

## ➤ BCS理論がどのように適用できるのか?

### ✓ BCS理論

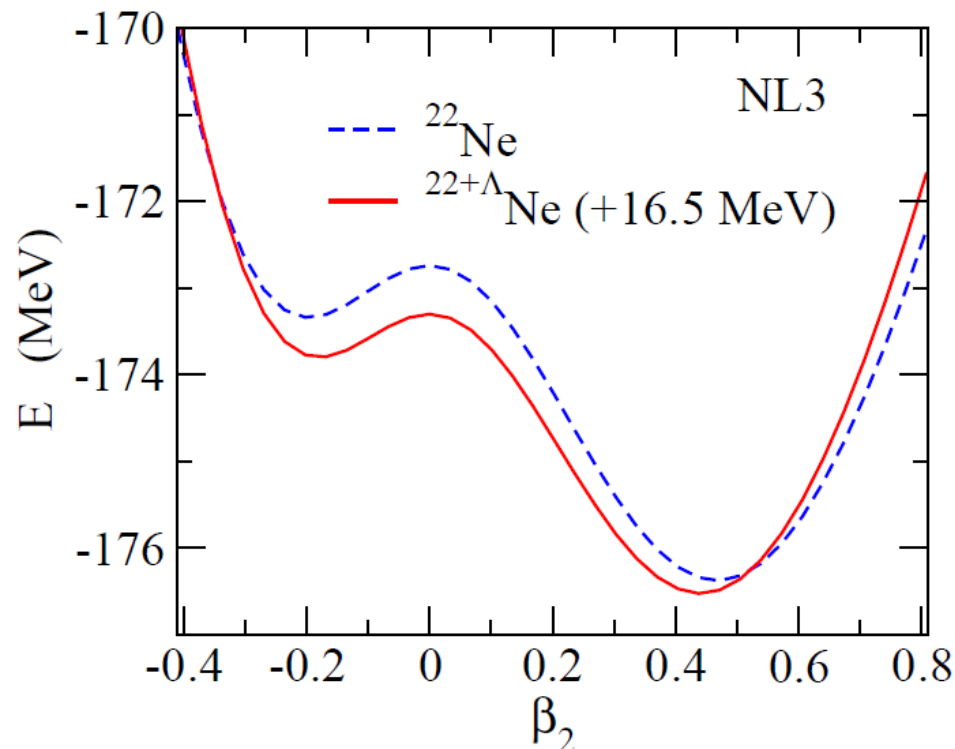
$$H = \sum_{\nu} \epsilon_k (a_k^{\dagger} a_k + a_{\bar{k}}^{\dagger} a_{\bar{k}}) - G \left( \sum_{k>0} a_k^{\dagger} a_{\bar{k}}^{\dagger} \right) \left( \sum_{k>0} a_{\bar{k}} a_k \right)$$

→  $|BCS\rangle = \prod_{k>0} (u_k + v_k a_k^{\dagger} a_{\bar{k}}^{\dagger}) |0\rangle$  を仮定

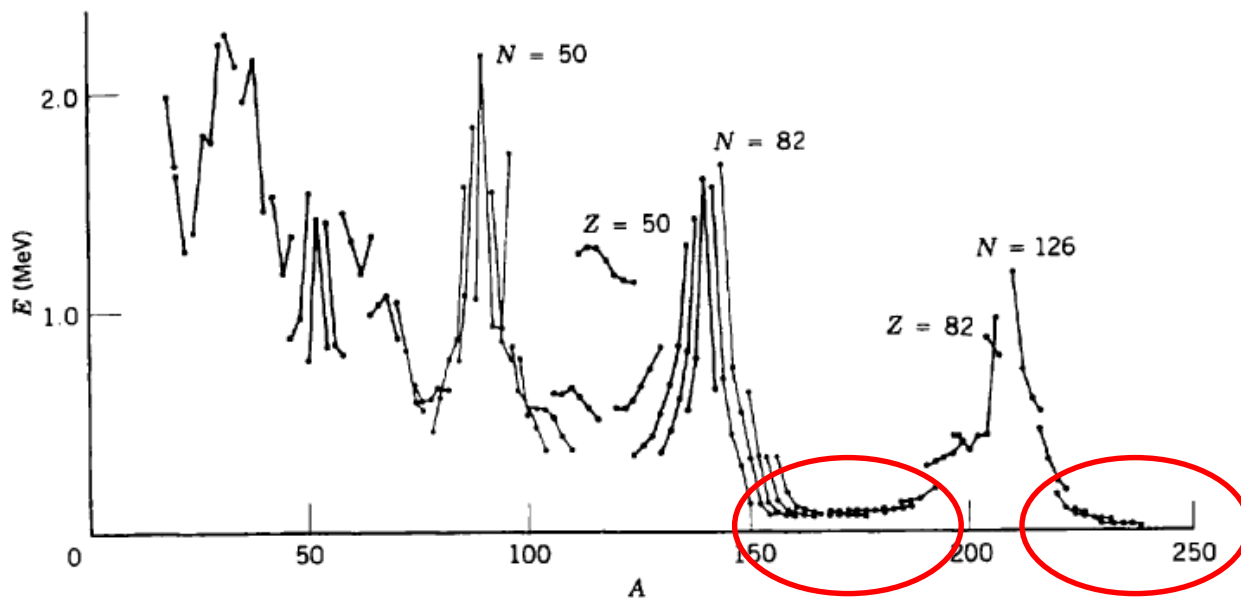
$u_k$  と  $v_k$  は変分で決める

→ 
$$E_{\text{pair}} = -G \left( \sum_k u_k v_k \right)^2$$

原子核の形を議論するときに  
重要な役割を果たす

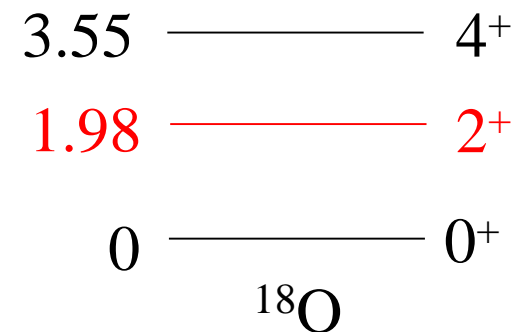
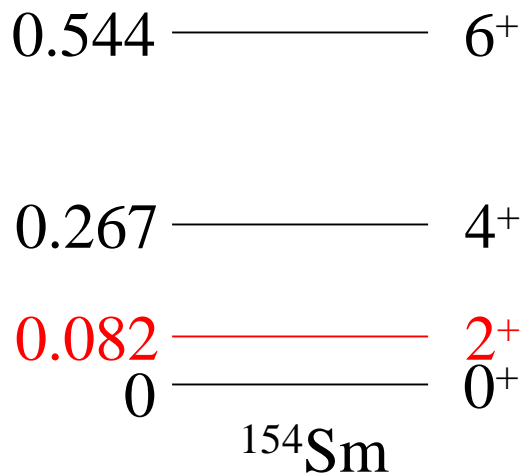


➤ 偶偶核の  $2^+$  状態のエネルギーの図をもう一度説明して欲しい



変形核

いろいろな原子核  
で  $2^+$  状態の  
エネルギーを  
プロットしたもの



## ➤ 原子核が変形している他の証拠は?

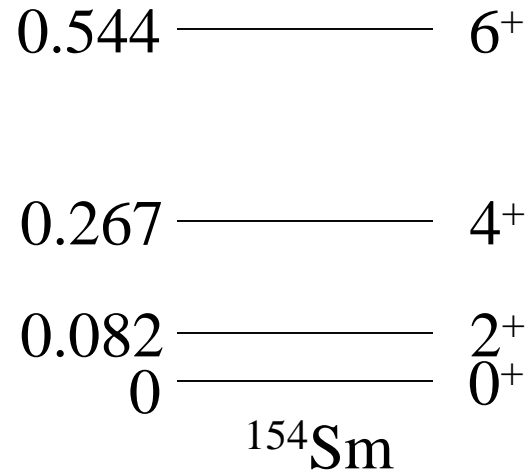
- 回転バンドの存在

$$E_I = \frac{I(I+1)\hbar^2}{2\mathcal{J}}$$

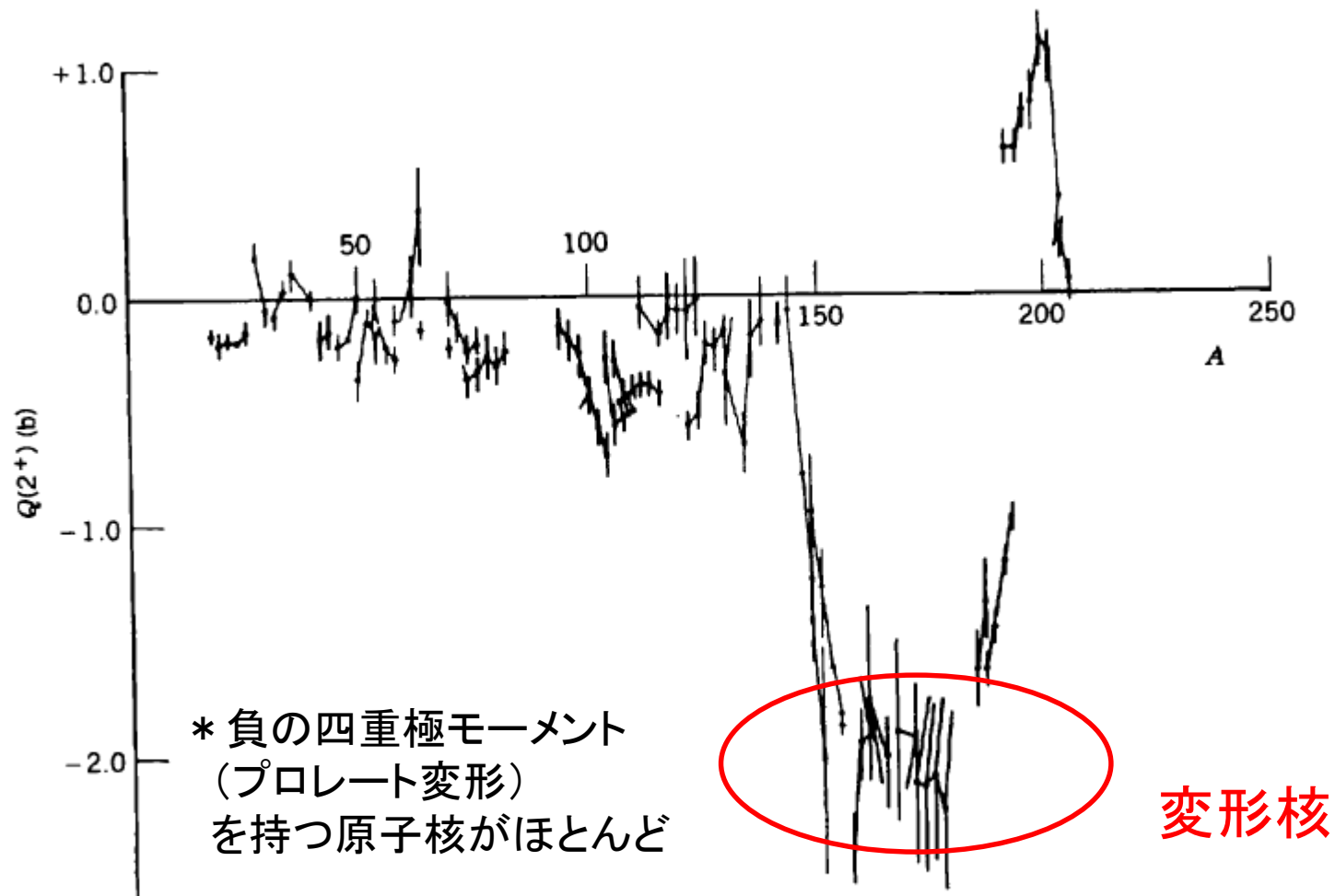
- 非常に大きな四重極モーメント  
(奇数個の核子を持つ原子核や励起状態)

