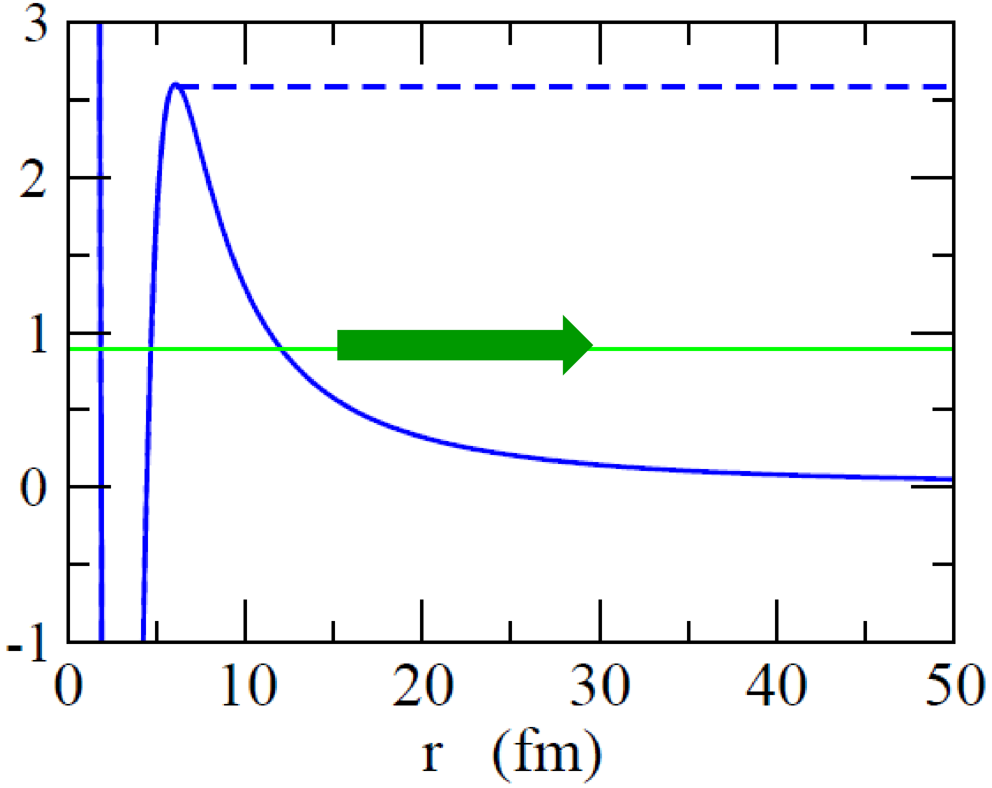
➢ 共鳴状態に幅があるけど、束縛状態の幅はどうなっているのですか?

この質問は重要

共鳴状態



共鳴幅

$$E \to E_R - i\frac{\Gamma}{2}$$

共鳴エネルギー

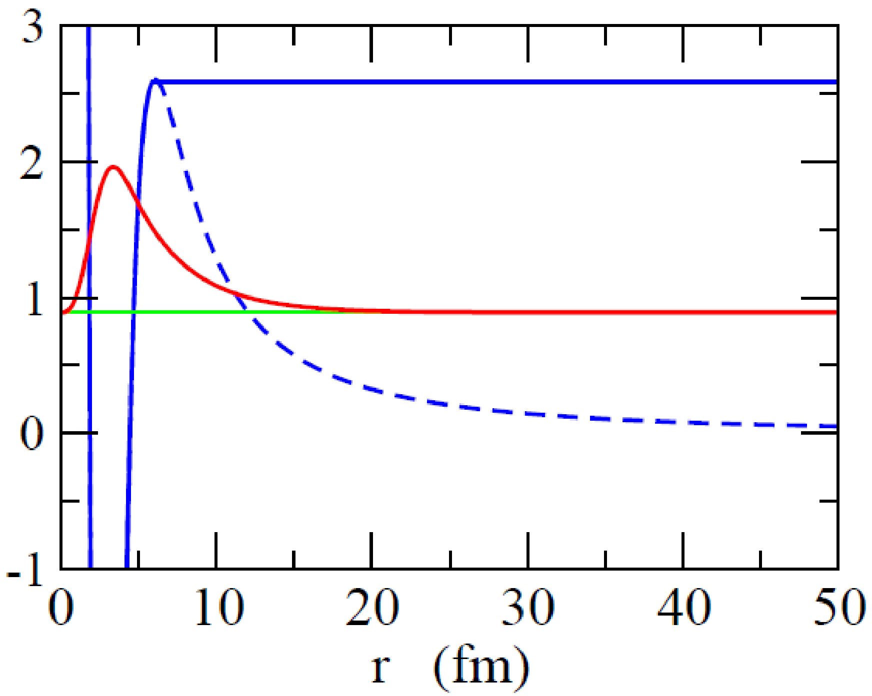
$$P_{\mathsf{sur}}(t) = e^{-\Gamma t/\hbar}$$

状態の寿命は hbar/Γ

➢ 共鳴状態に幅があるけど、束縛状態の幅はどうなっているのですか?

この質問は重要

✓ 束縛状態＝外場や他の相互作用を考えなければ、ずっとその状態のまま → 無限の寿命



共鳴幅

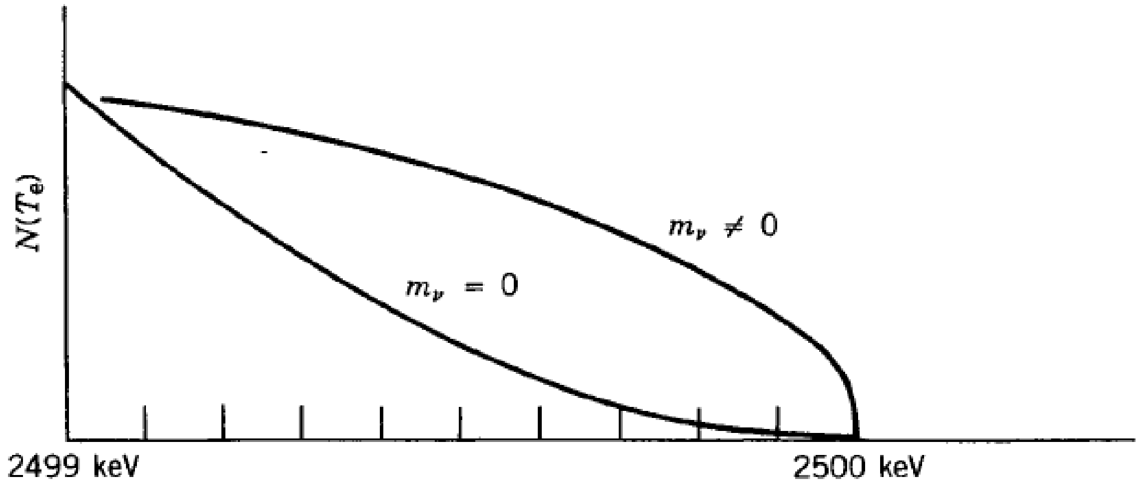
$$E \to \underset{\text{共鳴エネルギー}}{E_R} - i\frac{\Gamma}{2}$$

$$P_{\text{sur}}(t) = e^{-\Gamma t/\hbar}$$

状態の寿命は hbar/Γ

→ 束縛状態の幅はゼロ

➢ なぜニュートリノの質量がゼロでないと、$E_{\max}$ 付近で急に落ちる?



