➢ 相対論的量子力学を簡単に説明して欲しい（スピン軌道力）

ディラック方程式：

$$[c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\beta mc^2+V(r)]\psi(\boldsymbol{r})=E\psi(\boldsymbol{r})$$

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}0 & \boldsymbol{\sigma}\\ \boldsymbol{\sigma} & 0\end{pmatrix},\qquad \beta=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$\psi(\boldsymbol{r})=\begin{pmatrix}\psi_L(\boldsymbol{r})\\ \psi_S(\boldsymbol{r})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\psi_{L\uparrow}(\boldsymbol{r})\\ \psi_{L\downarrow}(\boldsymbol{r})\\ \psi_{S\uparrow}(\boldsymbol{r})\\ \psi_{S\downarrow}(\boldsymbol{r})\end{pmatrix}$$

スピンのアップ、ダウン

「反粒子」の成分

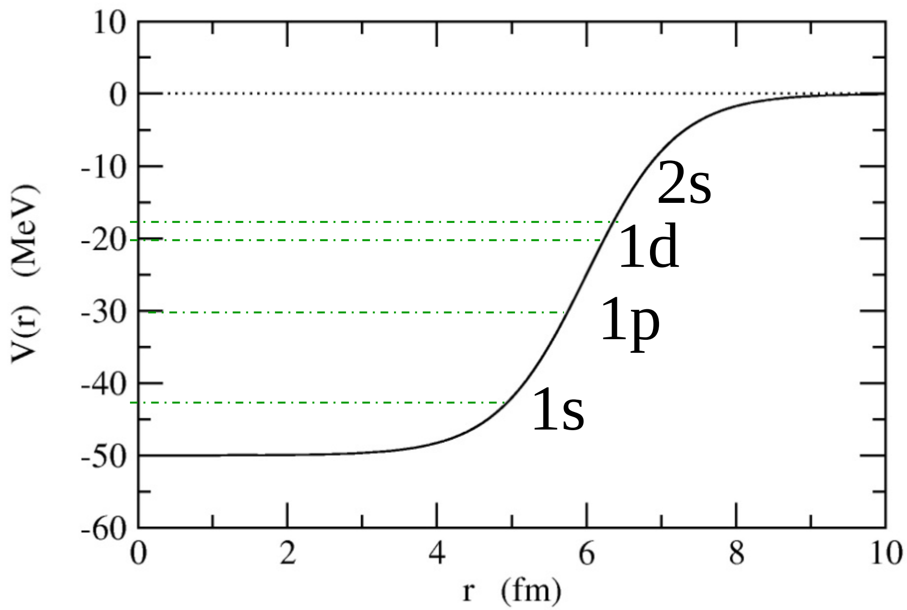
ψ_S を消去→

$$\left[-\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{2M(r)}\cdot\boldsymbol{\nabla}+(mc^2+V(r)-E)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{4M(r)c^2}\frac{1}{r}\frac{dV(r)}{dr}\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right]\psi_L=0$$

$$2M(r)=mc^2-V(r)+E$$

➢ 対相関が起こる理由をもう一度説明して欲しい

第一近似として、核子は平均場ポテンシャル中を独立に運動している（殻模型）



→ でも、もう少し精度を上げて考えると、お互い少しは相互作用している（残留相互作用）

→ 核力は短距離力なので、2核子が近い場所にいると相互作用を感じるチャンスが増える（その分、エネルギーが得をする）

→ そのようになるのは2核子が 0^+ のペアを組む時（対相関）

➢ 残留相互作用を引力と仮定していますが、何故ですか?

$$H=\sum_i T_i+\sum_{i<j} v_{ij} \rightarrow H=\sum_i (T_i+V_i)+\underbrace{\sum_{i<j} v_{ij}-\sum_i V_i}_{\text{平均からのずれ（残留相互作用）}}$$

✓ 当然の疑問です。

平均からの「ずれ」なので、プラスにもなるしマイナスにもなる。

短距離成分は引力的（核力が短距離引力なので）

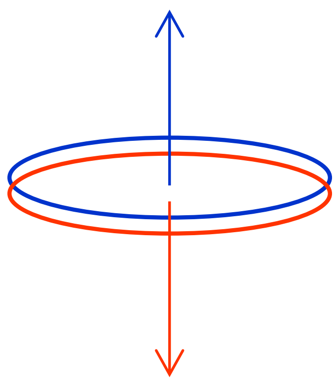
← 対相関で重要なのは短距離成分

➢ 陽子間の残留相互作用でクーロン力はどのように効くのか?

✓ クーロンは斥力的に効きます。

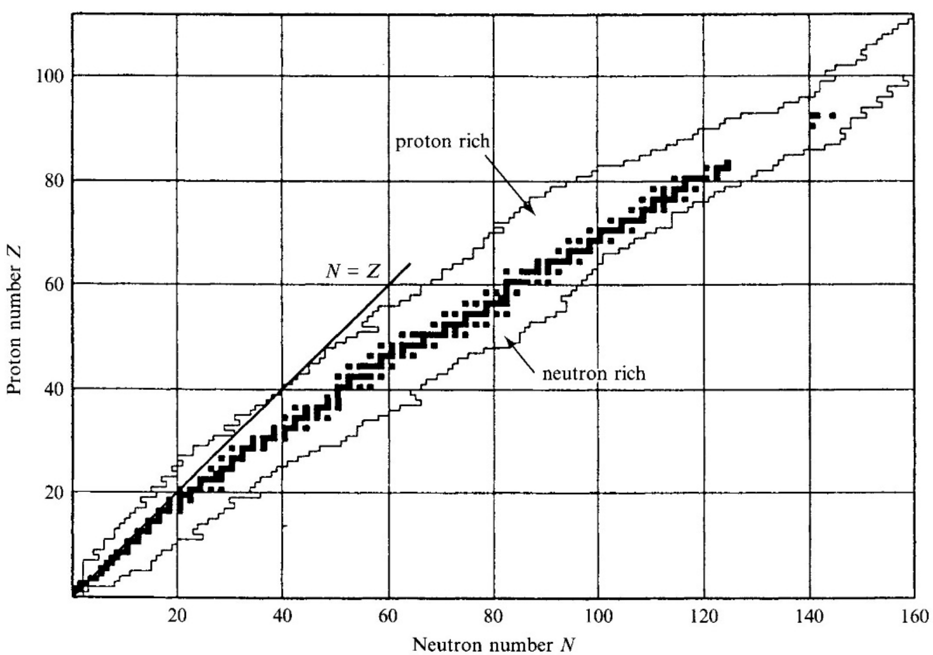
➢ pn間の対相関は考えなくていいのですか?

✓ 鋭い指摘です。



対相関 → 短距離相関

→2核子の波動関数の重なりが大きくないと働かない



安定核だとN > Zになるので最外殻の核子が違う軌道に入る

→ pn 間の対相関は重要ではない

ただし、N~Z 核では pn 対相関は重要

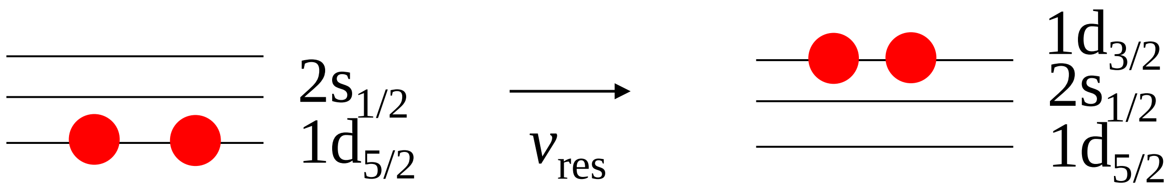
^{18}F=^{16}O+p+n や陽子過剰核など

➢ 波動関数に対する対相関の効果をもう一度説明して欲しい

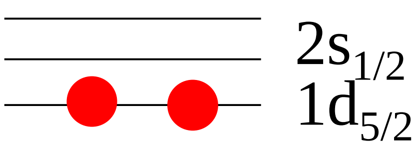
対相関相互作用の2つの効果：

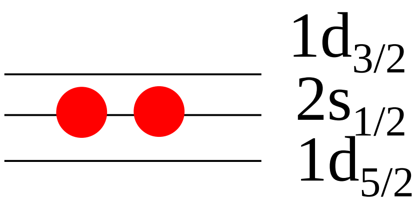
i) 2核子が同じ軌道に入って 0^+ のペアを組む

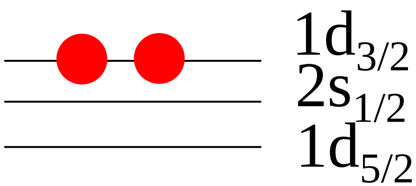
ii) 0^+ のペアを違う軌道に飛ばす



$$|\Psi_{g.s.}\rangle =$$



+


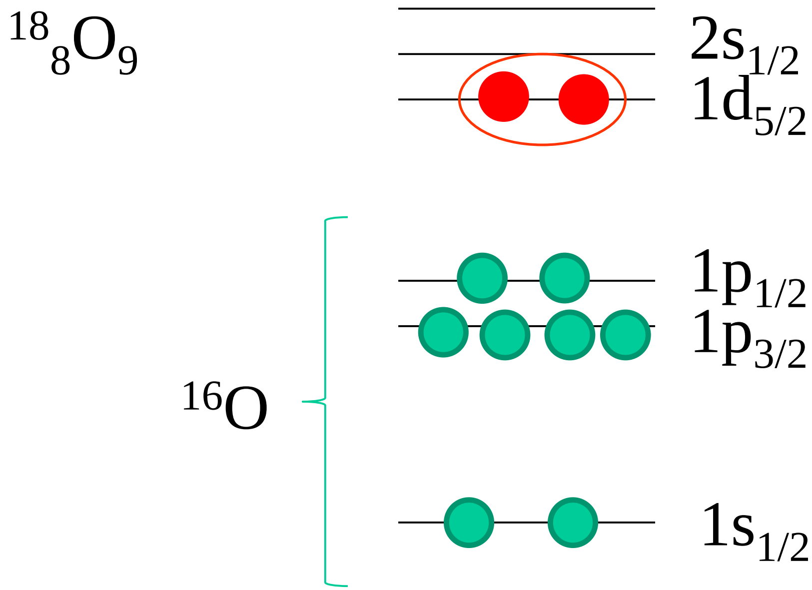
+


+....

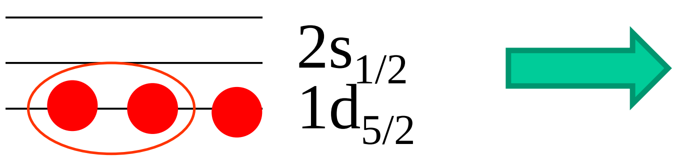
→ 各軌道は部分的にのみ占有されることになる

cf. 混ざり具合は BCS 理論を使って決めることができる

- 授業では閉殻＋2核子の場合だったけど、閉殻＋3核子だと?