$$Q = e\sqrt{\frac{16\pi}{5}} \langle \Psi_{II} | r^2 Y_{20} | \Psi_{II} \rangle$$

- 四重極遷移確率の増大
- 一粒子スペクトル

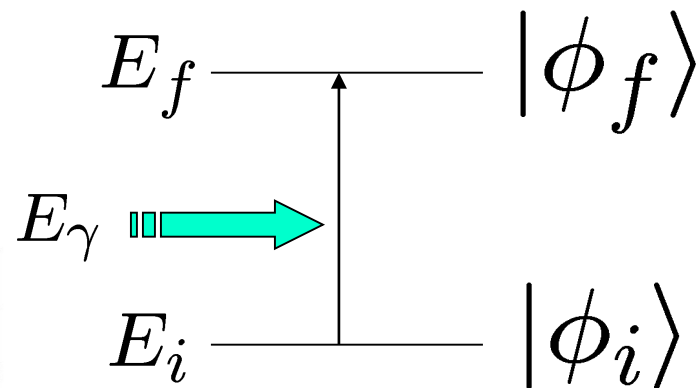
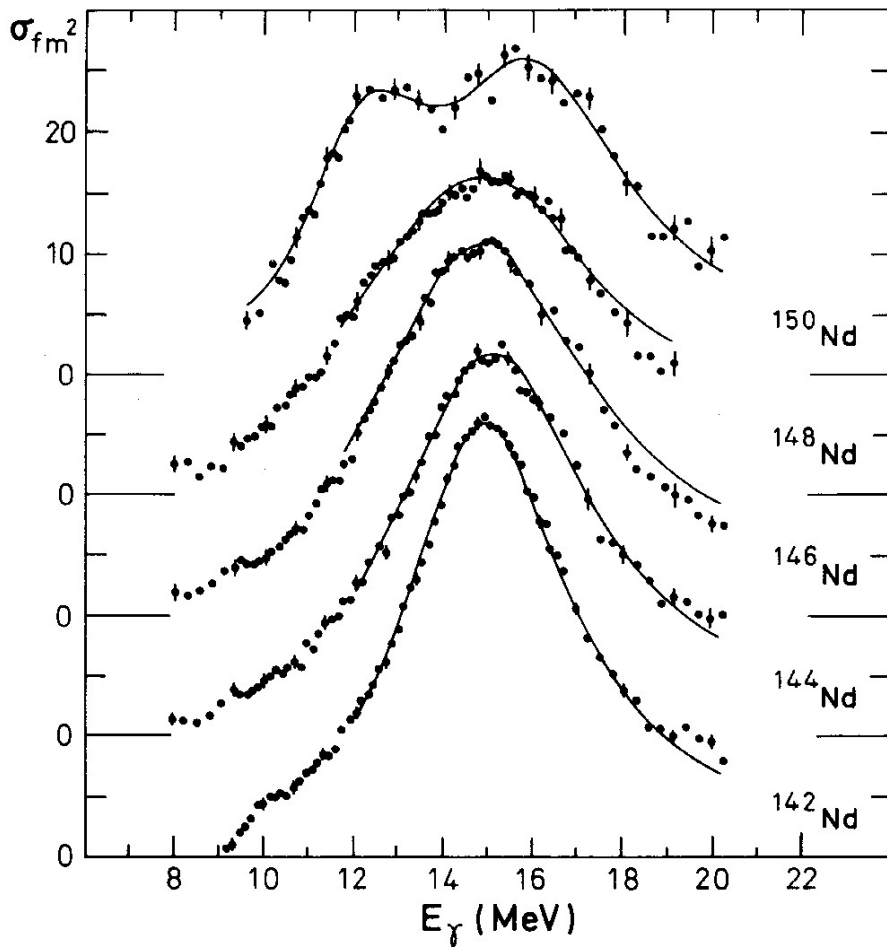
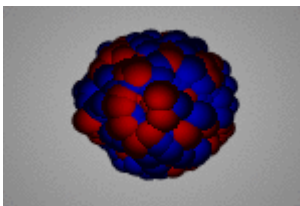


# 偶偶核の $2^+$ 状態の四重極モーメント

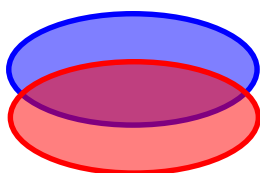
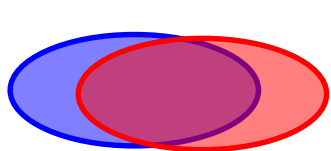
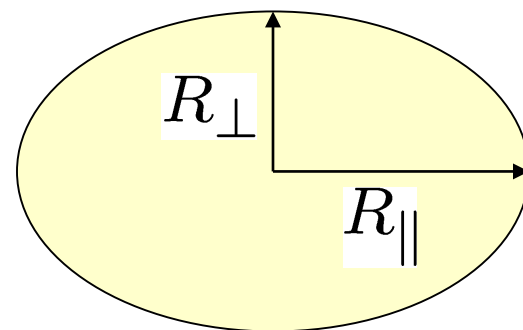


**Figure 5.16b** Electric quadrupole moments of lowest  $2^+$  states of even- $Z$ , even- $N$  nuclei. The lines connect sequences of isotopes.

光吸収  
断面積

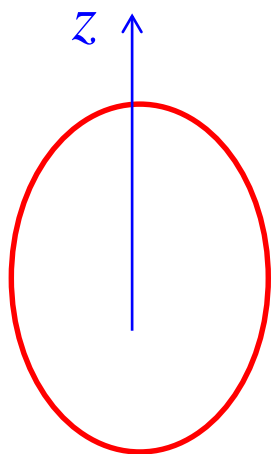


フォトンエネルギーと励起エネルギーが一致すると光子が原子核に吸収される

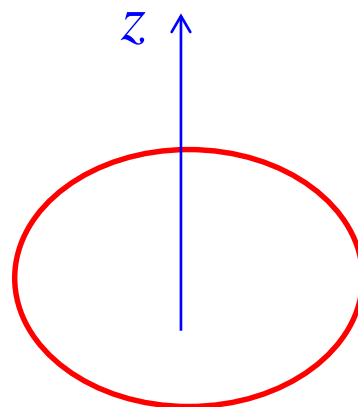


$$\hbar\omega \sim A^{-1/3} \sim 1/R$$

➤ プロレート変形とオブレート変形は見る方向を変えると同じになりそうですが。。。。?

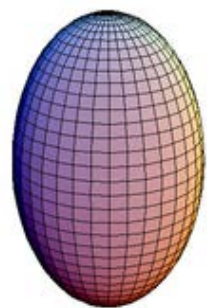


$\beta > 0$   
プロレート変形

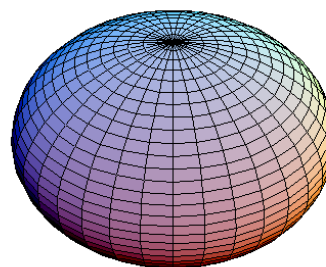


$\beta < 0$   
オブレート変形

✓ ごめんなさい、絵が下手でした。



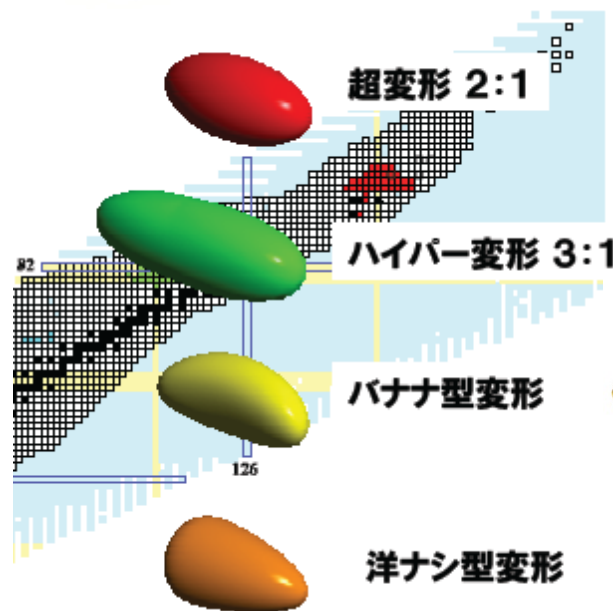
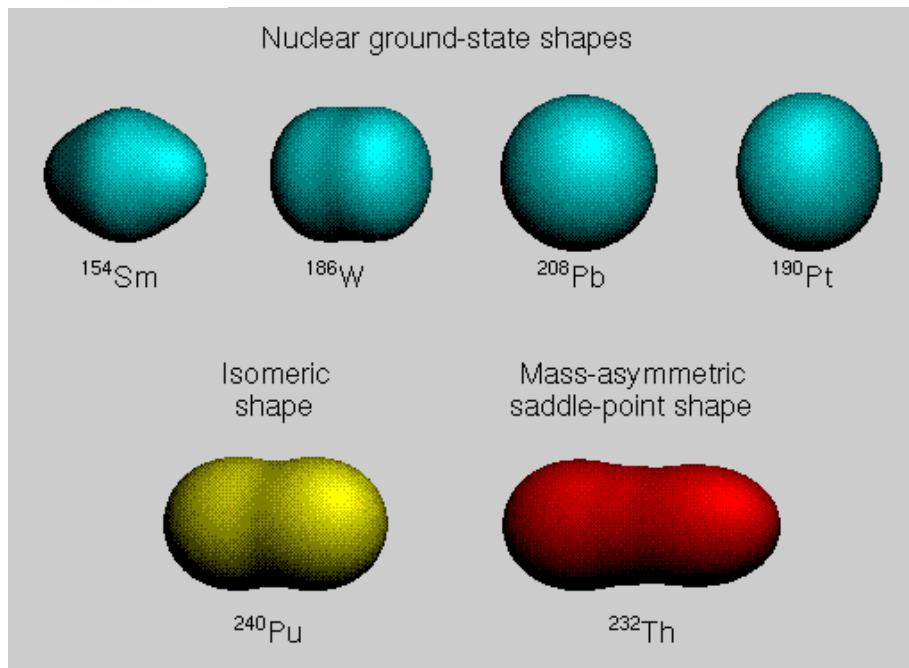
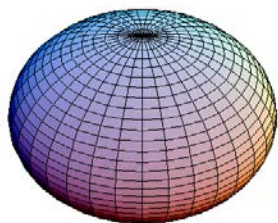
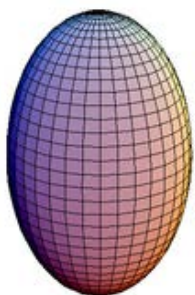
プロレート変形



