

# 原子核の変形

## $^{154}\text{Sm}$ の励起スペクトル

0.903 —————  $8^+$   
(MeV)

0.544 —————  $6^+$

0.267 —————  $4^+$

0.082 —————  $2^+$

0 —————  $0^+$

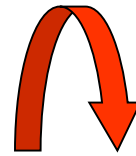
$^{154}\text{Sm}$

$$E_I \sim \frac{I(I+1)\hbar^2}{2\mathcal{J}}$$

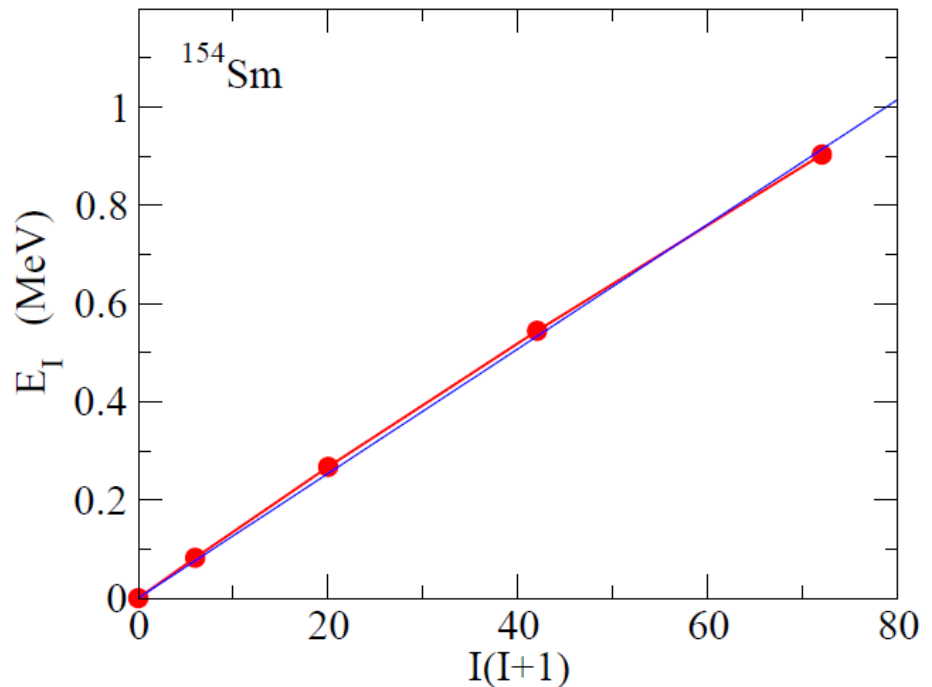
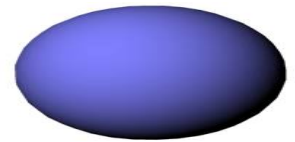
Cf. 剛体の回転エネルギー(古典力学)

$$E = \frac{1}{2} \mathcal{J} \omega^2 = \frac{I^2}{2\mathcal{J}}$$

$$(I = \mathcal{J} \omega, \omega = \dot{\theta})$$



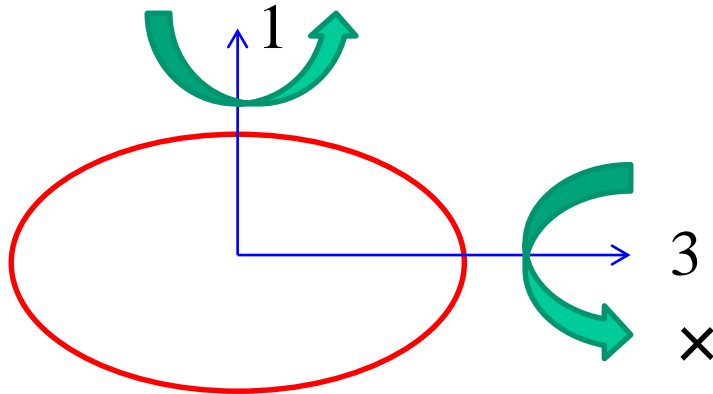
$^{154}\text{Sm}$  は変形している



cf. なぜ偶数スピンのみなのか?

# 軸対称変形核の回転運動

軸対称変形核を考える(対称軸は3軸)



量子力学的には対称軸周りの回転は存在しない(波動関数全体の位相が変わるだけ)

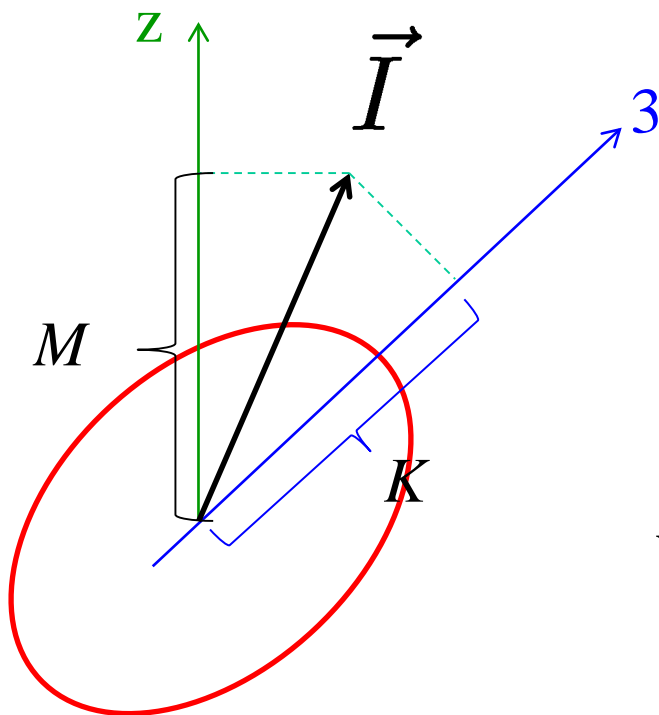
$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \mathcal{J} (\omega_1^2 + \omega_2^2) \rightarrow \frac{I_1^2 + I_2^2}{2\mathcal{J}}$$

(軸対称なので  
 $J_1 = J_2$ )

量子化

$$T_{\text{rot}} = \frac{I_1^2 + I_2^2}{2\mathcal{J}} = \frac{I^2 - I_3^2}{2\mathcal{J}}$$

固有状態は  $I$ ,  $I_z (=M)$ ,  $I_3 (=K)$  の同時固有状態



$$|IMK\rangle = \sqrt{\frac{2I+1}{8\pi^2}} D_{MK}^I(\Omega)$$

Wigner の D 関数

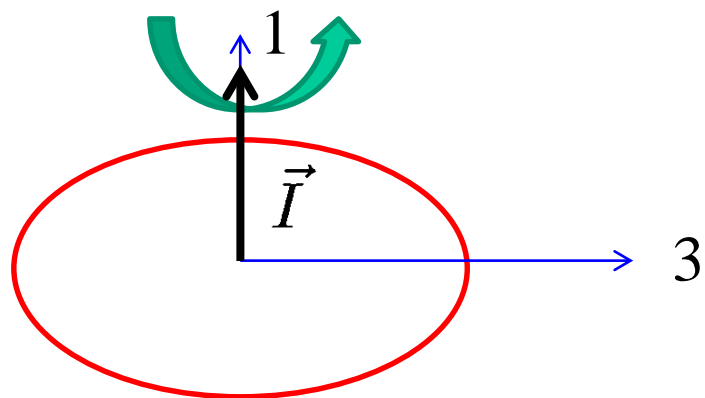
$$D_{MK}^I(\Omega) \equiv \langle IM | \hat{\mathcal{R}}(\Omega) | IK \rangle$$

↑  
回転の演算子

$K=0$  のとき  
(1軸または2軸  
回りの回転)

