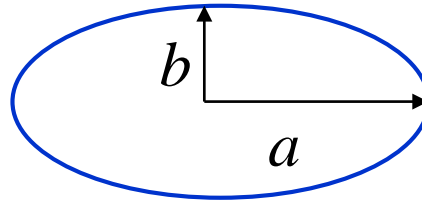


前回の復習

$$B(N, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\text{sym}} \frac{(N - Z)^2}{A} \quad (\text{球形の原子核})$$

原子核を**体積一定のまま**変形してみるとどうなるか(原子核は体積を変えるのが大変なので)?

例) 回転楕円体



$$\begin{aligned} a &= R \cdot (1 + \epsilon) \\ b &= R \cdot (1 + \epsilon)^{-1/2} \\ ab^2 &= R^3 = \text{一定} \end{aligned}$$

変形したときのエネルギー変化:

- 体積項、対称項: 変化せず
- 表面項: 損をする(表面積が大きくなるため)
- クーロン項: 得をする(平均的な陽子間距離が大きくなるため)

$\left\{ \begin{array}{ll} \text{表面項} & \rightarrow \text{球形になる傾向} \\ \text{クーロン項} & \rightarrow \text{変形になる傾向} \end{array} \right\} \rightarrow \text{2つの力の競合}$

$$E_{\text{surf}} = E_{\text{surf}}^{(0)} \left(1 + \frac{2}{5} \epsilon^2 + \dots \right)$$

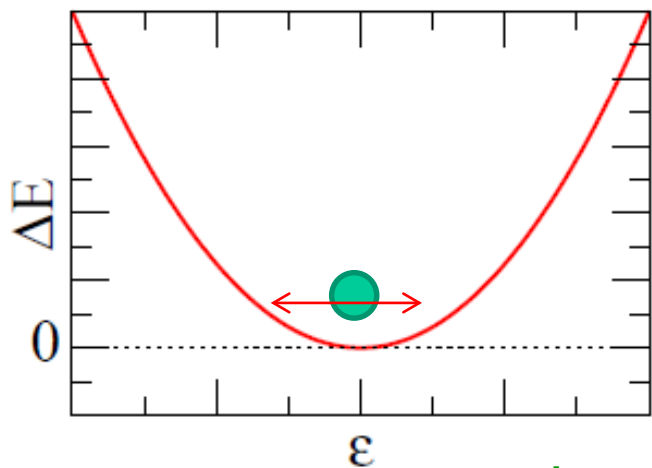
$$E_C = E_C^{(0)} \left(1 - \frac{1}{5} \epsilon^2 + \dots \right)$$



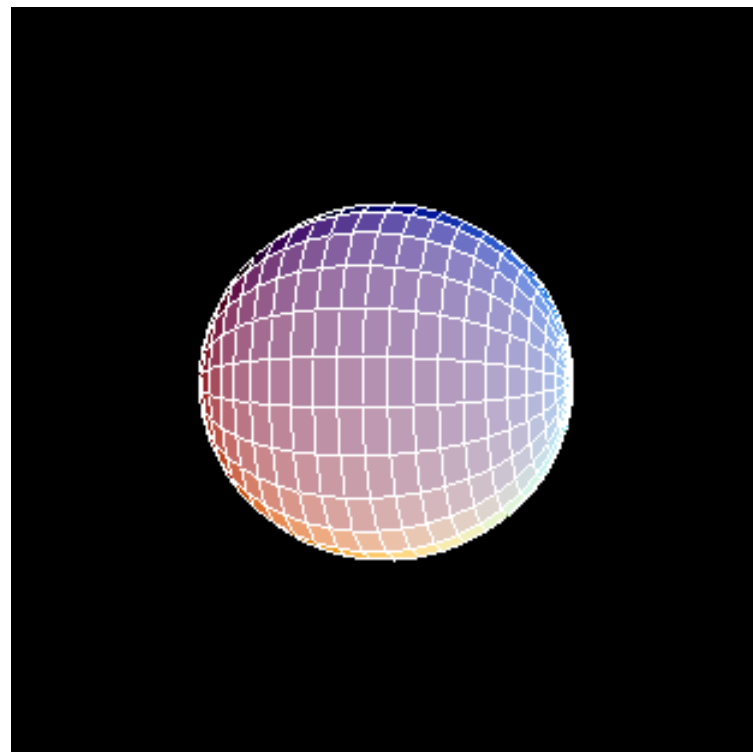
$$\Delta E = E_{\text{surf}}^{(0)} \cdot \frac{2}{5} (1 - x) \epsilon^2$$

$$x \equiv \frac{E_C^{(0)}}{2E_{\text{surf}}^{(0)}}$$

(fissility パラメーター)



極小点まわりの
ゆらぎ



前回のアンケートより

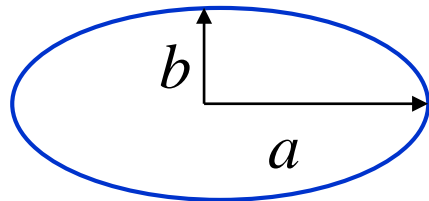
▶ 変形エネルギーの導出方法?

$$E_S(\epsilon) = \sigma \int_S dS \sim E_S^{(0)} \left(1 + \frac{2}{5} \epsilon^2 + \dots \right)$$

$$E_C(\epsilon) = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \frac{e^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \rho(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}') \sim E_C^{(0)} \left(1 - \frac{1}{5} \epsilon^2 + \dots \right)$$

✓ 表面項は回転楕円体の表面積を計算:

回転楕円体

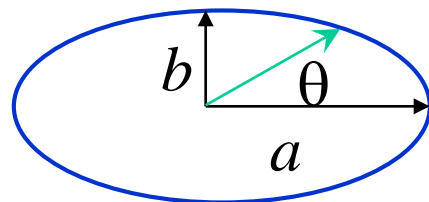


$$S = 4\pi R^2 \left(1 + \frac{2}{5} \epsilon^2 + \dots \right)$$

✓ クーロン項は以下の密度を仮定して積分を実行:

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_0 \theta(R(\theta) - r)$$

回転楕円体内
が一様密度

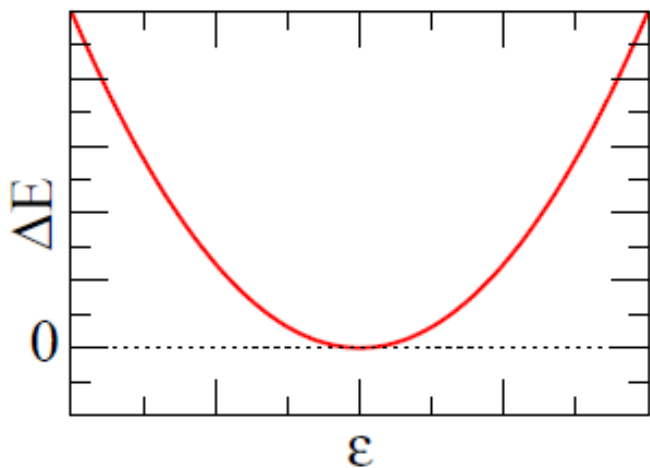


$$R(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta}{b^2}}}$$

- 変形したときのエネルギーで1次項がでないのは何ですか？
- 変形したときのエネルギーを見ると、エネルギー極小点では一般に変形している？
- 変形したときのエネルギーで3次項があってもいいのですか？

$$E(\epsilon) = E_S^{(0)} + E_C^{(0)} + \left(\frac{2}{5} E_S^{(0)} - \frac{1}{5} E_C^{(0)} \right) \epsilon^2 - \frac{4}{105} \left(E_S^{(0)} + E_C^{(0)} \right) \epsilon^3 + \dots$$

✓ 古典的な液滴 → 球形で安定

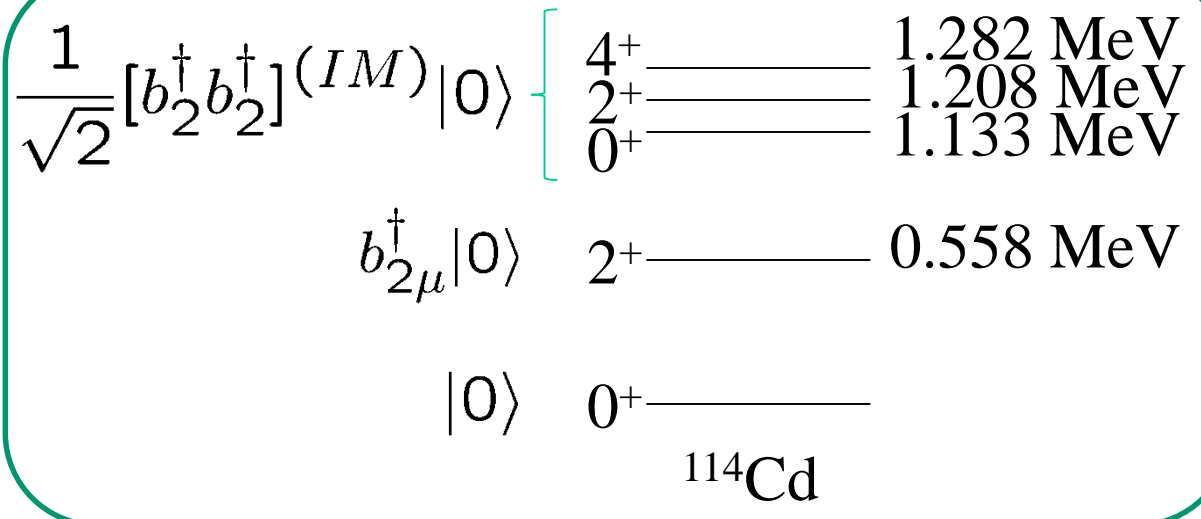


→ $\epsilon = 0$ の近傍で2次曲線

$$E'(\epsilon = 0) = 0$$

1次項さえゼロであれば、3次項があってもこの条件は満たされる。

➤ 2フォノン状態で、 1^+ と 3^+ 状態が出来ない理由をもう少し詳しく



➤ 2フォノン状態、 1^+ と 3^+ 状態が出来ない理由をもう少し詳しく

$$\begin{array}{l}
 4^+ \text{-----} \\
 2^+ \text{=====} \\
 0^+ \text{=====}
 \end{array}
 \quad |IM\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [b_2^\dagger b_2^\dagger]^{(IM)} |0\rangle$$

$$\begin{array}{l}
 2^+ \text{-----} \\
 0^+ \text{-----}
 \end{array}
 \quad |2\mu\rangle = b_{2\mu}^\dagger |0\rangle$$


$$[b_2^\dagger b_2^\dagger]^{(IM)} = \sum_{\mu, \mu'} \langle 2\mu 2\mu' | IM \rangle b_{2\mu}^\dagger b_{2\mu'}^\dagger$$

➤ 2フォノン状態で、 1^+ と 3^+ 状態が出来ない理由をもう少し詳しく

$$\begin{array}{l}
 4^+ \text{-----} \\
 2^+ \text{=====} \\
 0^+ \text{=====}
 \end{array}
 \quad |IM\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [b_2^\dagger b_2^\dagger]^{(IM)} |0\rangle$$

$$\begin{array}{l}
 2^+ \text{-----} \\
 0^+ \text{-----}
 \end{array}
 \quad |2\mu\rangle = b_{2\mu}^\dagger |0\rangle$$

$$\begin{aligned}
 [b_2^\dagger b_2^\dagger]^{(IM)} &= \sum_{\mu, \mu'} \langle 2\mu 2\mu' | IM \rangle b_{2\mu}^\dagger b_{2\mu'}^\dagger \\
 &= \sum_{\mu, \mu'} \langle 2\mu' 2\mu | IM \rangle b_{2\mu'}^\dagger b_{2\mu}^\dagger = b_{2\mu}^\dagger b_{2\mu'}^\dagger \\
 &= (-1)^I \langle 2\mu 2\mu' | IM \rangle \quad (\text{ボソン}) \\
 &= (-1)^I \sum_{\mu, \mu'} \langle 2\mu 2\mu' | IM \rangle b_{2\mu}^\dagger b_{2\mu'}^\dagger
 \end{aligned}$$


 名前をつけかえ

➡ 偶数の I だけが許される ($I=0, 2, 4$)