オブレート変形

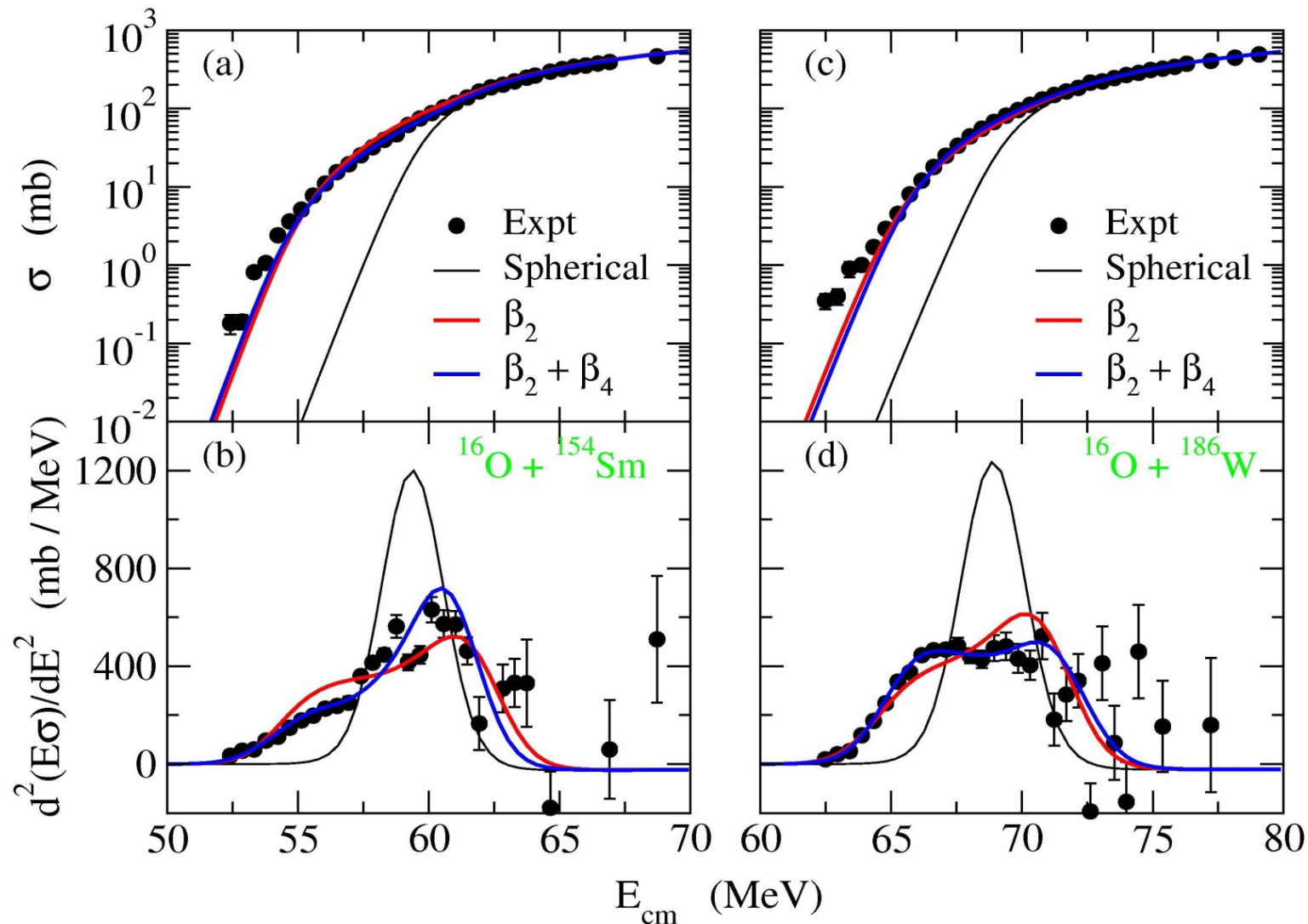
➤ 原子核の変形は回転楕円形しかないのですか？

✓ いえいえ、そんなことはありません (→ ここでは3以上の  $\lambda$  も重要)



(N,Z) がどのような組み合わせの時にどのような形をとるか  
→ 「形の量子論」

ただし、実験的に高次の変形を観測するのは難しい  
← 原子核反応の解析などを使う





➤ 球面調和関数を複素共役にとっているのは何故ですか？

$$R(\theta, \phi) = R_0 \left( 1 + \sum_{\lambda, \mu} \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}^*(\theta, \phi) \right)$$

➤ いい質問です

- ✓  $R$  はスカラー量 (座標軸を回転しても長さは変わらない)
- ✓  $\alpha_{\lambda\mu}$  は座標軸の回転で  $Y_{\lambda\mu}$  と同じように変換することを要請 (ランク  $\lambda$  のテンソル)

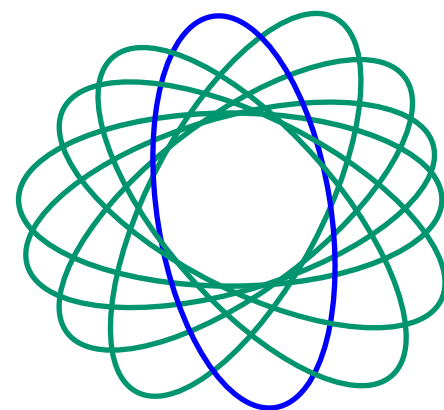
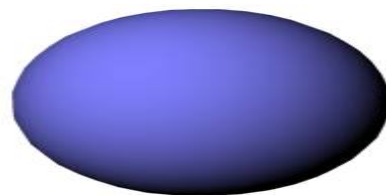
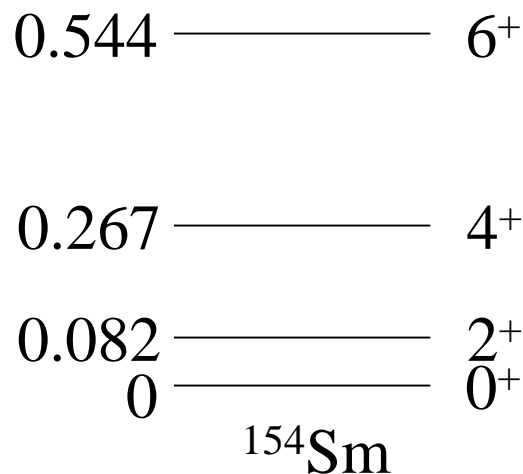
→  $\alpha_{\lambda\mu}$  と  $Y_{\lambda\mu}$  を合成してスカラー (ランク 0 のテンソル) を作る

$$\begin{aligned} [\alpha_\lambda Y_\lambda]^{(00)} &= \sum_{\mu, \mu'} \langle \lambda\mu\lambda\mu' | 00 \rangle \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu'} = \sum_{\mu} \langle \lambda\mu\lambda - \mu | 00 \rangle \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda - \mu} \\ &= \sum_{\mu} \frac{(-1)^{\lambda - \mu}}{\sqrt{2\lambda + 1}} \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda - \mu} = \sum_{\mu} \frac{(-1)^\lambda}{\sqrt{2\lambda + 1}} \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}^* \end{aligned}$$

➤ 原子核の変形の向きは一定でしょうか？

深い質問です！

✓ 実験室で現れるのは必ず角運動量の固有状態



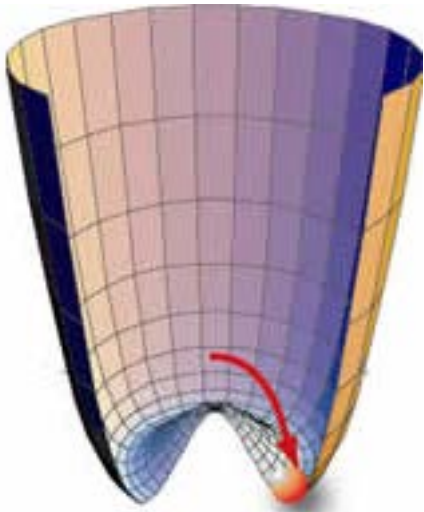
→ 不確定性関係：角度は完全に不定

→ 原子核と一緒にグルグル回っている座標系（物体固定系）  
で見ると原子核は変形して見える

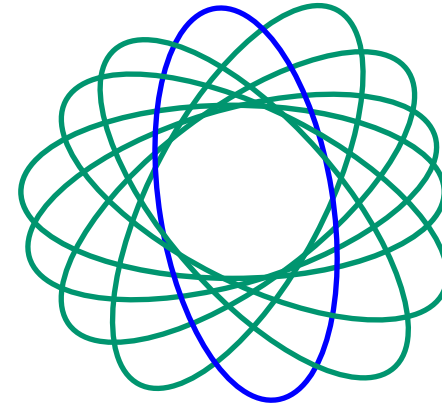
「原子核は intrinsic に変形している」

➤ 対称性が自発的に破れているということは具体的にはどういうこと?