✓ 終状態の数を計算すればわかります。

$$\sum_{final\ \ states} = \int \frac{d\boldsymbol{p}_e}{(2\pi\hbar)^3}\frac{d\boldsymbol{p}_{\bar{\nu}_e}}{(2\pi\hbar)^3}\delta(E_e+E_{\bar{\nu}_e}-Q)$$

$$= \cdots = \frac{(4\pi)^2}{(2\pi\hbar)^6}\int dE_e \frac{E_e\sqrt{E_e^2-m_e^2c^4}}{c^6}$$

$$\times(Q-E_e)\sqrt{(Q-E_e)^2-m_\nu^2c^4}$$

➢ なぜニュートリノの質量がゼロでないと、$E_{\max}$ 付近で急に落ちる?

$$\sum_{final\ \ states} = \int \frac{d\boldsymbol{p}_e}{(2\pi\hbar)^3}\frac{d\boldsymbol{p}_{\bar{\nu}_e}}{(2\pi\hbar)^3}\delta(E_e + E_{\bar{\nu}_e} - Q)$$

$$= \cdots = \frac{(4\pi)^2}{(2\pi\hbar)^6}\int dE_e \frac{E_e\sqrt{E_e^2 - m_e^2c^4}}{c^6}$$

$$\times (Q - E_e)\sqrt{(Q-E_e)^2 - m_\nu^2 c^4}$$

傾きが $E_e^{\max} = Q - m_\nu c^2$ で発散

ただし、$m_\nu = 0$ なら $(Q - E_e)^2$ となって $E_e^{\max} = Q$ で傾きがゼロ。

➢ β崩壊のフェルミ理論のハミルトニアンをもう少し詳しく。
ハミルトニアンが波動関数で与えられるってどういうことですか？

$$H_\beta = g_F \int [\psi_p^\dagger(\boldsymbol{r})\psi_n(\boldsymbol{r})][\psi_e^\dagger(\boldsymbol{r})\psi_{\nu_e}(\boldsymbol{r})]\, d\boldsymbol{r} + h.c.$$

✓ オペレーターの座標表示:

$$\psi_n^\dagger(\boldsymbol{r}) = a_{n\boldsymbol{r}}^\dagger$$

中性子を位置 r に作る演算子

適当な基底で展開することも可能

$$a_{n\boldsymbol{r}}^\dagger = \sum_i \phi_i(\boldsymbol{r}) \underbrace{a_{ni}^\dagger}_{\text{状態 } i \text{ の中性子を作る演算子}}$$

使い方:

摂動

$$H = \underbrace{H_{\text{nucl}}}_{\text{ここを先に解く}} + H_\beta$$

ここを先に解く → $|\Phi_0\rangle \rightarrow \psi_p^\dagger(\boldsymbol{r})\psi_n(\boldsymbol{r})|\Phi_0\rangle$

が計算できる

➤ β崩壊のハミルトニアンの2項目は何ですか?

これ

$$H_\beta = g_F \int [\psi_p^\dagger(\boldsymbol{r})\psi_n(\boldsymbol{r})][\psi_e^\dagger(\boldsymbol{r})\psi_{\nu_e}(\boldsymbol{r})]\, d\boldsymbol{r} + h.c.$$

✓ 2項目はエルミート共役 (Hermite Conjugate)

n → p + e⁻ + bar[ν]ₑ

$$\begin{aligned} H_\beta &= g_F \int [\psi_p^\dagger(\boldsymbol{r})\psi_n(\boldsymbol{r})][\psi_e^\dagger(\boldsymbol{r})\psi_{\nu_e}(\boldsymbol{r})]\, d\boldsymbol{r} \\ &+ g_F \int [\psi_n^\dagger(\boldsymbol{r})\psi_p(\boldsymbol{r})][\psi_{\nu_e}^\dagger(\boldsymbol{r})\psi_e(\boldsymbol{r})]\, d\boldsymbol{r} \end{aligned}$$

p → n + e⁺ + νₑ

➤ 演算子の順番は重要ですか?

✓ 違う粒子の演算子は反交換関係で入れ替えれる

→順番はあまり重要ではない

$$\{\psi_e^\dagger(\boldsymbol{r}), \psi_{\nu_e}(\boldsymbol{r}')\} = 0$$

➢ g_{F} はどのくらいの値ですか?

$$H_\beta = g_F \int [\psi_p^\dagger(\boldsymbol{r})\psi_n(\boldsymbol{r})][\psi_e^\dagger(\boldsymbol{r})\psi_{\nu_e}(\boldsymbol{r})]\, d\boldsymbol{r} + h.c.$$

これ

✓ g_{F} の値は実験データから決める

例えば、^{14}O 核のβ崩壊の寿命から $g_{\mathrm{F}} \sim 10^{-5} / m_{\mathrm{N}}^2$

cf. Halzen-Martin “Quarks and Leptons”, eq. (12.24)

➢ このハミルトニアンはどのように与えたのですか?