➤ 流体と比較していたのは何のためですか？

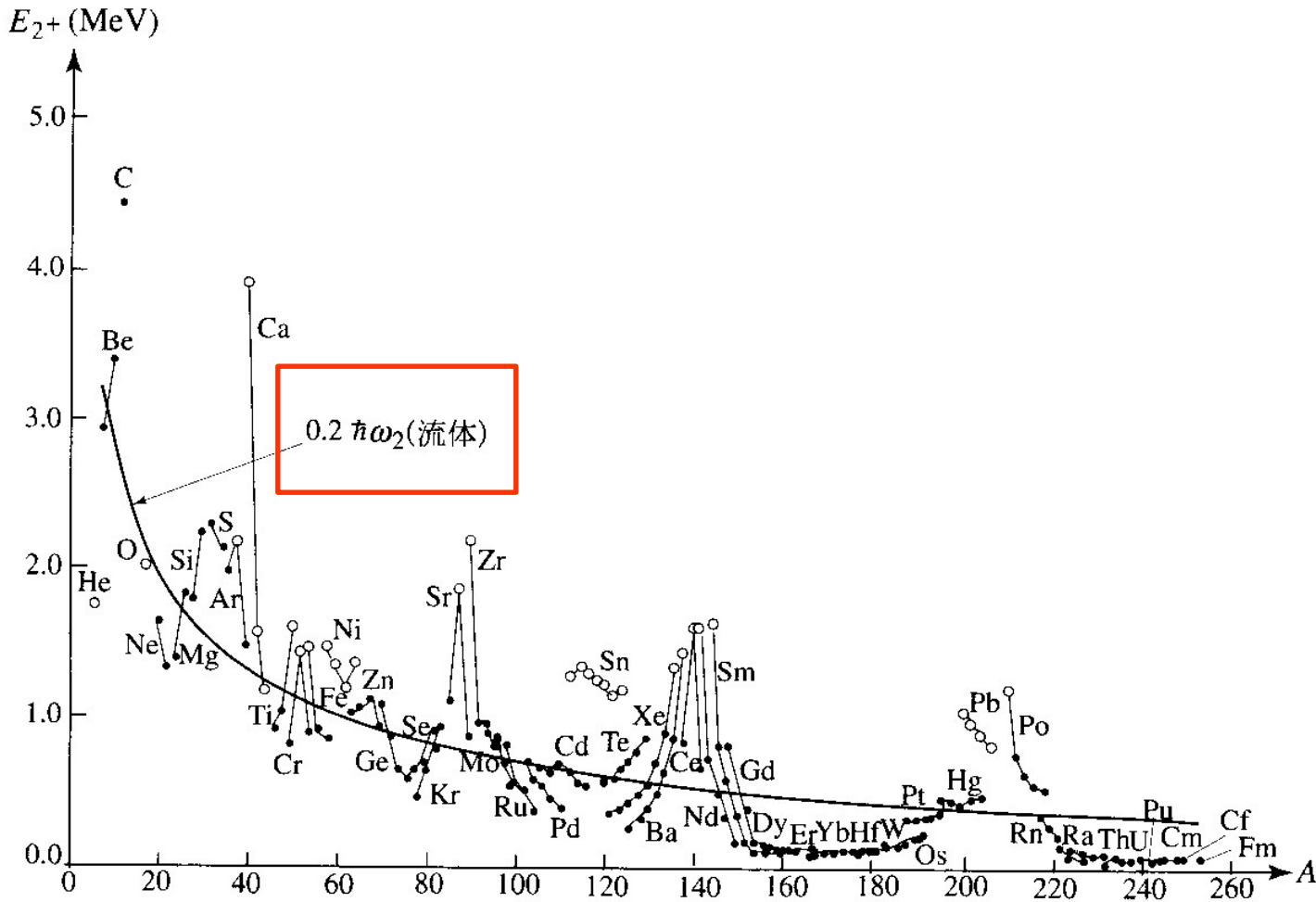


図 3.2 偶々核の第 1 励起 2^+ 状態の励起エネルギー

目の付け所がいいですね！

$$H = \frac{\pi^2}{2D} + \frac{1}{2}C\epsilon^2$$

→ D と C が分かれば、 $\omega = \sqrt{\frac{C}{D}}$

$$\Delta E \sim \left(\frac{2}{5}E_S^{(0)} - \frac{1}{5}E_C^{(0)} \right) \epsilon^2 \quad \text{から } C \text{ が分かる。}$$

D は、原子核の振動に伴う内部の動きを古典的な非圧縮性渦ナシ流体とみなし、流体の運動エネルギーを計算することで見積もれる(流体模型)

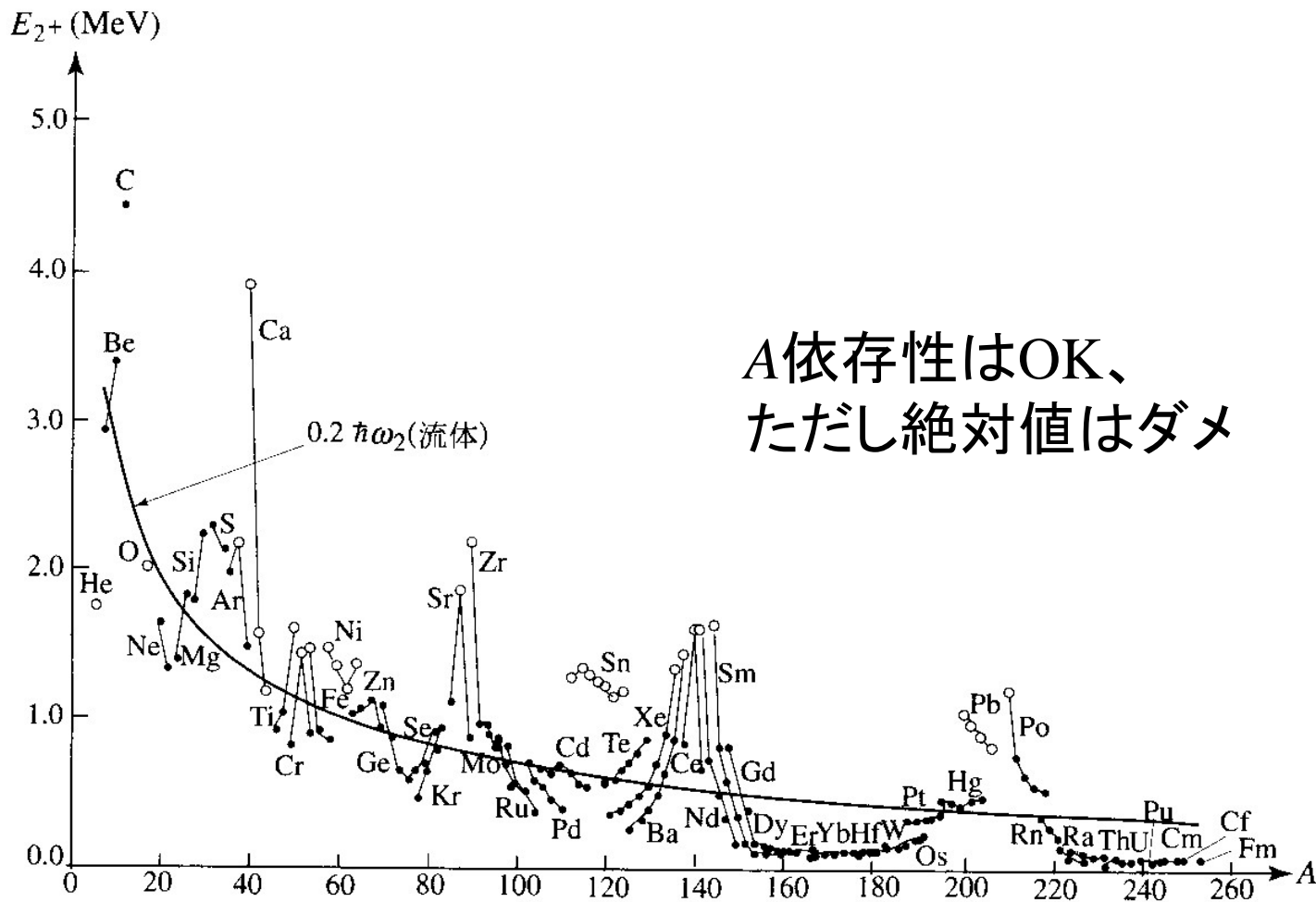
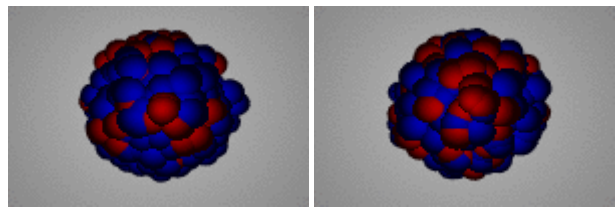


図 3.2 偶々核の第 1 励起 2^+ 状態の励起エネルギー

Aとともに振動のエネルギーが下がっていくのが流体模型を使うと理解できる。

➤ アイソスカラー、アイソベクトルで振動状態を分類しているのは何故？



✓ 振動の微視的理論

外場により原子核を揺らす

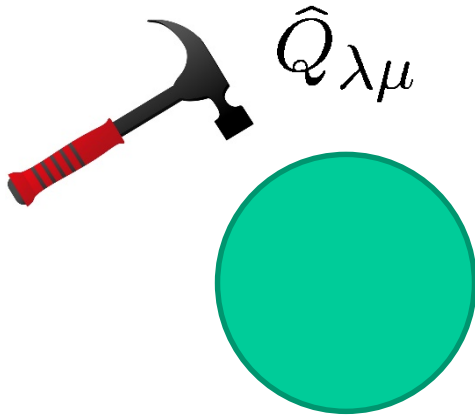


$$a^\dagger(l, s, t_z) a(l', s', t'_z)$$

2つのアイソスピンを合成すると、
 $T=0$ (アイソスカラー) または $T=1$ (アイソベクトル)
の足し合わせ

➤ アイソスカラー、アイソベクトルで振動状態を分類しているときに
スピンはどうなっているの？

✓ 外場により原子核を揺らす

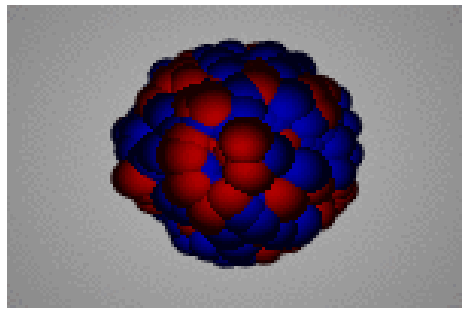
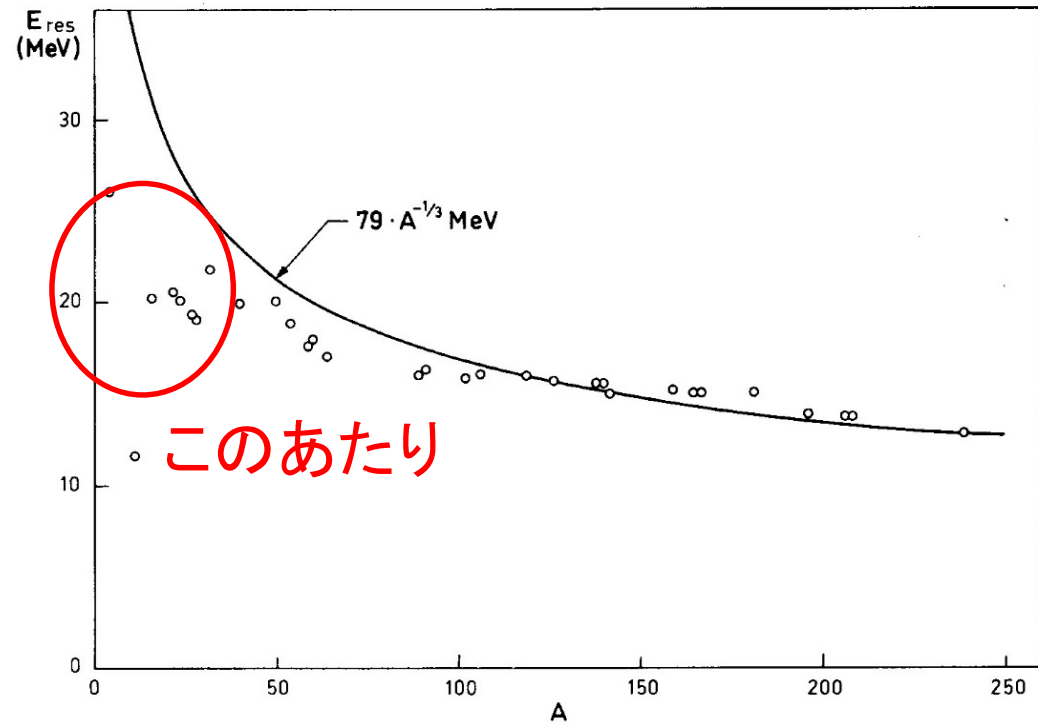


(表面振動は原子核に外から
刺激(外場)を与えて励起する)