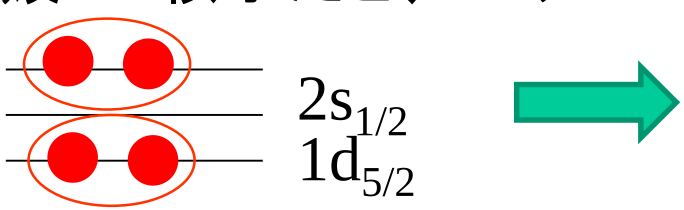


- ✓ 閉殻＋3核子だと、1ペア＋1核子



^{19}O の基底状態は $5/2^+$

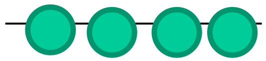
- ✓ 閉殻＋4核子だと、2ペア

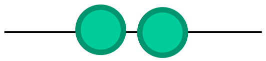


^{20}O の基底状態は 0^+
（2つのペアがどのように入るかはBCS理論で決められる）

- 閉殻では残留相互作用を考えなくてもよい?

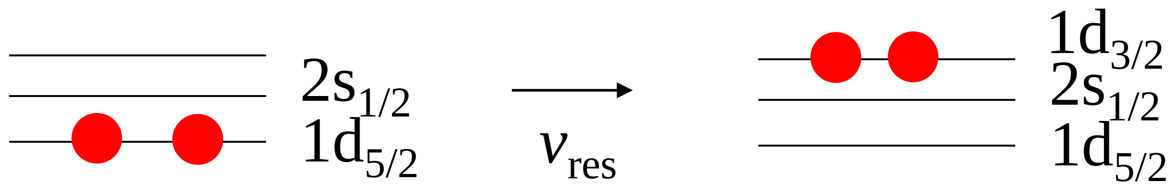
  - ✓ いい質問です。

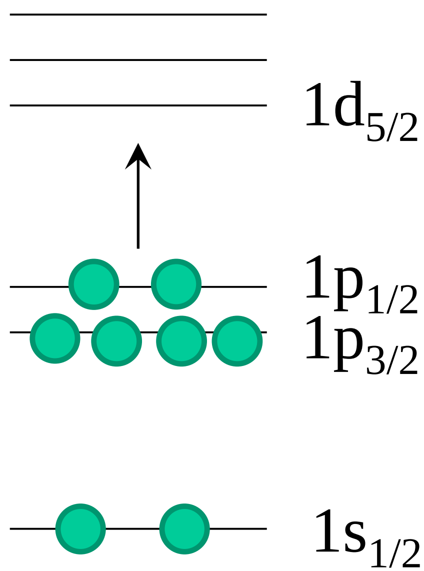
閉殻:  $1p_{3/2}$ ⇨ 核子の詰め方は1通り

開殻:  $1p_{3/2}$ ⇨ 核子の詰め方は複数通り
（左の例だと2通り）

⟶ このうち、対相関により
0^+ が選択

ii) 0^+ のペアを違う軌道に飛ばす



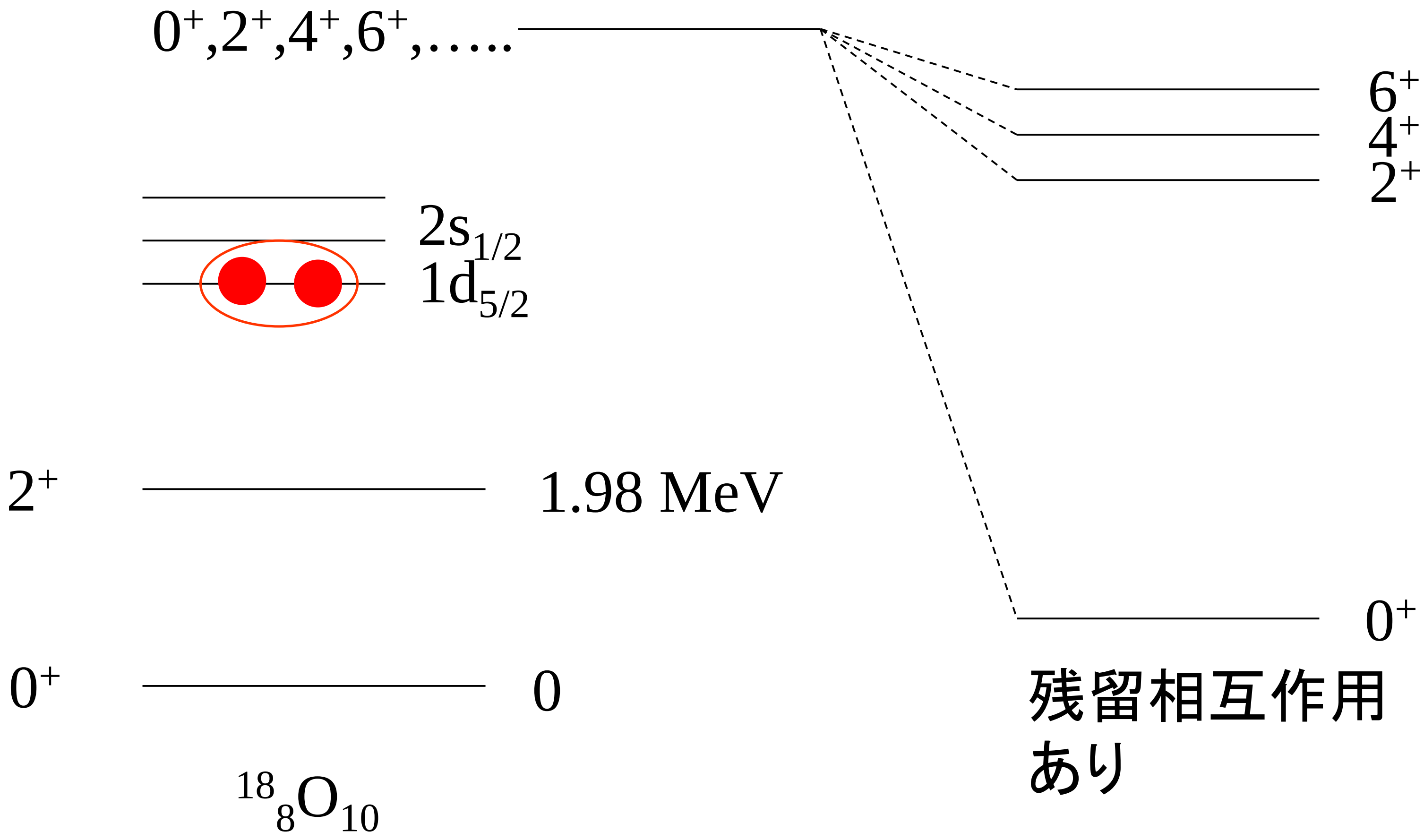


でも、ギャップが開いていると
なかなか飛ばせない

→閉殻では対相関を考えな
くてもよい

＊対相関は同じ軌道内で起こるので、閉殻＋1核子でも
閉殻中の核子とその上の核子の間で対は作らない

➢ ^{18}O の 4^+ 状態はどこにある?



✓^{14}O の 4^+ 状態は 3.55 MeV

多分 $[d_{5/2} \times d_{5/2}]^{(I=4)}$ という単純な構造ではない

$[d_{5/2} \times s_{1/2}]^{(I=4)}$ とか $[d_{5/2} \times d_{3/2}]^{(I=4)}$ という成分も混ざる

➢ なぜ質量公式で奇奇核のエネルギーを対相関で下げるのか（対相関がないのに）?

質量公式（偶奇性による質量差）

$$
\begin{aligned}
B_{\rm pair} &= \Delta && \text{(for even – even)} && \text{偶偶} \\
&= 0 && \text{(for even – odd)} && \text{偶奇 or 奇偶} \\
&= -\Delta && \text{(for odd – odd)} && \text{奇奇}
\end{aligned}
$$

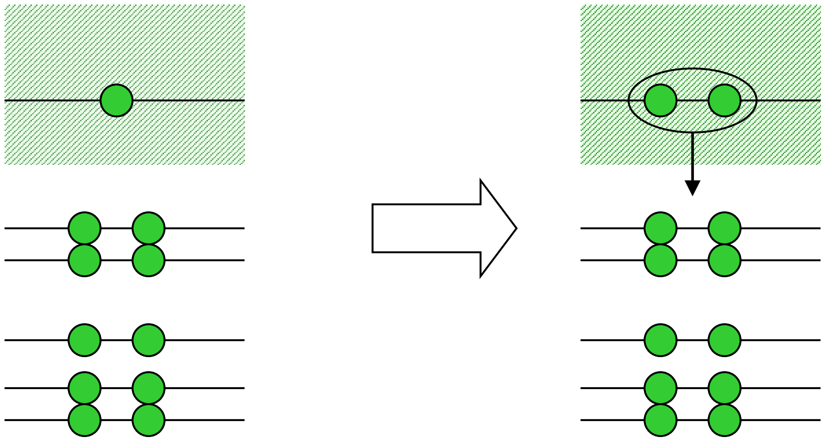
✓偶奇核をエネルギーの基準にとると

- 奇奇核は束縛エネルギーが小（エネルギーが大）
- 偶偶核は束縛エネルギーが大（エネルギーが小）

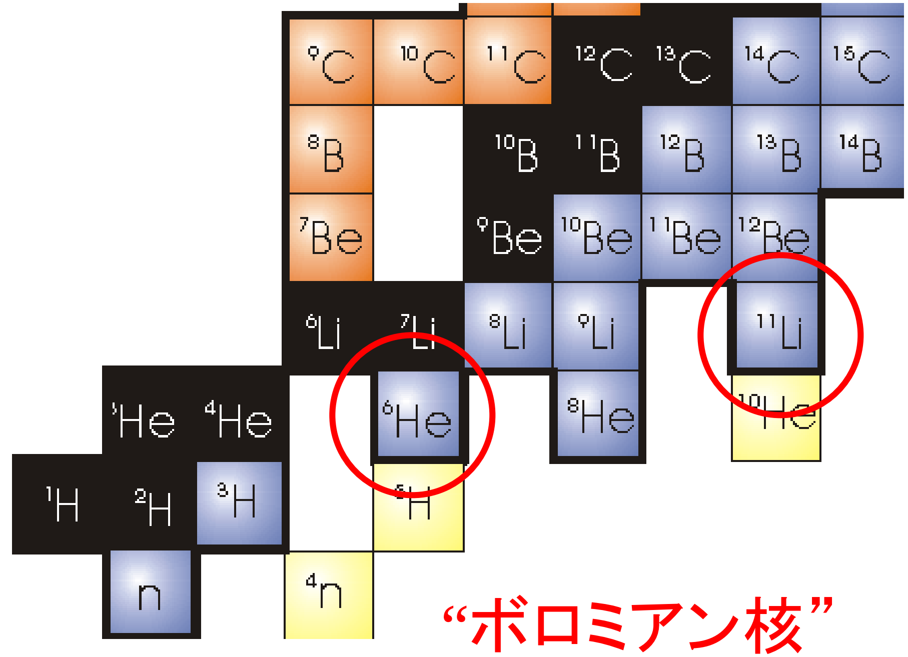
このようにするのは、$B_{\rm pair}$ の平均をゼロにするため

＊BCS理論では、奇核は偶核からの「励起」として扱われる（従って、奇核のエネルギーが上がる）

➢ 中性子が奇数でも存在するものがあるのは何故か?



