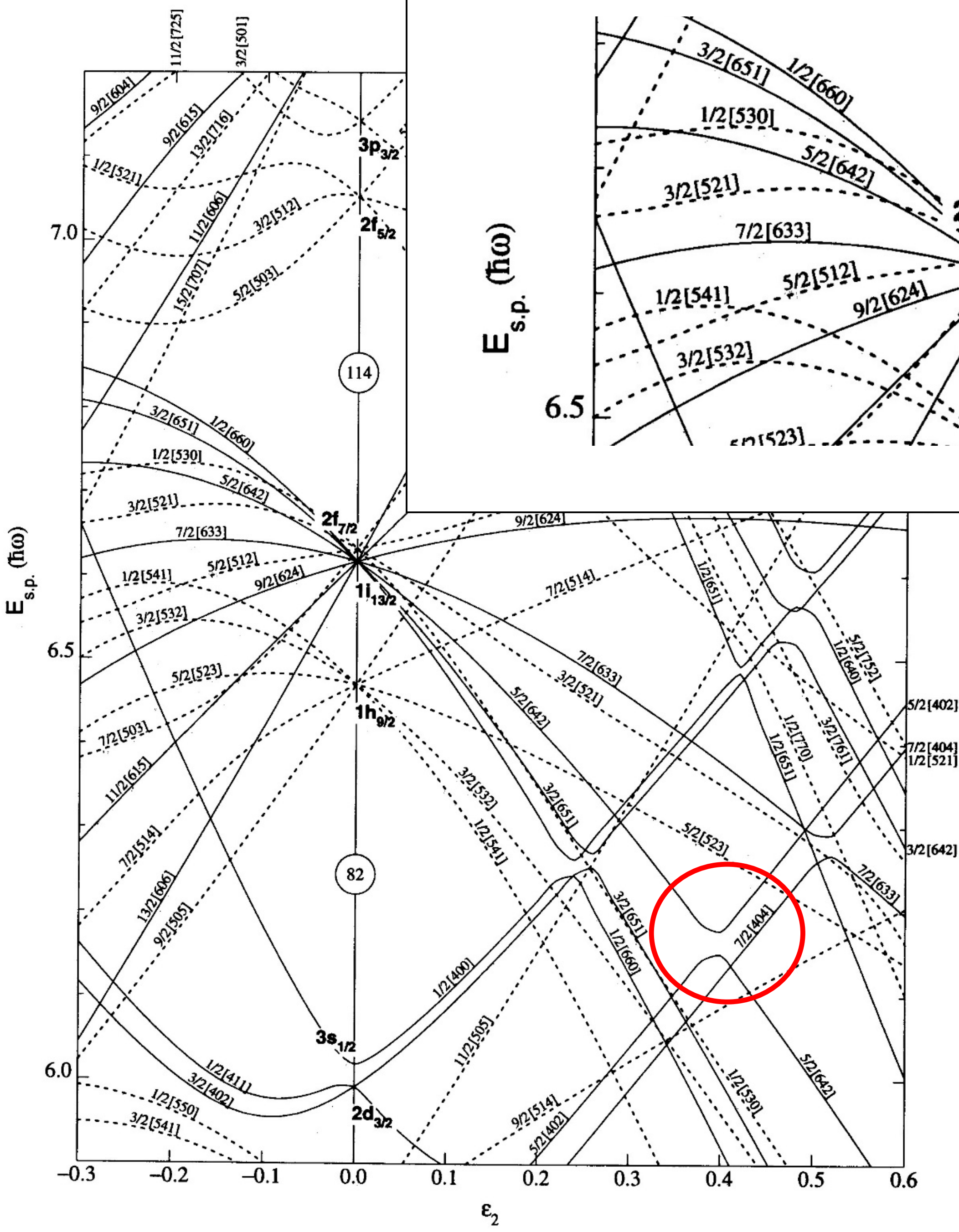
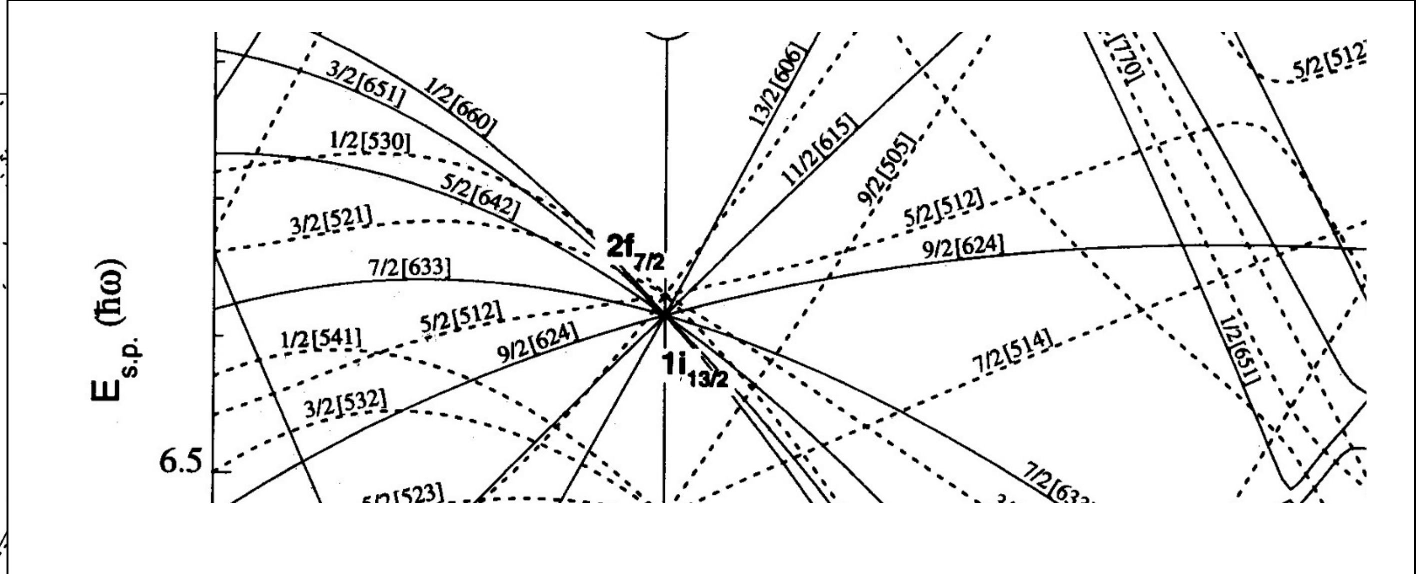