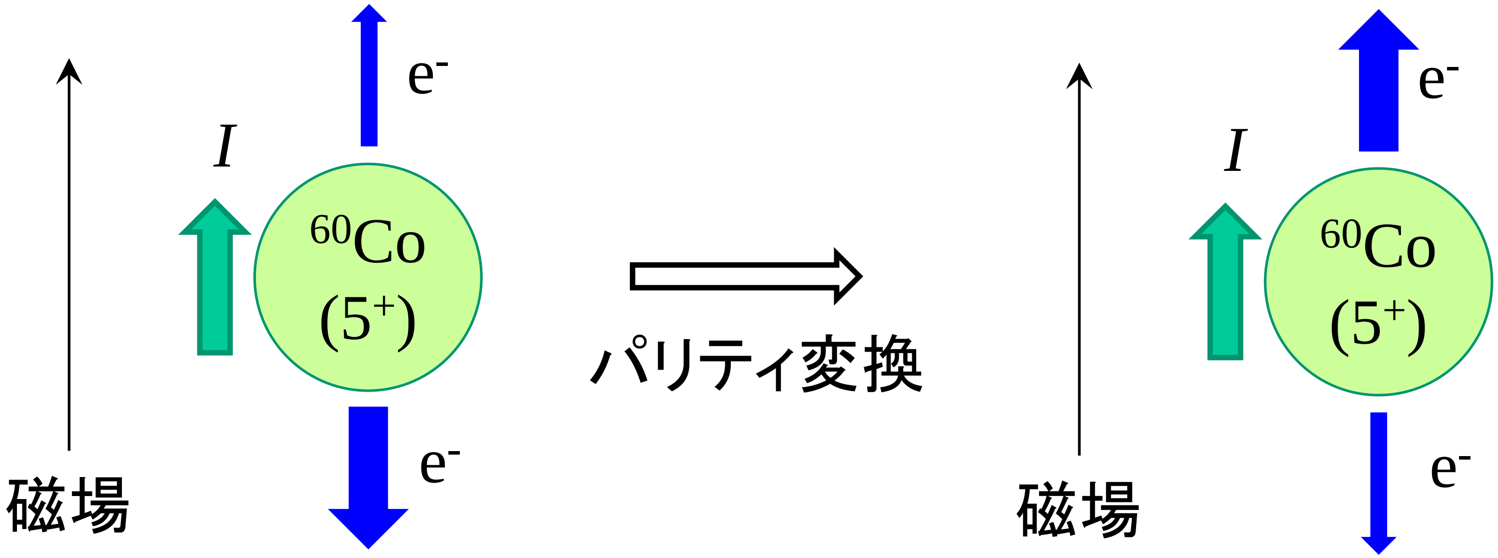
✓ はじめは、フェルミが直感に基づいて与えた

- ニュートリノの質量がゼロでなかったらどのような現象が現れる?
  - ✓ ニュートリノ振動
  - ✓ ニュートリノを伴わない2重β崩壊
- マヨラナ・ニュートリノは具体的にどういうものですか?

$$\bar{\nu} \neq \nu$$ （ディラック・ニュートリノ）

$$\bar{\nu} = \nu$$ （マヨラナ・ニュートリノ）

➢ パリティ非保存のところをもう一度

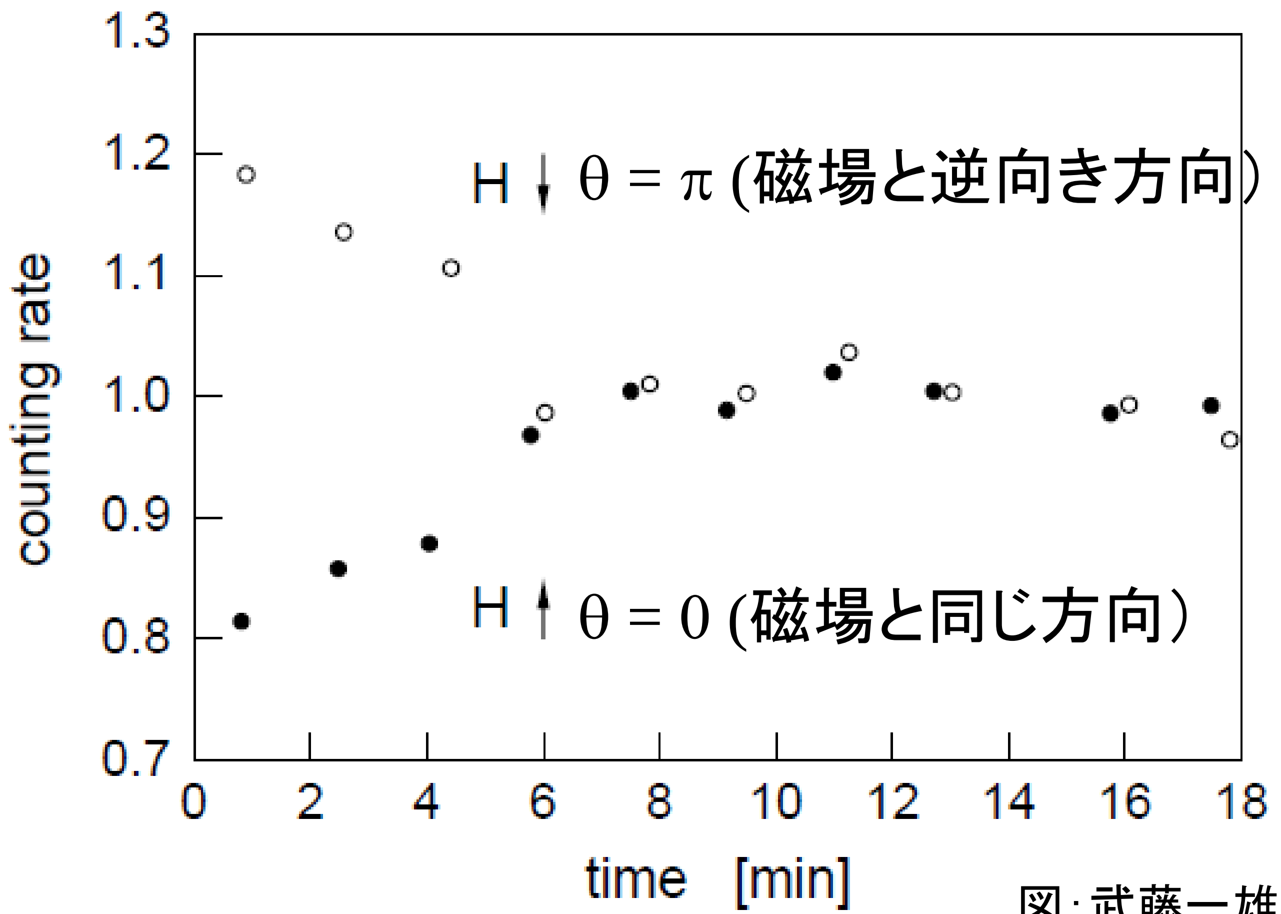


電子の放出方向に偏りがあれば、パリティ変換で現象が変わってしまう（パリティ非保存）

（パリティの固有状態になっているなら、電子の放出方向に偏りはないはず。）

cf. 一様磁場：　$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A};\quad \boldsymbol{A} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{B}$