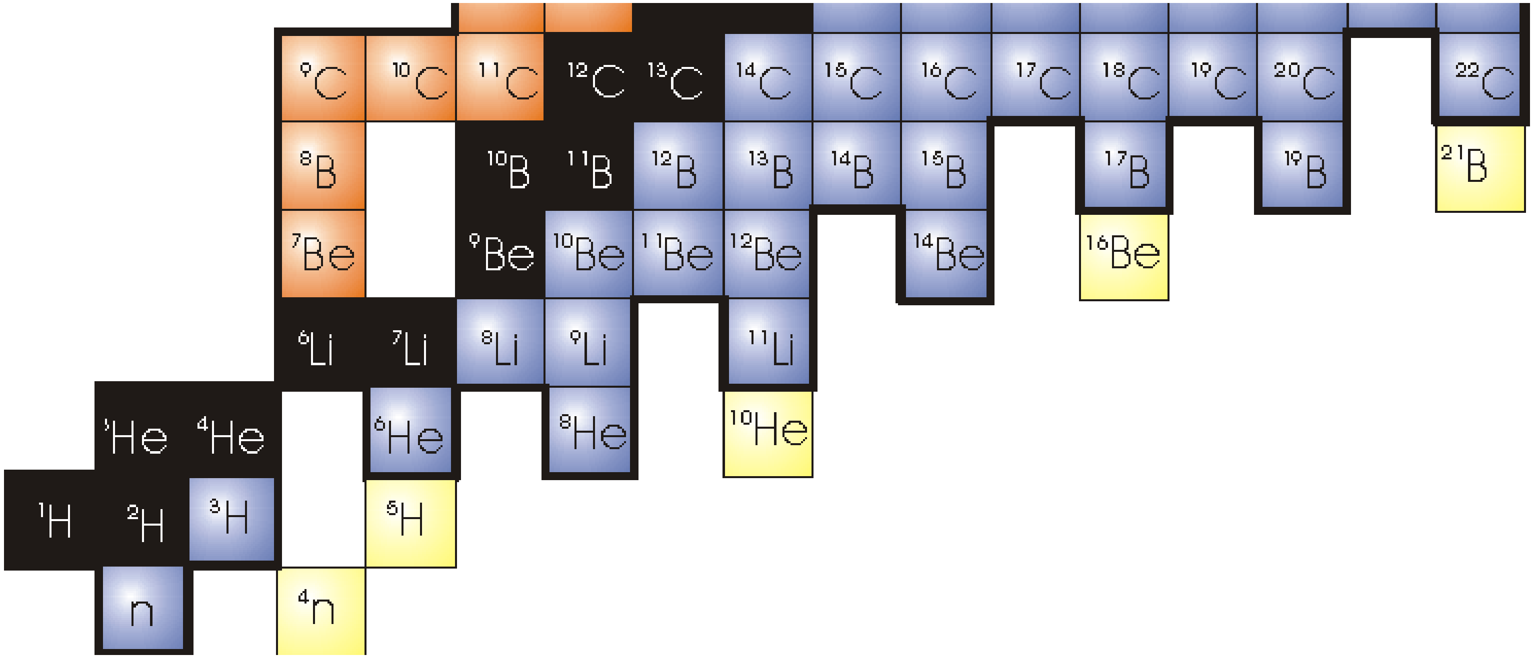
不安定　　　　　　安定



✓奇核が抜けるのは、最外殻の中性子の軌道が非束縛になってから

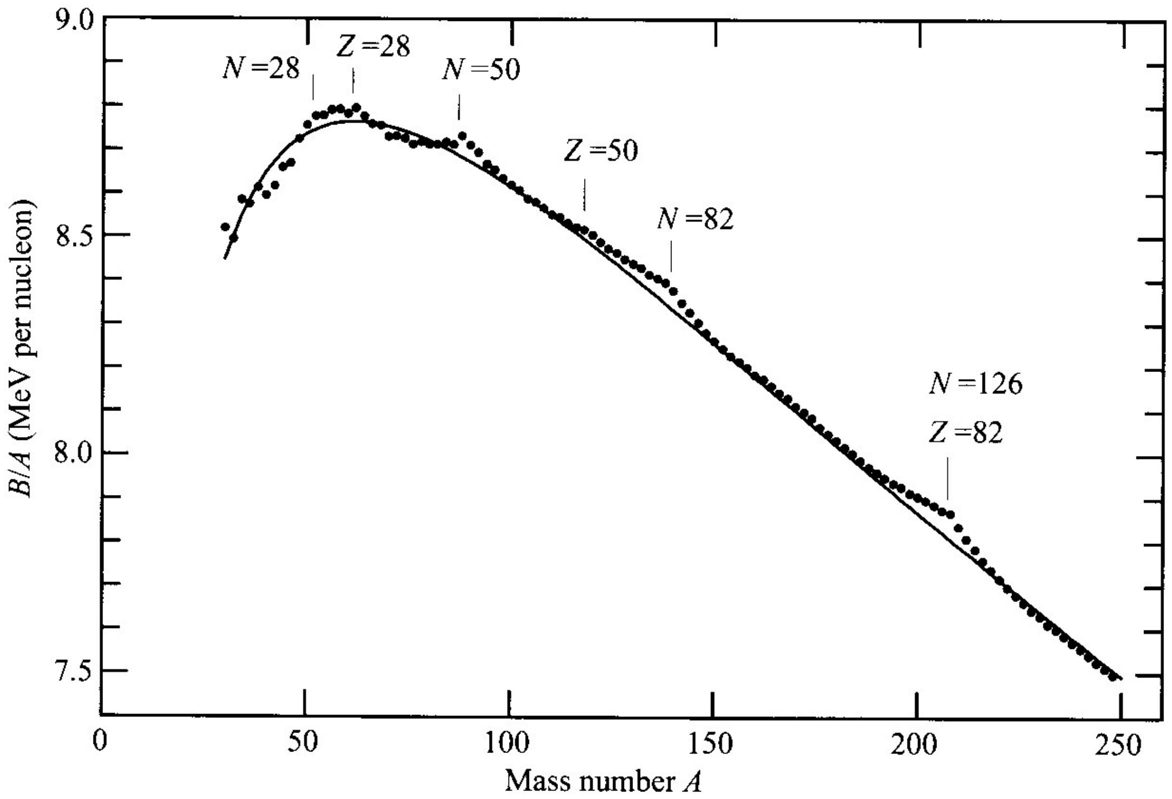
→ 中性子が過剰にならないと起こらない

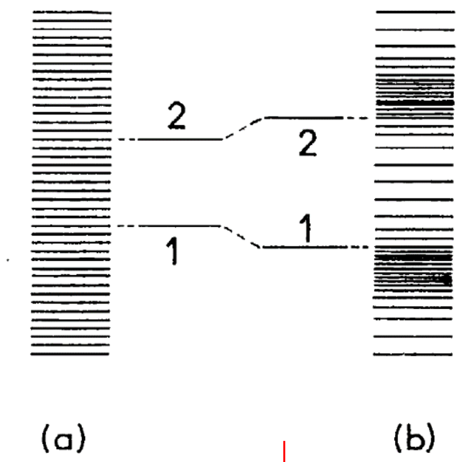
➢ 中性子が奇数でも存在するものがあるのは何故か?