$$D_{MK=0}^I(\Omega) = \sqrt{\frac{4\pi}{2I+1}} Y_{IM}^*$$

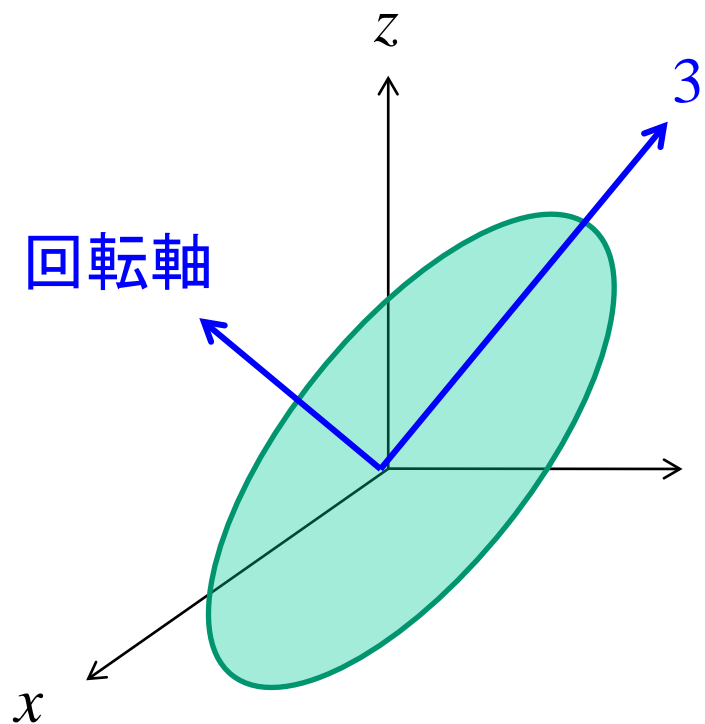
$K = 0$  のとき



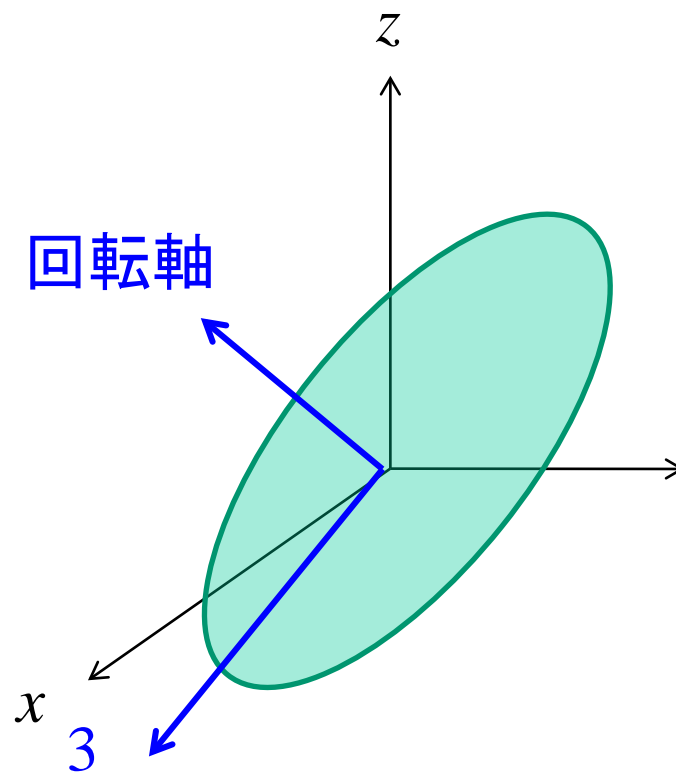
対称軸に垂直な軸のまわりの回転

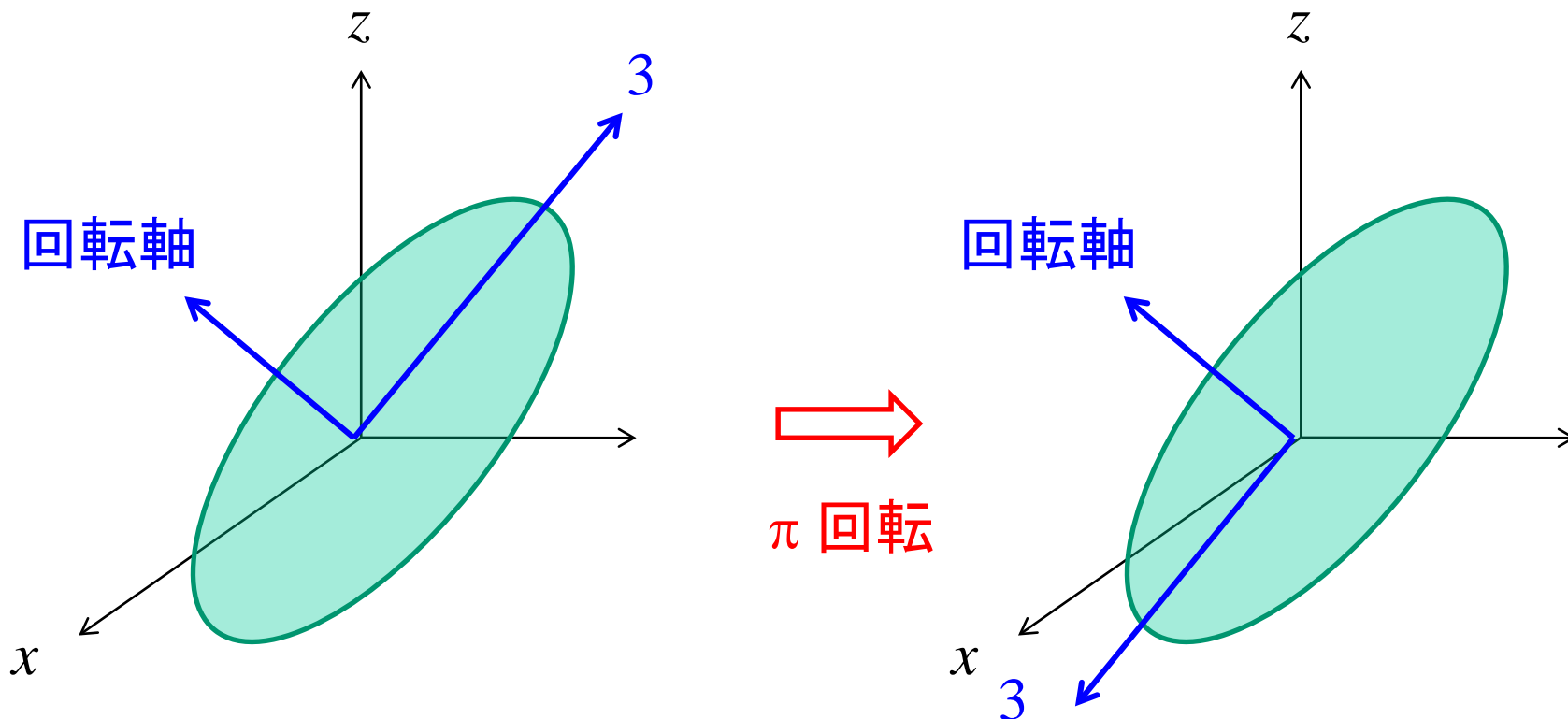
$\pi$  回転に対して対称

→ 偶数角運動量のみが現れる



→  
 $\pi$  回転



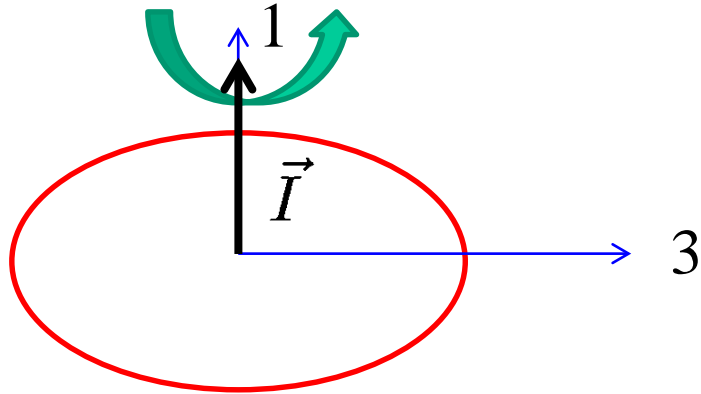


これは空間反転(パリティ変換)と同じ

$$Y_{IM}(\hat{r}) \rightarrow Y_{IM}(-\hat{r}) = (-)^I Y_{IM}(\hat{r})$$

波動関数が変わらないためには  $I$  は偶数(偶パリティ状態の場合)

$K = 0$  のとき



対称軸に垂直な軸のまわりの回転

$\pi$  回転に対して対称

→ 偶数角運動量のみが現れる

0.903 —————  $8^+$   
(MeV)