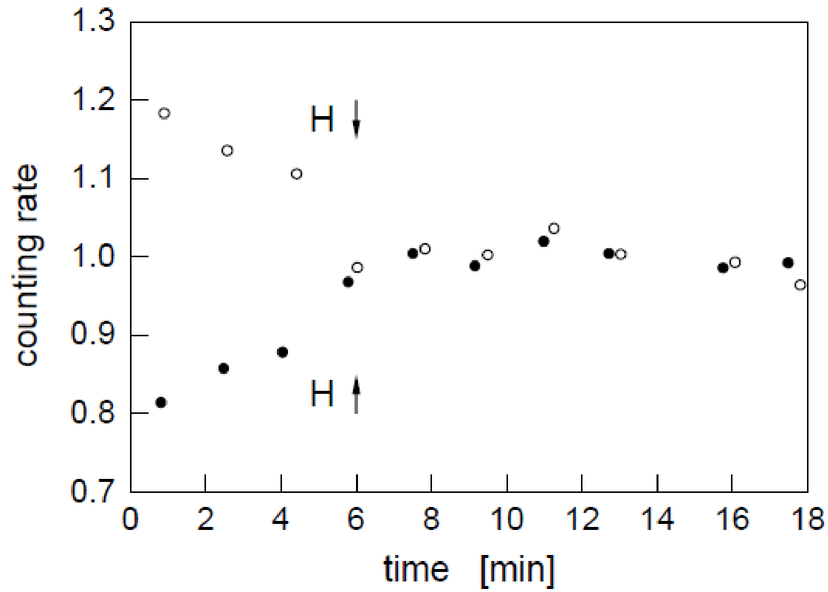
Wuの実験 (1957)



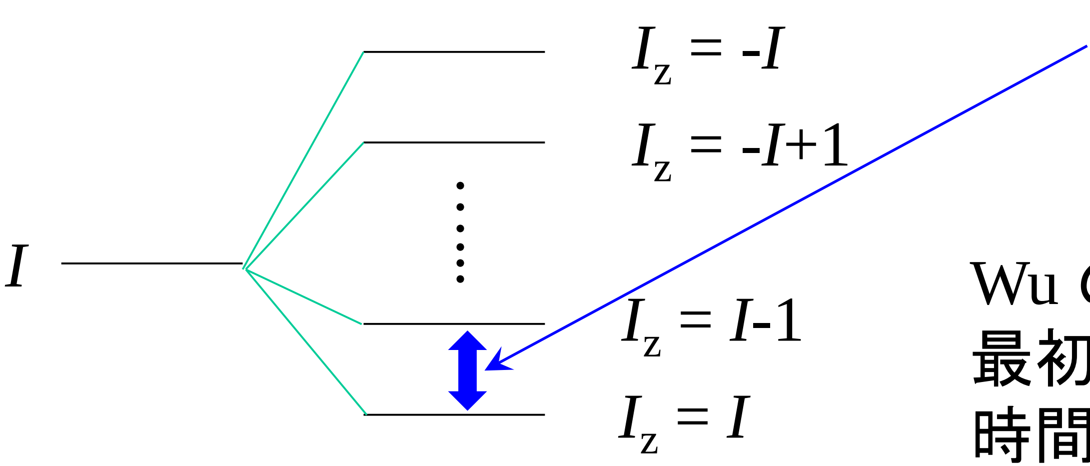
図：武藤一雄氏講義録より

電子の放出方向に差 → パリティ非保存

➢ Wuの実験で時間がたつと角運動量の整列が成立しなくなるというのはどういう意味か？



✓ 磁場をかけて角運動量の z 成分を分離させる:

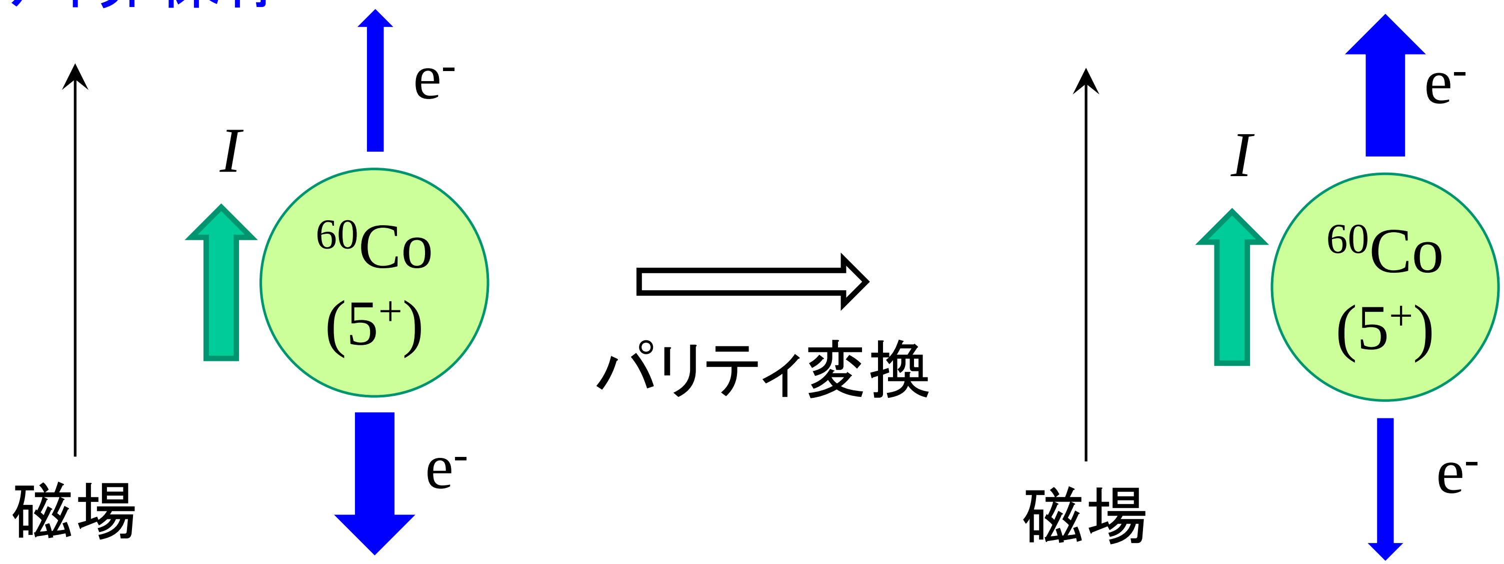


この間隔が $k_B T$ より大きくないと分離されない

Wu の実験:
最初は十分冷却されていたが、時間とともに試料の温度が上昇

➢ パリティが保存していない波動関数はどう作るのか?