Be や B や C でも中性子が過剰になってくると奇核が抜けてくる

殻効果

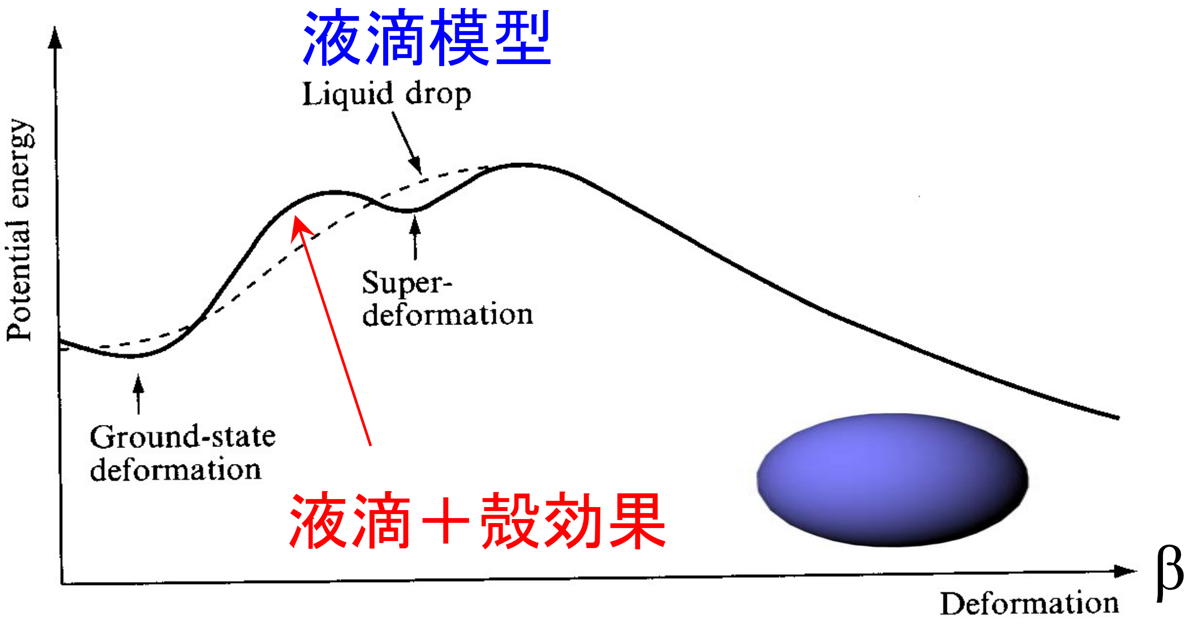


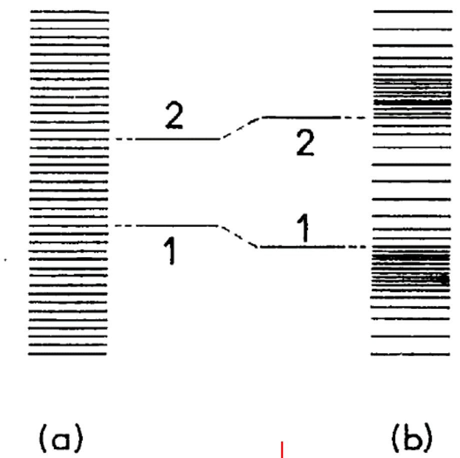


準位にギャップが開くと原子核が安定になる

$$E = E_{LDM} + E_{\text{shell}}$$

殻構造の帰結：原子核の変形



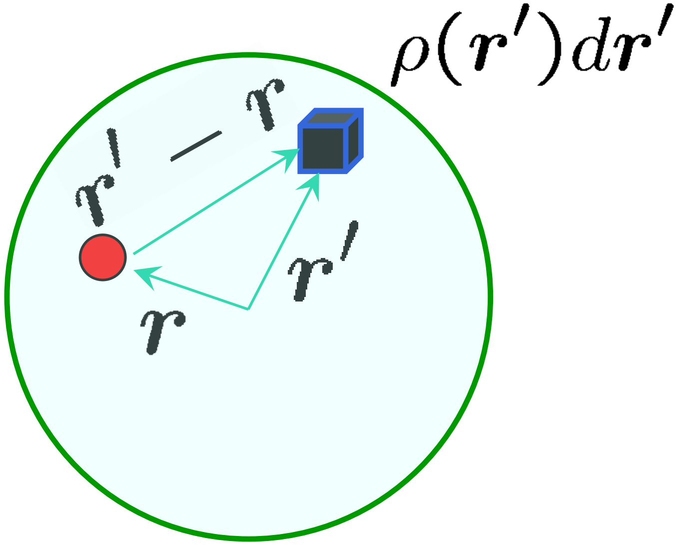


準位にギャップが開くと原子核が安定になる

$$E(\beta) = E_{LDM}(\beta) + E_{\mathrm{shell}}(\beta)$$

原子核が変形
→ 核子が感じるポテンシャルも変形
→ 変形度によって異なる量子力学的補正（殻効果）

核子の感じるポテンシャル：



$$V(\boldsymbol{r}) \sim \int v(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}'$$

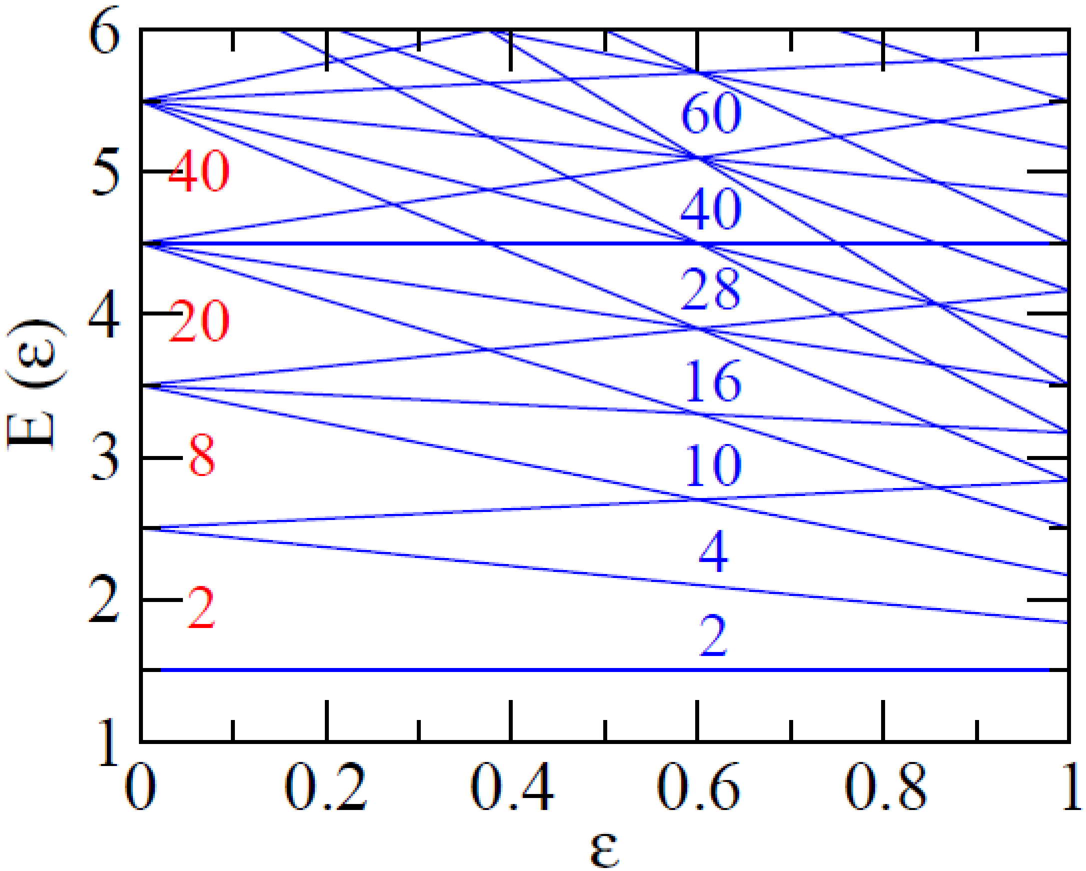
$$v(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = -g\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

$$\rightarrow V(r) = -g\rho(r)$$

例）3次元調和振動子

$$H = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_z^2 z^2 + \frac{1}{2}m\omega_\perp^2(x^2+y^2)$$

$$E = (n_z + \frac{1}{2})\hbar\omega_z + (n_x + n_y + 1)\hbar\omega_\perp$$



$$\omega_\perp = \omega_0(1+\frac{\epsilon}{3})$$

$$\omega_z = \omega_0(1-\frac{2}{3}\epsilon)$$

球形のときとは
異なる殻構造

⇓

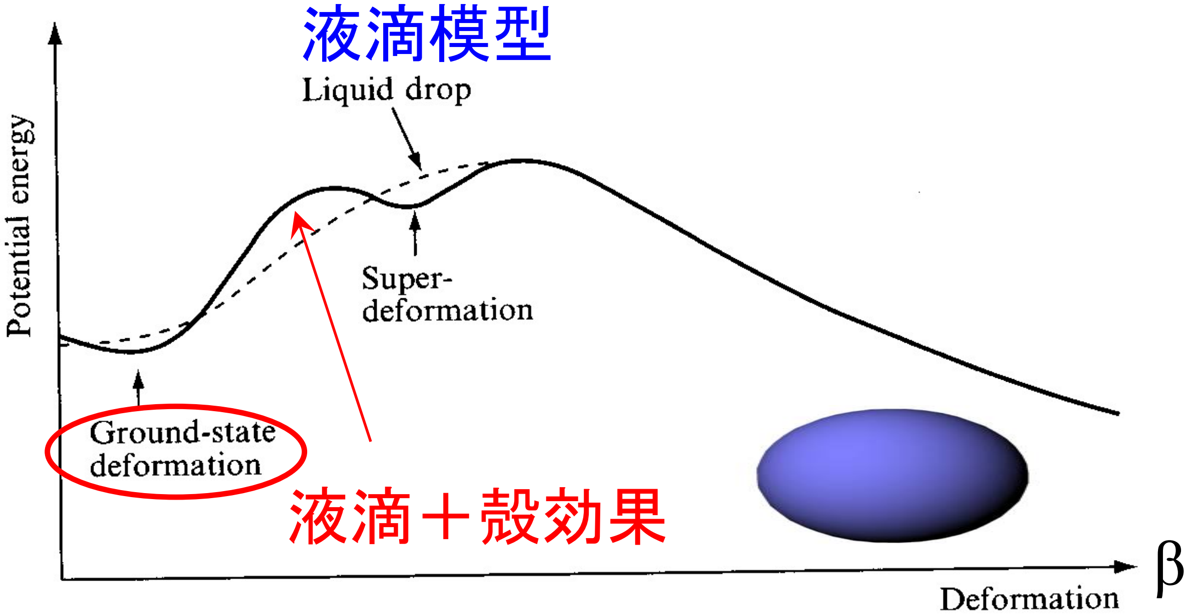
殻補正エネルギーは
変形に依存する

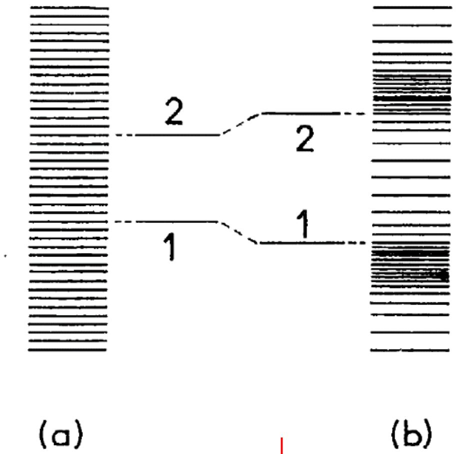
$$E(\epsilon) = E_{LDM}(\epsilon) + E_{\rm shell}(\epsilon)$$

⇓

最も安定なεを
変え得る
（原子核の変形）

殻構造の帰結：原子核の変形





準位にギャップが開くと原子核が安定になる

$$E(\beta) = E_{LDM}(\beta) + E_{\mathrm{shell}}(\beta)$$

液滴模型 ⟹ 必ず球形

殻効果 ⟹ 変形状態が基底状態になる場合あり

→ 実験的証拠はあるか?

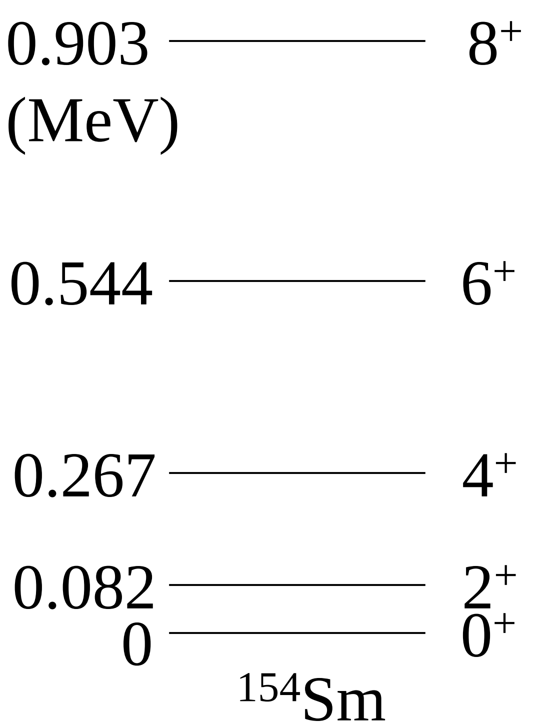
原子核の変形の証拠

cf. 剛体の回転エネルギー（古典力学）

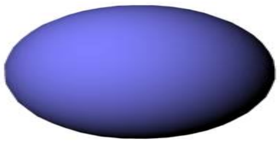
$$E = \frac{1}{2}\mathcal{J}\omega^2 = \frac{I^2}{2\mathcal{J}}$$