Figure 13. Nilsson diagram for protons, $Z \geq 82$ ($\varepsilon_4 = \varepsilon_2^2/6$).



ニルソン図

準位交差の問題：同じ量子数を持つ2つの状態は交差しない

「ノイマン‐ウィグナーの定理」

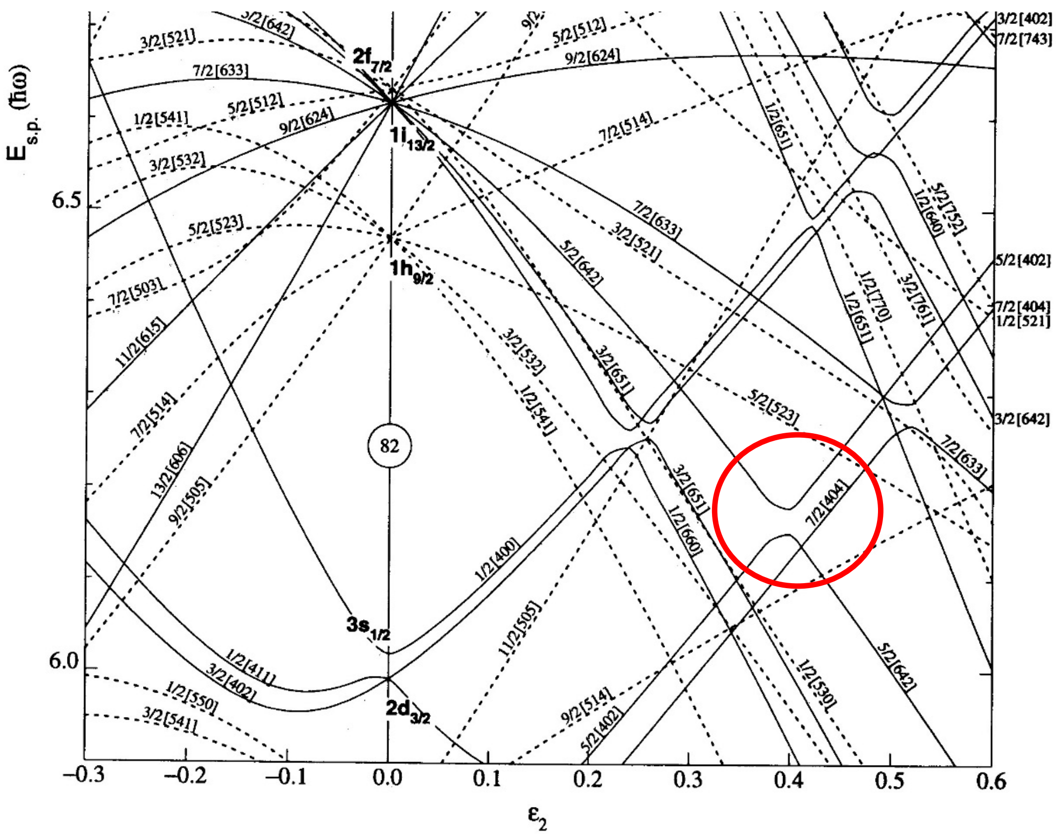
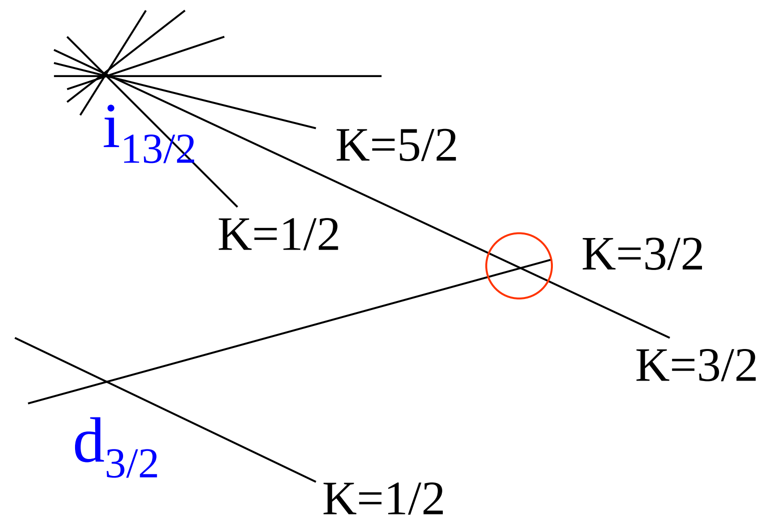


Figure 13. Nilsson diagram for protons, Z ≥ 82 ($\varepsilon_4 = \varepsilon_2^2/6$).