揺らすときにスピンを変えるかどうか。

* よくあるのは、スピン状態を変えずに揺らす

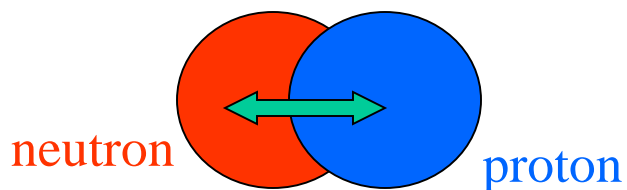
➤ 双極子運動のグラフで $A^{-1/3}$ からずれているのは何故？



いいところに気が付きましたね！

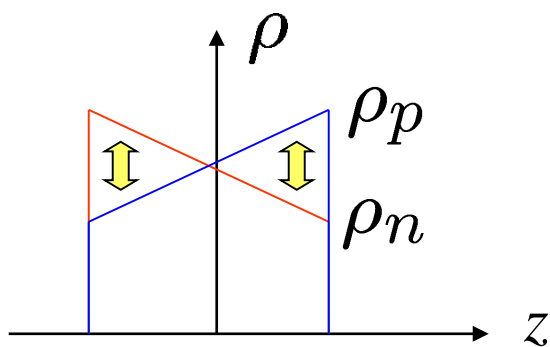
2つの振動の仕方

●Goldhaber-Teller タイプ



$$\Rightarrow \hbar\omega \sim A^{-1/6}$$

●Steinwedel-Jensen タイプ



$$\Rightarrow \hbar\omega \sim A^{-1/3}$$

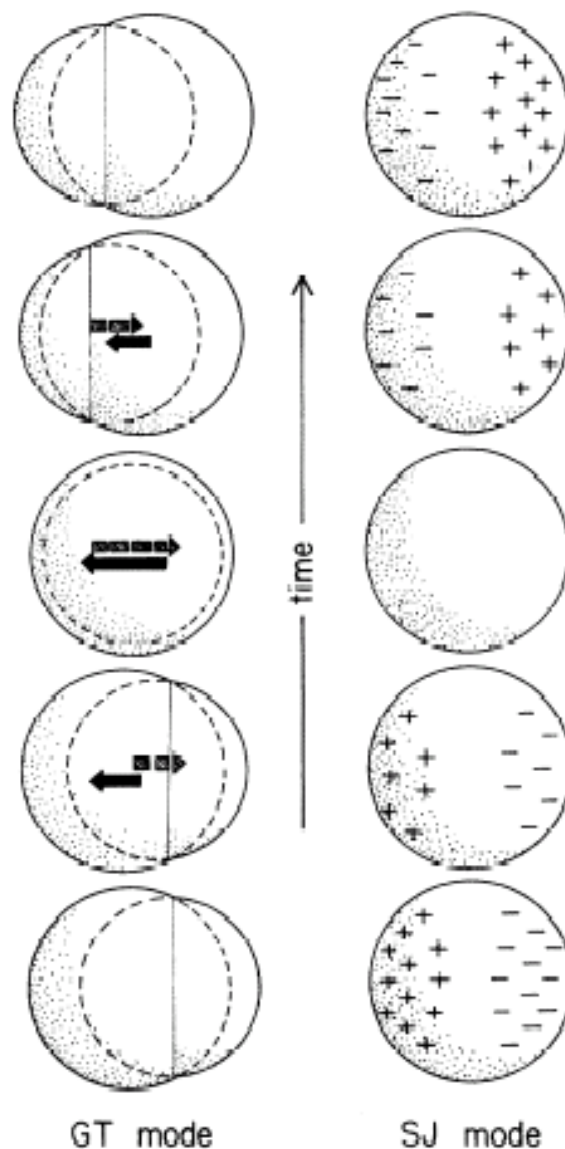
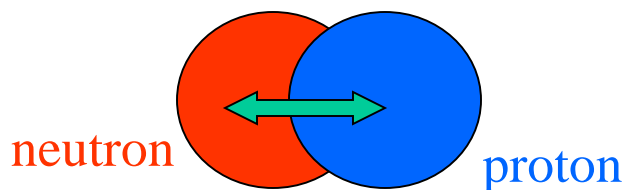


FIG. 1. Schematic drawings that serve to illustrate the general features of the Goldhaber-Teller (Ref. 3) (GT) and Steinwedel-Jensen (Ref. 4) (SJ) dipole modes.

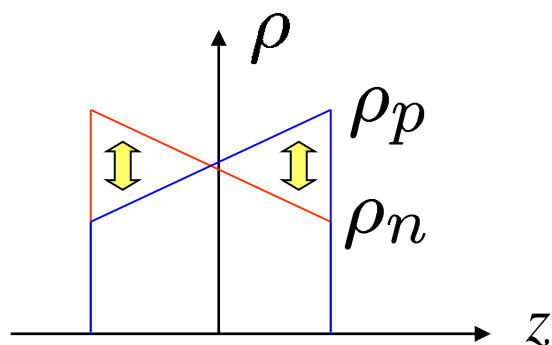
2つの振動の仕方

●Goldhaber-Teller タイプ

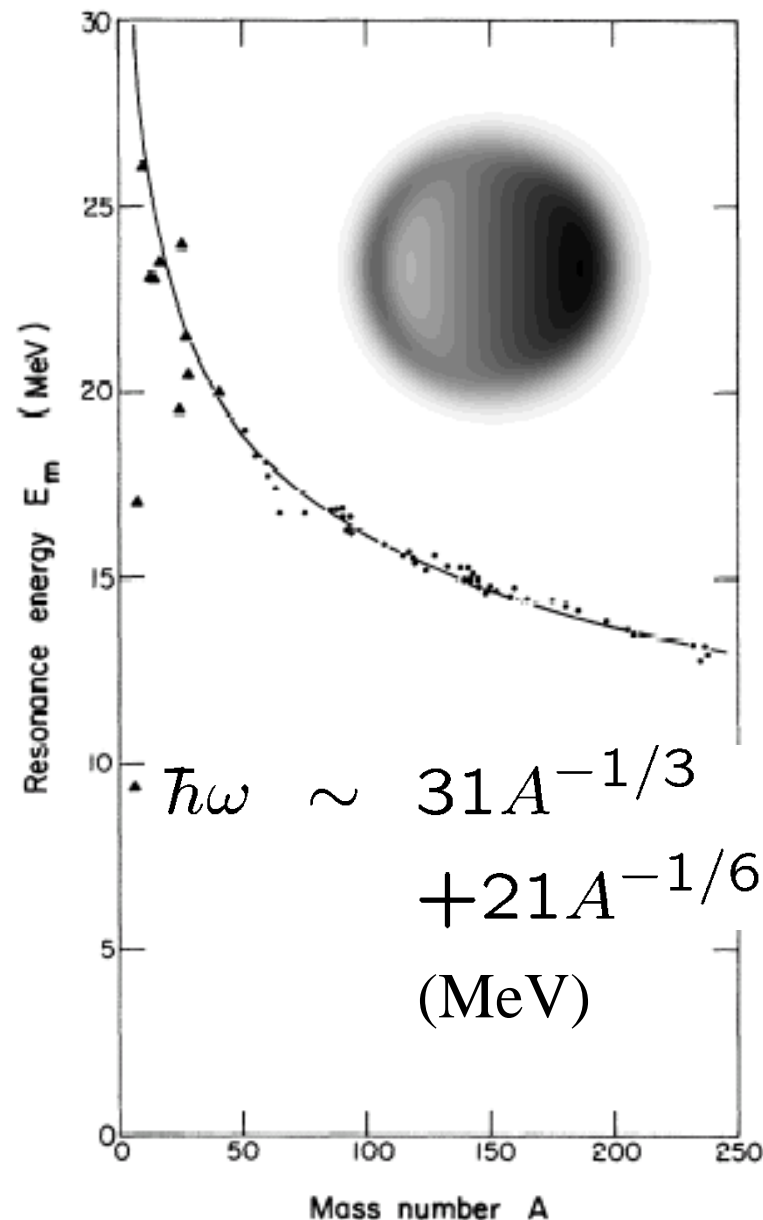


$$\Rightarrow \hbar\omega \sim A^{-1/6}$$

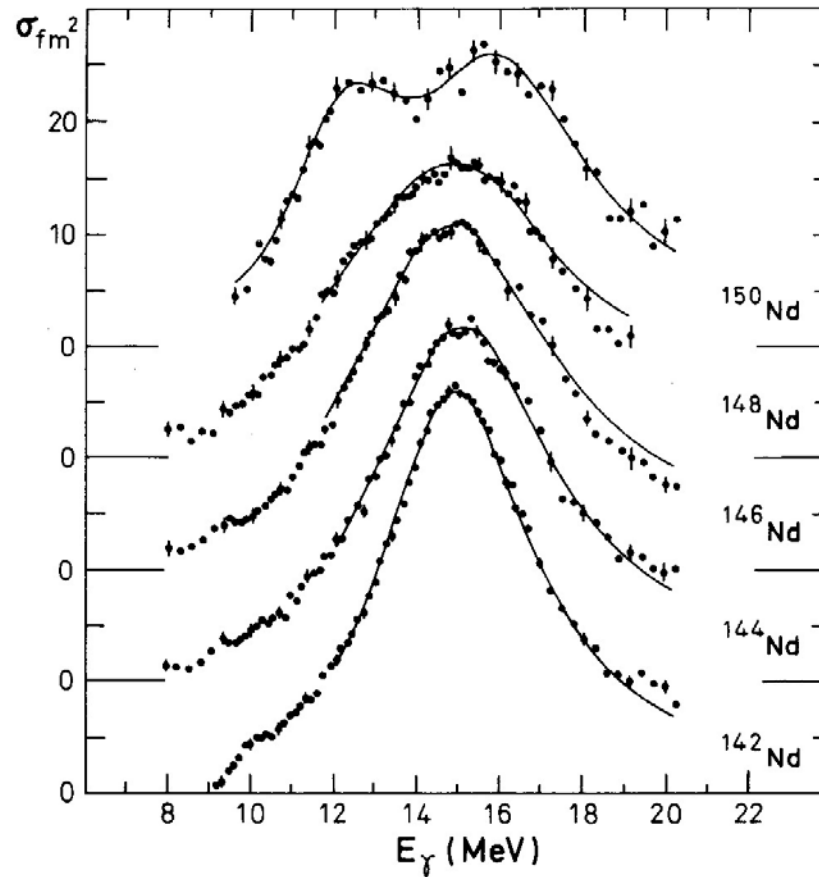
●Steinwedel-Jensen タイプ



$$\Rightarrow \hbar\omega \sim A^{-1/3}$$



➤ 基底状態で原子核が変形するというのがイメージできなかった

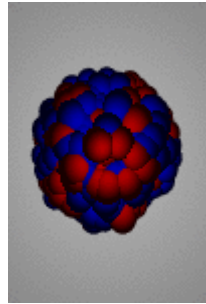
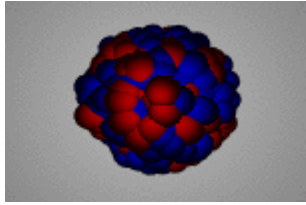


✓ 殻効果のため(後の授業でもう少し詳しく)

変形した方が殻エネルギー(魔法数と関係)が大きくなり、エネルギー的に得になることがある。

変形の効果

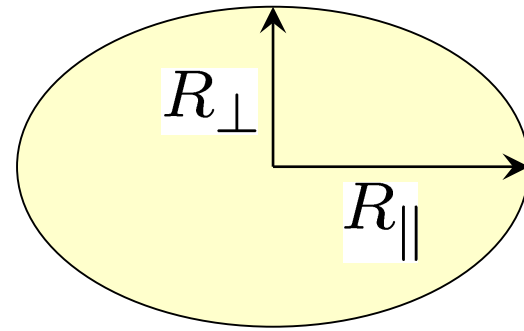
✓ 原子核が球形のとき:



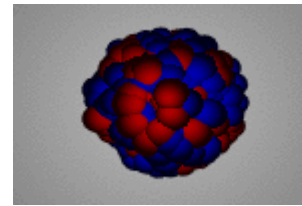
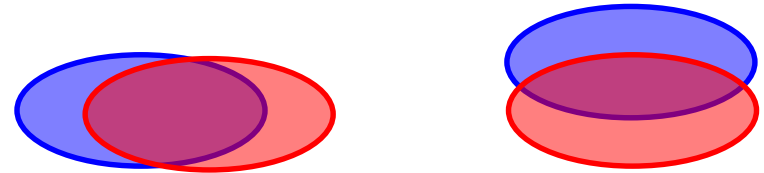
同じエネルギー

どの方向に振動しても
同じエネルギー
(x, y, z 方向の3成分)

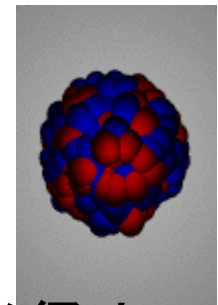
$$\hbar\omega \sim A^{-1/3} \sim 1/R$$



✓ 原子核が変形したとき:



半径大
→エネルギー小

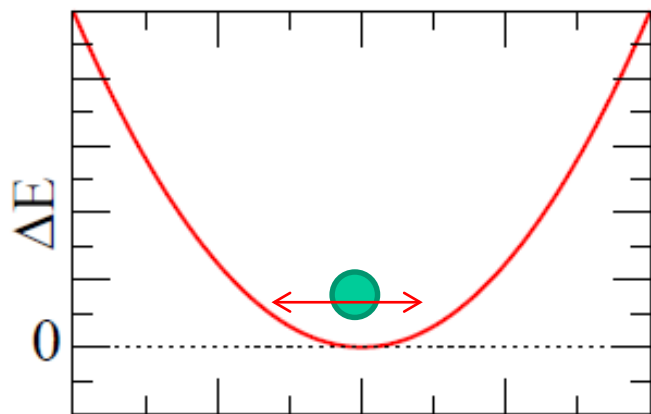


半径小
→エネルギー大

2つのエネルギーが分離して
見える

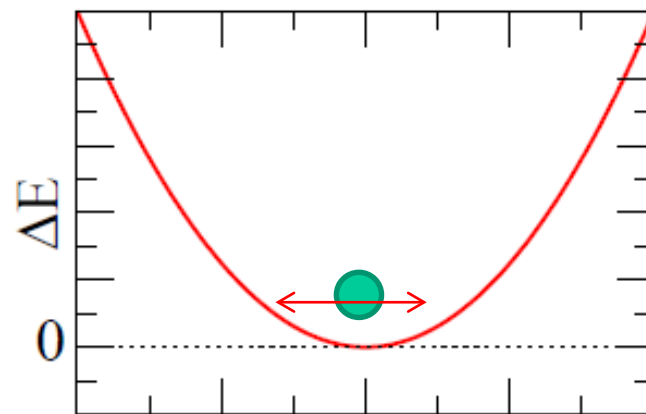
イメージ的には

球形核



ϵ
↑
 $\epsilon = 0$

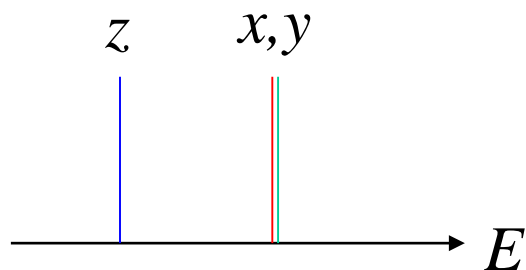
変形核



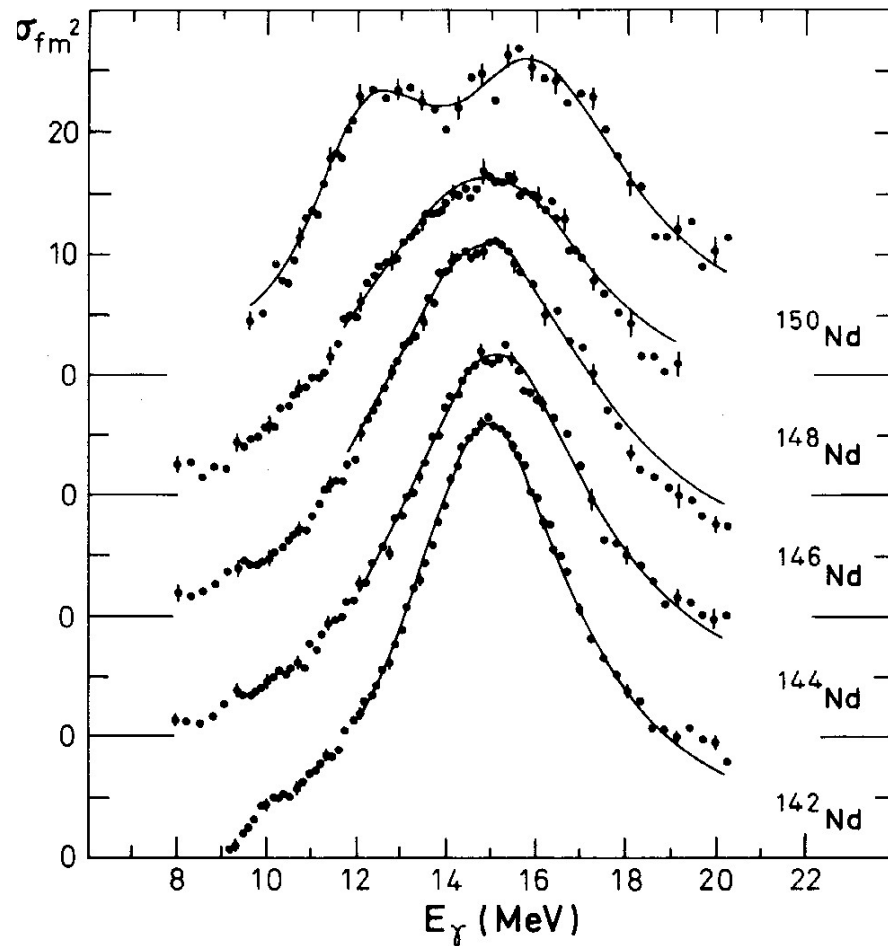
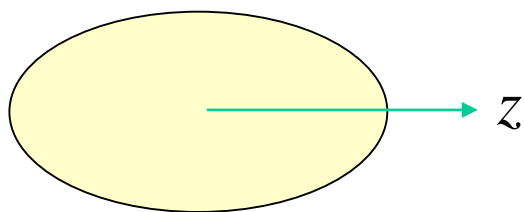
ϵ
↑
 $\epsilon \neq 0$

➤ 軸対称ではない変形するとき、ピークが3つに分かれることはあるのか？

(プロレート変形)



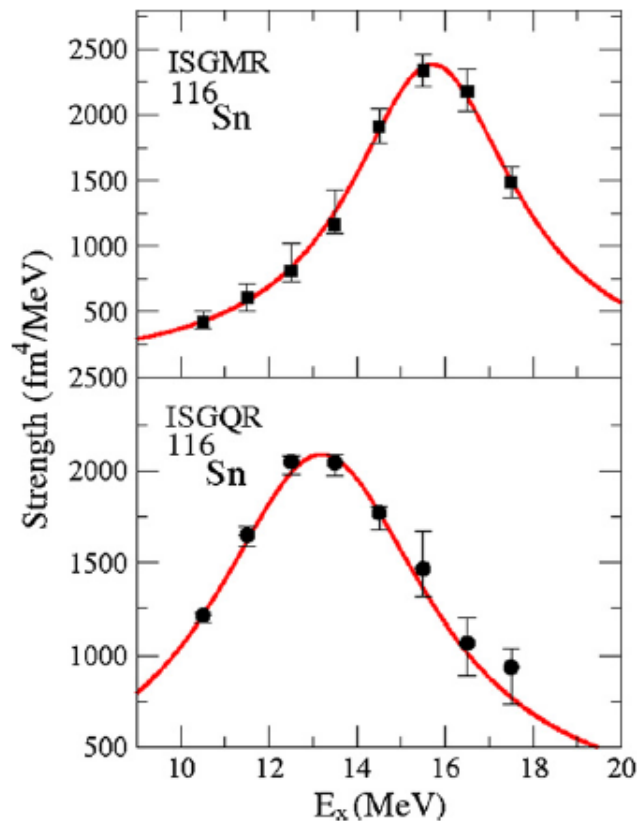
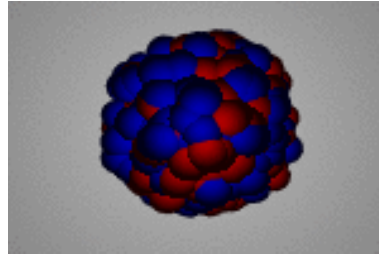
変形核



いい質問です！

原理的には yes。ただ、各ピークに幅があるから、分離されて見えない。

- 原子核の体積を変える振動に大きなエネルギーが必要とのことだが、どのくらいなのか?あまり大きすぎると原子核がバラバラになってしまう?



116Sn で 16 MeV くらい。

全束縛エネルギー (988.7 MeV) に
比べたら十分小さい。

ただし、基底状態近傍のダイナミクス
(~ 1-2 MeV) のスケールからすると十分
大きい。

- 核物質の状態方程式と中性子星の関係についてもう少し詳しく教えてください

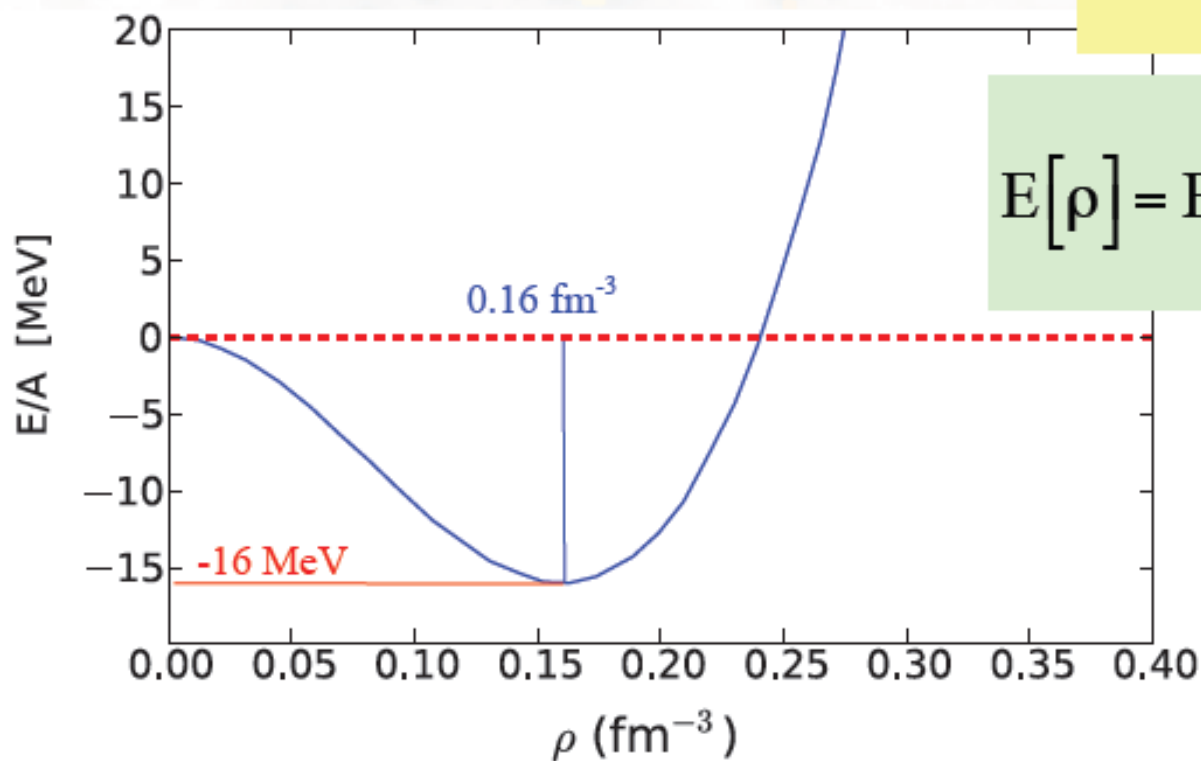
核物質の状態方程式

原子核がどのくらい固いのか

非圧縮度

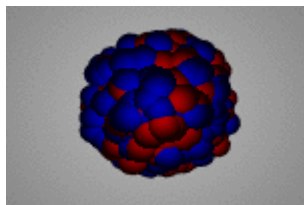
$$K_{\infty} = 9\rho^2 \left. \frac{d^2 [E(\rho) / \rho]}{d\rho^2} \right|_{\rho_0}$$

$$E[\rho] = E[\rho_0] + \frac{1}{18} K_{\infty} \left(\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right)^2$$



* 中性子星の
大きさとも関係

slide: Carlos Bertulani

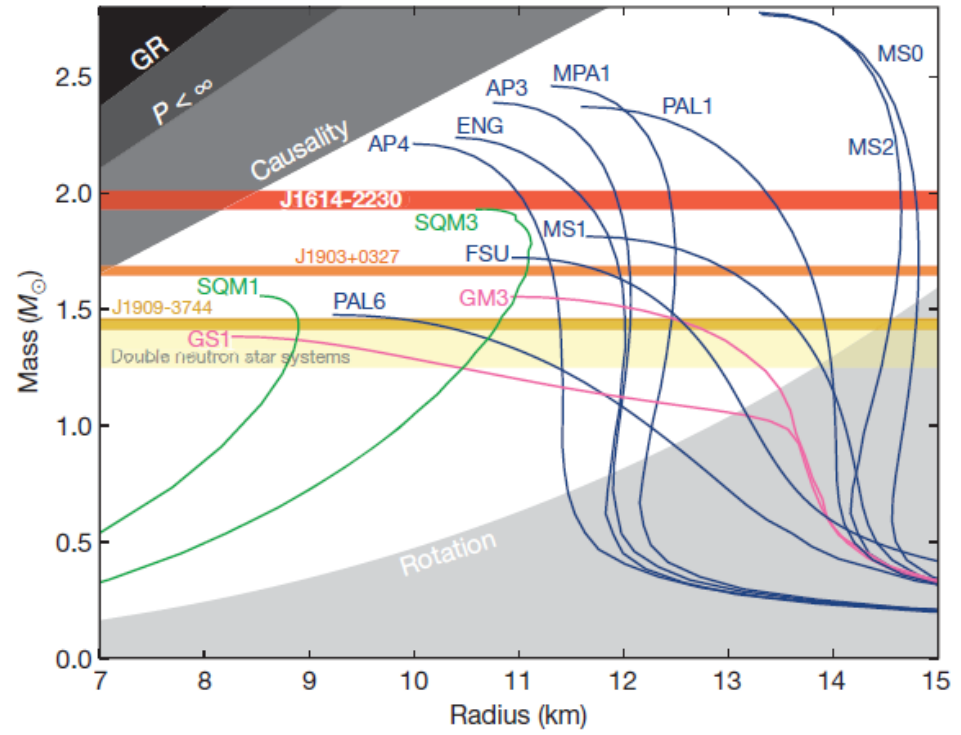
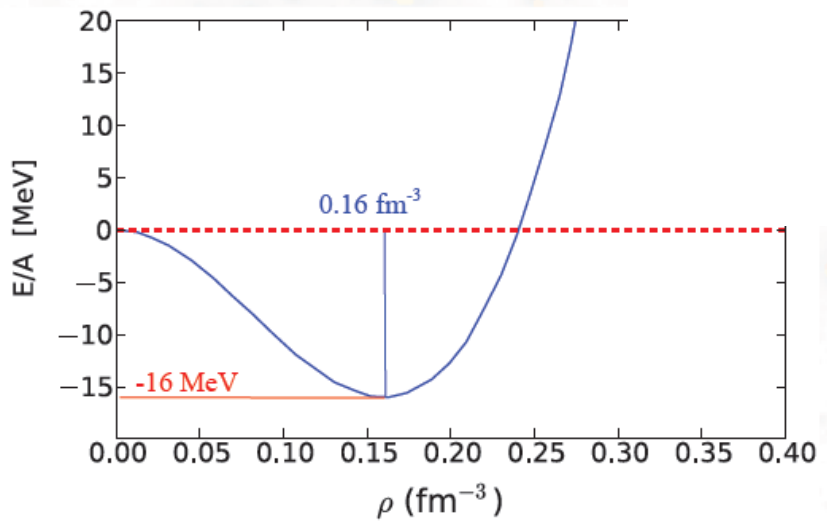