$$(I = \mathcal{J}\omega, \ \ \omega = \dot{\theta})$$

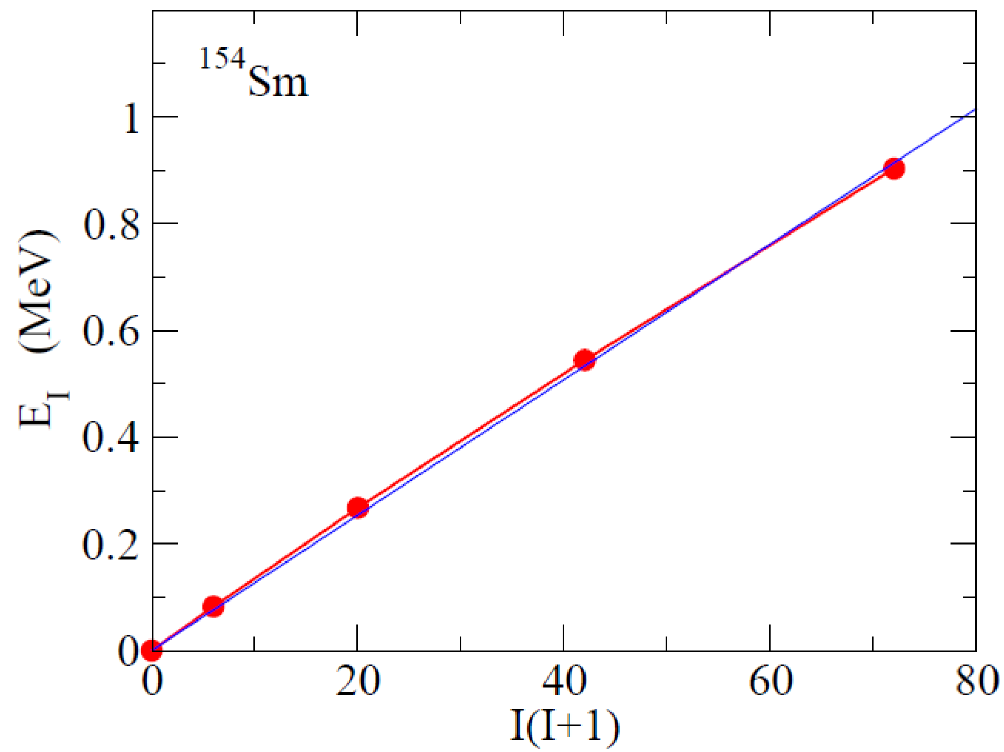
^{154}Sm の励起スペクトル



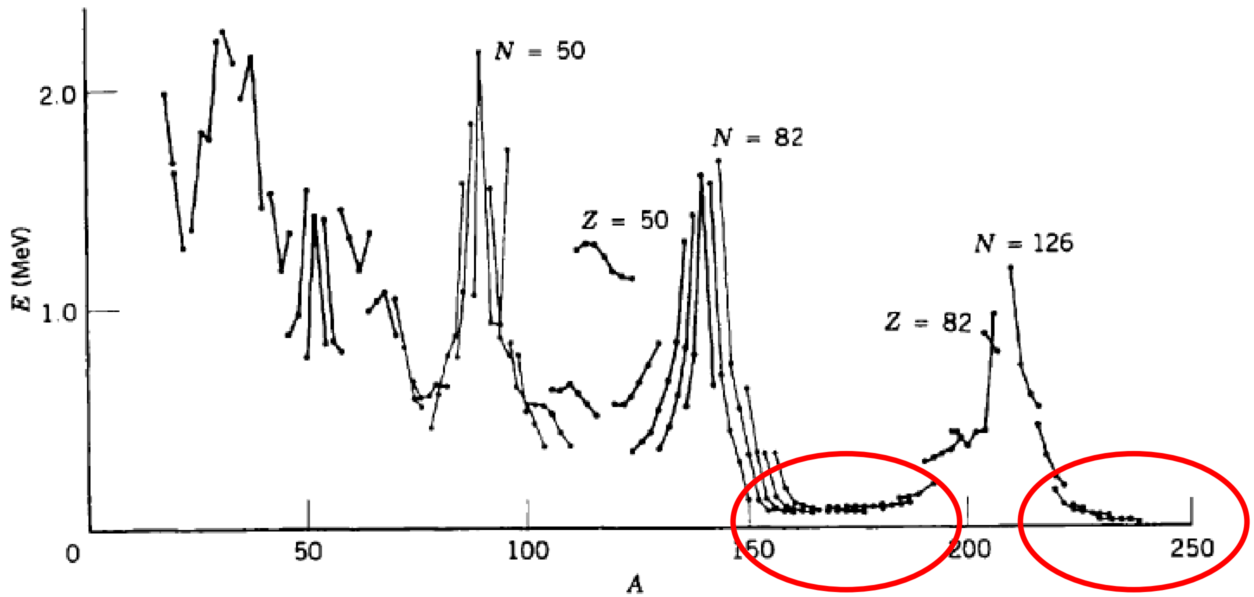
^{154}Sm は変形している



$$E_I \sim \frac{I(I+1)\hbar^2}{2\mathcal{J}}$$



偶偶核の 2^+ 状態のエネルギー



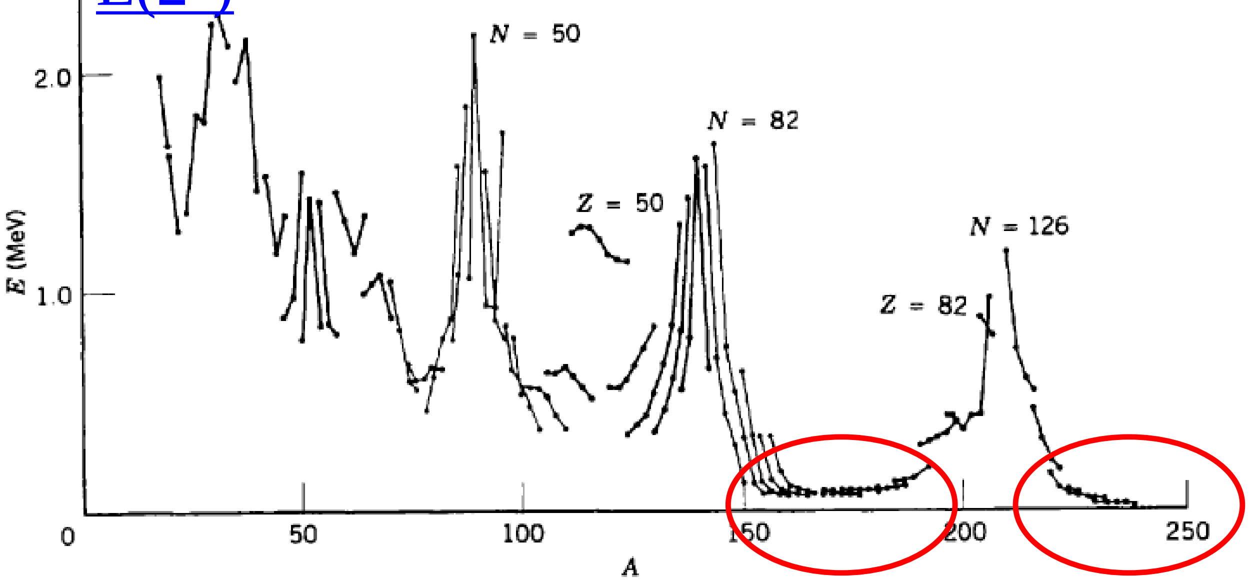
変形核

K.S. Krane, “Introductory Nuclear Physics”

原子核が変形すると励起エネルギーが小さくなる

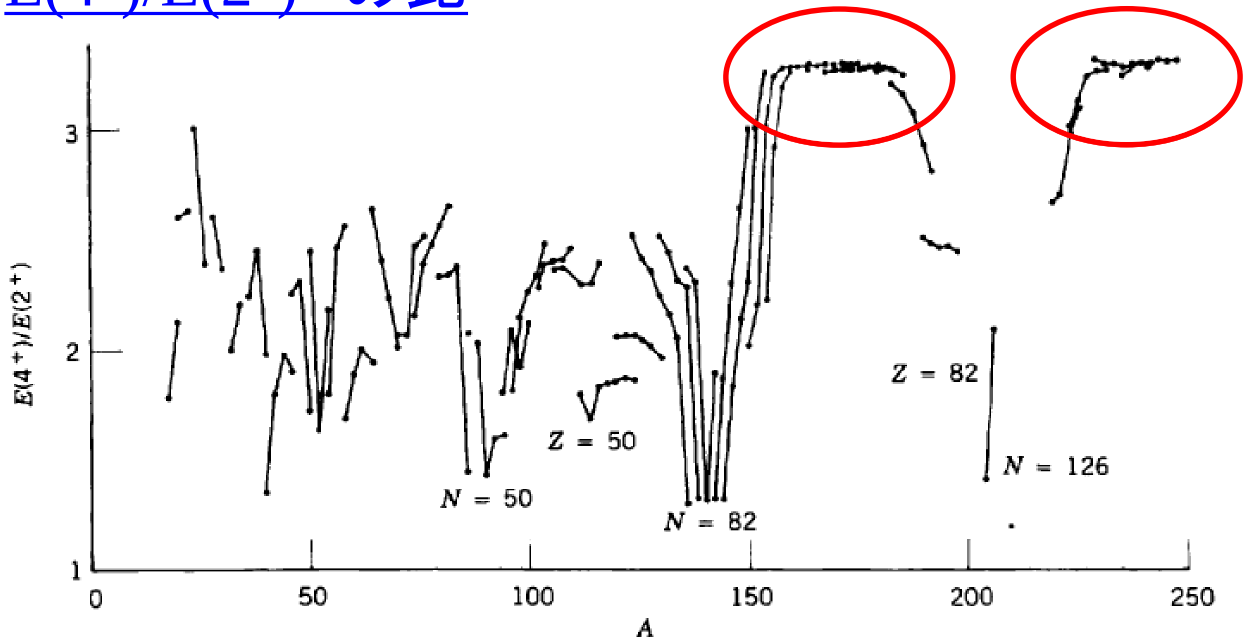
⟷　原子核の変形：対称性の自発的破れ
（ゼロ・モードの発生）

E(2^+)