✓ 対称性の自発的破れ



ハミルトニアンは対称だが  
真空が対称性を破る

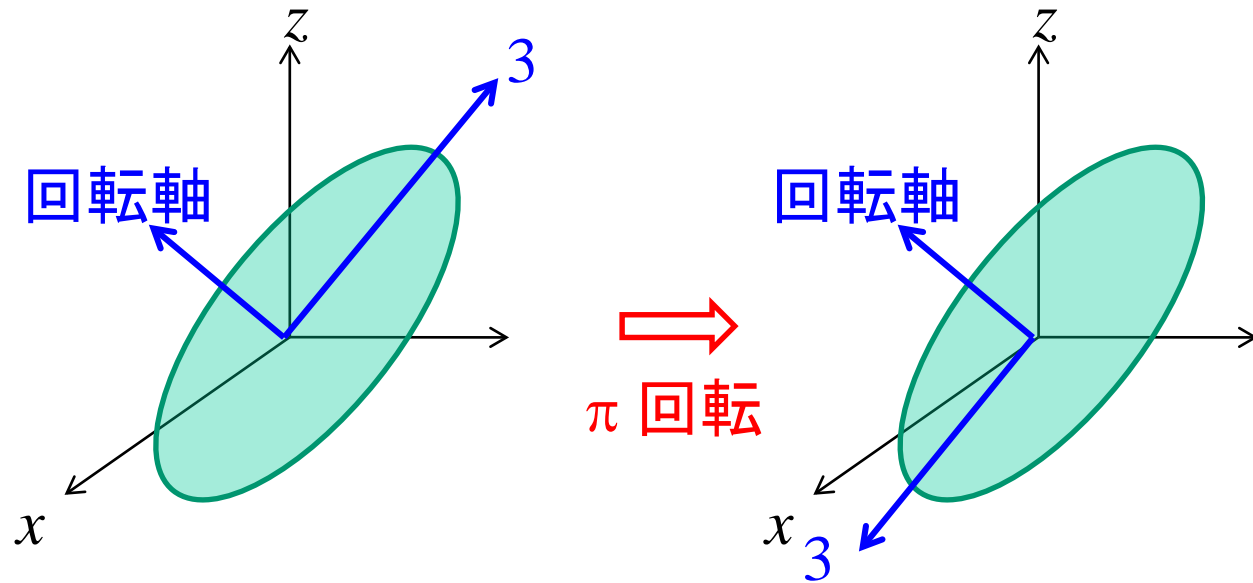


「真空」(基底状態)として  
軸の方向をどれかに選ぶ



原子核が変形して見える  
(回転対称性が自発的に  
破れている)

➤ 回転バンドに偶数スピンしか出ないところをもう一度



✓ 変形した原子核の波動関数 (K=0):

$$\Psi(x_1, x_2, \dots, x_A) = \underbrace{\phi_{\text{int}}}_{\text{内部状態}} \cdot \underbrace{Y_{IM}(\hat{r})}_{\text{回転状態}}$$

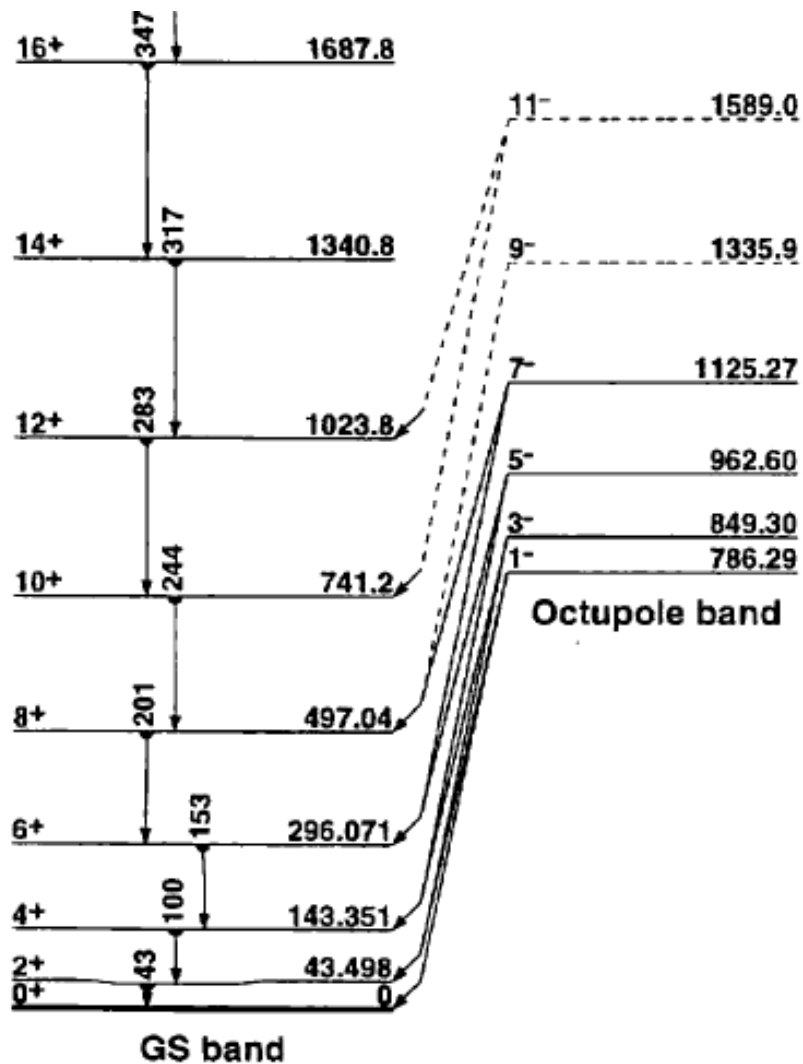
パリティ変換をすると

$$Y_{IM}(\hat{r}) \rightarrow Y_{IM}(-\hat{r}) = (-)^I Y_{IM}(\hat{r})$$

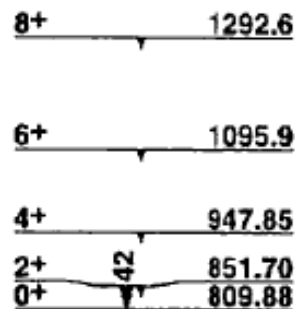
➤ 偶数スピンしか出ないのは  $K=0$  だけ?

✓ その通りです!

## $^{234}\text{U}$ のスペクトル

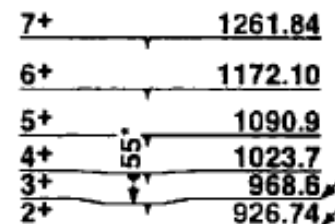


$K=0$



β バンド  
(β振動  
+ 回転)

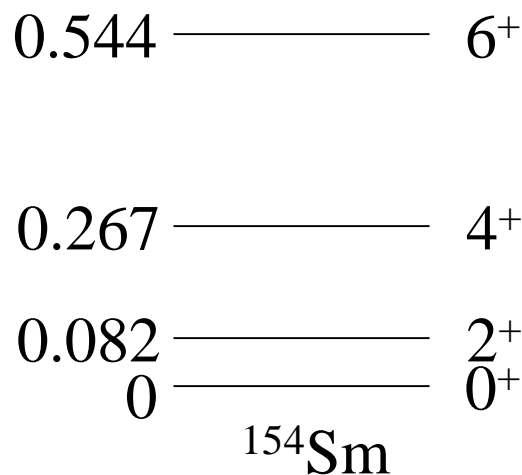
$K=0$



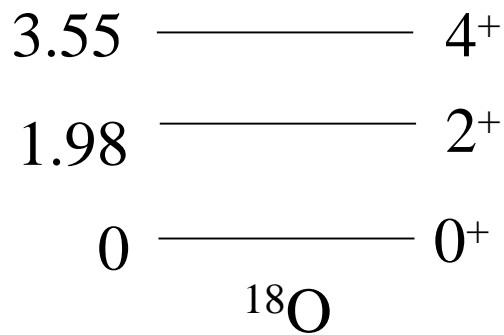
γ バンド  
(γ振動  
+ 回転)