$$E_{\text{ISGMR}} \sim \sqrt{\frac{\hbar^2 K}{m \langle r^2 \rangle}}$$

J.P. Blaizot,
Phys. Rep. 64 ('80) 171

原子核や中性子星の「固さ」とは

✓ 原子核の密度を変えるのにどれだけエネルギーが必要か、ということ

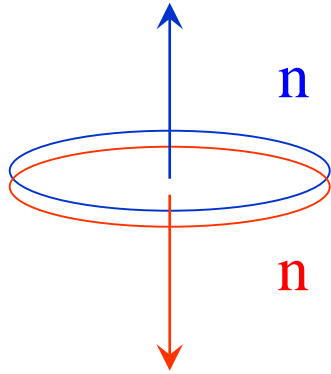


重力でぎゅうぎゅう押されても
適当な半径を維持する

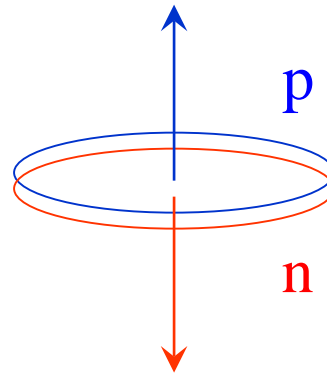


原子核が「固い」ほど大きな質量
を持つ中性子星ができる

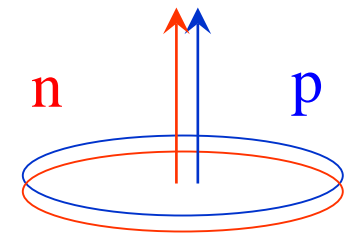
- 重い核では pn はペアを組まないという説明があったが、
テンソル力で安定化するということはないのか？



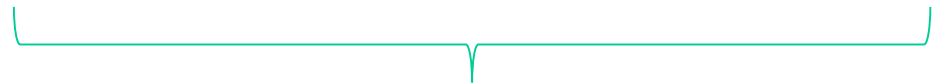
$I = 0$ のペアを作る



pn でペア

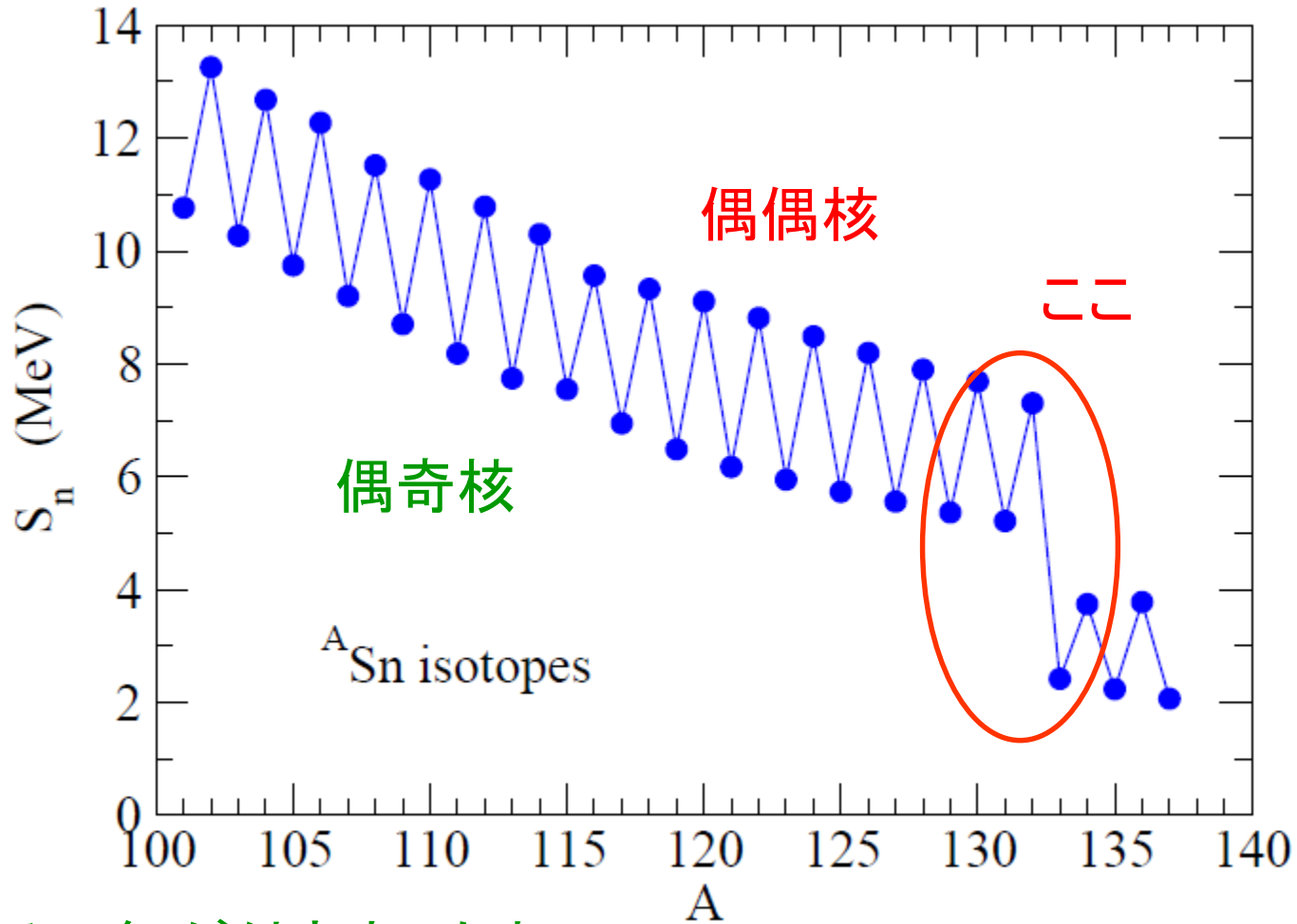


テンソル力



ただし、p と n が違う軌道に入ると
波動関数の空間的な重なりが小さく
なり、エネルギーをかせがない

➤ A~130 のあたりで S_n がぐっと下がるのは何故ですか？



いいところに気が付きましたね！

ここは $A=132 \rightarrow \text{Sn}$ は $Z=50$ なので、 $N=82$ (魔法数)

* $A=133$ から上の軌道が埋まってくる(詳しくは殻模型の回に)

➤ ^{235}U と ^{238}U の核分裂のしやすさの違いの原因は?

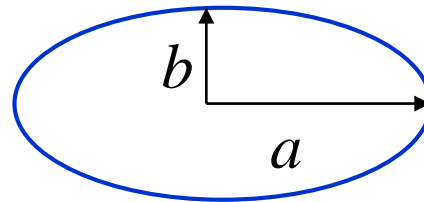
✓ 今日の授業で説明します。

原子核の表面振動

$$B(N, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\text{sym}} \frac{(N - Z)^2}{A} \quad (\text{球形の原子核})$$

原子核を**体積一定のまま**変形してみるとどうなるか(原子核は体積を変えるのが大変なので)?

例) 回転楕円体



$$\begin{aligned} a &= R \cdot (1 + \epsilon) \\ b &= R \cdot (1 + \epsilon)^{-1/2} \\ ab^2 &= R^3 = \text{一定} \end{aligned}$$

変形したときのエネルギー変化:

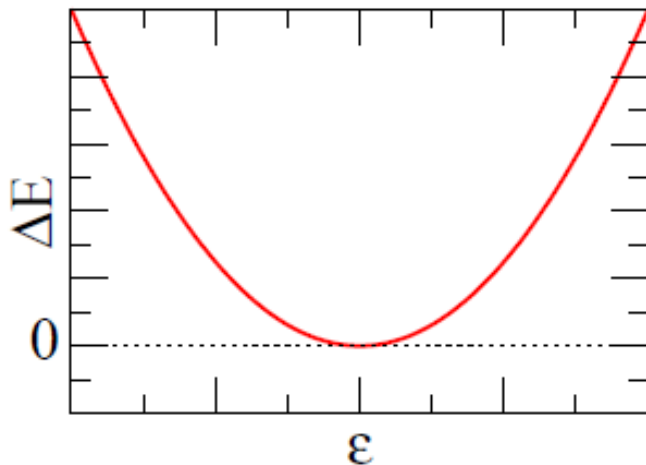
- 体積項、対称項: 変化せず
- 表面項: 損をする(表面積が大きくなるため)
- クーロン項: 得をする(平均的な陽子間距離が大きくなるため)

$\left\{ \begin{array}{ll} \text{表面項} & \rightarrow \text{球形になる傾向} \\ \text{クーロン項} & \rightarrow \text{変形になる傾向} \end{array} \right\} \rightarrow \text{2つの力の競合}$

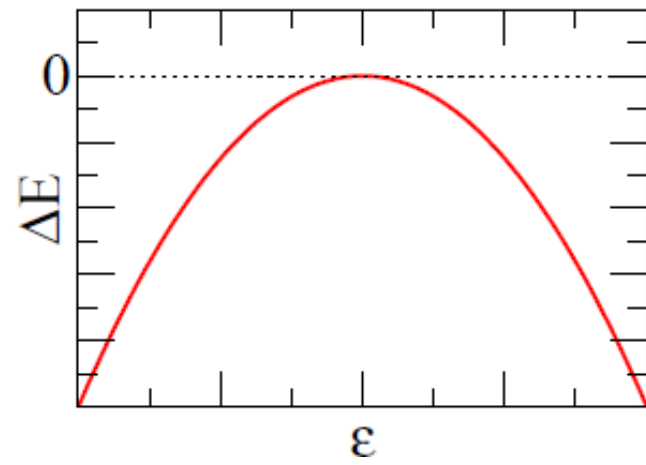
$$\begin{aligned}
 & \curvearrowright E_S + E_C - E_S^{(0)} - E_C^{(0)} \\
 & = \left(\frac{2}{5} E_S^{(0)} - \frac{1}{5} E_C^{(0)} \right) \epsilon^2 - \frac{4}{105} \left(E_S^{(0)} + E_C^{(0)} \right) \epsilon^3 + \dots
 \end{aligned}$$

■ まずは2次から

$$\frac{2}{5} E_S^{(0)} > \frac{1}{5} E_C^{(0)} \quad \text{だと}$$



$$\frac{2}{5} E_S^{(0)} < \frac{1}{5} E_C^{(0)} \quad \text{だと}$$



→ 核分裂に対して不安定

フィシリティ・パラメーター

$$\frac{2}{5} E_S^{(0)} - \frac{1}{5} E_C^{(0)} = \frac{2}{5} E_S^{(0)} \left(1 - \frac{E_C^{(0)}}{2E_S^{(0)}} \right) \equiv \frac{2}{5} E_S^{(0)} (1 - x)$$

$$\begin{aligned}
 & \curvearrowright E_S + E_C - E_S^{(0)} - E_C^{(0)} \\
 & = \left(\frac{2}{5} E_S^{(0)} - \frac{1}{5} E_C^{(0)} \right) \epsilon^2 - \frac{4}{105} \left(E_S^{(0)} + E_C^{(0)} \right) \epsilon^3 + \dots
 \end{aligned}$$

■ まずは2次から

$$\frac{2}{5} E_S^{(0)} - \frac{1}{5} E_C^{(0)} = \frac{2}{5} E_S^{(0)} \left(1 - \frac{E_C^{(0)}}{2E_S^{(0)}} \right)$$