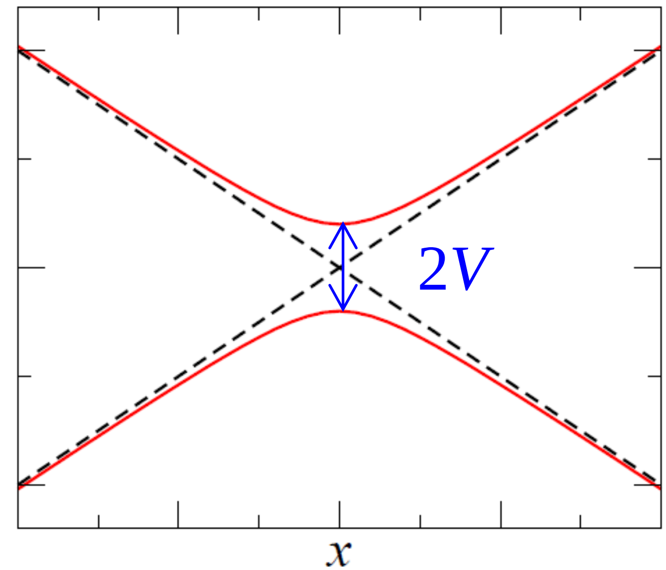


準位交差の問題：同じ量子数を持つ2つの状態は交差しない

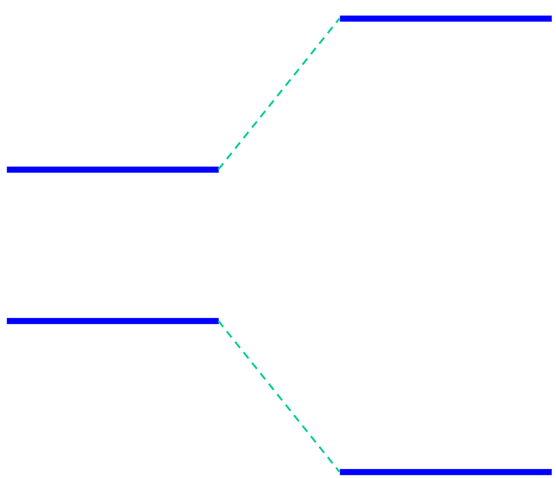
「ノイマン‐ウィグナーの定理」

$$\begin{pmatrix} -\epsilon x & V \\ V & \epsilon x \end{pmatrix}$$

対角化 $\rightarrow \lambda_{\pm}(x) = \pm\sqrt{\epsilon^2 x^2 + V^2}$

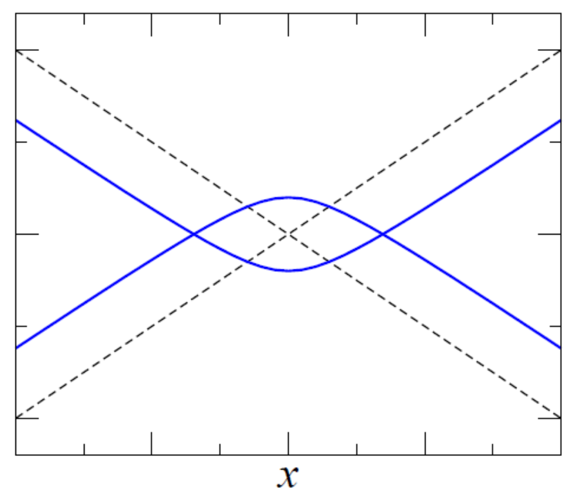


「疑似交差」、「準位反発」



$V = 0$　　$V \neq 0$