$K=2$

- スペクトルの準位の角運動量の測定からのみ原子核が変形しているかどうか判別できるか？



✓ これは難しいです。



例えば、球形とされる  $^{18}\text{O}$  も  
低励起状態は偶数パリティのみ

➡ 角運動量と励起エネルギーの  
関係が重要

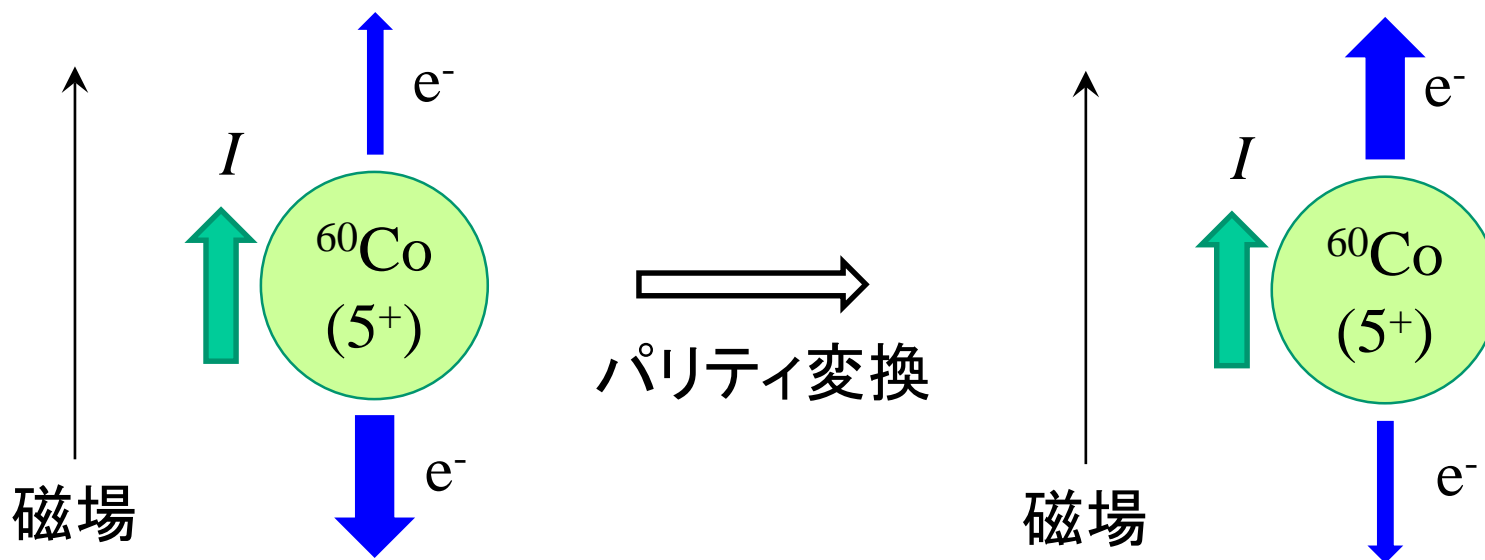
$$E_I \propto I(I + 1)$$

➤ 実験でパリティ変換はどうやってやるのですか？

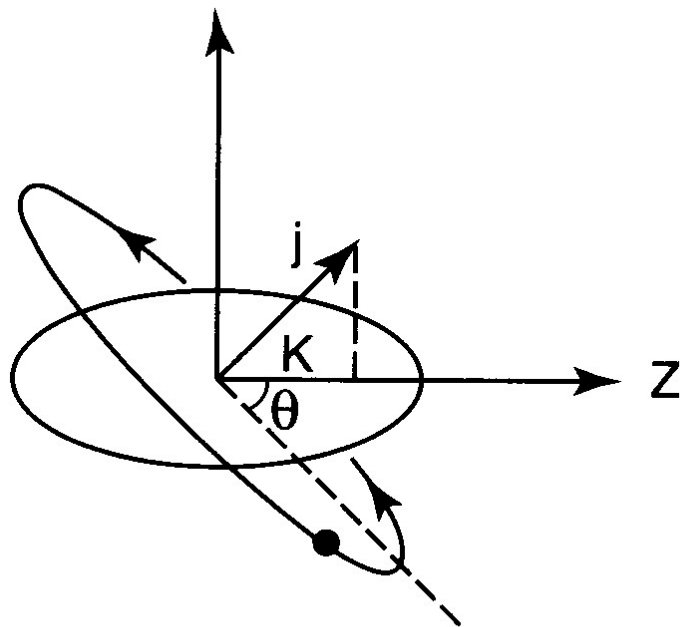
✓ いい質問です。

実験でパリティを直接変換することは(多分)できない

ベータ崩壊では頭の中でパリティ変換をして  
パリティの非保存を発見(来週もう少し詳しく)



➤ 引力を多く受けるとポテンシャルが下がるという意味は何？



$l_z$  が小さい軌道ほど引力をよけいに感じて  $l_z$  の縮退がとける

$$\sin \theta \sim K / j$$

✓ 下がるのは軌道のエネルギー。ポテンシャルではありません。



- ポテンシャルが変形すると  $l_z$  の縮退がとけるのを具体的に説明してほしい
- 3次元調和振動子の図の見方をもう一度説明して欲しい

✓ 具体的な例だと、調和振動子

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_z^2 z^2 + \frac{1}{2}m\omega_{\perp}^2 (x^2 + y^2)$$

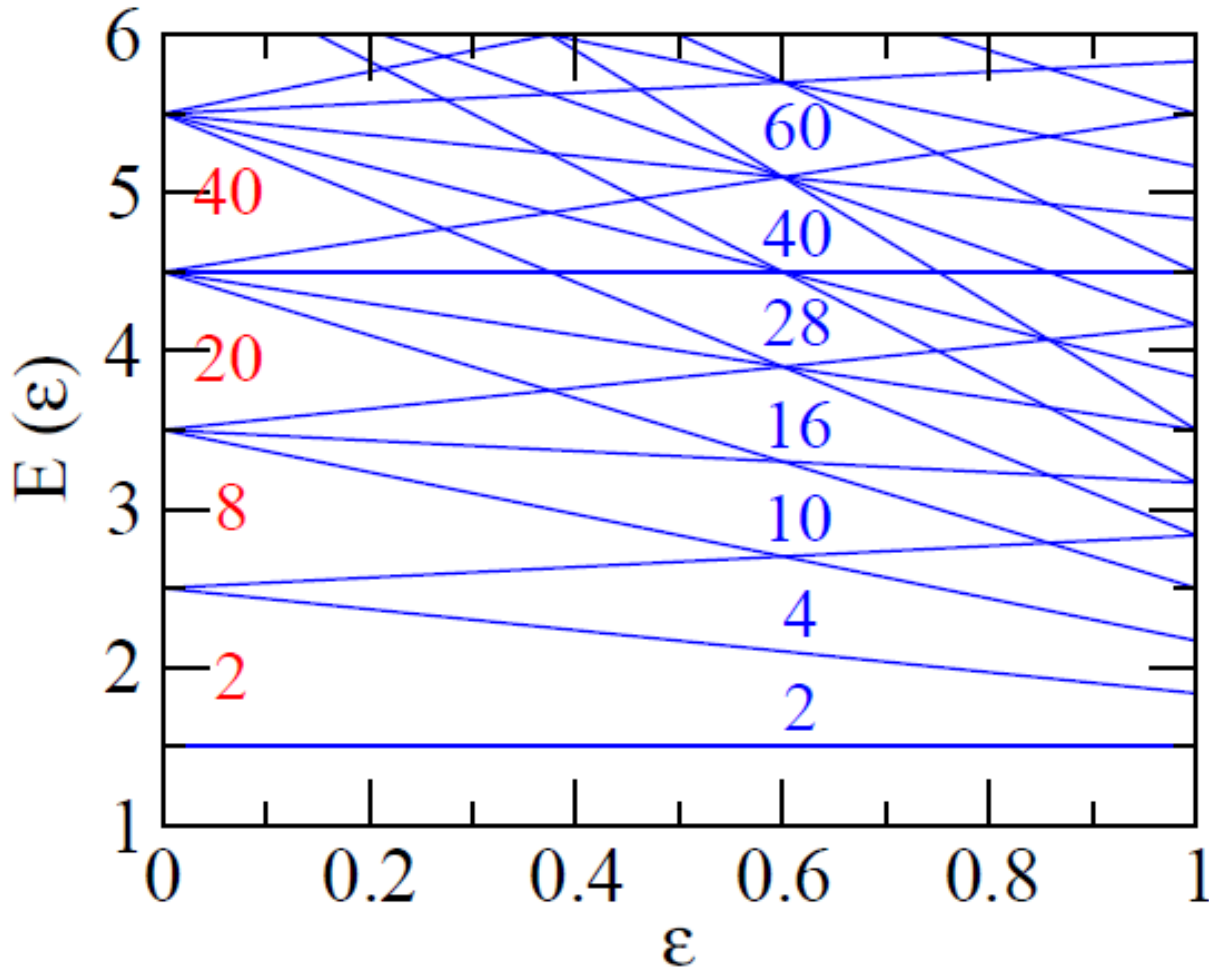
$$E = (n_z + \frac{1}{2})\hbar\omega_z + (n_x + n_y + 1)\hbar\omega_{\perp}$$

$$\omega_{\perp} = \omega_0(1 + \frac{\epsilon}{3}), \quad \omega_z = \omega_0(1 - \frac{2}{3}\epsilon) \quad \text{を使うと、}$$

$$E_{n_x n_y n_z} = (N + \frac{3}{2})\hbar\omega_0 + \underbrace{\frac{\epsilon}{3}(n_x + n_y - 2n_z)\hbar\omega_0}_{\text{ε に比例する項}}$$

ε に比例する項

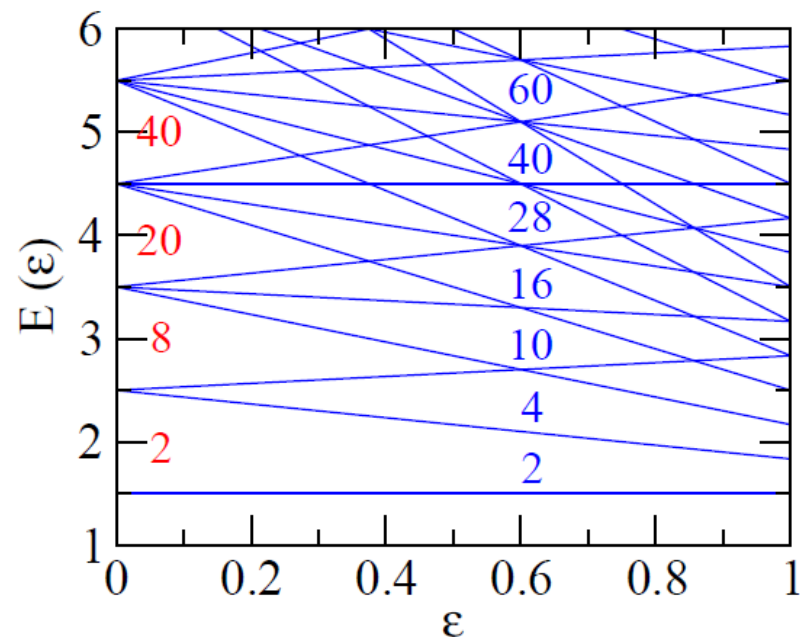
$$E_{n_x n_y n_z} = \left(N + \frac{3}{2}\right) \hbar \omega_0 + \frac{\epsilon}{3} (n_x + n_y - 2n_z) \hbar \omega_0$$



球形だと  $E_{nl} = \left(2n + l + \frac{3}{2}\right) \hbar \omega$

➤ この3次元調和振動子模型はどのくらい現実的なのか?

- ✓ 定性的にはOK、  
ただし定量的には補正が必要
- スピン・軌道力
- ポテンシャルのふくらみ  
(← 球形だと  $l$  による縮退がとける)



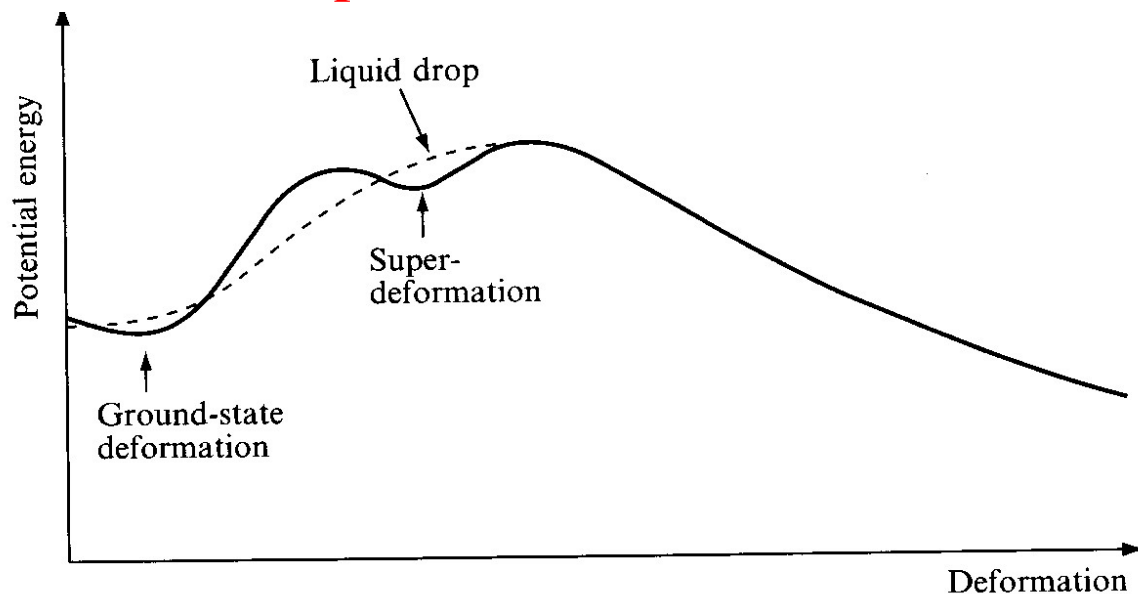
➤  $\omega$  の条件はどこから?

$$\omega_{\perp} = \omega_0 \left(1 + \frac{\epsilon}{3}\right), \quad \omega_z = \omega_0 \left(1 - \frac{2}{3}\epsilon\right)$$

✓ いい目のつけどころです

これは体積保存から:  $\omega_x \omega_y \omega_z = \text{一定}$  となるように

➤ g.s. deformation と super-deformation は何?