変形核

E(4^+)/E(2^+)　の比



変形核なら

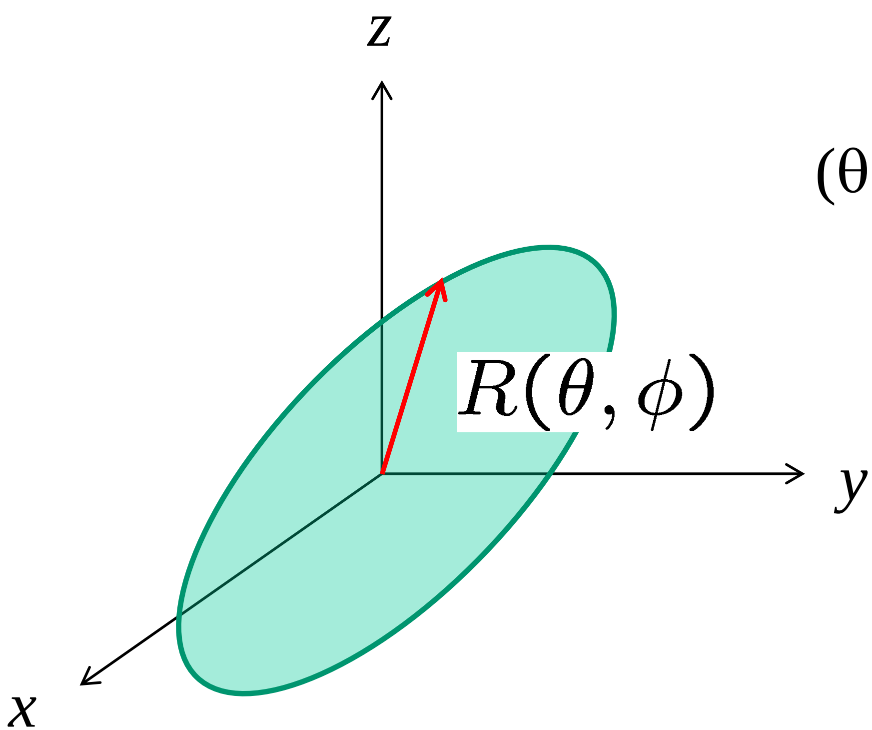
E(4^+)/E(2^+) ~ 3.3

球形核なら

E(4^+)/E(2^+) ~ 2

K.S. Krane, "Introductory Nuclear Physics"

変形パラメーター



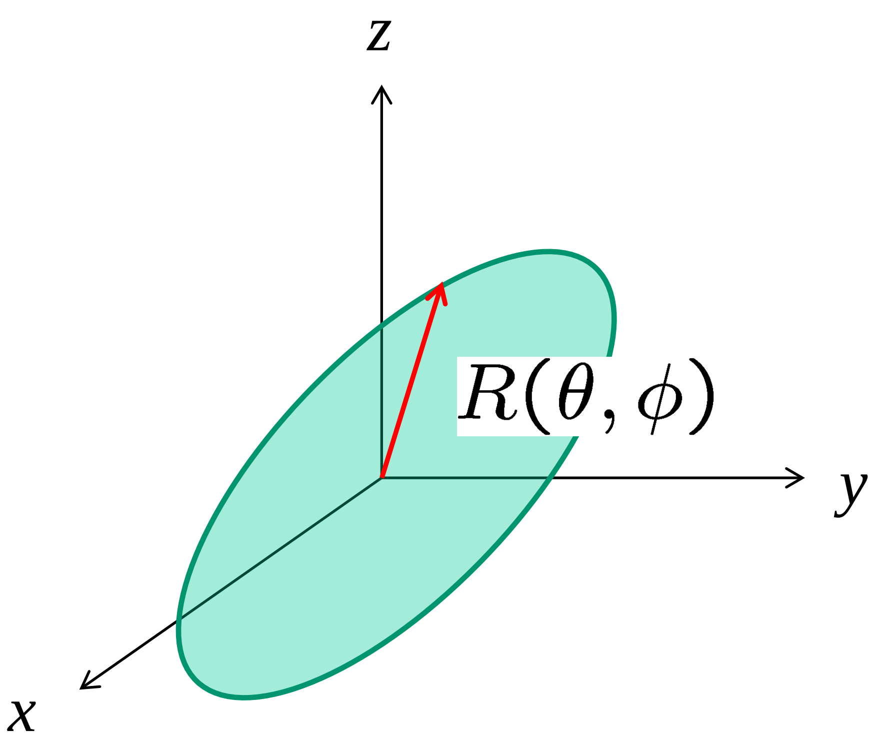
(θ,φ) 方向の半径: $R(\theta,\phi)$

任意の関数は球面調和関数で展開できる:

$$\boxed{R(\theta,\phi) = R_0\left(1+\sum_{\lambda,\mu}\alpha_{\lambda\mu}Y^*_{\lambda\mu}(\theta,\phi)\right)}$$

$\alpha_{\lambda\mu}$: 変形パラメーター

変形パラメーター



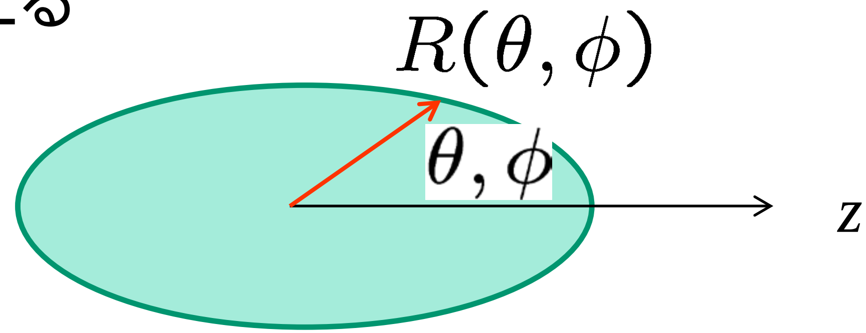
$$R(\theta,\phi) = R_0\left(1+\sum_{\lambda,\mu}\alpha_{\lambda\mu}Y^*_{\lambda\mu}(\theta,\phi)\right)$$

最も重要な変形は $\lambda = 2$
（四重極変形）

$\lambda = 0$: R_0 に吸収
$\lambda = 1$: 重心の位置を変えるだけ
（原点を適当にとれば
$\alpha_{1\mu} = 0$ とすることができる）
$\lambda = 2$:楕円体型の変形

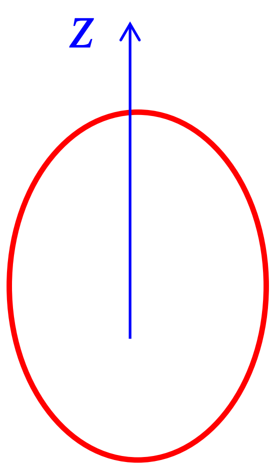
以下、$\lambda = 2$ に話を限定 $R(\theta,\phi) = R_0\left(1+\sum_{\mu}\alpha_{2\mu}Y^*_{2\mu}(\theta,\phi)\right)$

✓軸対称変形
✓対称軸を z 軸にとる

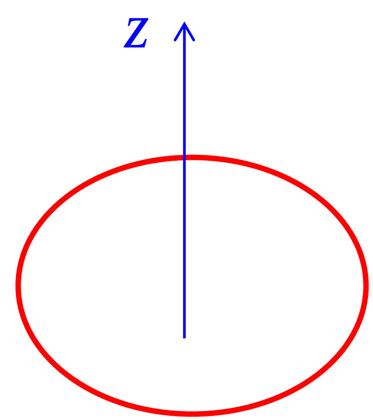


$$R(\theta,\phi) = R_0\left[1+\beta Y_{20}(\theta)\right]$$

半径は ϕ によらない：z 軸まわりの軸対称（回転楕円体）



$\beta > 0$
プロレート変形



$\beta < 0$
オブレート変形

変形ポテンシャル中の一粒子運動

原子核の変形→核子が感じるポテンシャルも変形

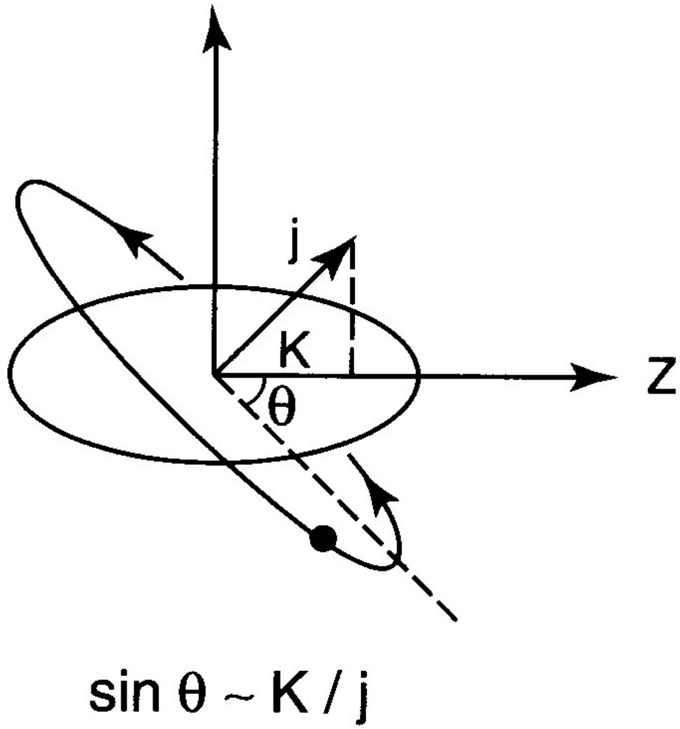
$$\boxed{V(r,\theta) \sim V_0(r) + \beta V_2(r)\,Y_{20}(\theta)}$$

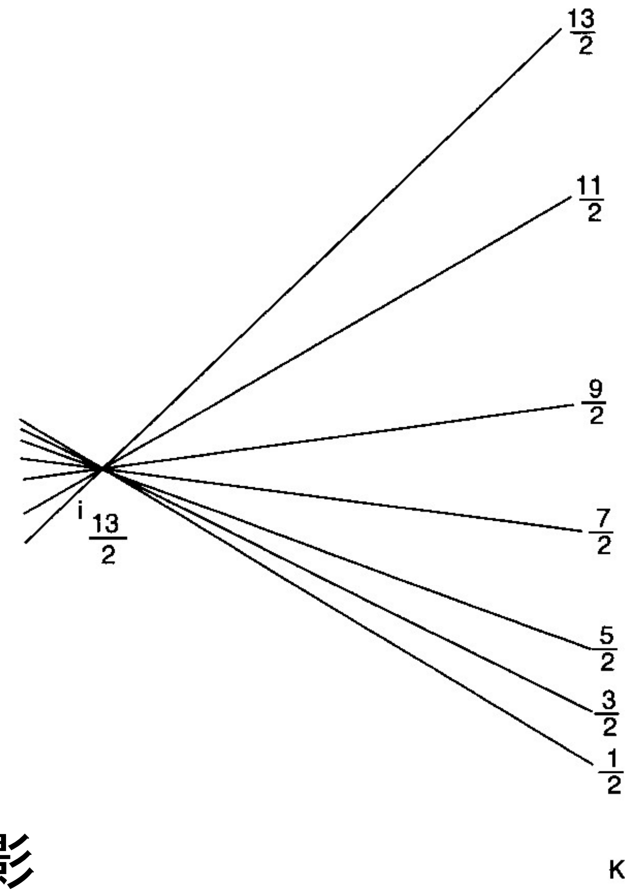
ポテンシャル球対称でなくなる

✓角運動量が保存しない
（角運動量の固有状態を作れない）

✓ l_z に関する縮退がとける

変形ポテンシャル中の運動:幾何学的解釈





- K は角運動量ベクトルの z 軸への射影
- 核子の軌道は角運動量ベクトルに垂直な平面内
- プロレート変形の場合、小さな K ほど長軸に沿って運動。
  → 従ってより引力を感じてエネルギーが下がる。
- 大きな K は短軸に沿って運動し、エネルギーを損する。