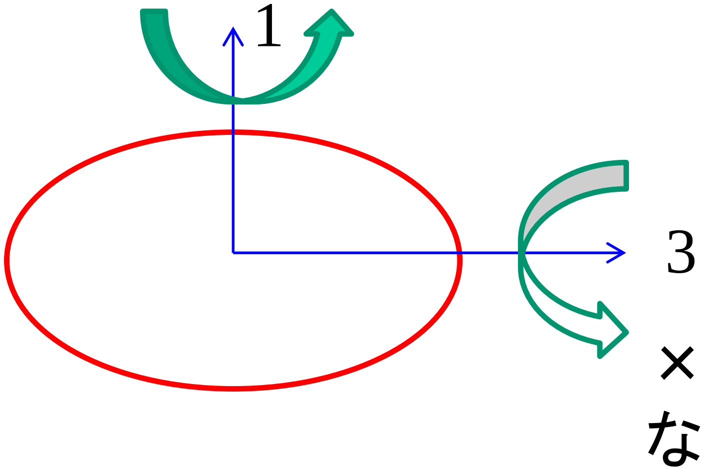
V の符号によらず必ず反発



このようになることはない

軸対称変形核の回転運動

軸対称変形核を考える



量子力学的には対称軸周りの回転は存在しない

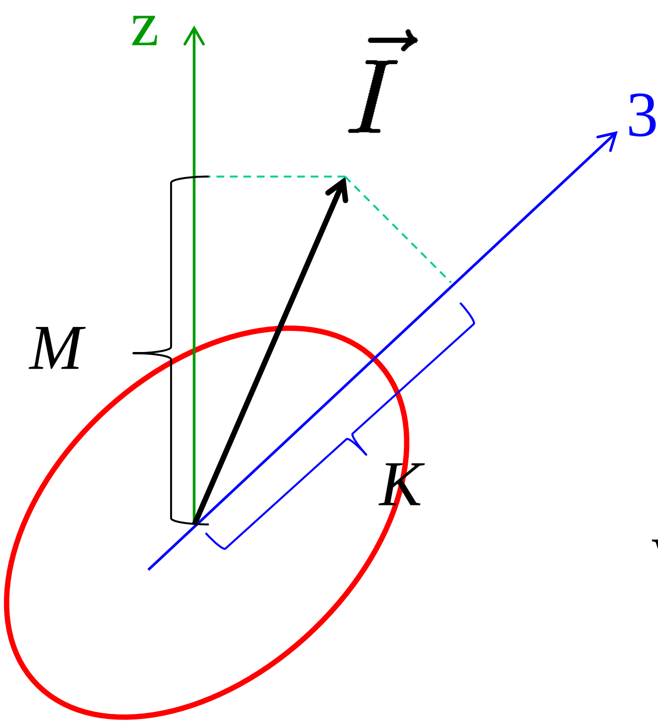
$$T_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}\mathcal{J}(\omega_1^2 + \omega_2^2) \rightarrow \frac{I_1^2 + I_2^2}{2\mathcal{J}} = \frac{\boldsymbol{I}^2 - I_3^2}{2\mathcal{J}}$$