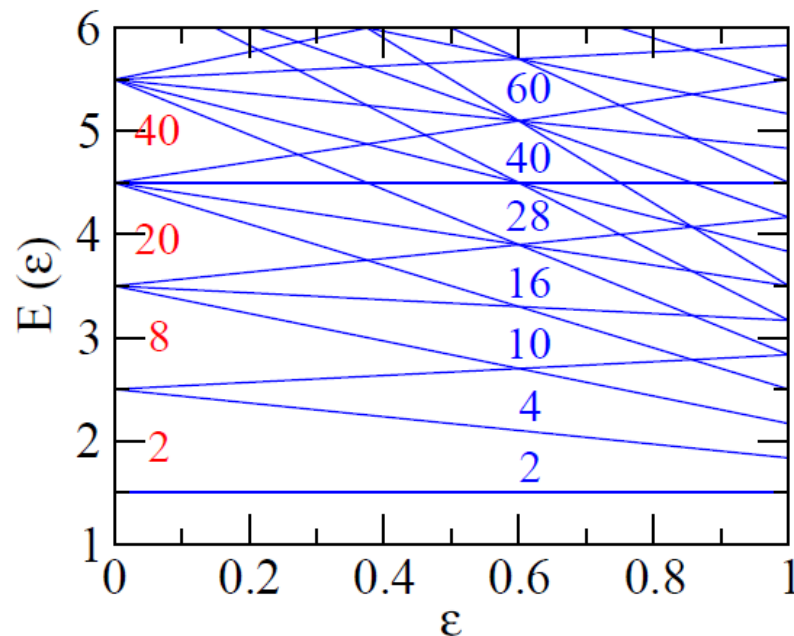


✓ super-deformation = 超変形

調和振動子だと  $\varepsilon = 0.6$   
 (長軸と短軸の長さが 2:1)  
 のところに新たな殻構造

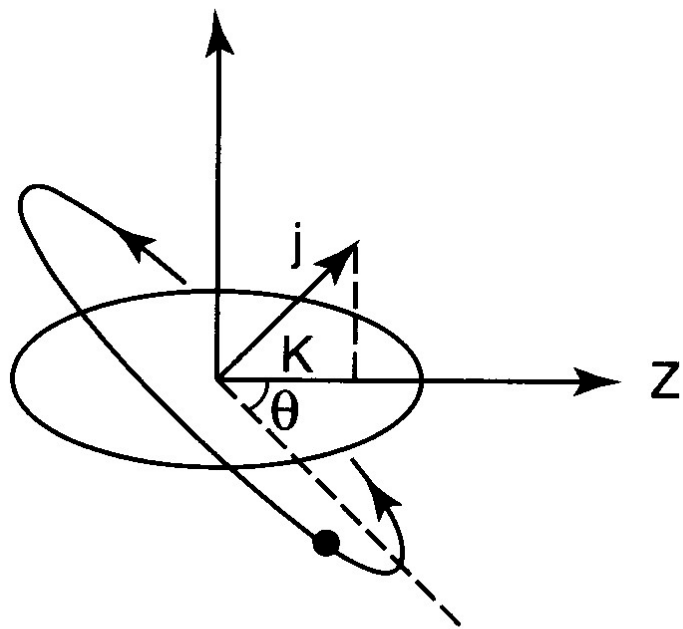


ここで変形状態が安定になる?  
 (超変形状態)