パリティ非保存



$$|\psi\rangle = \alpha|+\rangle + \beta|-\rangle$$

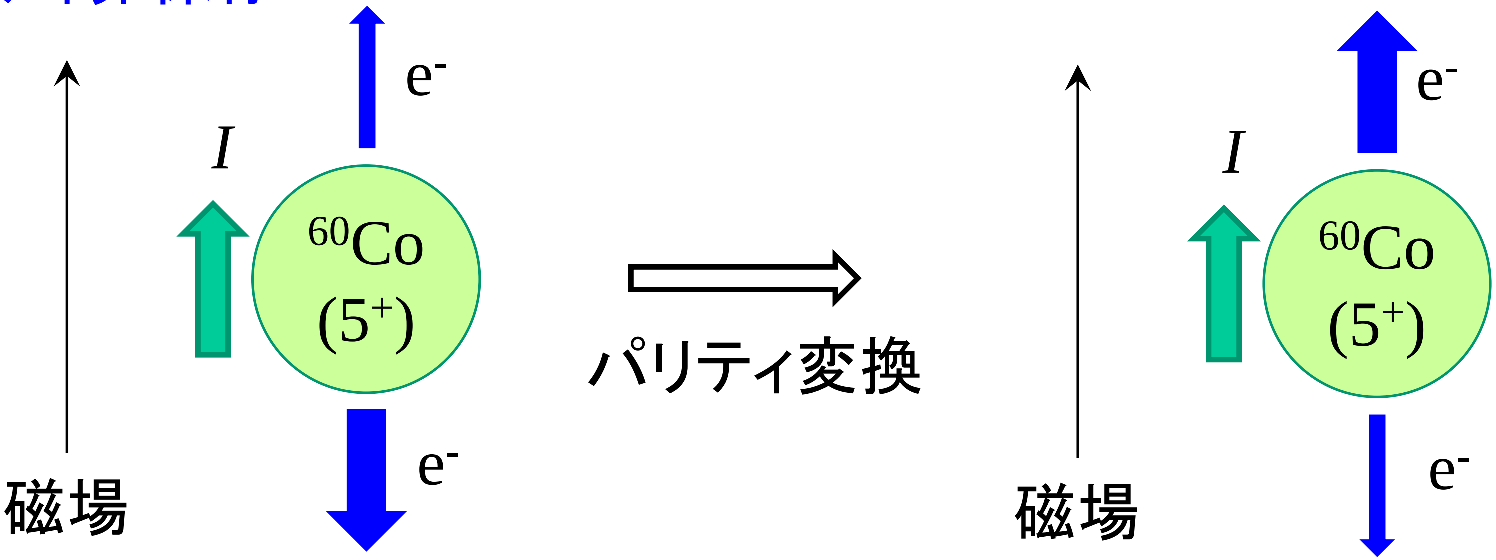
とすれば

$$\hat{P}|\psi\rangle = \alpha|+\rangle - \beta|-\rangle$$

パリティの固有状態になっていない

➢ 実験ではパリティ変換ってどういう操作をするのですか?

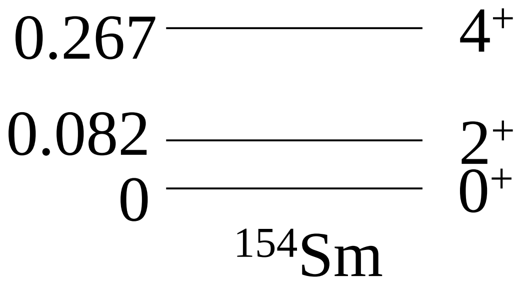
パリティ非保存



✓ 実験では、パリティ変換できません

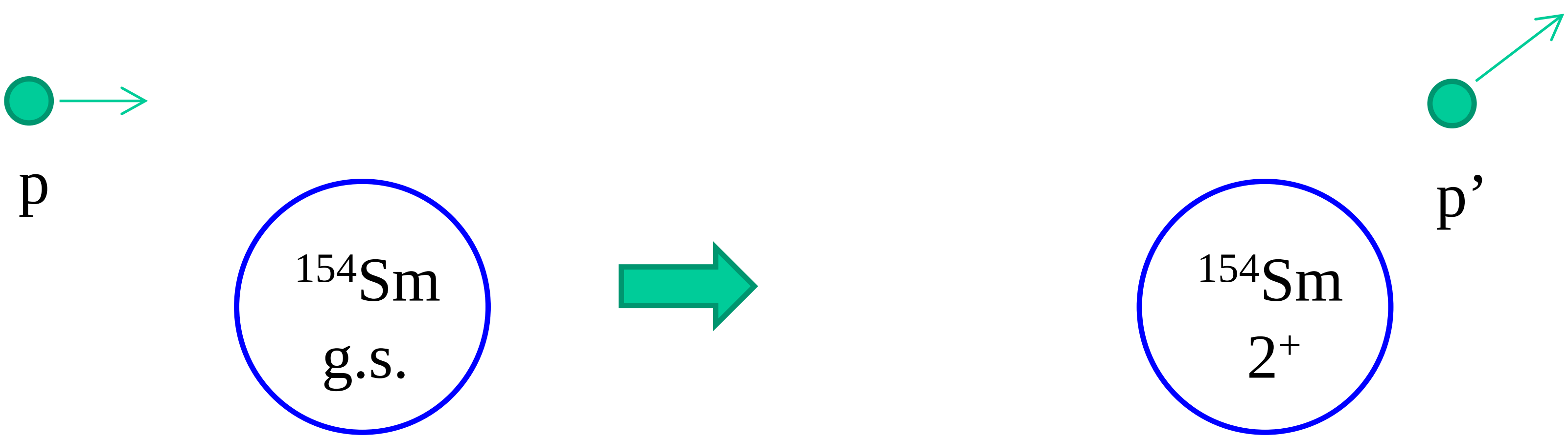
→電子の放出方向の非対称度をみるしかない

➢ 実験的に各状態の角運動量とパリティはどのように決定される?