(軸対称なので $J_1 = J_2$)

量子化

$$T_{\mathrm{rot}} = \frac{I_1^2 + I_2^2}{2\mathcal{J}} = \frac{\boldsymbol{I}^2 - I_3^2}{2\mathcal{J}}$$

固有状態は I, I_z (=M), I_3 (= K) の同時固有状態



$$|IMK\rangle = \sqrt{\frac{2I+1}{8\pi^2}}\, D^I_{MK}(\Omega)$$

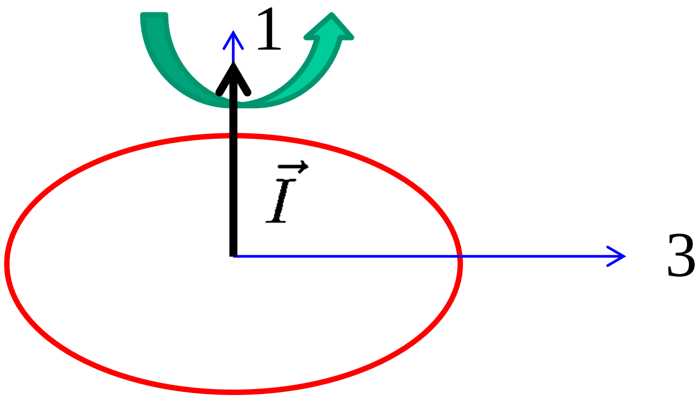
Wigner の D 関数