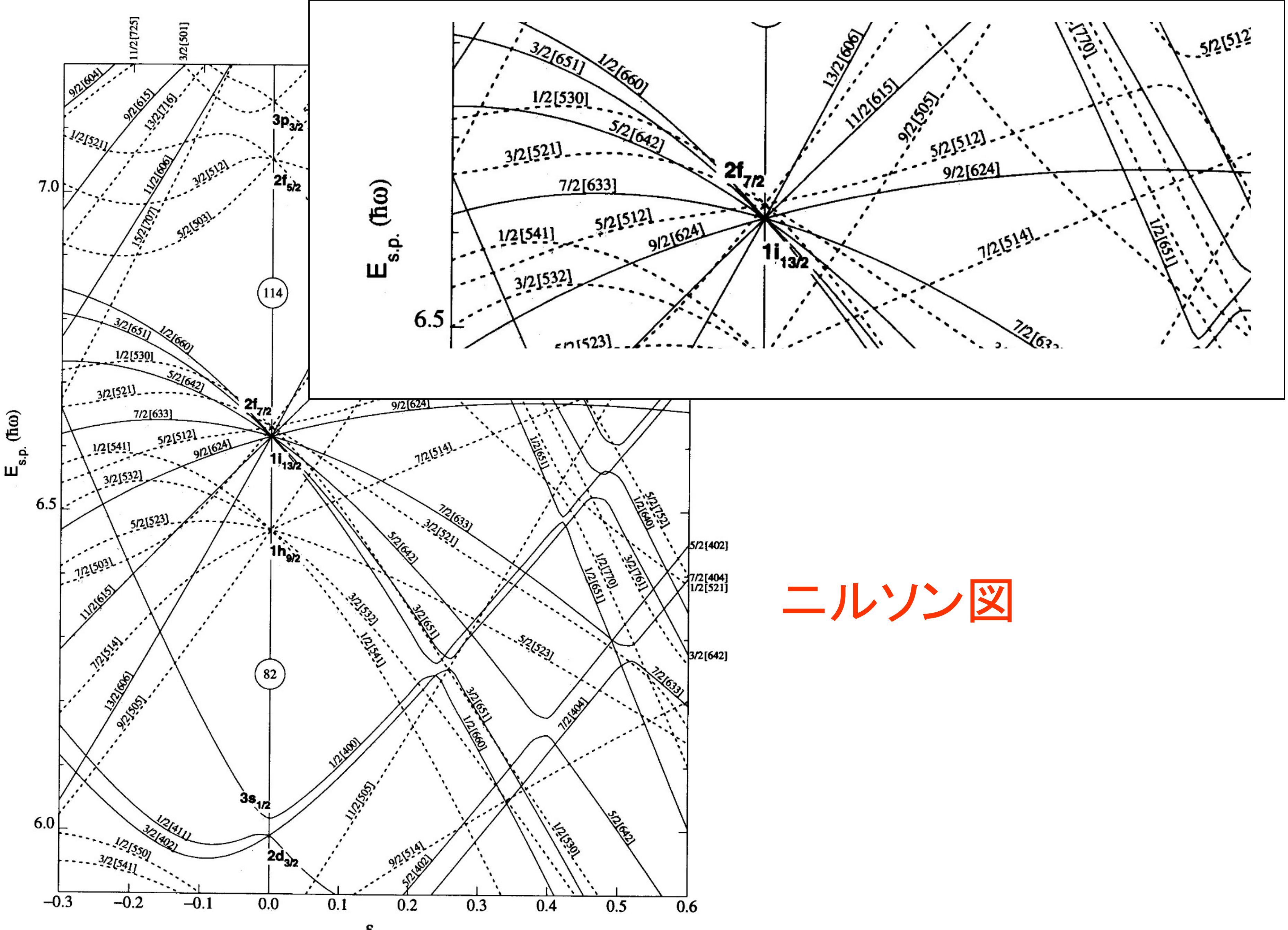
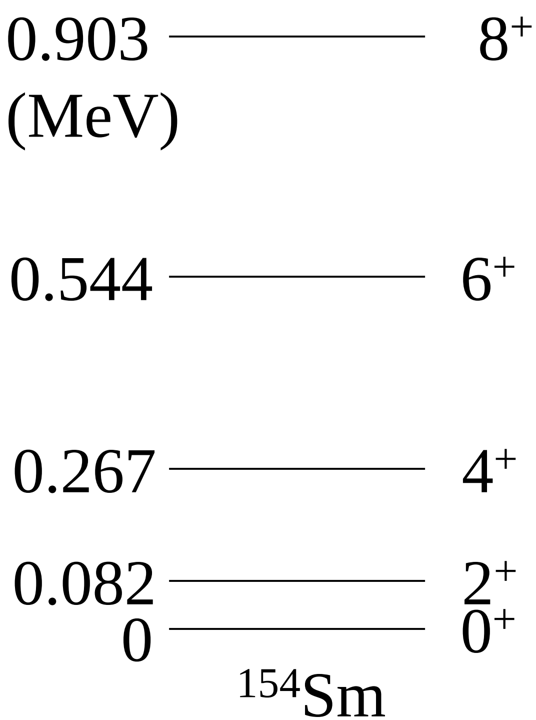


Figure 13. Nilsson diagram for protons, $Z \geq 82$ ($\varepsilon_4 = \varepsilon_2^2/6$).

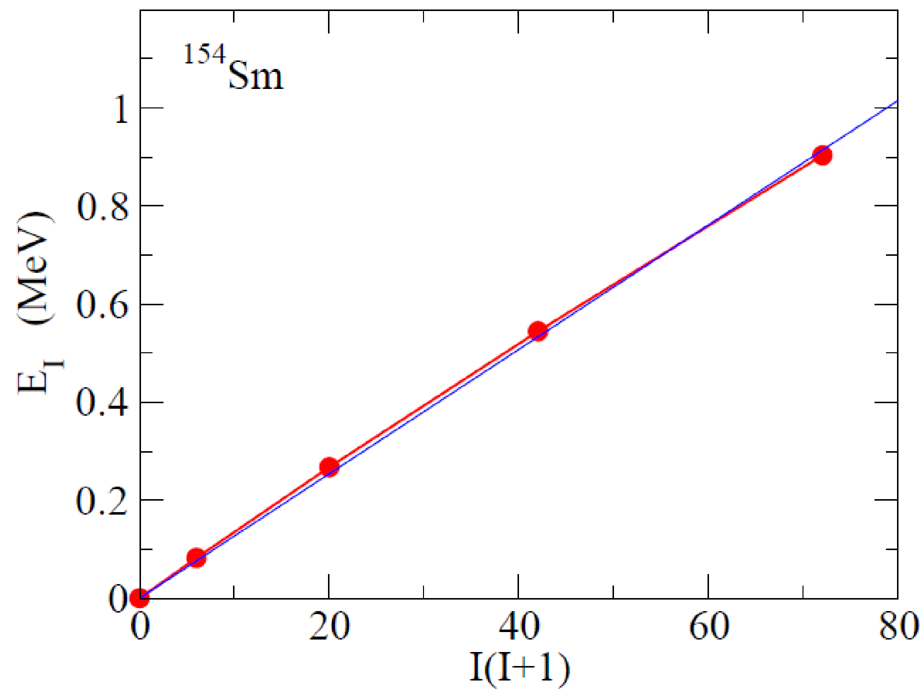
ニルソン図

軸対称変形核の回転運動

^{154}Sm の励起スペクトル



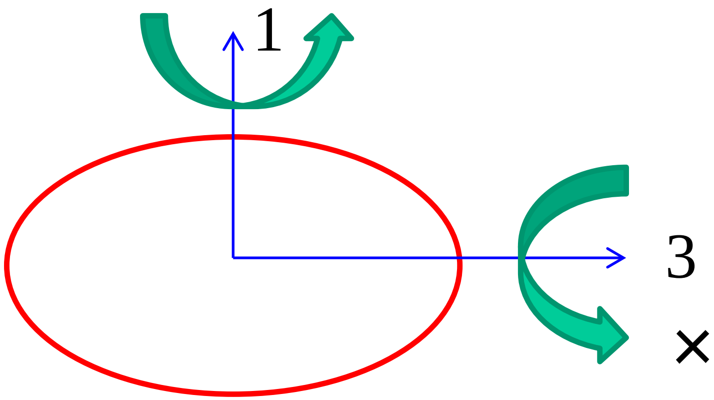
$$E_I \sim \frac{I(I+1)\hbar^2}{2\mathcal{J}}$$



なぜ偶数スピンのみなのか?