0.544 —————  $6^+$

0.267 —————  $4^+$

0.082 —————  $2^+$

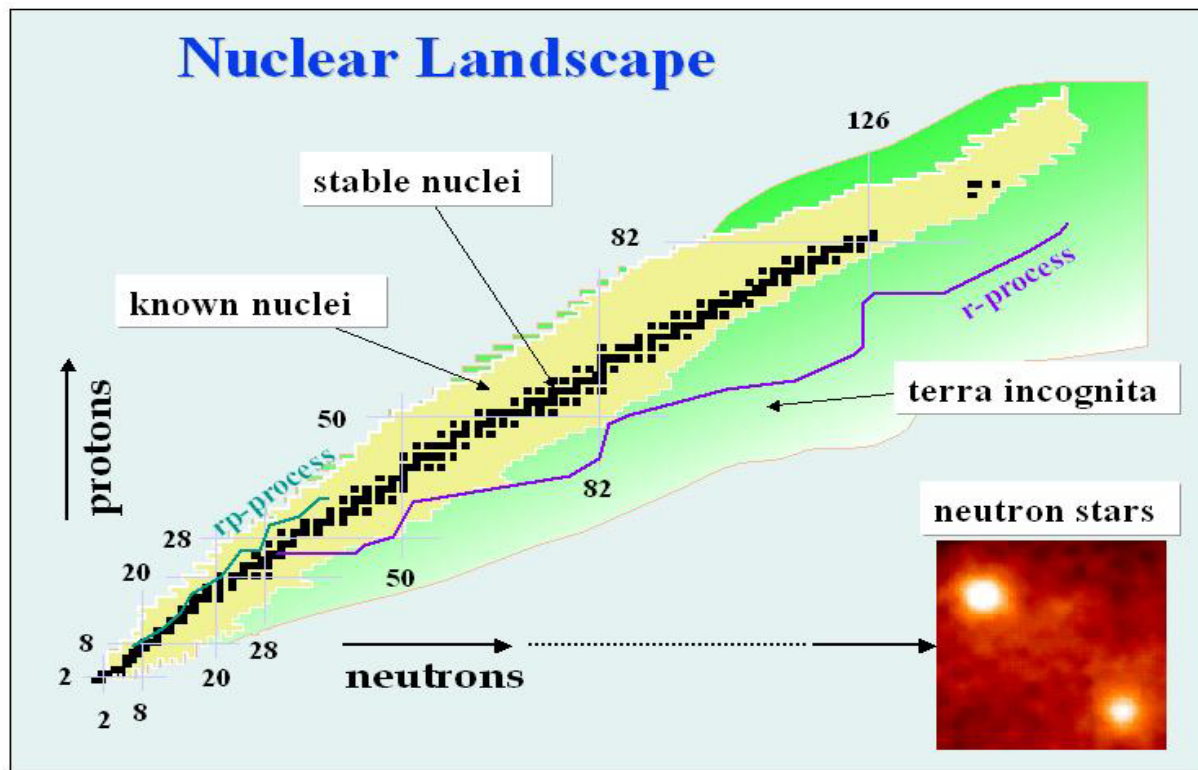
0 —————  $0^+$

$^{154}\text{Sm}$

$^{154}\text{Sm}$  の励起スペクトル



# 原子核の安定性



自然界に存在する(ほぼ)安定な原子核:287種類

存在が予想されている原子核:約7,000 ~ 10,000種類

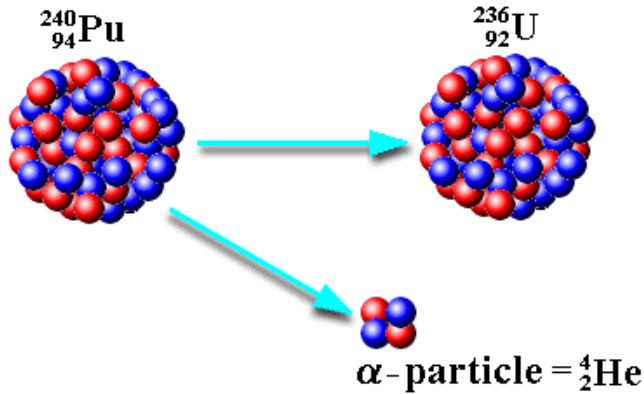
→ ほとんどの原子核が不安定

どのように壊れるか、どのくらいの時間で壊れるか



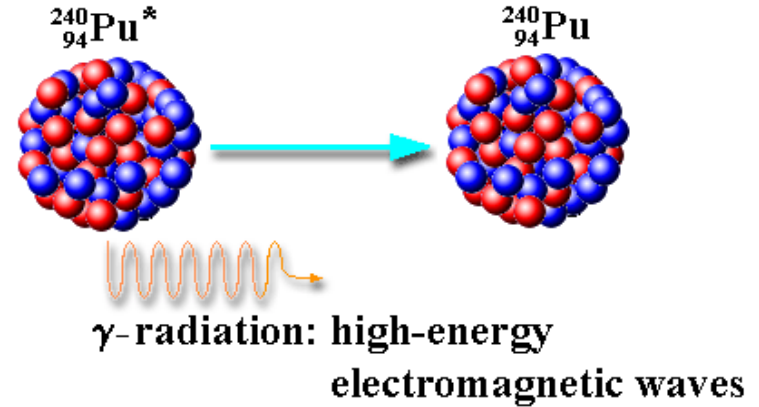
# 原子核の主な崩壊様式

## α崩壊 (陽子が多い原子核)



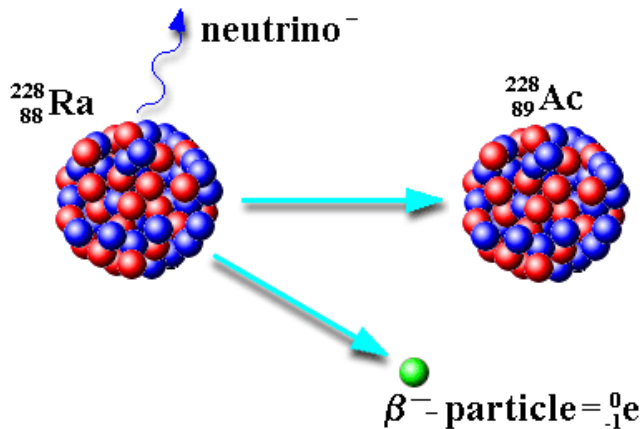
α線 ( ${}^4\text{He}$  原子核)

## γ崩壊 (原子核の励起状態)

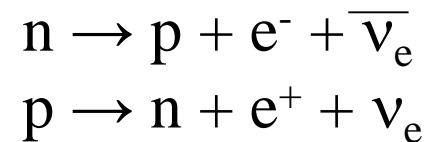


γ線 (高エネルギー電磁波)

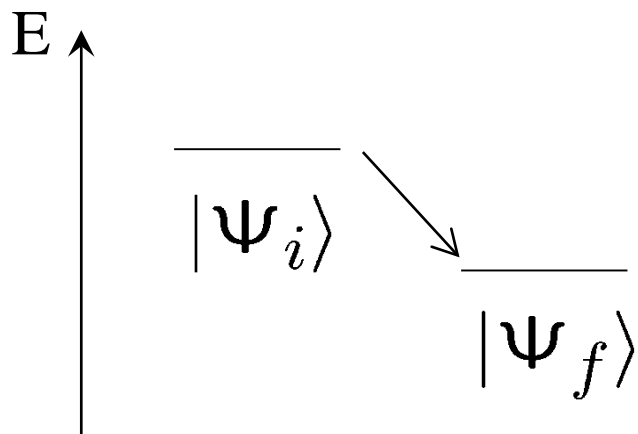
## β崩壊 (中性子が多い原子核)



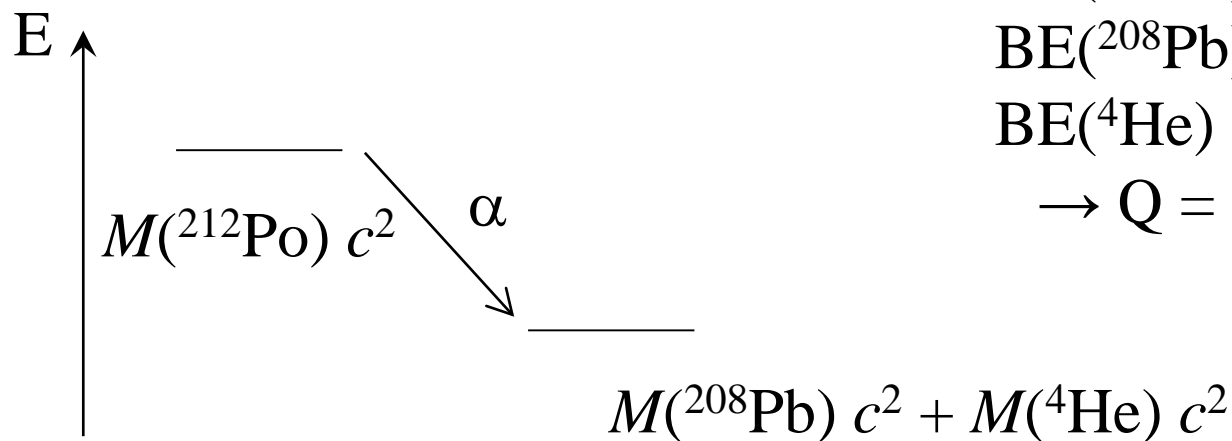
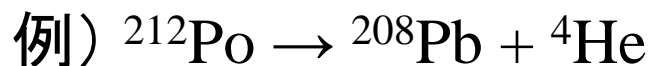
β線 (電子)



# 自発的な崩壊



$E_i > E_f$  であれば崩壊は自発的に起こる

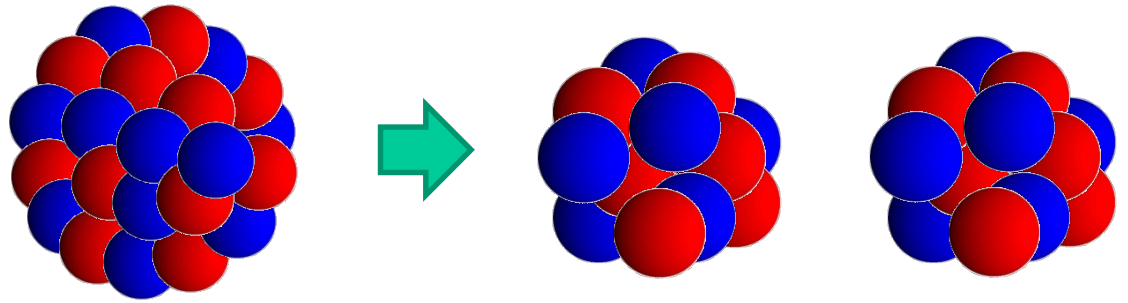


$$\begin{aligned} \text{BE}(^{212}\text{Po}) &= 1655.7 \text{ MeV} \\ \text{BE}(^{208}\text{Pb}) &= 1636.4 \text{ MeV} \\ \text{BE}(^4\text{He}) &= 28.296 \text{ MeV} \\ &\rightarrow Q = 9.00 \text{ MeV} \end{aligned}$$

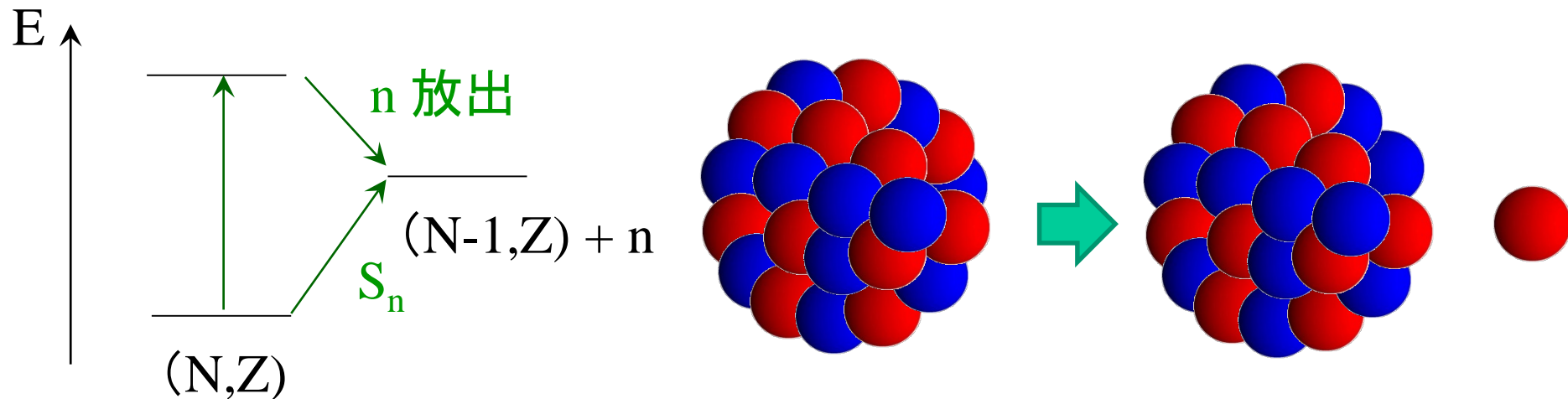
# 原子核の主な崩壊様式

- ✓  $\alpha$ 崩壊(陽子が多い原子核)
- ✓  $\beta$ 崩壊(中性子が多い原子核)
- ✓  $\gamma$ 崩壊(原子核の励起状態)