➤ プロレート変形とオブレート変形では  $l_z$  の縮退のとけ方は変わりますか？

✓ いい質問です！



$$\sin \theta \sim K / j$$

$l_z$  が小さい軌道ほど引力をよけいに感じてエネルギーが下がる

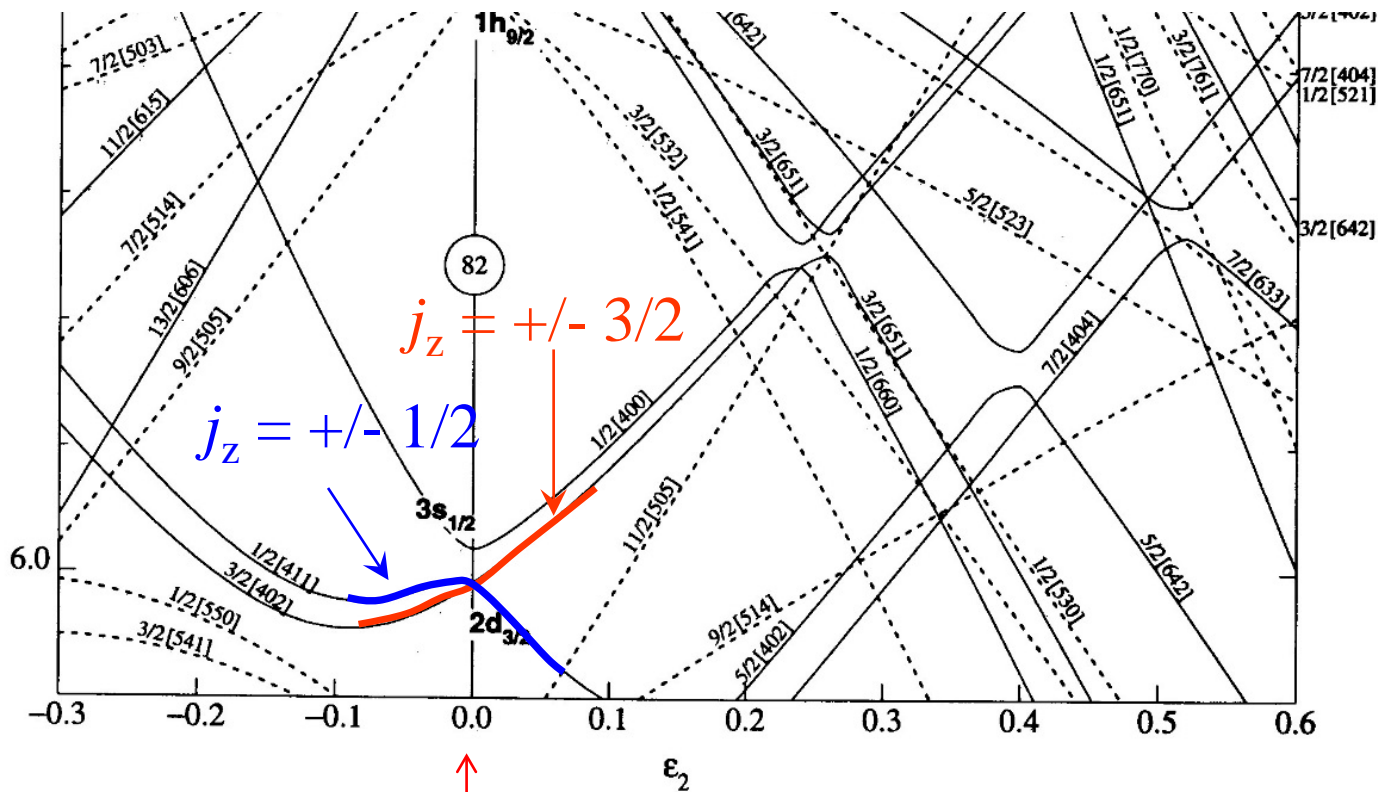


オブレート変形だとこれが逆になる：

$l_z$  が小さい軌道ほどエネルギーが上がる

➤ ニルソン図の見方がよくわからない

適当な変形ポテンシャルのエネルギー固有値を変形度の関数としてプロットしたもの



オブレート  
変形



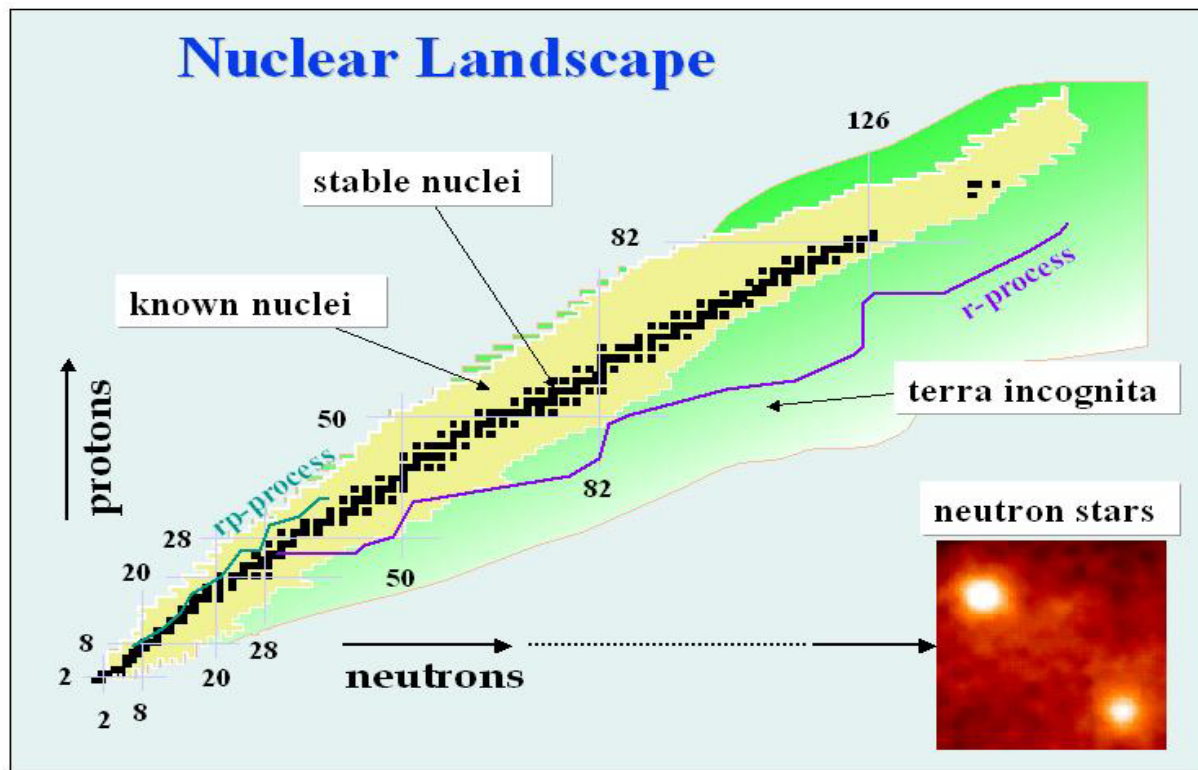
球形



プロレート変形



# 原子核の安定性



自然界に存在する(ほぼ)安定な原子核:287種類

存在が予想されている原子核:約7,000 ~ 10,000種類

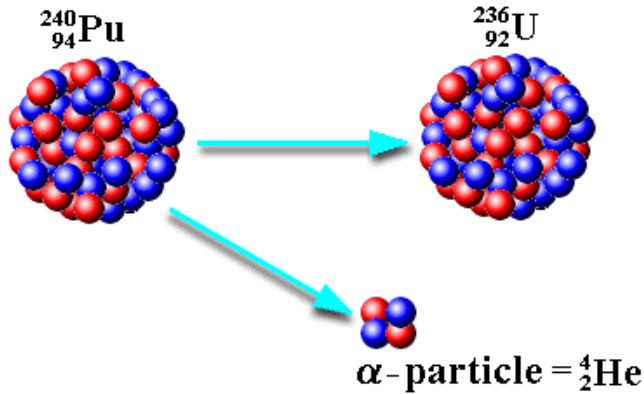
→ ほとんどの原子核が不安定

どのように壊れるか、どのくらいの時間(寿命)で壊れるか



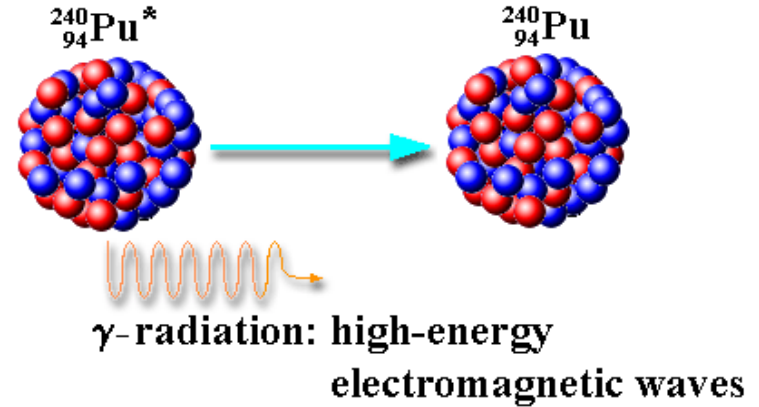
# 原子核の主な崩壊様式

## α崩壊 (陽子が多い原子核)



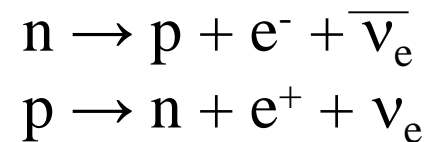
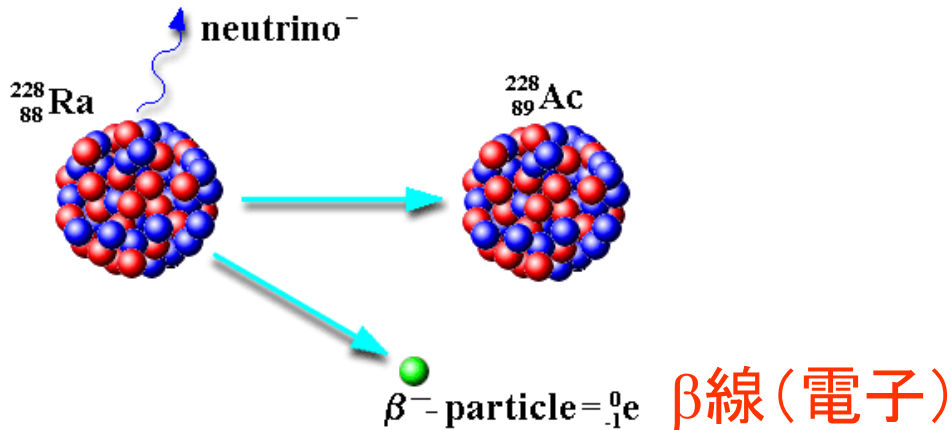
α線 ( ${}^4\text{He}$  原子核)

## γ崩壊 (原子核の励起状態)

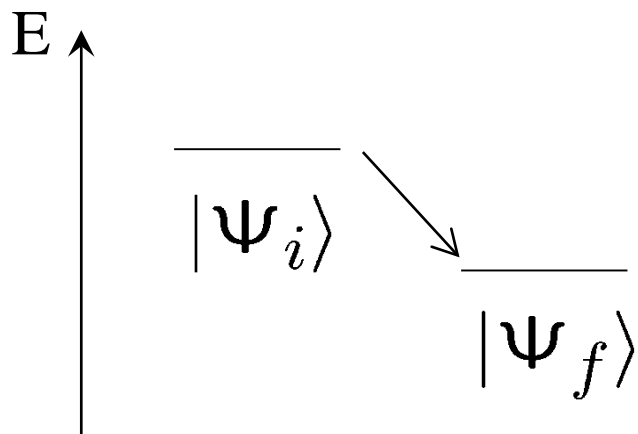


γ線 (高エネルギー電磁波)

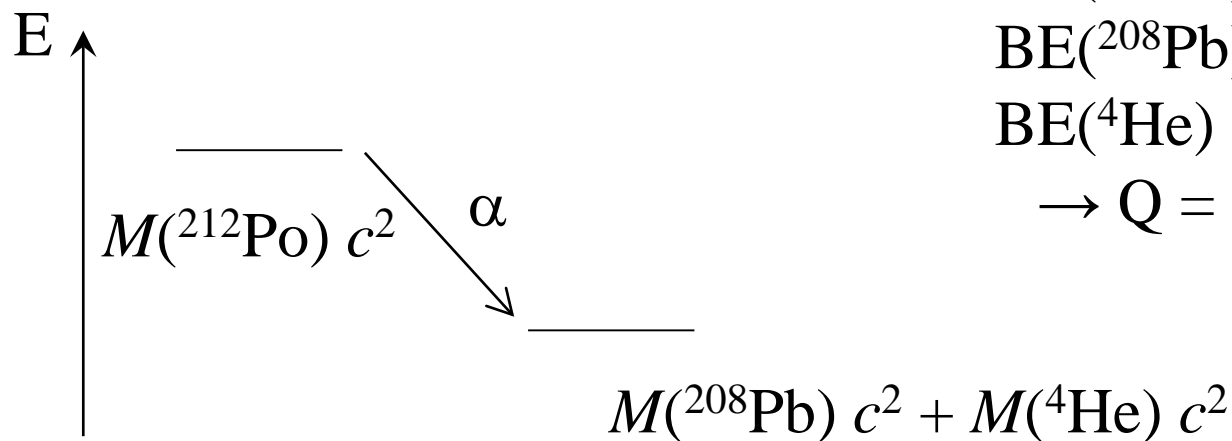
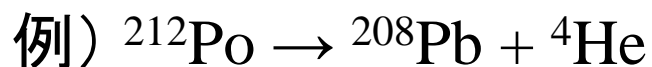
## β崩壊 (中性子が多い原子核)



# 自発的な崩壊



$E_i > E_f$  であれば崩壊は自発的に起こる

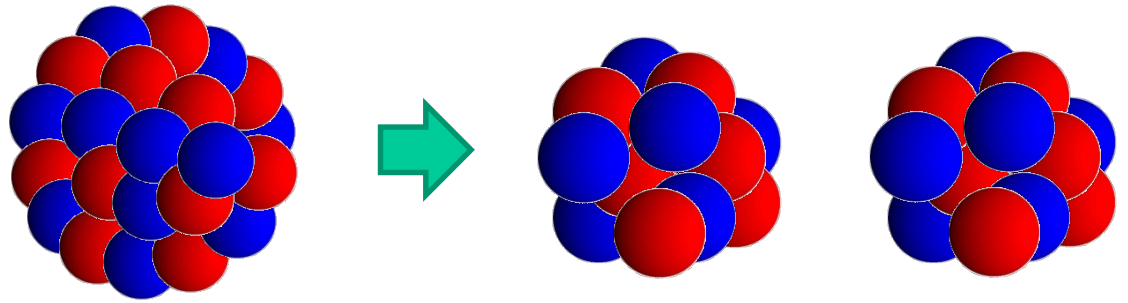


$$\begin{aligned} \text{BE}(^{212}\text{Po}) &= 1655.7 \text{ MeV} \\ \text{BE}(^{208}\text{Pb}) &= 1636.4 \text{ MeV} \\ \text{BE}(^4\text{He}) &= 28.296 \text{ MeV} \\ &\rightarrow Q = 9.00 \text{ MeV} \end{aligned}$$