$$D^I_{MK}(\Omega) \equiv \langle IM|\hat{\mathcal{R}}(\Omega)|IK\rangle$$

回転の演算子

K = 0 のとき $D^I_{MK=0}(\Omega) = \sqrt{\frac{4\pi}{2I+1}} Y^*_{IM}$

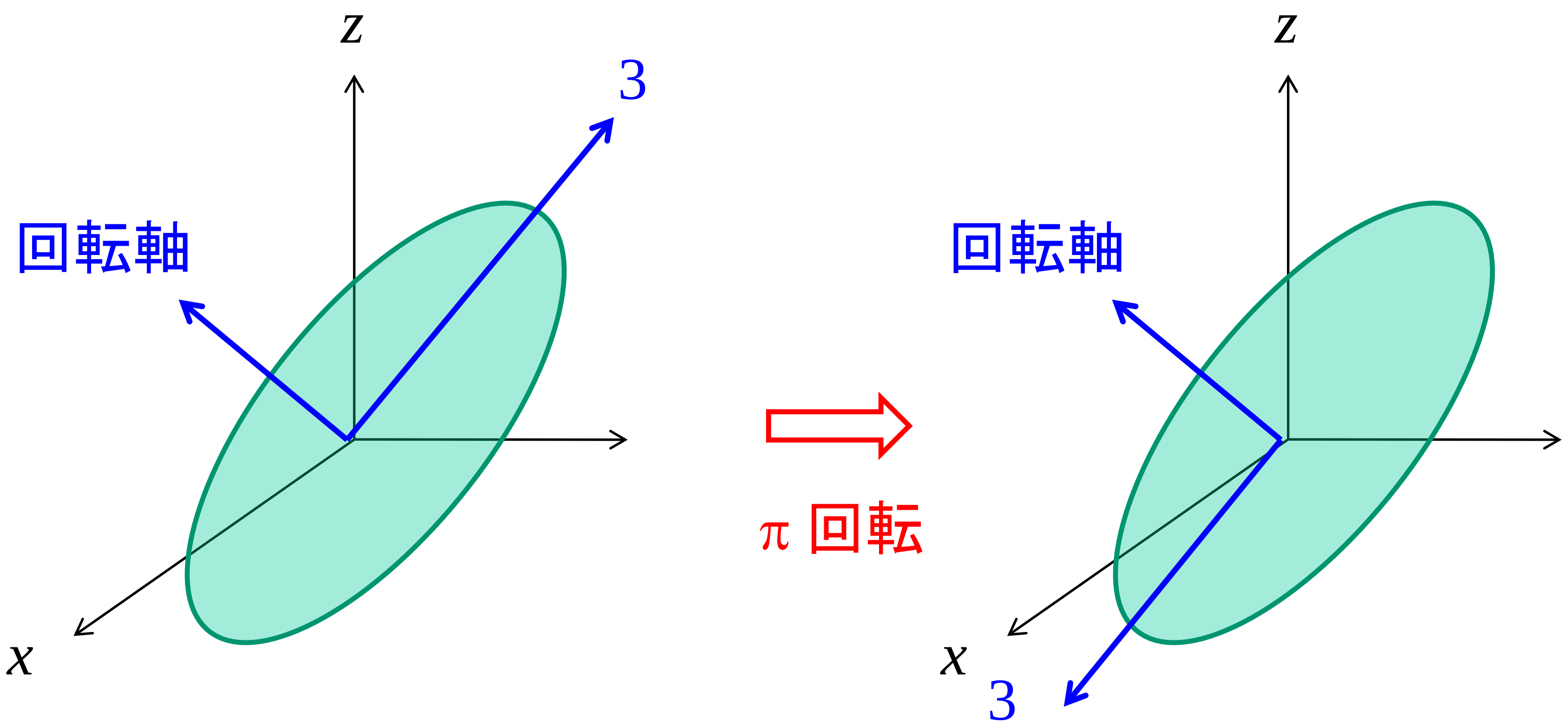
K = 0 のとき

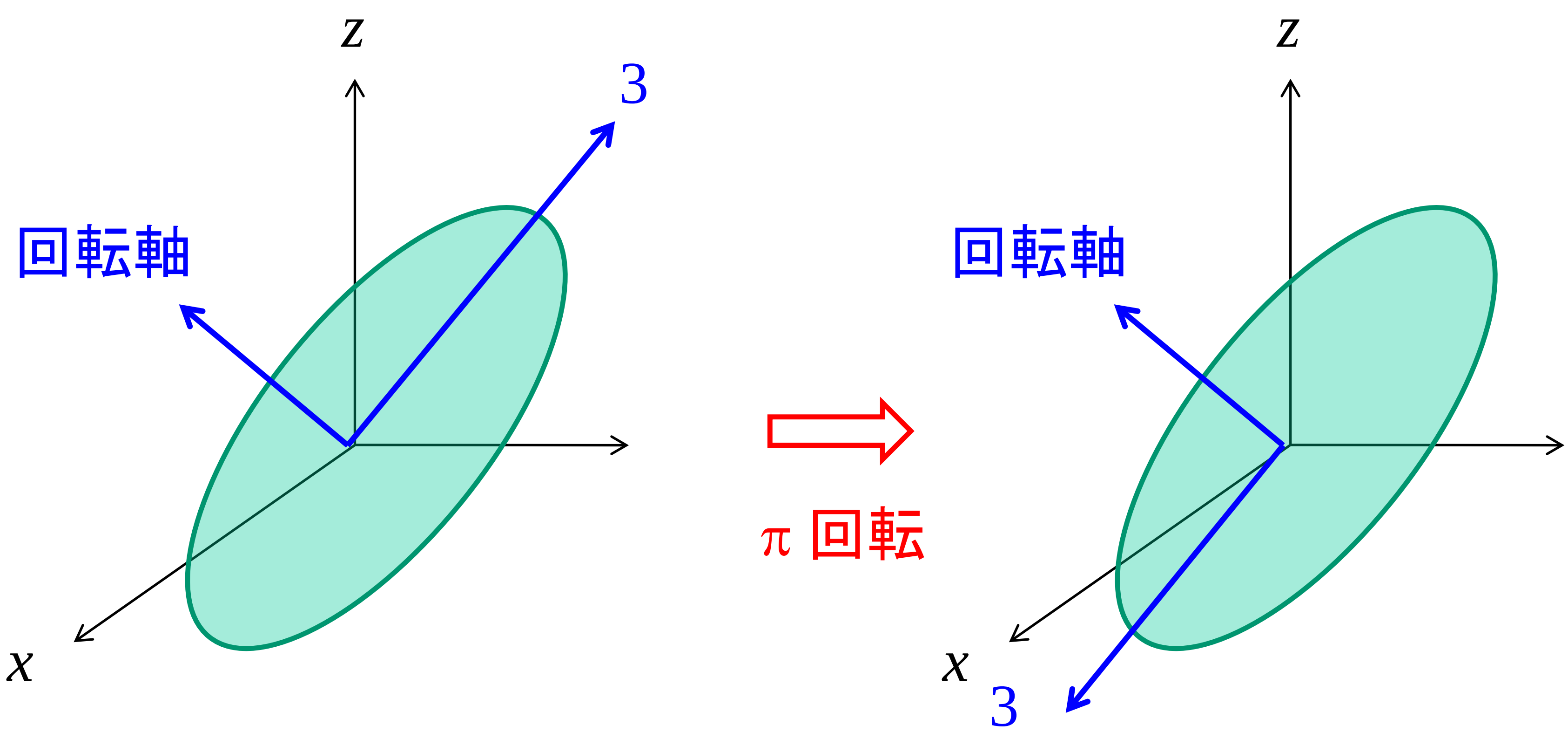


対称軸に垂直な軸のまわりの回転

π 回転に対して対称

⟶ 偶数角運動量のみが現れる