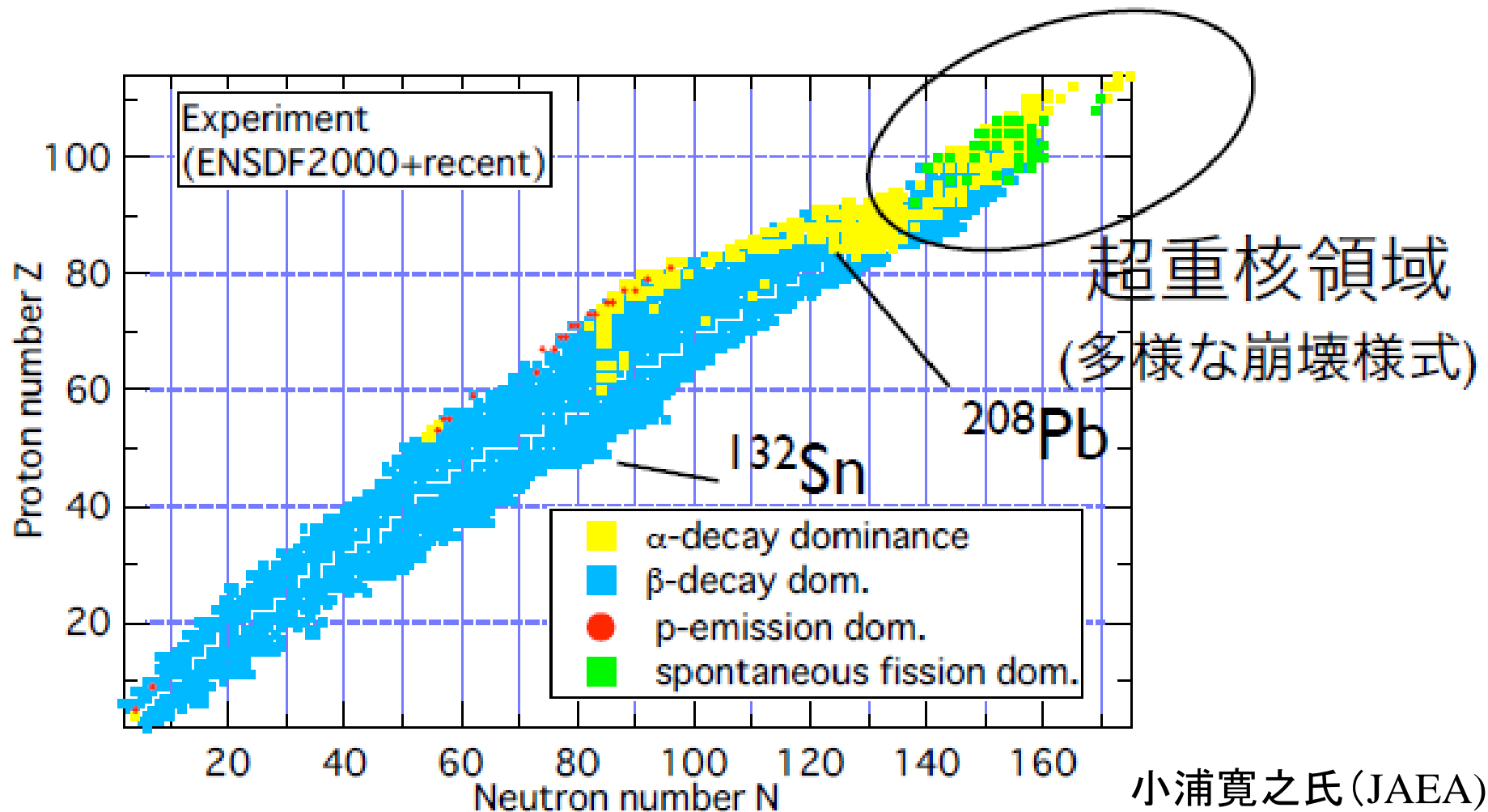
- ✓ 核分裂(重い原子核)



- ✓ 核子放出(高い励起状態、ドリップ線の外の非束縛な原子核)



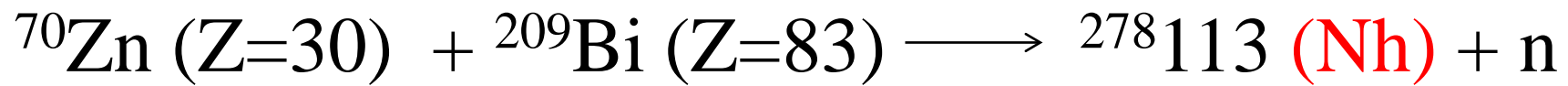
# 基底状態からの崩壊様式(実験データ)



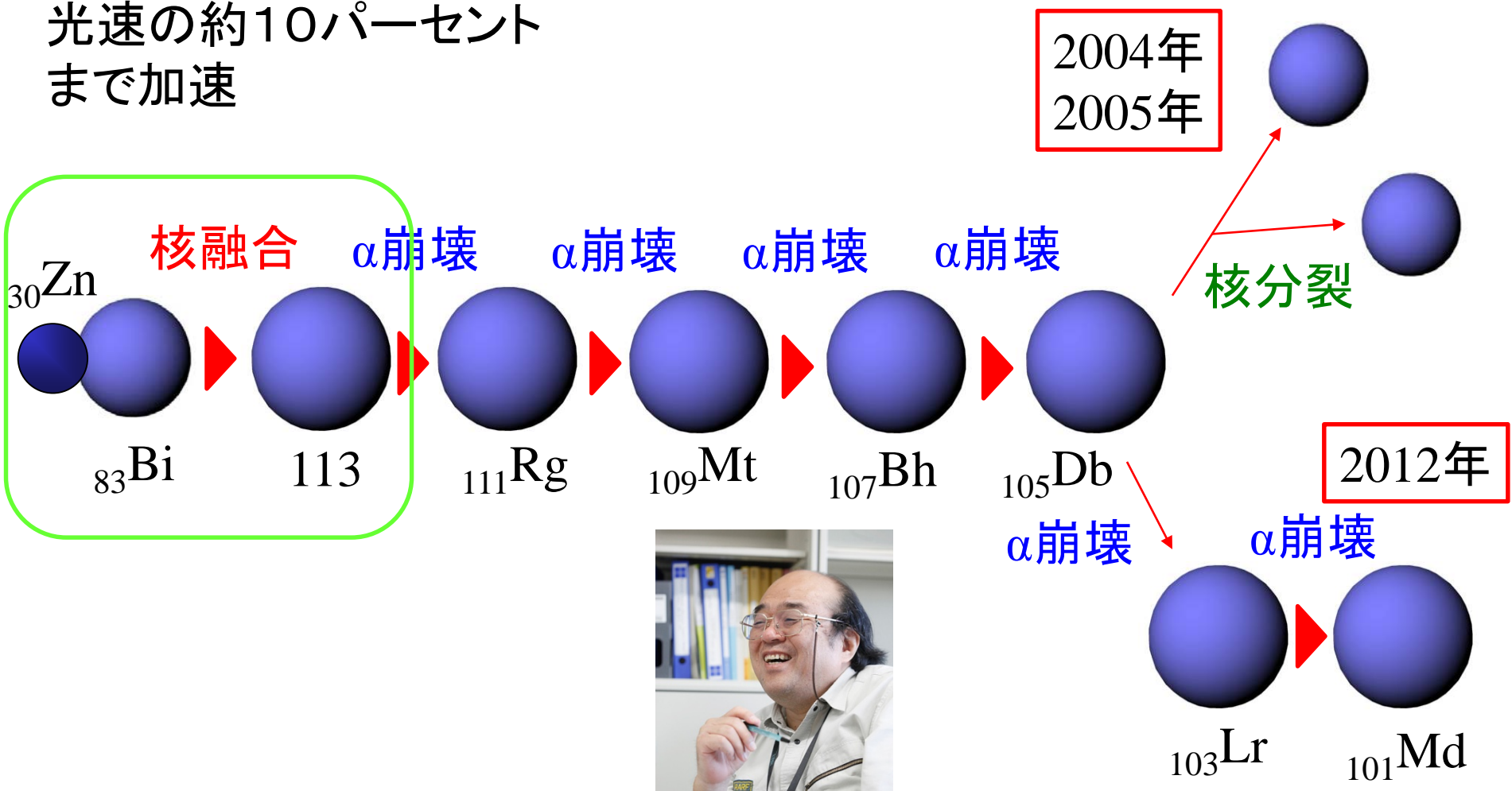
小浦寛之氏 (JAEA)  
のスライドより

- 多くの原子核が $\beta$ 崩壊(水色)
- 重い原子核では $\alpha$ 崩壊(黄色)や核分裂(緑色)

# 新元素113番ニホニウム



光速の約10パーセント  
まで加速



## 崩壊に関する相互作用

$\alpha$ 崩壊(陽子が多い原子核)	$\longleftrightarrow$	強い相互作用
$\beta$ 崩壊(中性子が多い原子核)	$\longleftrightarrow$	弱い相互作用
$\gamma$ 崩壊(原子核の励起状態)	$\longleftrightarrow$	電磁相互作用
核分裂(重い原子核)	$\longleftrightarrow$	強い相互作用
中性子放出	$\longleftrightarrow$	強い相互作用

原子核は自然界の相互作用を知るためのよい実験場になっている

## 崩壊に関する相互作用

$\alpha$ 崩壊(陽子が多い原子核)	$\longleftrightarrow$	強い相互作用
$\beta$ 崩壊(中性子が多い原子核)	$\longleftrightarrow$	弱い相互作用
$\gamma$ 崩壊(原子核の励起状態)	$\longleftrightarrow$	電磁相互作用
核分裂(重い原子核)	$\longleftrightarrow$	強い相互作用
中性子放出	$\longleftrightarrow$	強い相互作用

一般に、 $\tau_W \gg \tau_\gamma \gg \tau_S$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_W : \text{弱い相互作用による崩壊の寿命} \\ \tau_\gamma : \text{電磁相互作用による崩壊の寿命} \\ \tau_S : \text{強い相互作用による崩壊の寿命} \end{array} \right.$$