✓ パリティそのものを実験的に測ることはできない。

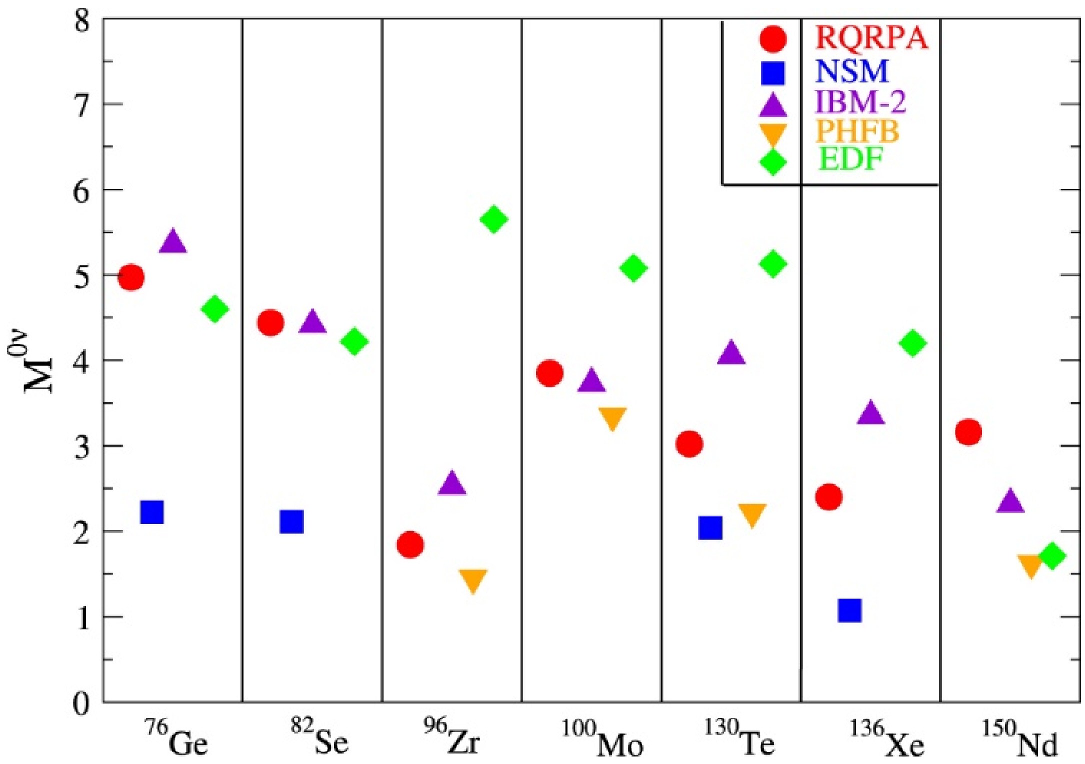
→ 例えば、非弾性散乱の角度分布を使って決める



2^+ 状態を励起したことにより、陽子の軌道角運動量が変化 → それを反映した角度分布

✓ 2重β崩壊の核行列要素の不定性はどういったものですか?

$$\left[T_{1/2}^{(0\nu)}\right]^{-1} = G_{0\nu}|M_{0\nu}|^2\langle m_\nu\rangle^2$$



おおよそファクター２～３の不定性

✓ 相互作用
✓ 模型空間
✓ 多体論の手法
などの不定性

J. Engel, J. Phys. G42 ('15) 034017

➢ アイソスピンは数学的性質はスピンと一緒?

✓ その通りです！

両方とも SU(2) の代数に従う

$$[\sigma_x, \sigma_y] = 2i\sigma_z \quad \text{など}$$

$$\sigma_z|\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle, \sigma_z|\downarrow\rangle = -|\downarrow\rangle$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma_y)|\downarrow\rangle &= |\uparrow\rangle, \\ \frac{1}{2}(\sigma_x - i\sigma_y)|\uparrow\rangle &= |\downarrow\rangle \end{aligned}$$

$$[\tau_x, \tau_y] = 2i\tau_z \quad \text{など}$$

$$\tau_z|p\rangle = |p\rangle, \tau_z|n\rangle = -|n\rangle$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\tau_x + i\tau_y)|n\rangle &= |p\rangle, \\ \frac{1}{2}(\tau_x - i\tau_y)|p\rangle &= |n\rangle \end{aligned}$$

核子の波動関数: $$|N\rangle = \underbrace{|\psi\rangle}_{\text{空間}}\underbrace{|\chi_\sigma\rangle}_{\text{スピン}}\underbrace{|\chi_\tau\rangle}_{\text{アイソスピン (p or n)}}$$

- ハドロンのアイソスピンはハドロンを構成するスピンで決定される?
  - ✓ スピンとアイソスピンは別の内部自由度

    ＊ハドロンのアイソスピンはそれを構成するクォークのアイソスピンで決定
    ($T_z(\mathrm{u}) = 1/2$, $T_z(\mathrm{d}) = -1/2$)

➢ クーロンを補正すれば陽子と中性子が同じになるという話だけど、質量の違いもクーロンで説明できる?

基本構成要素:

	電荷	質量 (MeV)	スピン
陽子	+e	938.256	$1/2^+$
中性子	0	939.550	$1/2^+$

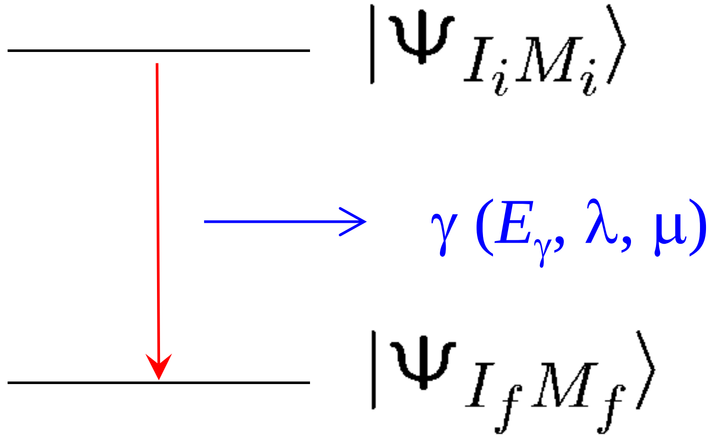
✓ 陽子 : uud、中性子 : udd

u: +2/3 e, d: -1/3 e

*クォークの質量は数 MeV 程度
（ダウン・クォークの方が若干重い）

核子の質量の約 98% は強い相互作用のダイナミックスでできている

電磁遷移について



単位時間当たりの遷移確率 (← フェルミの黄金則) :

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\hbar}|\langle f|H_{\mathrm{int}}|i\rangle|^2\rho(E_f)$$

$$\begin{aligned} |i\rangle &= |\Psi_{I_iM_i}\rangle|0\rangle \\ |f\rangle &= \underbrace{|\Psi_{I_fM_f}\rangle}_{\text{原子核の状態}}\underbrace{|E_\gamma, \lambda\mu\rangle}_{\text{フォトン}} \end{aligned}$$

H_{int} : 原子核と電磁場の相互作用

原子核と電磁場の相互作用

多体系のハミルトニアン:

$$H = \sum_i \frac{\boldsymbol{p}_i^2}{2m} + \sum_{i<j} v_{ij}$$

$$\longrightarrow \quad H = \sum_i \left[\frac{1}{2m} \left(\boldsymbol{p}_i - \frac{e_i}{c} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_i, t) \right)^2 + e_i \phi(\boldsymbol{r}_i) \right] + \sum_{i<j} v_{ij} + H_{em}$$

e_i = +e (陽子), 0（中性子）
A = ベクトル・ポテンシャル
ϕ = スカラー・ポテンシャル

＊このようにに変更すると古典的なローレンツ力が出てくる

原子核と電磁場の相互作用

$$H = \sum_i \left[\frac{1}{2m} \left(\boldsymbol{p}_i - \frac{e_i}{c} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_i, t) \right)^2 + e_i \phi(\boldsymbol{r}_i) \right] + \sum_{i<j} v_{ij} + H_{em}$$