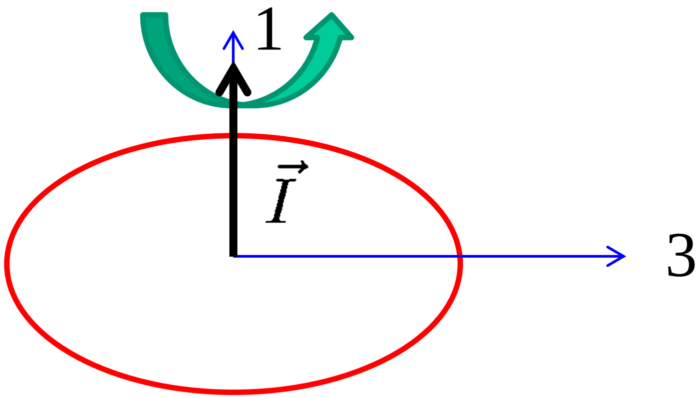
軸対称変形核の回転運動

軸対称変形核を考える（対称軸は3軸）



量子力学的には対称軸周りの回転は存在しない（波動関数全体の位相が変わるだけ）

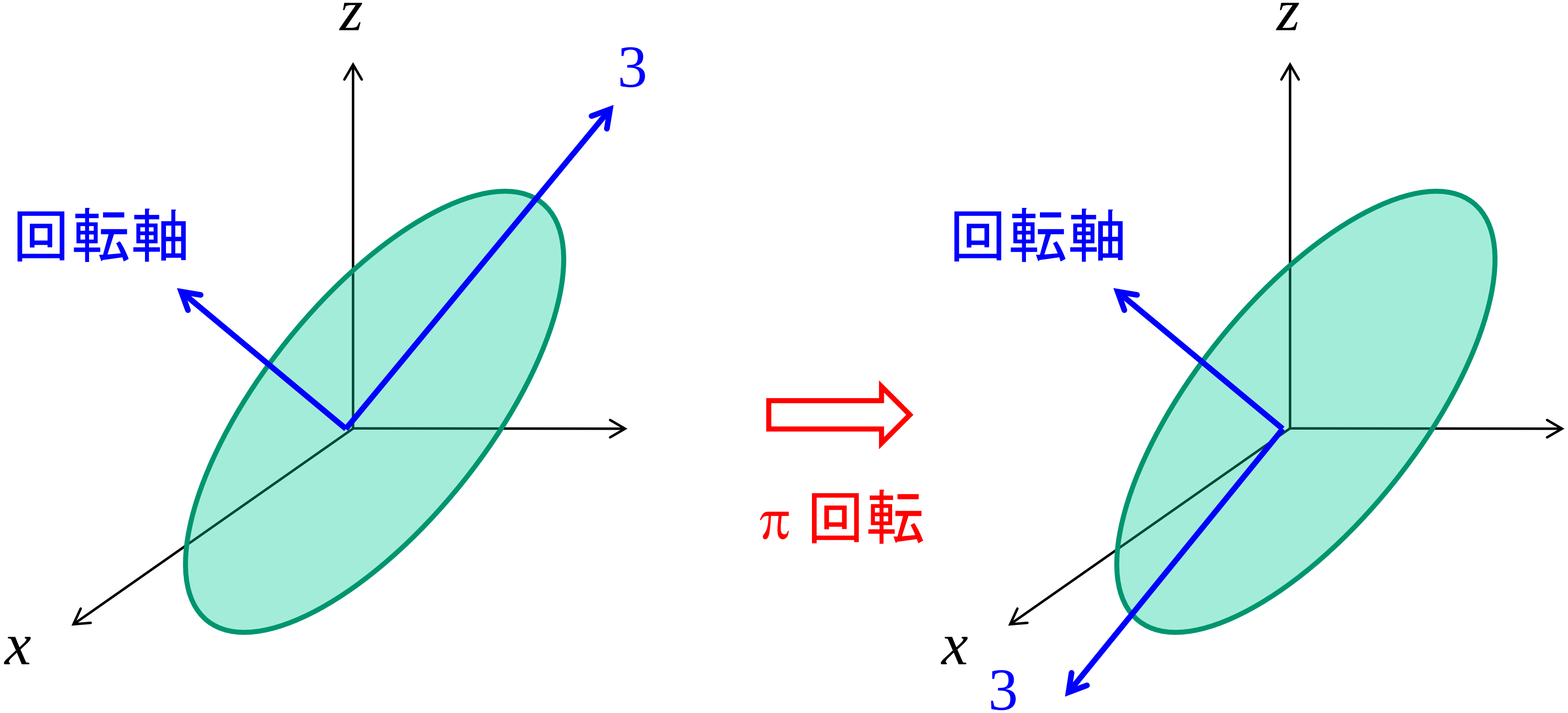
K = 0 のとき

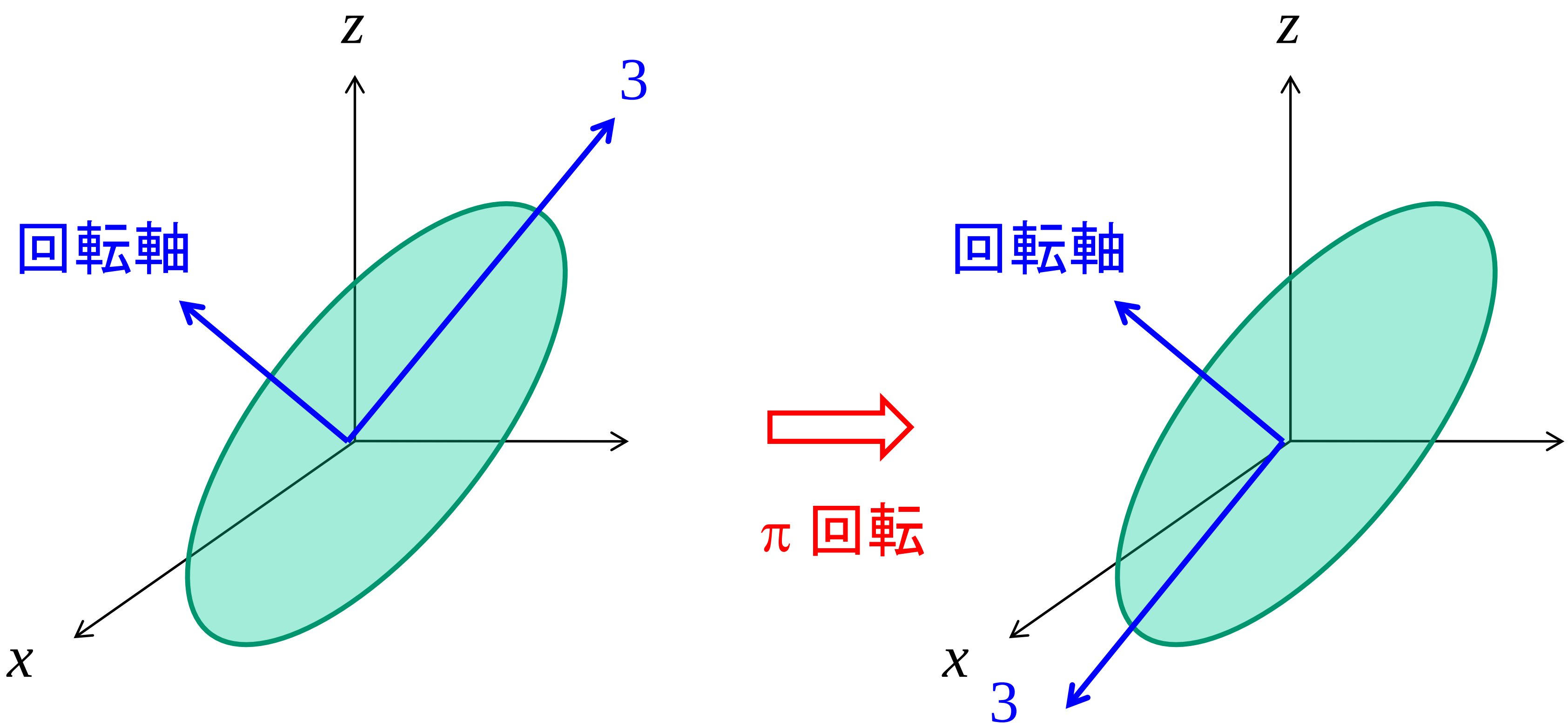


対称軸に垂直な軸のまわりの回転

π 回転に対して対称

⟶ 偶数角運動量のみが現れる



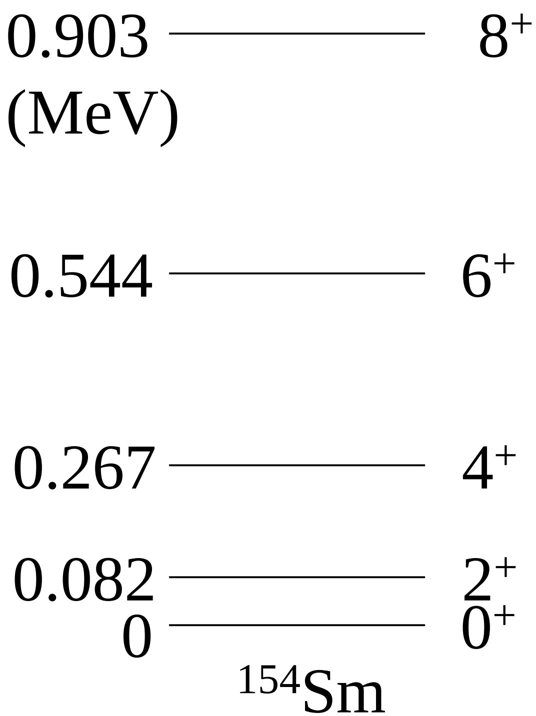


これは空間反転（パリティ変換）と同じ

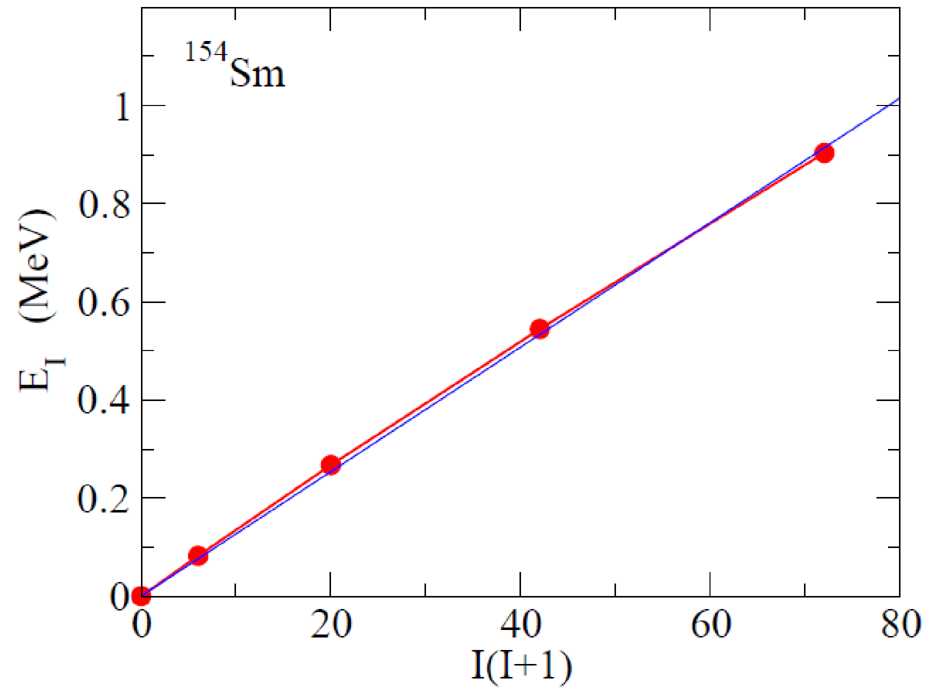
$$Y_{IM}(\hat{\boldsymbol{r}}) \to Y_{IM}(-\hat{\boldsymbol{r}}) = (-)^{I} Y_{IM}(\hat{\boldsymbol{r}})$$

波動関数が変わらないためには I は偶数（偶パリティ状態の場合）

^{154}Sm の励起スペクトル



$$\boxed{E_I \sim \frac{I(I+1)\hbar^2}{2\mathcal{J}}}$$



出席の代わりに授業アンケート

学籍番号、名前、所属研究室（所属大講座）

・今日の授業でわかりずらかったこと
（もう一度説明して欲しいこと）
・今日の授業の内容で、もう少し掘り下げてほしいこと
・授業の感想
・今日の授業で初めて知ったことや、前から知っていたけど
今日の授業で整理できたこと（忘れていたこと）

などを書いて下さい。