結合定数の違い(状態間の結合の強さ)による

→ ただし、 $\alpha$ 崩壊は例外(量子トンネル現象が関係)

## 崩壊に関する相互作用

一般に、  $\tau_W \gg \tau_\gamma \gg \tau_S$

$\left\{ \begin{array}{l} \tau_W : \text{弱い相互作用による崩壊の寿命} \\ \tau_\gamma : \text{電磁相互作用による崩壊の寿命} \\ \tau_S : \text{強い相互作用による崩壊の寿命} \end{array} \right.$

結合定数の違い(状態間の結合の強さ)による

→ ただし、 $\alpha$ 崩壊は例外(量子トンネル現象が関係)

具体的な例:

$^{24}\text{O} \rightarrow ^{24}\text{F}$  ( $\beta$ 崩壊)  $T_{1/2} = 0.065$  秒

$^{22}\text{O}(2^+) \rightarrow ^{22}\text{O}(0^+) + \gamma$  ( $\gamma$ 崩壊)  $T_{1/2} = 1.94 \times 10^{-12}$  秒

$^{25}\text{O} \rightarrow ^{24}\text{O} + n$  (中性子放出)  $T_{1/2} = 2.8 \times 10^{-21}$  秒

cf.  $^{232}\text{Th}$  の $\alpha$ 崩壊の半減期:  $T_{1/2} = 1.4 \times 10^{10}$  年 =  $4.4 \times 10^{17}$  秒

cf. 1 MeV の核子が半径 5 fm の原子核を横切るために必要な  
時間:  $t \sim 10^{-21}$  秒



## 崩壊の半減期

時間に依存する摂動論

$$H = H_0 + \underbrace{V(t)}_{\text{外場}}$$

$$V(t) = \hat{F} e^{\mp i\omega t} \quad \text{のとき、}$$

外場  $V(t)$  による状態  $n \rightarrow k$  への遷移確率:

$$P_{n \rightarrow k} \sim \frac{2\pi}{\hbar} t |\langle \phi_k | \hat{F} | \phi_n \rangle|^2 \delta(\epsilon_k - \epsilon_n \mp \hbar\omega)$$

(フェルミの黄金則)

いくつかの状態が終状態のエネルギーに縮退しているとき

$$P_{n \rightarrow k} \sim \frac{2\pi}{\hbar} t |\langle \phi_k | \hat{F} | \phi_n \rangle|^2 \underbrace{\rho(\epsilon_k)}$$

終状態の状態数

## 崩壊の半減期

時間に依存する摂動論

$$P_{n \rightarrow k} \sim \frac{2\pi}{\hbar} t |\langle \phi_k | \hat{F} | \phi_n \rangle|^2 \rho(\epsilon_k) \equiv \lambda_k t$$



時間  $t$  たったとき遷移(崩壊)が起きていない確率:

$$P_{\text{sur}}(t) \sim 1 - \sum_{k \neq n} \lambda_k t \sim e^{-\lambda t} \quad (\lambda \equiv \sum_{k \neq n} \lambda_k)$$

(note)

$$\lambda \propto |F|^2$$

$$\longrightarrow \lambda_S \gg \lambda_\gamma \gg \lambda_W$$

$$\longrightarrow \tau_S \ll \tau_\gamma \ll \tau_W \quad (\tau \equiv 1/\lambda)$$

## 崩壊の半減期

時間  $t$  たったとき遷移(崩壊)が起きていない確率:

$$P_{\text{sur}}(t) \sim 1 - \sum_{k \neq n} \lambda_k t \sim e^{-\lambda t} \quad (\lambda \equiv \sum_{k \neq n} \lambda_k)$$

(半減期)  $\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}} \quad \longrightarrow \quad T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$

## 崩壊の分岐比

$$P_{\text{sur}}(t) \sim 1 - \sum_{k \neq n} \lambda_k t \sim e^{-\lambda t}$$

時間  $t$  たったとき状態  $k$  になる確率:  $\lambda_k t \equiv \Gamma_k t / \hbar$

時間  $t$  たったとき崩壊が起こる全確率:  $\sum_k \Gamma_k t / \hbar$

(ただし、 $\Gamma_n = 0$ )

このうち

$$\frac{\Gamma_k t / \hbar}{\sum_{k'} \Gamma_{k'} t / \hbar} = \frac{\Gamma_k}{\sum_{k'} \Gamma_{k'}}$$

の割合で  $n \rightarrow k$  の遷移が起きる (= 分岐比)

$$Br = \frac{\Gamma_k}{\sum_{k'} \Gamma_{k'}}$$

## 崩壊の分岐比

時間  $t$  たったとき崩壊が起こる全確率:  $\sum_k \Gamma_k t / \hbar$

このうち 
$$\frac{\Gamma_k t / \hbar}{\sum_{k'} \Gamma_{k'} t / \hbar} = \frac{\Gamma_k}{\sum_{k'} \Gamma_{k'}}$$

$$Br = \frac{\Gamma_k}{\sum_{k'} \Gamma_{k'}}$$

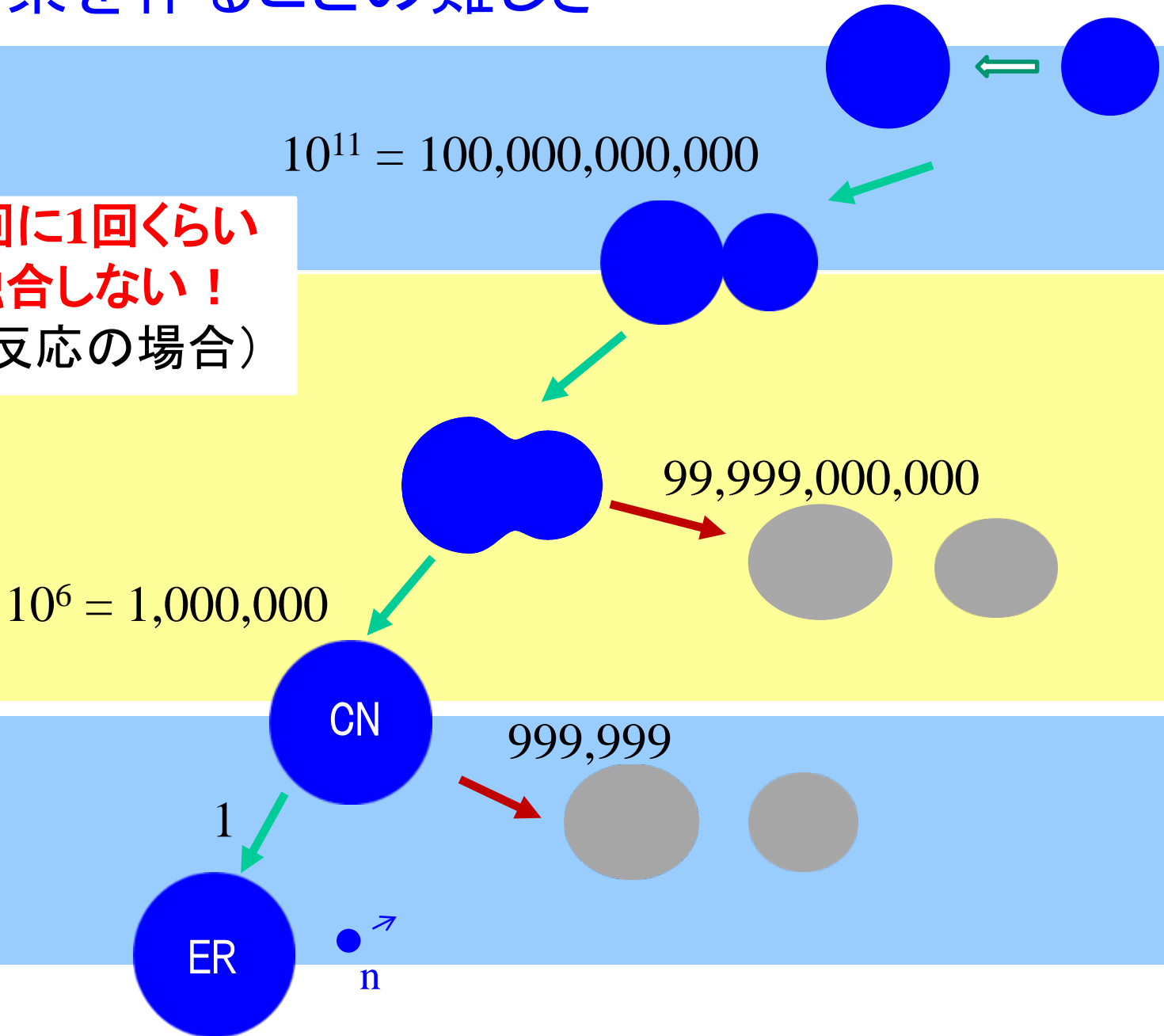
の割合で  $n \rightarrow k$  の遷移が起きる (= 分岐比)

例)  $K^+$  の崩壊

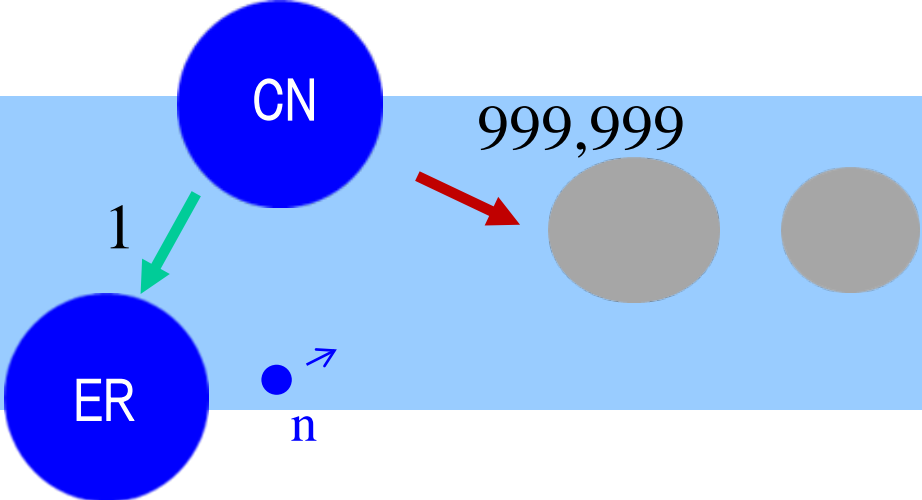
$K^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$	63.55%
$\pi^+ \pi^0$	20.66%
$\pi^+ \pi^+ \pi^-$	5.59%
$\pi^0 e^+ \nu_e$	5.07%
$\pi^+ \pi^0 \pi^0$	1.76%
$\pi^0 \mu^+ \nu_\mu$	3.35% など