クーロン・ゲージ

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = 0, \qquad \phi(\boldsymbol{r}) = 0$$

$$\longrightarrow \quad \left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) \right)^2 = \boldsymbol{p}^2 - \frac{e}{c} (\underline{\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{p}}) + \cancelto{\sim 0}{\frac{e^2}{c^2} \boldsymbol{A}^2}$$

$$\begin{aligned} &= (\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{A}) + \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{p} \\ &= \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{p} \end{aligned}$$

$$\sim \boldsymbol{p}^2 - \frac{2e}{c} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{p}$$

$$\boxed{H_{\text{int}} = -\sum_i \frac{e_i}{mc} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_i, t) \cdot \boldsymbol{p}_i}$$

原子核と電磁場の相互作用

$$H_{\text{int}} = -\sum_i \frac{e_i}{mc} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_i, t) \cdot \boldsymbol{p}_i$$

$$\boxed{\to H_{\text{int}} = -\frac{1}{c} \int d\boldsymbol{r}\, \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) \cdot \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t)}$$

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{j}_o(\boldsymbol{r}, t) + c\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{r}, t)$$

$$\boldsymbol{j}_o(\boldsymbol{r}, t) = \sum_i \frac{e_i}{2m} (\boldsymbol{p}_i \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i) + \text{h.c.})$$

$$\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{e\hbar}{2mc} \sum_i \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i) g_s \boldsymbol{s}_i$$

$$g_s = \begin{cases} 5.586 \text{（陽子）} \\ -3.826 \text{（中性子）} \end{cases}$$

（異常磁気モーメント）

＊点粒子であれば、$g_s = 2$ (陽子)、$=0$ (中性子)

$$H_{\text{int}} = -\frac{1}{c}\int dr\, \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)$$

$$\rightarrow \Gamma = \frac{2\pi}{\hbar}|\langle f|H_{\text{int}}|i\rangle|^2\rho(E_f)$$

真空中のマクスウェル方程式

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2\right)\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = 0$$

これを部分波展開で解く。

cf. 自由粒子のシュレーディンガー方程式

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2 - E\right)\psi(\boldsymbol{r}) = 0$$

$$\Rightarrow \psi(\boldsymbol{r}) = e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i^l j_l(kr)P_l(\cos\theta)$$

cf. 自由粒子のシュレーディンガー方程式

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2 - E\right)\psi(\boldsymbol{r}) = 0$$

$$\Longrightarrow \psi(\boldsymbol{r}) = e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i^l j_l(kr)P_l(\cos\theta)$$

基本的にはこれと同じ（ただし、偏極ベクトルと角運動量を組み直す）:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \epsilon_\alpha\, a_{\boldsymbol{k}\alpha}\, e^{-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} = \sum_{\lambda,\mu}\cdots$$

クーロンゲージ:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = 0 \rightarrow \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = 0 \qquad \text{（横波条件）}$$

$\Longrightarrow$ 各 λ,μ に対し、独立な解が２つ (E-type, M-type)

遷移確率(長波長近似)

$$\Gamma_{fi}(\lambda\mu) \sim \frac{8\pi(\lambda+1)}{\hbar\lambda((2\lambda+1)!!)^2}\left(\frac{E_\gamma}{\hbar c}\right)^{2\lambda+1} |\langle\Psi_f|\mathcal{M}_{\lambda\mu}|\Psi_i\rangle|^2$$

Eλ 遷移

$$\mathcal{M}^{(E)}_{\lambda\mu} = \sum_i e_i r_i^\lambda Y_{\lambda\mu}(\hat{\boldsymbol{r}}_i) = \int d\boldsymbol{r}\,\rho(\boldsymbol{r}) r^\lambda Y_{\lambda\mu}(\hat{\boldsymbol{r}}) \equiv \hat{Q}_{\lambda\mu}$$

Mλ 遷移

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^{(M)}_{\lambda\mu} &= \mu_N \sum_{i=1}^{A} \left\{ g_s^{(i)} \boldsymbol{s}_i + \frac{2}{\lambda+1} g_l^{(i)} \boldsymbol{l}_i \right\} \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} r_i^\lambda Y_{\lambda\mu}(\hat{\boldsymbol{r}}_i) \right) \\
&= \frac{1}{c(\lambda+1)} \int d\boldsymbol{r}\, (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})) \cdot \boldsymbol{\nabla} (r^\lambda Y_{\lambda\mu}(\hat{\boldsymbol{r}})) \\
&\equiv \widehat{M}_{\lambda\mu}
\end{aligned}$$

換算遷移確率

$$|\langle\Psi_f|\mathcal{M}_{\lambda\mu}|\Psi_i\rangle|^2 \to \frac{1}{2I_i+1}\sum_{M_i,M_f,\mu}|\langle I_f M_f|\mathcal{M}_{\lambda\mu}|I_i M_i\rangle|^2$$

ウィグナー・エッカルトの定理

$$\langle I_f M_f|\mathcal{M}_{\lambda\mu}|I_i M_i\rangle = (-1)^{I_i-M_i}\frac{1}{\sqrt{2\lambda+1}}\underbrace{\langle I_f M_f I_i - M_i|\lambda\mu\rangle}_{M_\mathrm{i},\,M_\mathrm{f}\text{ の依存性は単純な Clebsch}}\underbrace{\langle I_f||\mathcal{M}_\lambda||I_i\rangle}_{M_\mathrm{i},\,M_\mathrm{f}\text{ に依存しない}}$$

$$\sum_{M_i M_f}\langle I_f M_f I_i - M_i|\lambda\mu\rangle^2 = 1$$

⇒ $$\frac{1}{2I_i+1}\sum_{M_i,M_f,\mu}|\langle I_f M_f|\mathcal{M}_{\lambda\mu}|I_i M_i\rangle|^2 = \frac{1}{2I_i+1}|\langle I_f||\mathcal{M}_\lambda||I_i\rangle|^2$$

（換算遷移確率）

$$\Gamma_{fi} \sim \frac{8\pi(\lambda+1)}{\hbar\lambda((2\lambda+1)!!)^2}\left(\frac{E_\gamma}{\hbar c}\right)^{2\lambda+1} \frac{1}{2I_i+1}|\langle I_f||\mathcal{M}_\lambda||I_i\rangle|^2$$

一般に

$$\begin{aligned} \Gamma(E\lambda) &\gg \Gamma(M\lambda) \\ \Gamma(E\lambda) &\gg \Gamma(E\lambda+1) \gg \cdots \end{aligned}$$

E2とM1の競合が起こることもある。

選択則

$$\langle I_f M_f | \underline{\mathcal{M}_{\lambda\mu} | I_i M_i \rangle}$$

初期状態＋1フォトン状態

$|\Psi_i'\rangle = \mathcal{M}_{\lambda\mu}|I_i M_i\rangle$ として、

$\langle I_f M_f | \Psi_i' \rangle \neq 0$ であるためには

$|\Psi_i'\rangle$ と $|I_f M_f\rangle$ が同じ量子数を持たなければならない

$\longrightarrow$ 選択則

I_i と λ を合成して I_f にならなければならない

$$|I_i - \lambda| \leq I_f \leq I_i + \lambda$$

（z 成分に関しては：$M_f = M_i + \mu$）

選択則

$$\langle I_f M_f | \mathcal{M}_{\lambda\mu} | I_i M_i \rangle$$

I_i と λ を合成して I_f にならなければならない

$$|I_i - \lambda| \le I_f \le I_i + \lambda$$

$$\mathcal{M}_{\lambda\mu} = \sum_{i=1}^{Z} e r_i^\lambda Y_{\lambda\mu}(\hat{\boldsymbol{r}}_i) \equiv \hat{Q}_{\lambda\mu}$$