フィシリティ(fissility)パラメーター: x

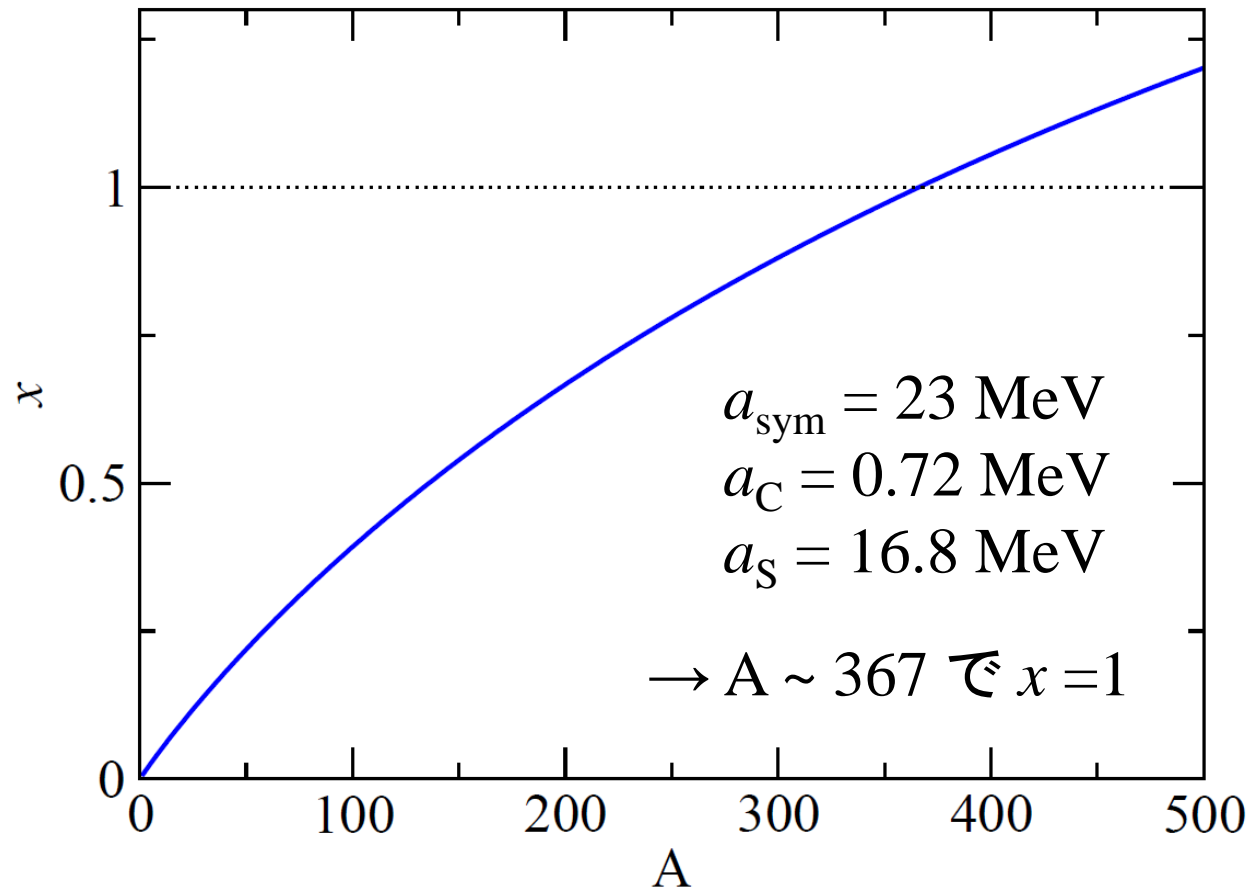
$$E_S^{(0)} = +a_S A^{2/3} \sim 20 A^{2/3} \quad (\text{MeV})$$

$$E_C^{(0)} = +a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} \sim 0.751 \frac{Z^2}{A^{1/3}} \quad (\text{MeV})$$

$$\longrightarrow x \equiv \frac{E_C^{(0)}}{2E_S^{(0)}} = \frac{a_C}{2a_S} \cdot \frac{Z^2}{A} \sim \frac{1}{53.3} \cdot \frac{Z^2}{A}$$

$$Z = \frac{4a_{\text{sym}}}{2a_{\text{C}}/A^{1/3} + 8a_{\text{sym}}/A} \quad \leftarrow \quad \left. \frac{\partial m}{\partial Z} \right|_{A=\text{const.}} = 0$$

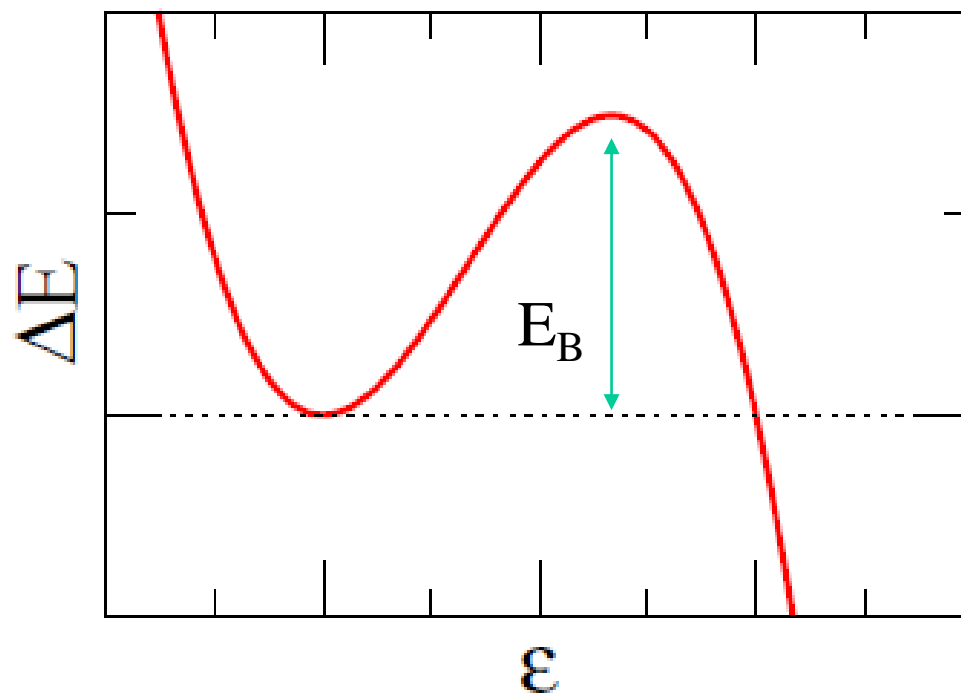
$$x \equiv \frac{E_{\text{C}}^{(0)}}{2E_{\text{S}}^{(0)}} = \frac{a_{\text{C}}}{2a_{\text{S}}} \cdot \frac{Z^2}{A}$$



核分裂について

■ 次に3次まで

$$\Delta E = E_S^{(0)} \left\{ \frac{2}{5}(1-x)\epsilon^2 - \frac{4}{105}(1+2x)\epsilon^3 + \dots \right\}$$



表面エネルギーとクーロンエネルギーの競合によるポテンシャル障壁

ポテンシャル障壁の高さ (^{236}U の場合)

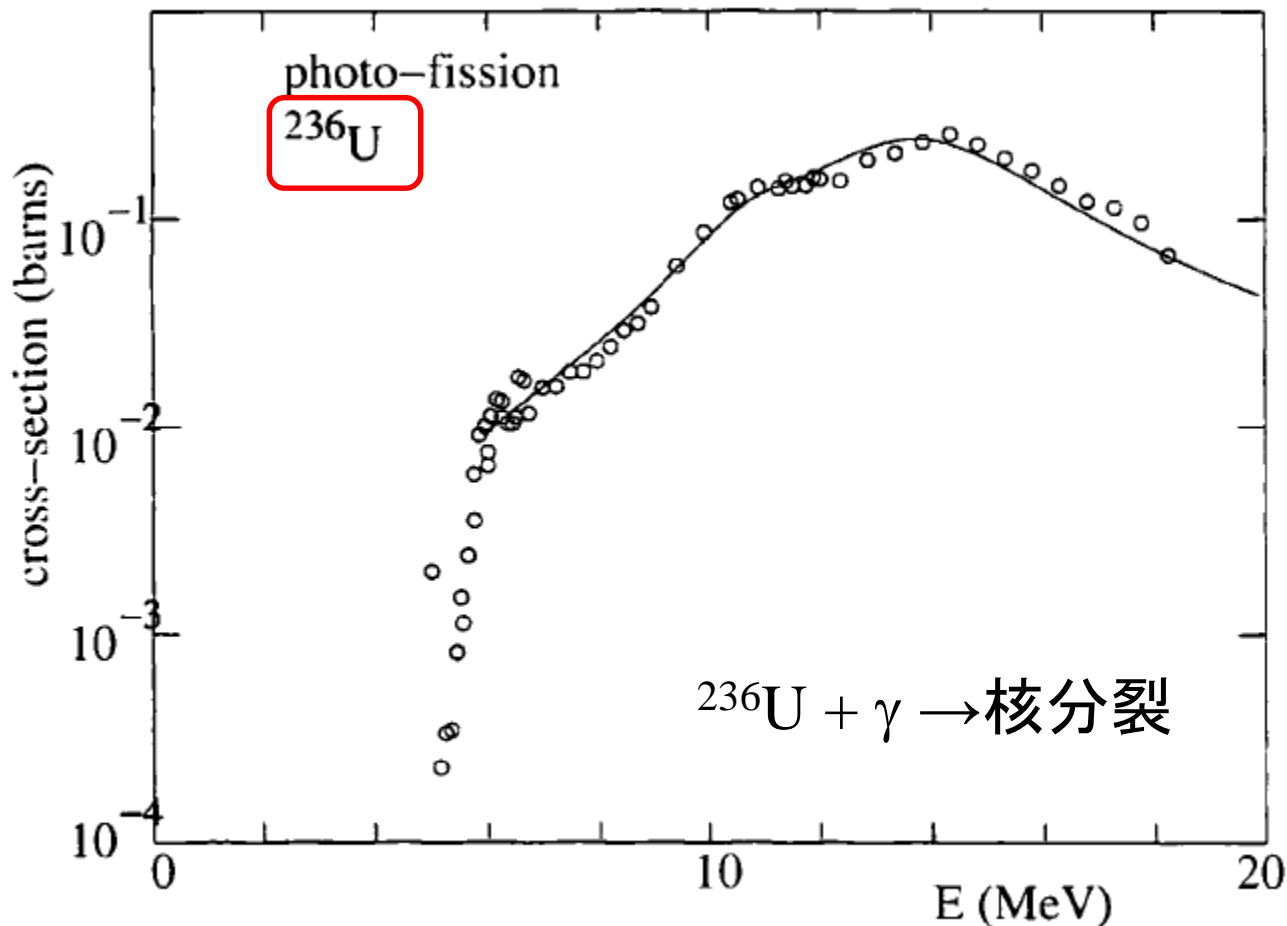
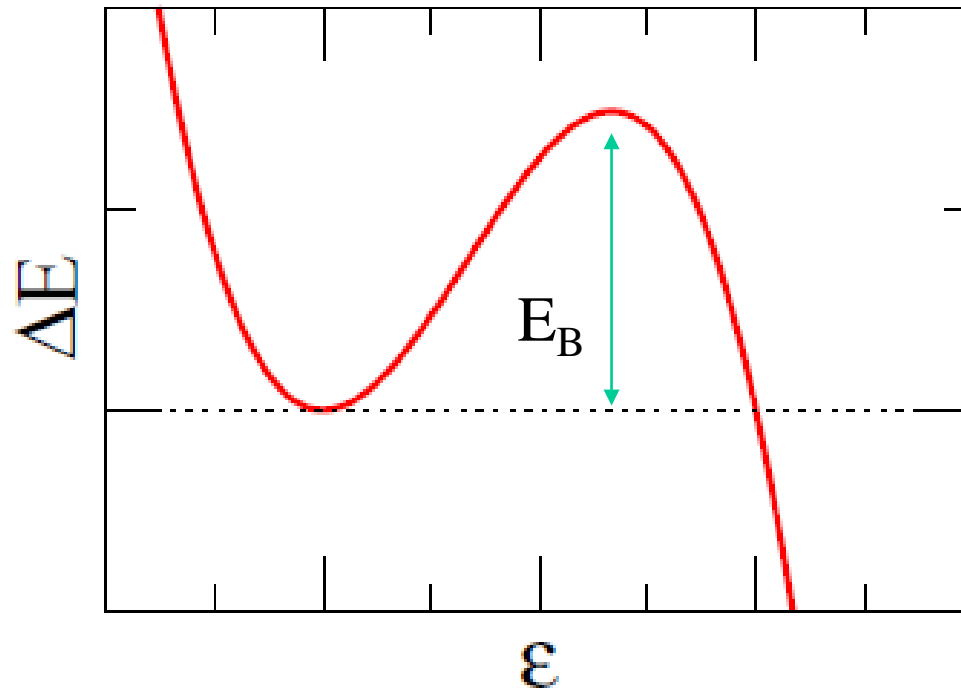


Fig. 6.5. Cross-section for $\gamma^{236}\text{U} \rightarrow \text{fission}$ [30].