# 超重元素を作ることの難しさ

1000億回に1回くらい  
しか核融合しない！  
(Ni+Pb 反応の場合)



# 超重元素を作ることの難しさ

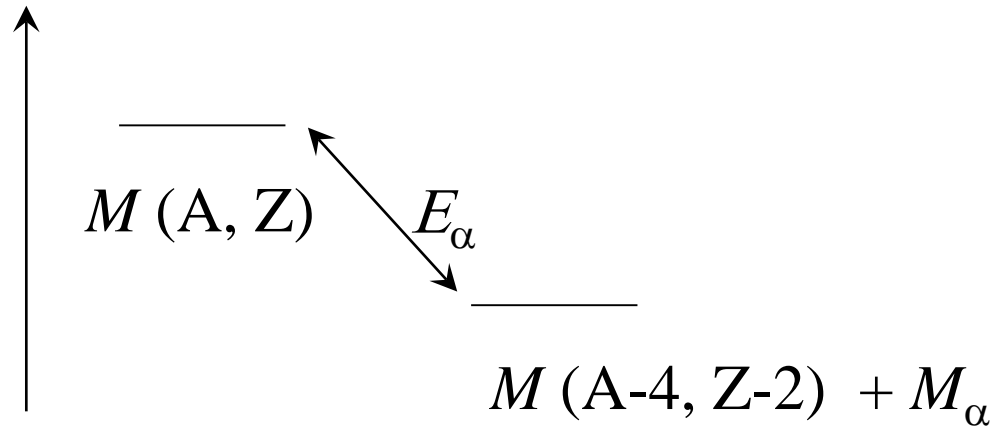
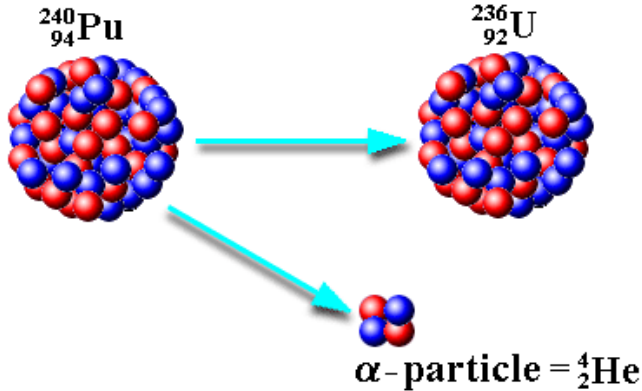


分岐比  $\frac{\Gamma_n}{\Gamma_{\text{fission}} + \Gamma_n}$  がとても小さい

=非常にレアなイベント

# $\alpha$ 崩壊について

実験的な観測量:  $T_{1/2}$  と  $E_\alpha$



## 実験データ:

$E_\alpha$  がわずかに変化しただけでも  $T_{1/2}$  が何桁も変わる。

例)  $^{232}\text{Th}$ :  $E_\alpha = 4 \text{ MeV}$ ,  $T_{1/2} = 1.4 \times 10^{10} \text{ 年} = 4.4 \times 10^{17} \text{ 秒}$

$^{218}\text{Th}$ :  $E_\alpha = 10 \text{ MeV}$ ,  $T_{1/2} = 0.11 \text{ } \mu\text{sec.} = 1.1 \times 10^{-7} \text{ 秒}$

→ トンネル効果を示唆(ガモフ 1928年)

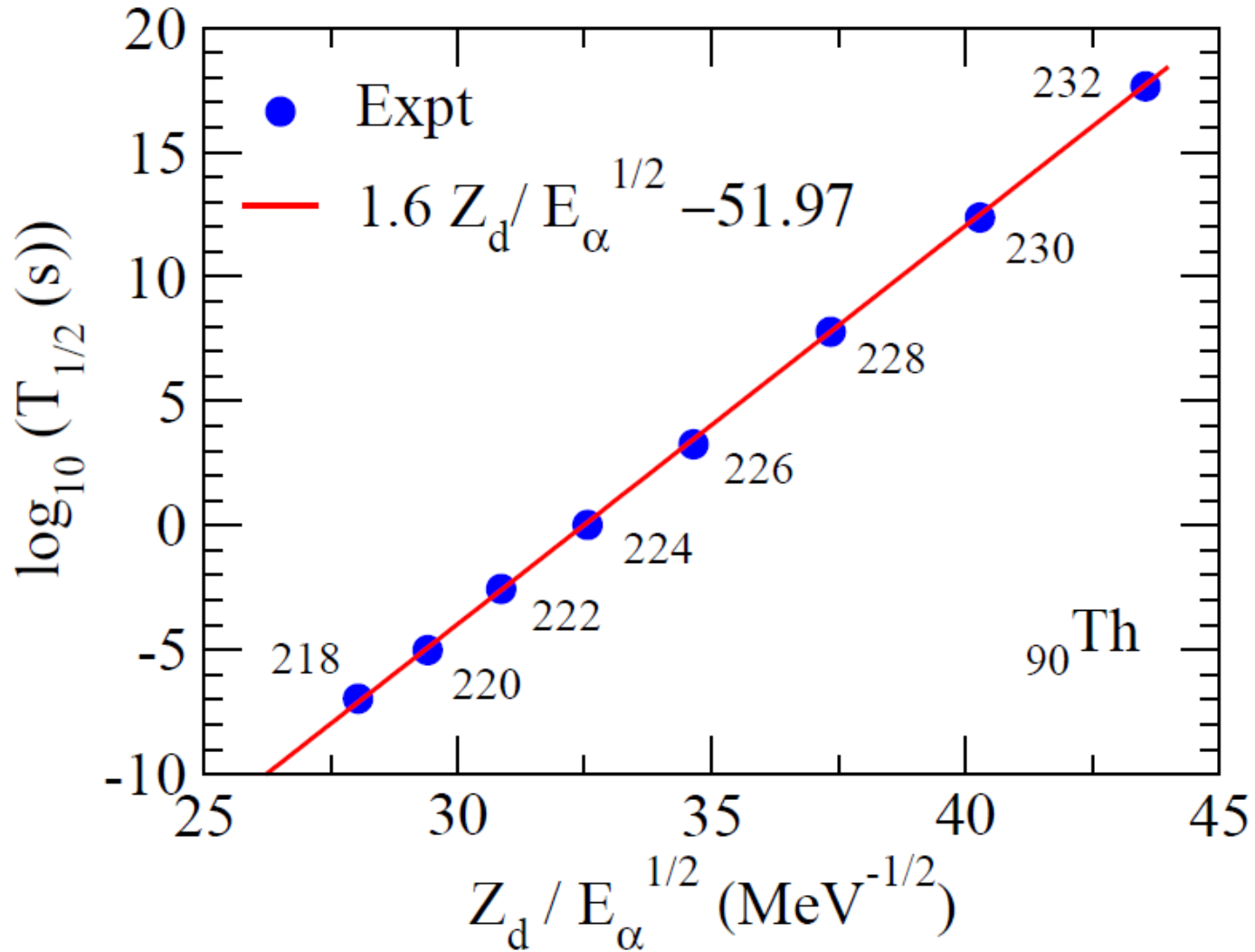
経験則: Geiger-Nuttall 則 (1911年)