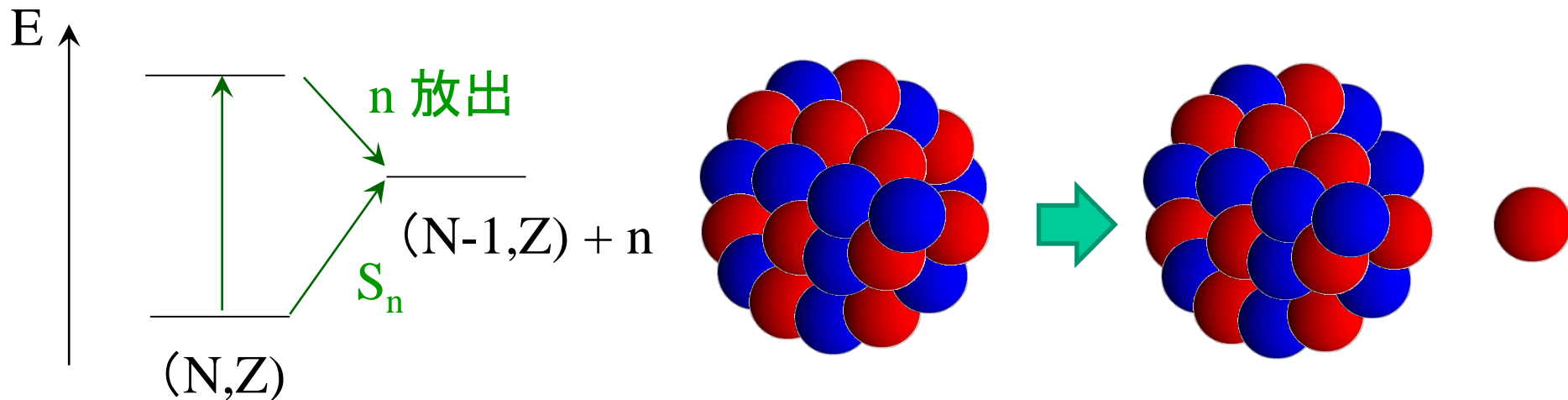
# 原子核の主な崩壊様式

- ✓  $\alpha$ 崩壊 (陽子が多い原子核)
- ✓  $\beta$ 崩壊 (中性子が多い原子核)
- ✓  $\gamma$ 崩壊 (原子核の励起状態)

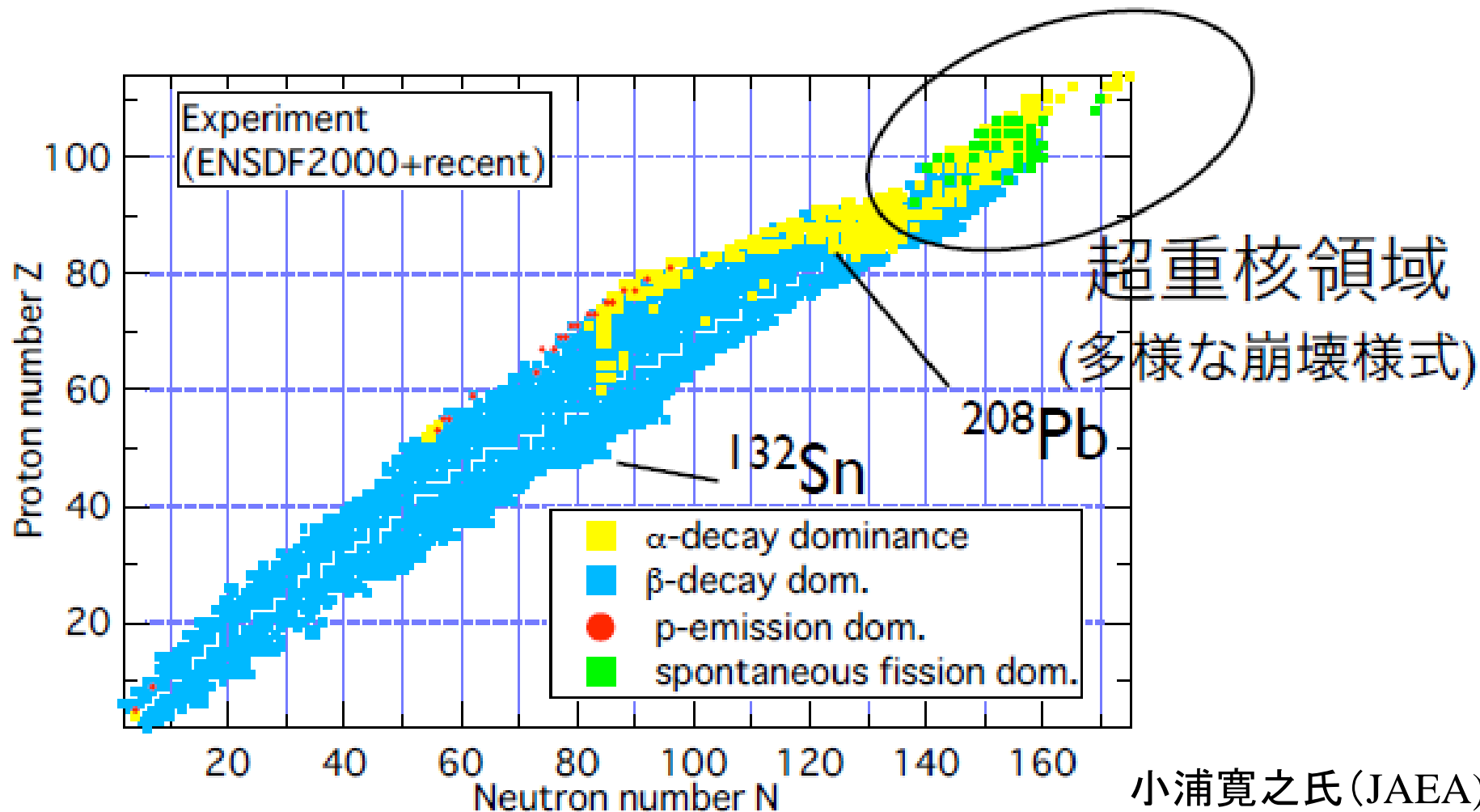
- ✓ 核分裂 (重い原子核)



- ✓ 核子放出 (高い励起状態、ドリップ線の外の非束縛な原子核)



# 基底状態からの崩壊様式(実験データ)



小浦寛之氏 (JAEA)  
の slides より

- 多くの原子核がβ崩壊(水色)
- 重い原子核ではα崩壊(黄色)や核分裂(緑色)

## 崩壊に関する相互作用

$\alpha$ 崩壊(陽子が多い原子核)	$\longleftrightarrow$	強い相互作用
$\beta$ 崩壊(中性子が多い原子核)	$\longleftrightarrow$	弱い相互作用
$\gamma$ 崩壊(原子核の励起状態)	$\longleftrightarrow$	電磁相互作用
核分裂(重い原子核)	$\longleftrightarrow$	強い相互作用
中性子放出	$\longleftrightarrow$	強い相互作用

原子核は自然界の相互作用を知るためのよい実験場になっている

## 崩壊に関する相互作用

$\alpha$ 崩壊(陽子が多い原子核)	$\longleftrightarrow$	強い相互作用
$\beta$ 崩壊(中性子が多い原子核)	$\longleftrightarrow$	弱い相互作用
$\gamma$ 崩壊(原子核の励起状態)	$\longleftrightarrow$	電磁相互作用
核分裂(重い原子核)	$\longleftrightarrow$	強い相互作用
中性子放出	$\longleftrightarrow$	強い相互作用

一般に、 $\tau_W \gg \tau_\gamma \gg \tau_S$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_W : \text{弱い相互作用による崩壊の寿命} \\ \tau_\gamma : \text{電磁相互作用による崩壊の寿命} \\ \tau_S : \text{強い相互作用による崩壊の寿命} \end{array} \right.$$

結合定数の違い(状態間の結合の強さ)による

→ ただし、 $\alpha$ 崩壊は例外(量子トンネル現象が関係)

## 崩壊に関する相互作用

一般に、 $\tau_W \gg \tau_\gamma \gg \tau_S$

$\left\{ \begin{array}{l} \tau_W : \text{弱い相互作用による崩壊の寿命} \\ \tau_\gamma : \text{電磁相互作用による崩壊の寿命} \\ \tau_S : \text{強い相互作用による崩壊の寿命} \end{array} \right.$

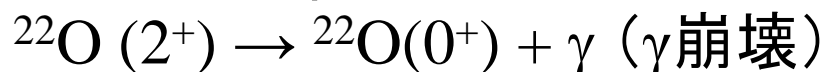
結合定数の違い(状態間の結合の強さ)による

→ ただし、 $\alpha$ 崩壊は例外(量子トンネル現象が関係)

具体的な例:



$$T_{1/2} = 0.065 \text{ 秒}$$



$$T_{1/2} = 1.94 \times 10^{-12} \text{ 秒}$$



$$T_{1/2} = 2.8 \times 10^{-21} \text{ 秒}$$

cf.  ${}^{232}\text{Th}$  の $\alpha$ 崩壊の半減期:  $T_{1/2} = 1.4 \times 10^{10} \text{ 年} = 4.4 \times 10^{17} \text{ 秒}$

cf. 1 MeV の核子が半径 5 fm の原子核を横切るために必要な  
時間:  $t \sim 10^{-21} \text{ 秒}$

# 時間に依存する摂動論と崩壊に対する寿命

## 時間に依存する摂動論

$$H = H_0 + \underbrace{V(t)}_{\text{外場}}$$

$$V(t) = \hat{F} e^{\mp i\omega t} \quad \text{のとき、}$$

外場  $V(t)$  による状態  $n \rightarrow k$  への遷移確率:

$$P_{n \rightarrow k} \sim \frac{2\pi}{\hbar} t |\langle \phi_k | \hat{F} | \phi_n \rangle|^2 \delta(\epsilon_k - \epsilon_n \mp \hbar\omega)$$

(フェルミの黄金則)

いくつかの状態が終状態のエネルギーに縮退しているとき

$$P_{n \rightarrow k} \sim \frac{2\pi}{\hbar} t |\langle \phi_k | \hat{F} | \phi_n \rangle|^2 \underbrace{\rho(\epsilon_k)}$$

終状態の状態数



# 時間に依存する摂動論と崩壊に対する寿命

## 時間に依存する摂動論

$$P_{n \rightarrow k} \sim \frac{2\pi}{\hbar} t |\langle \phi_k | \hat{F} | \phi_n \rangle|^2 \rho(\epsilon_k) \equiv \lambda_k t$$



時間  $t$  たったとき遷移(崩壊)が起きていない確率:

$$P_{\text{sur}}(t) \sim 1 - \sum_{k \neq n} \lambda_k t \sim e^{-\lambda t} \quad (\lambda \equiv \sum_{k \neq n} \lambda_k)$$

(note)

$$\lambda \propto |F|^2$$

$$\longrightarrow \lambda_S \gg \lambda_\gamma \gg \lambda_W$$

$$\longrightarrow \tau_S \ll \tau_\gamma \ll \tau_W \quad (\tau \equiv 1/\lambda)$$

## 出席の代わりに授業アンケート

学籍番号、名前、所属研究室(所属大講座)

- ・今日の授業でわかりずらかったこと  
(もう一度説明して欲しいこと)
- ・今日の授業の内容で、もう少し掘り下げてほしいこと
- ・授業の感想
- ・今日の授業で初めて知ったことや、前から知っていたけど今日の授業で整理できたこと(忘れていたこと)

などを書いて下さい。