パリティ $(-1)^\lambda$

$$\mathcal{M}_{\lambda\mu} = \mu_N \sum_{i=1}^{A} \left\{ g_s^{(i)} \boldsymbol{s}_i + \frac{2}{\lambda+1} g_l^{(i)} \boldsymbol{l}_i \right\} \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} r_i^\lambda Y_{\lambda\mu}(\hat{\boldsymbol{r}}_i) \right) \equiv \hat{M}_{\lambda\mu}$$

パリティ $(-1)^{\lambda+1}$

例） $2^+ \rightarrow 0^+$ E2

$3^- \rightarrow 0^+$ E3

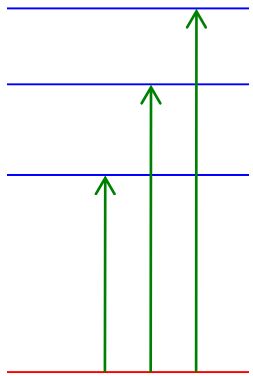
$4^+ \rightarrow 2^+$ E2, E4, M3, E6, M5

$2^+ \rightarrow 3^-$ E1, E3, E5, M2, M4

和則（わそく）: Sum Rule

$$\Gamma_{i\to f} \sim |\langle\Psi_f|\sum_i z_i|\Psi_i\rangle|^2$$

（E1の場合）



$$\boxed{\Gamma_{\mathrm{tot}} = \sum_f \Gamma_{i\to f} \sim \langle\Psi_i|\left(\sum_i z_i\right)^2|\Psi_i\rangle}$$

基本的な考え方:
$$\sum_f |\langle f|\hat{F}|\psi_i\rangle|^2 = \sum_f \langle\psi_i|F|f\rangle\langle f|\hat{F}|\psi_i\rangle$$
$$= \langle\psi_i|\hat{F}^2|\psi_i\rangle$$

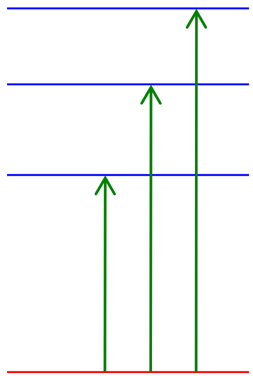
$$\uparrow$$

（完全系） $\sum_f |f\rangle\langle f| = 1$

和則（わそく）: Sum Rule

$$\Gamma_{i\to f} \sim |\langle\Psi_f|\sum_i z_i|\Psi_i\rangle|^2$$

（E1の場合）



$$\boxed{\Gamma_{\rm tot} = \sum_f \Gamma_{i\to f} \sim \langle\Psi_i|\left(\sum_i z_i\right)^2|\Psi_i\rangle}$$

エネルギー重み付き和則

$$\boxed{S_1 \equiv \sum_f (E_f - E_i)\,\Gamma_{i\to f} = \frac{\hbar^2}{2m}Z}$$

（TRK和則）

和則（わそく）: Sum Rule

$$S_1 \equiv \sum_f (E_f - E_i)\,\Gamma_{i\to f} \sim \sum_f (E_f - E_i)\,|\langle \Psi_f | \sum z_i | \Psi_i \rangle|^2 = \frac{\hbar^2}{2m} Z$$

$$\boxed{\begin{aligned}
\frac{1}{2}\langle\psi_i|[\hat{F},[H,\hat{F}]]|\psi_i\rangle &= \frac{1}{2}\langle\psi_i|\hat{F}(H\hat{F}-\hat{F}H)-(H\hat{F}-\hat{F}H)\hat{F}|\psi_i\rangle \\
&= \langle\psi_i|\hat{F}H\hat{F}-E_i\hat{F}^2|\psi_i\rangle \\
&= \sum_f E_f\,|\langle\psi_i|\hat{F}|f\rangle|^2 - E_i\langle\psi_i|\hat{F}^2|\psi_i\rangle \\
&= \sum_f (E_f - E_i)|\langle f|\hat{F}|\psi_i\rangle|^2
\end{aligned}}$$

$$\uparrow$$

$$\begin{aligned}
\langle\psi_i|\hat{F}H\hat{F}|\psi_i\rangle &= \sum_f \langle\psi_i|\hat{F}H|f\rangle\langle f|\hat{F}|\psi_i\rangle \\
&= \sum_f E_f\langle\psi_i|\hat{F}|f\rangle\langle f|\hat{F}|\psi_i\rangle
\end{aligned}$$

（完全系） $\sum_f |f\rangle\langle f| = 1$

和則（わそく）: Sum Rule

$$\boxed{\sum_f (E_f - E_i)|\langle\psi_f|\hat{F}|\psi_i\rangle|^2 = \frac{1}{2}\langle\psi_i|[\hat{F},[H,\hat{F}]]|\psi_i\rangle}$$

$$[H,\hat{F}] \;=\; \left[\sum_i \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{i,j} v_{ij},\;\; \sum_j z_j\right] = \left[\sum_i \frac{p_i^2}{2m},\;\; \sum_j z_j\right] = \sum_i \frac{-i\hbar p_{zi}}{m}$$

$$\left[\hat{F},[H,\hat{F}]\right] = \frac{-i\hbar}{m}\cdot\left[\sum_j z_j,\;\; \sum_i p_{zi}\right] = \frac{\hbar^2}{m}\sum_i = \frac{\hbar^2}{m} Z$$

$$\boxed{S_1 = \frac{\hbar^2 Z}{2m}}$$

モデルに依らない定数

[TRK (Thomas-Reiche-Kuhn) Sum Rule]

和則（わそく）: Sum Rule

$$\boxed{\Gamma_{\mathrm{tot}} = \sum_f \Gamma_{i\to f} \sim \langle \Psi_i | \left(\sum_i z_i \right)^2 | \Psi_i \rangle}$$

$$\boxed{S_1 \equiv \sum_f (E_f - E_i)\,\Gamma_{i\to f} = \frac{\hbar^2}{2m} Z}$$

和則:

- 励起状態の（ある種の）情報が基底状態の性質のみによって表わされる（励起状態の情報を知っている必要がない）。
- 遷移確率を測ることによって原子核の半径などの情報を得られる。