$$\log_{10} T_{1/2} \sim a + b \frac{Z_D}{\sqrt{E_\alpha}} \quad (Z_D = Z-2)$$



# $\alpha$ 崩壊: Geiger-Nuttal 則

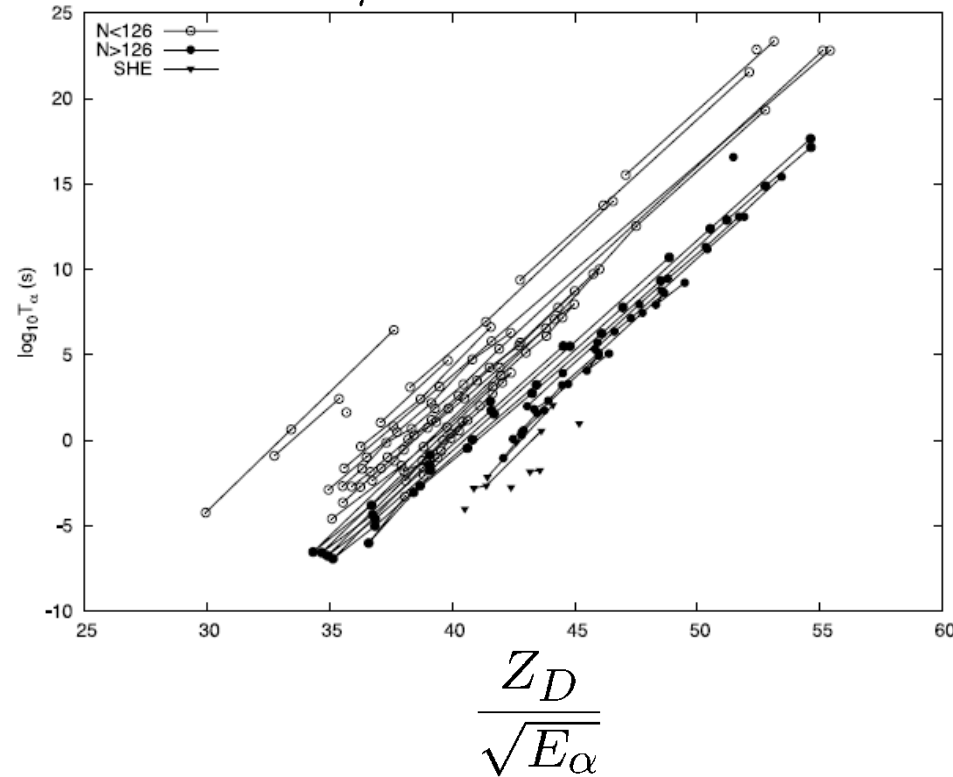
## Th アイソトープに対する実験データ



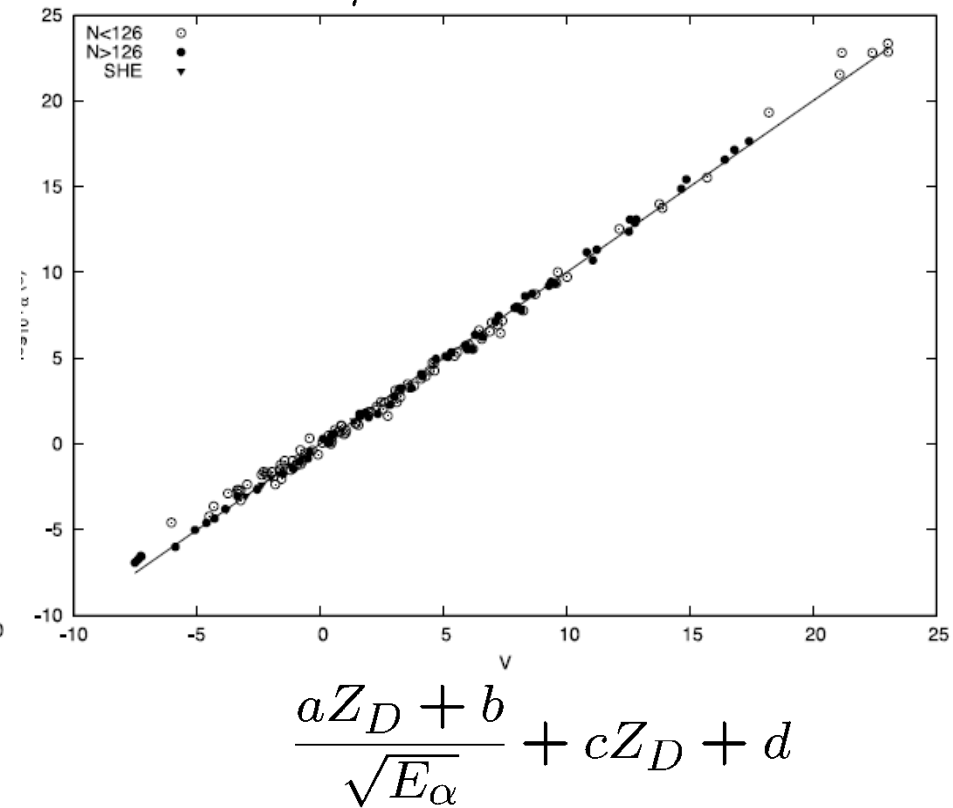
cf. B. Buck, A.C. Merchant, and S.M. Perez, PRL65('90)2975

# よりよい経験則：Viola-Seaborg 則（1966年）

$\log_{10} T_{1/2}$



$\log_{10} T_{1/2}$

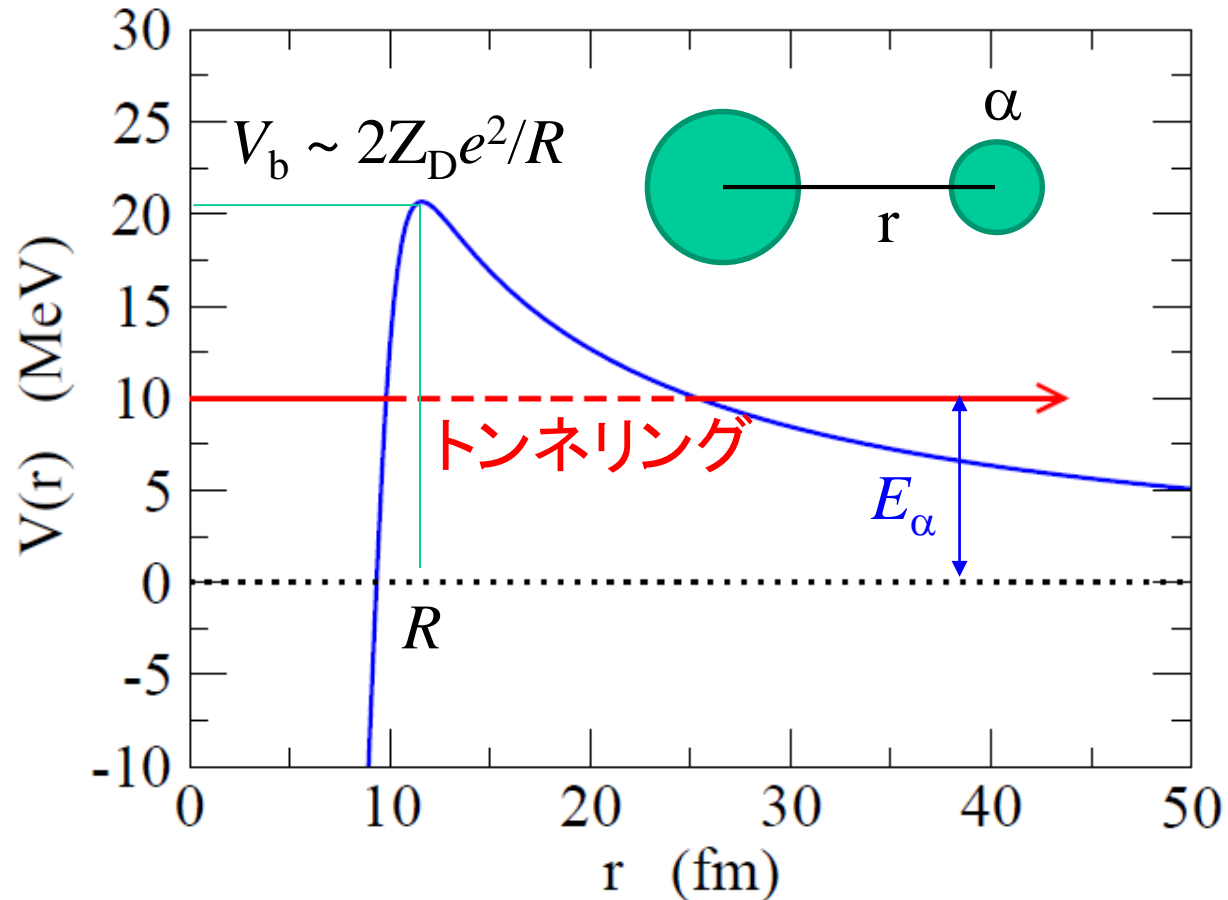


Geiger-Nuttall 則だとアイソトープごとに線がばらける

Viola-Seaborg 則だと全て一つの直線にのる

# ガモフによる $\alpha$ 崩壊の説明

$E_\alpha < V_b \rightarrow$  トンネル効果による崩壊



例) Thアイソトープに対して

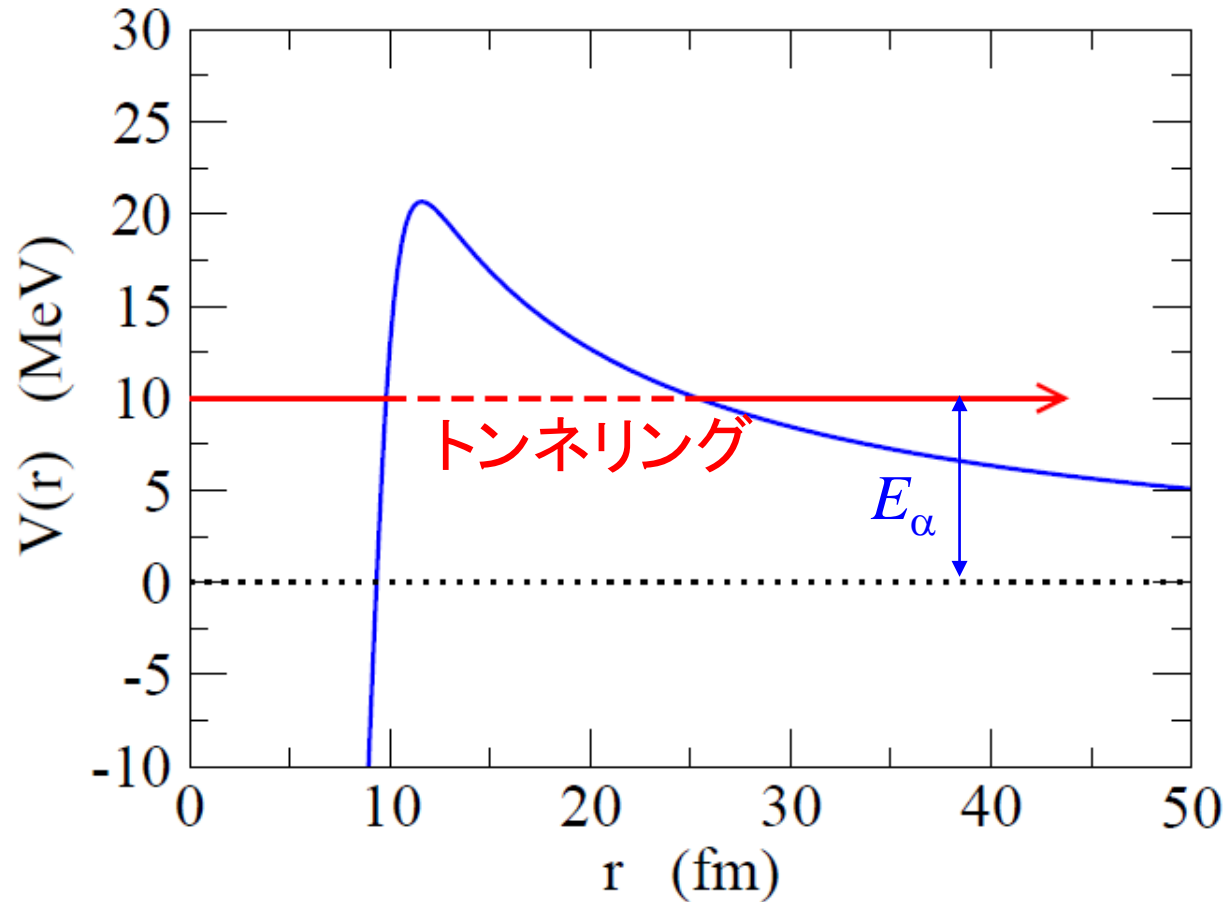
$$R \sim 1.2 \times (230^{1/3} + 4^{1/3}) = 9.26 \text{ fm}$$

$$V_b \sim 2 \times 88 e^2 / R \sim 2 \times 88 e^2 / 9.26 = 27.3 \text{ MeV}$$

$$\longleftrightarrow E_\alpha = 4 \sim 10 \text{ MeV}$$

# ガモフによる $\alpha$ 崩壊の説明

$E_\alpha < V_b \rightarrow$  トンネル効果による崩壊



ガモフ:

$$\lambda = \omega \cdot P$$

$\omega$ : 単位時間当たりにポテンシャルの壁に当たる回数 (試行周期)