photo-fission (光核分裂)の断面積: フォトンのエネルギーが 5.7 MeV のあたりから断面積が急に立ち上がる (障壁の高さが 5.7 MeV くらい)

$$\Delta E = E_S^{(0)} \left\{ \frac{2}{5}(1-x)\epsilon^2 - \frac{4}{105}(1+2x)\epsilon^3 + \dots \right\}$$



$$E_B = \frac{98}{15} \cdot \frac{(1-x)^3}{(1+2x)^2} \cdot E_S^{(0)}$$

重い核ほど障壁は低くなる

← クーロンの効果が大きくなる

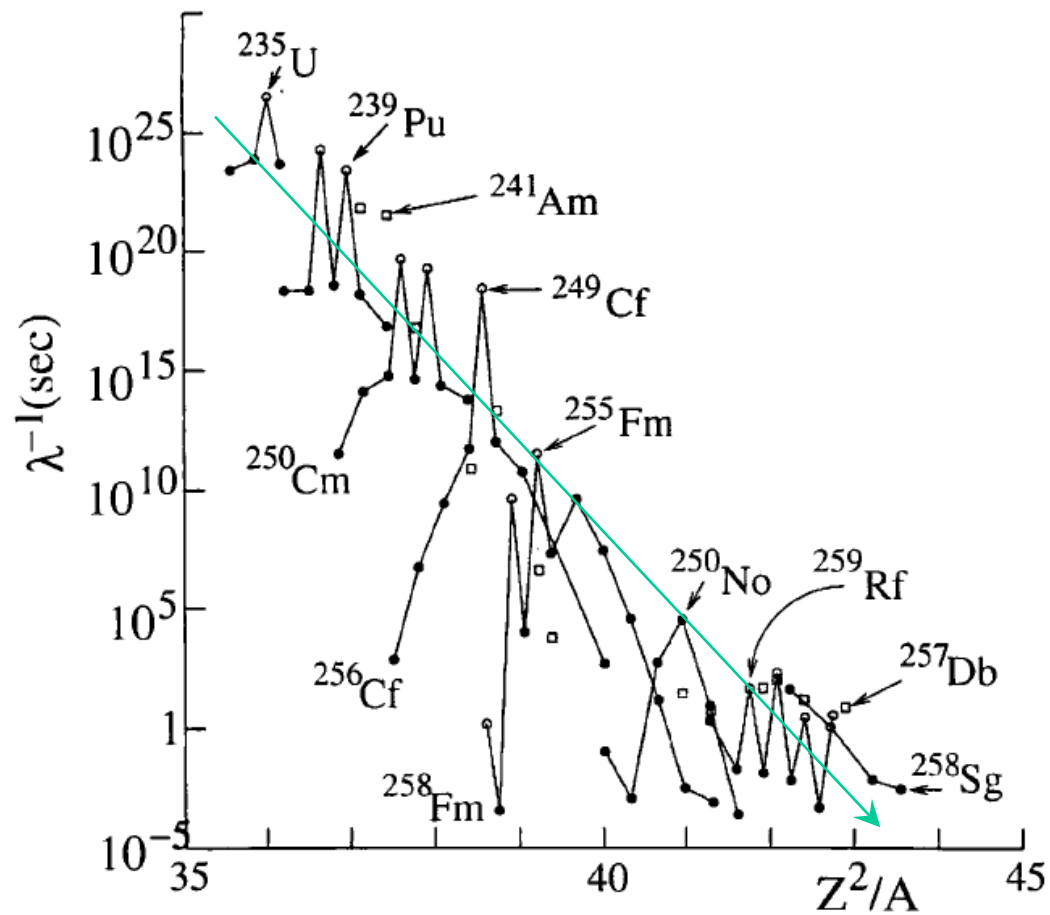
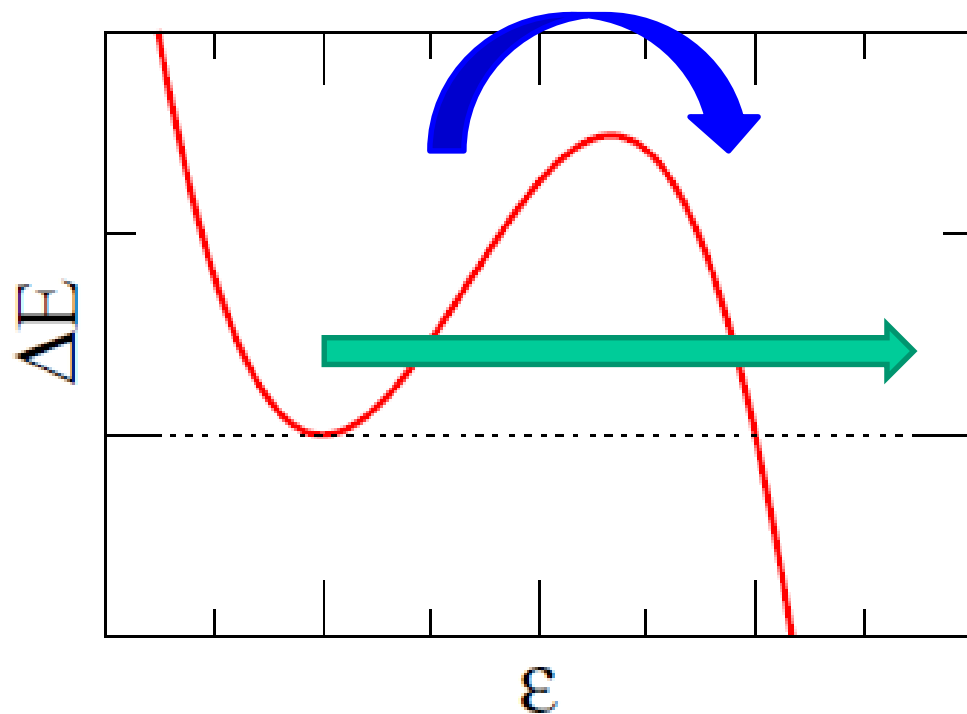


Fig. 6.4. Spontaneous fission lifetimes as a function of the fission parameter Z^2/A for selected nuclei. Circles are for even- Z nuclei. filled circles for even-even nuclei and open circles for even-odd nuclei. Squares are for odd- Z nuclei.

自発核分裂の寿命: Z^2/A が大きくなるほど、核分裂障壁が低くなって寿命が短くなる

2種類の核分裂



①誘起核分裂(熱的崩壊)

cf. 化学反応
(アレニウスの式)

②自発核分裂

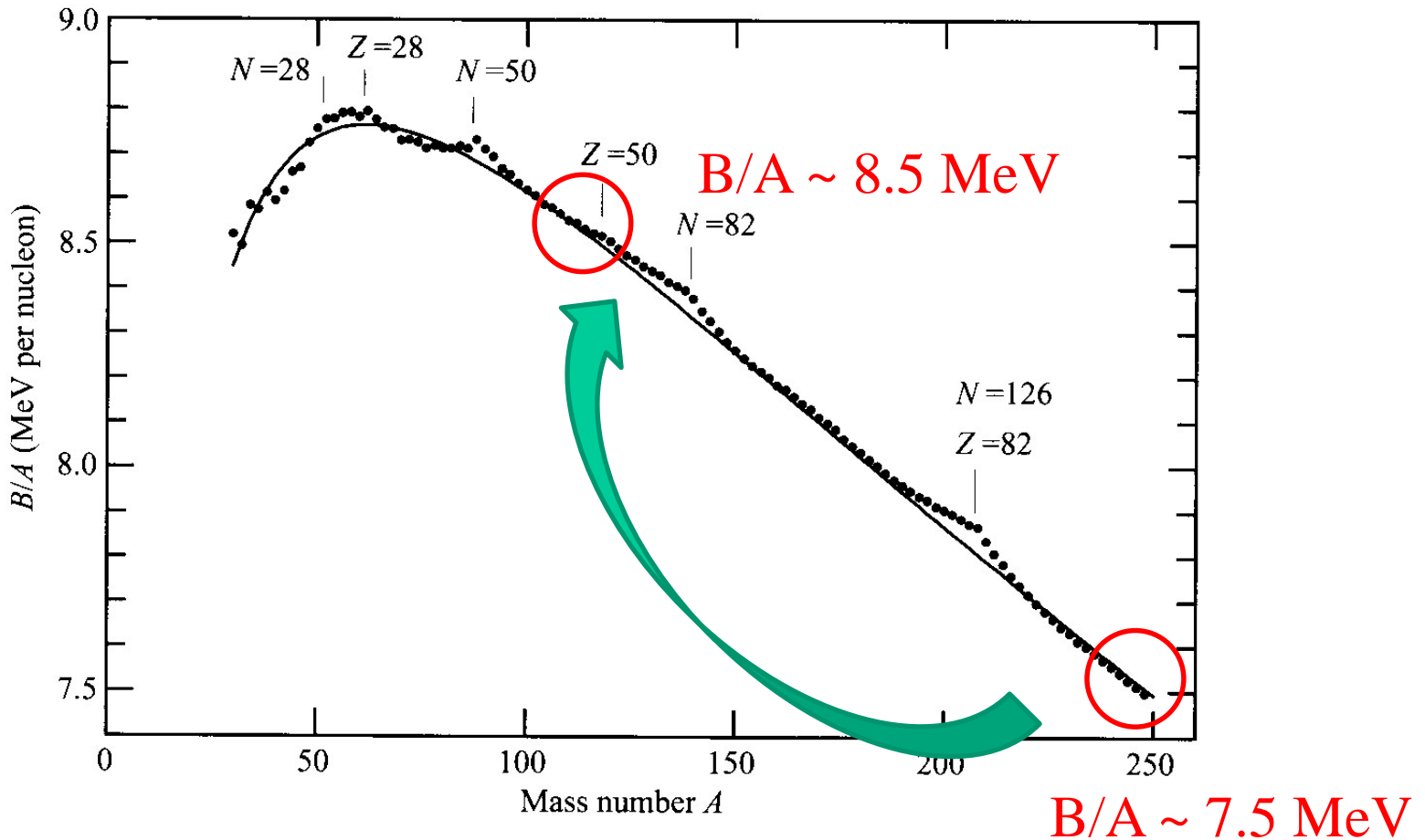


トンネル効果



後でもう少し詳しく
(アルファ崩壊)

エネルギーの解放



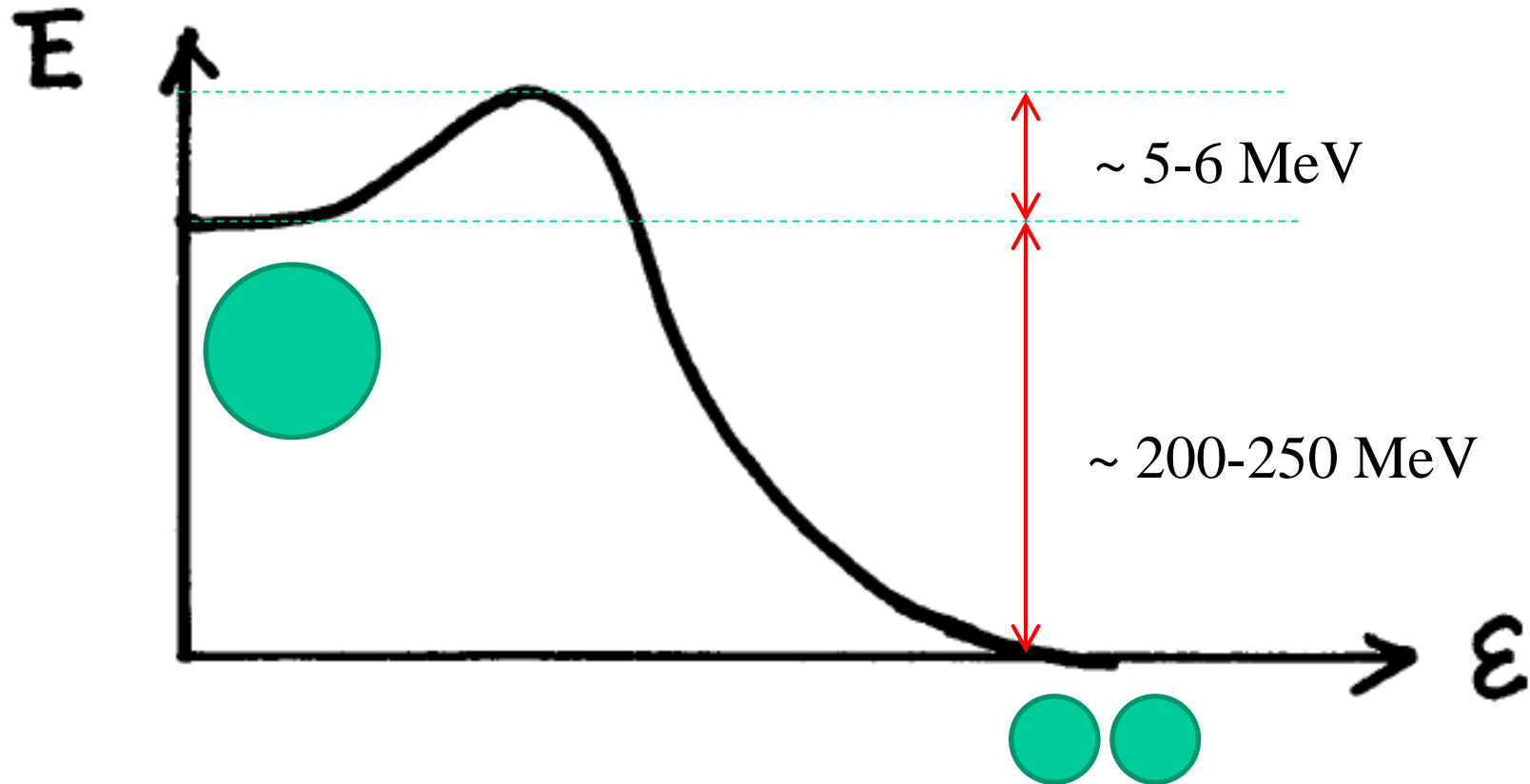
$(A=240) \rightarrow 2 \times (A=120)$

$$\Delta E = -7.5 \times 240 + 8.5 \times 120 \times 2 \sim 240 \text{ (MeV)}$$

エネルギーの解放

$(A=240) \rightarrow 2 \times (A=120)$

$$\Delta E = -7.5 \times 240 + 8.5 \times 120 \times 2 \sim 240 \text{ (MeV)}$$



どうして ^{235}U が“燃え”て ^{238}U が“燃え”ないのか(原発)?