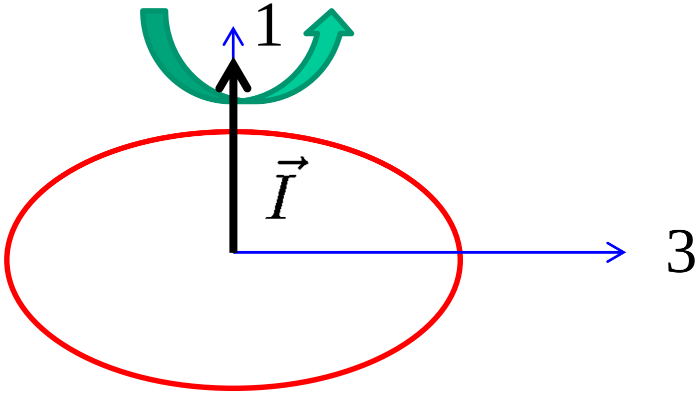


これは空間反転(パリティ変換)と同じ

$$Y_{IM}(\hat{\boldsymbol{r}}) \to Y_{IM}(-\hat{\boldsymbol{r}}) = (-)^I Y_{IM}(\hat{\boldsymbol{r}})$$

波動関数が変わらないためには I は偶数(偶パリティ状態の場合)

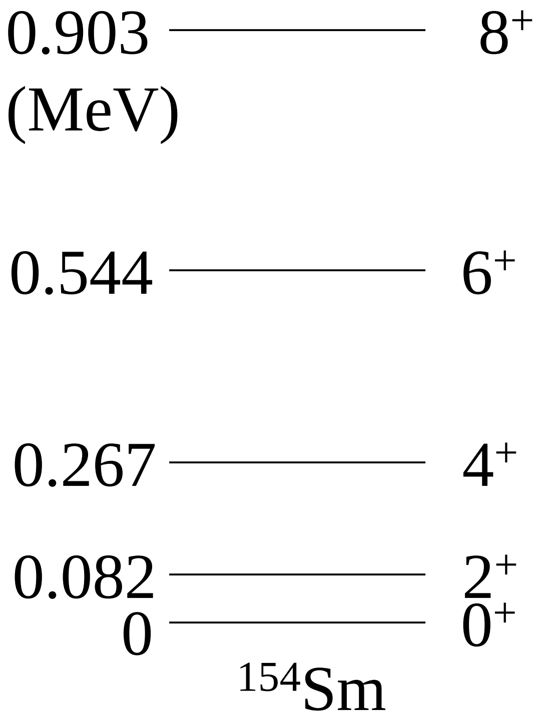
K = 0 のとき



対称軸に垂直な軸のまわりの回転

π 回転に対して対称

⟶ 偶数角運動量のみが現れる



^{154}Sm の励起スペクトル