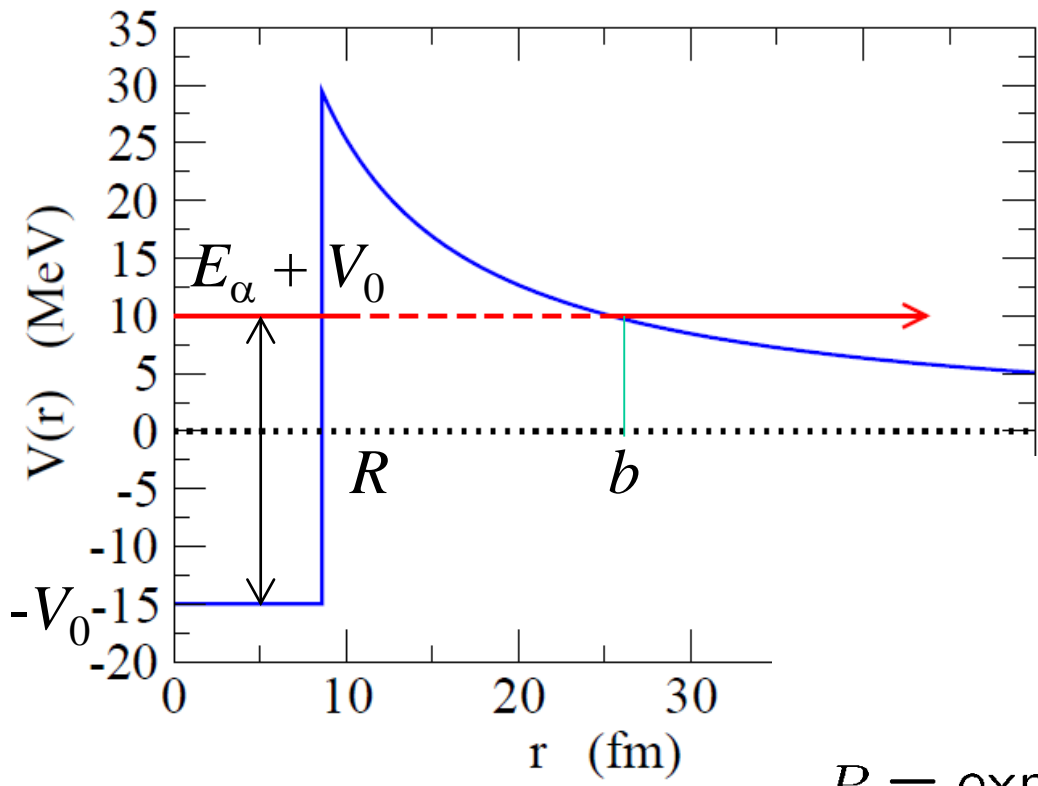
$P$ : トンネル効果の確率

# ガモフによる $\alpha$ 崩壊の説明

ガモフ:  $\lambda = \omega \cdot P$

$\omega$ : 単位時間あたりにポテンシャルの壁に当たる回数 (試行周期)

$P$ : トンネル効果の確率



$$V(r) = -V_0 \quad (r < R)$$
$$= \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} \quad (r \geq R)$$

と単純化すると、

$$\omega = \frac{\tilde{v}}{2R}$$

$$\frac{1}{2} \mu \tilde{v}^2 = E_\alpha + V_0$$

$$P = \exp \left[ -2 \int_R^b dr \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2} \left( \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} - E \right)} \right]$$

$$P = e^{-G}$$

$$G = 2 \int_R^b dr \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2} \left( \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} - E \right)} = Z_1 Z_2 e^2 / b$$

$$= 2 \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2}} \sqrt{Z_1 Z_2 e^2} \int_R^b dr \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{b}}$$

$$= \sqrt{b} \left[ \cos^{-1} \sqrt{\frac{R}{b}} - \sqrt{\frac{R}{b} - \frac{R^2}{b^2}} \right]$$

$$\sim \sqrt{b} \left( \frac{\pi}{2} - 2\sqrt{\frac{R}{b}} \right) \quad (b \gg R)$$

$$\leftarrow \cos \left( \frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{R}{b}} \right) \sim \sin \sqrt{\frac{R}{b}} \sim \sqrt{\frac{R}{b}}$$

$$\sim \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2}} \sqrt{Z_1 Z_2 e^2 b} \cdot \sqrt{\frac{R}{b}} \cdot \left( \pi \sqrt{\frac{b}{R}} - 4 \right)$$

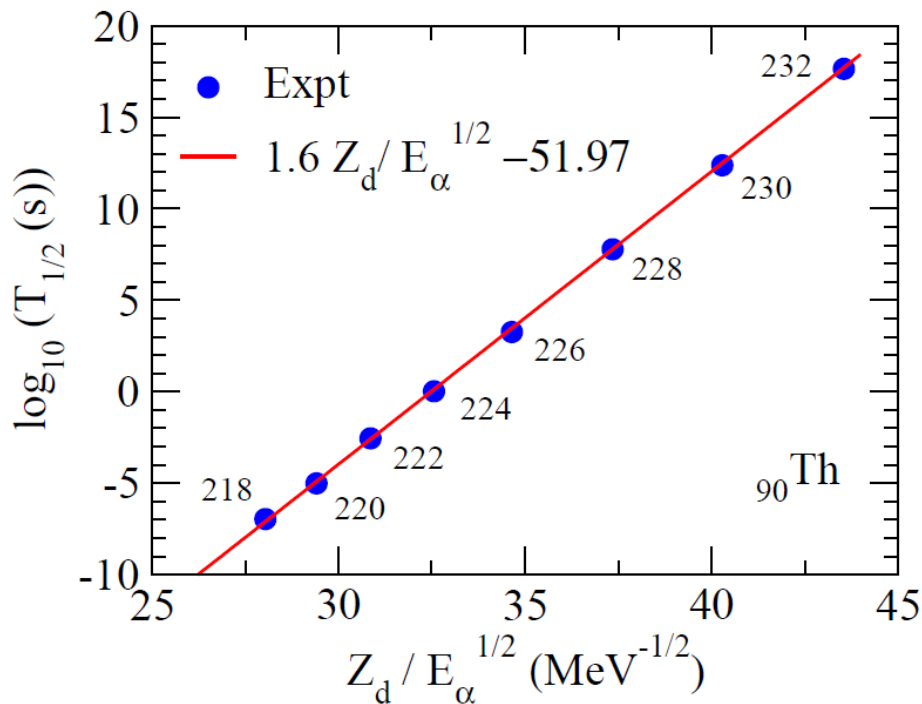
$$= \sqrt{\frac{2\mu R}{\hbar^2} Z_1 Z_2 e^2} \left( \pi \sqrt{\frac{Z_1 Z_2 e^2}{RE}} - 4 \right)$$

$$P = e^{-G} \quad G \sim \sqrt{\frac{2\mu R}{\hbar^2} Z_1 Z_2 e^2} \left( \pi \sqrt{\frac{Z_1 Z_2 e^2}{RE}} - 4 \right)$$

$$\lambda = \lambda_0 e^{-\alpha \frac{Z_1}{\sqrt{E}} + \beta}$$

$$T_{1/2} = \frac{1}{\lambda} \ln 2 = C e^{\alpha \frac{Z_1}{\sqrt{E}}} \quad \leftarrow \text{Geiger-Nuttall}$$

$$\log_{10} T_{1/2} \sim a + b \frac{Z_D}{\sqrt{E_\alpha}}$$



$$P = e^{-G} \quad G \sim \sqrt{\frac{2\mu R}{\hbar^2} Z_1 Z_2 e^2} \left( \pi \sqrt{\frac{Z_1 Z_2 e^2}{RE}} - 4 \right)$$

(note)  $R \rightarrow 0$  では

$$G \sim \sqrt{\frac{2\mu R}{\hbar^2} Z_1 Z_2 e^2} \left( \pi \sqrt{\frac{Z_1 Z_2 e^2}{RE}} \right) = \pi Z_1 Z_2 e^2 \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2 E}} = 2\pi \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v} \equiv \eta(E)$$

$$P(E) = e^{-2\pi\eta(E)}$$

ゾンマーフェルト  
パラメーター

$Z_1=2, Z_2=88, \mu = 4m_N$  とすると

$$E = 4 \text{ MeV} \text{ で } \eta = 27.85, P(E) = 1.00 \times 10^{-76}$$

$$E = 10 \text{ MeV} \text{ で } \eta = 17.62, P(E) = 8.60 \times 10^{-49}$$

(約28ケタの違い)