天然ウラン:

^{238}U 99.2742%

^{235}U 0.7204%

^{234}U 0.0054%

このうち、 ^{235}U だけが「燃える」

$^{235}\text{U} + \text{n} \rightarrow ^{236}\text{U}^* \rightarrow$ 核分裂

$^{238}\text{U} + \text{n} \rightarrow ^{239}\text{U}^* \rightarrow$ 核分裂 はほとんど無視できる確率

なぜか?

どうして ^{235}U が“燃え”て ^{238}U が“燃え”ないのか(原発)?

障壁の高さが違うため?



そうではない

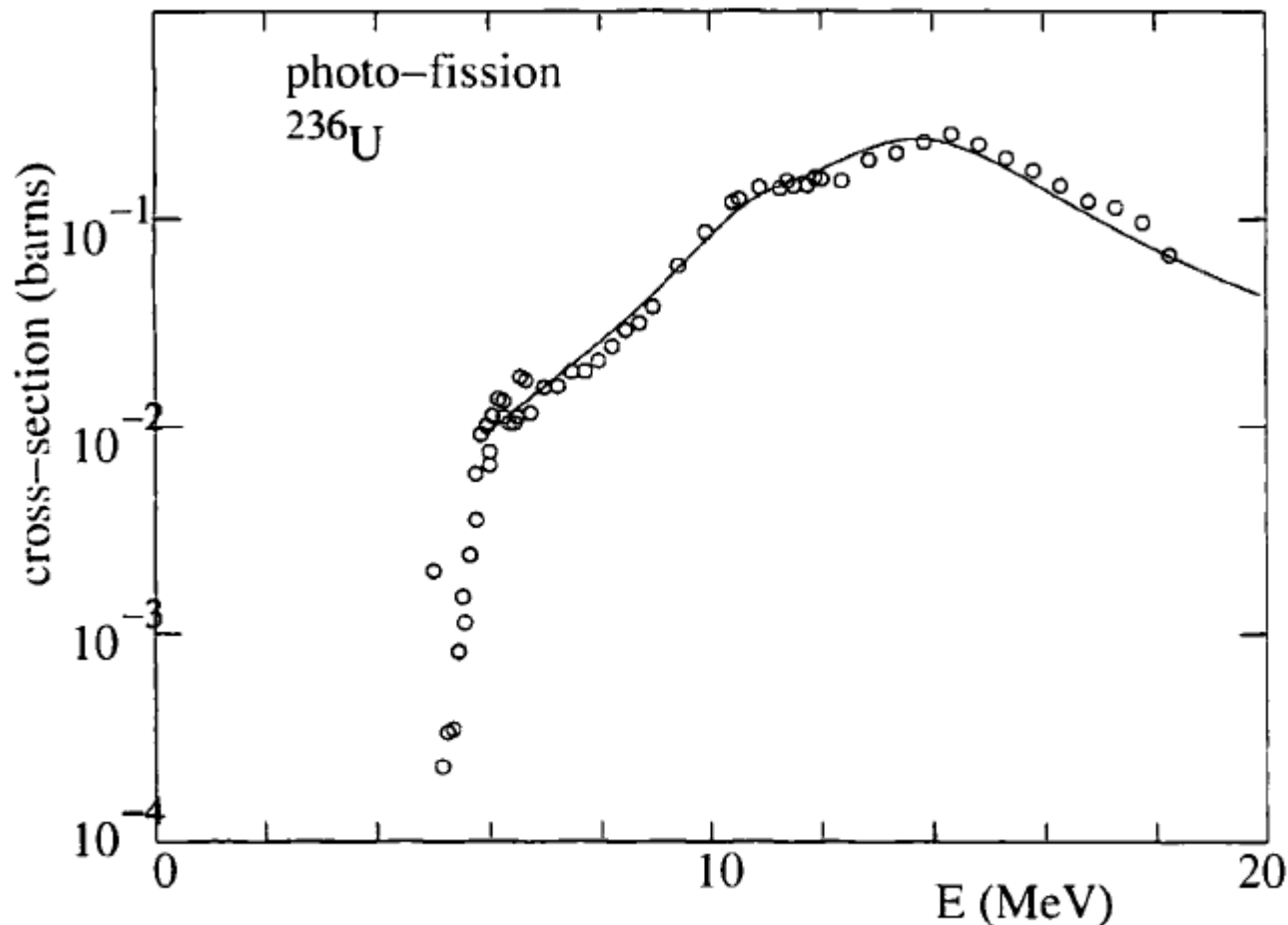


Fig. 6.5. Cross-section for $\gamma^{236}\text{U} \rightarrow \text{fission}$ [30].

photo-fission (光核分裂)の断面積: フォトンのエネルギーが 5.7 MeV のあたりから断面積が急に立ち上がる(障壁の高さが 5.7 MeV くらい)

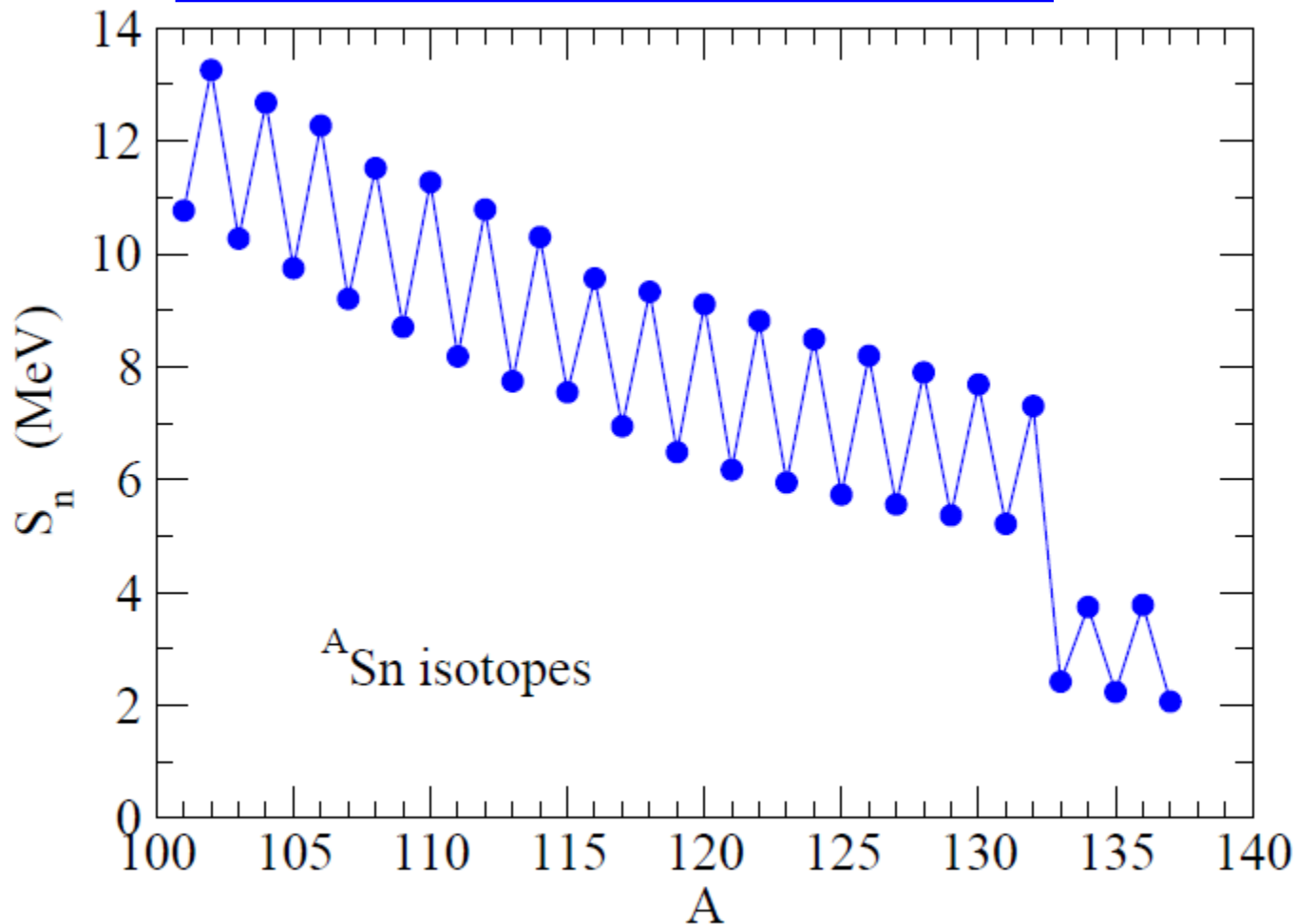
* ^{239}U の核分裂障壁の高さは同程度 (6.0 MeV)

^{236}U と ^{239}U で大きく違うのが1中性子分離エネルギー

$$S_n(^{236}\text{U}) = 6.3 \text{ MeV}$$

$$S_n(^{239}\text{U}) = 4.8 \text{ MeV}$$

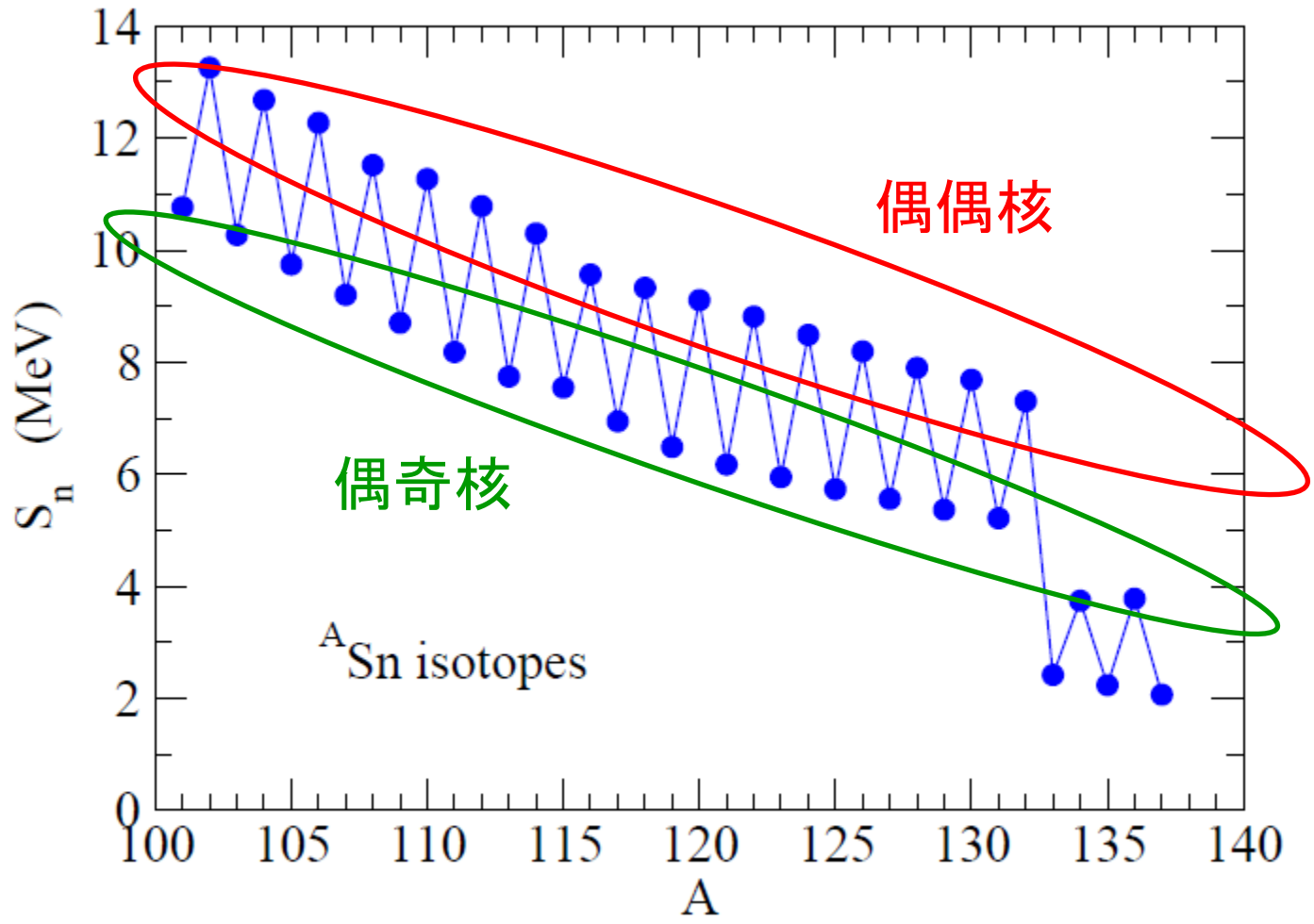
分離エネルギーにおける偶奇効果



1n separation energy: $S_n(A, Z) = B(A, Z) - B(A-1, Z)$

偶数個の中性子から1つ中性子
 を取る方が奇数個から取るより
 大きなエネルギーが必要: 対相関

even-odd staggering



1n separation energy: $S_n (A,Z) = B(A,Z) - B(A-1,Z)$

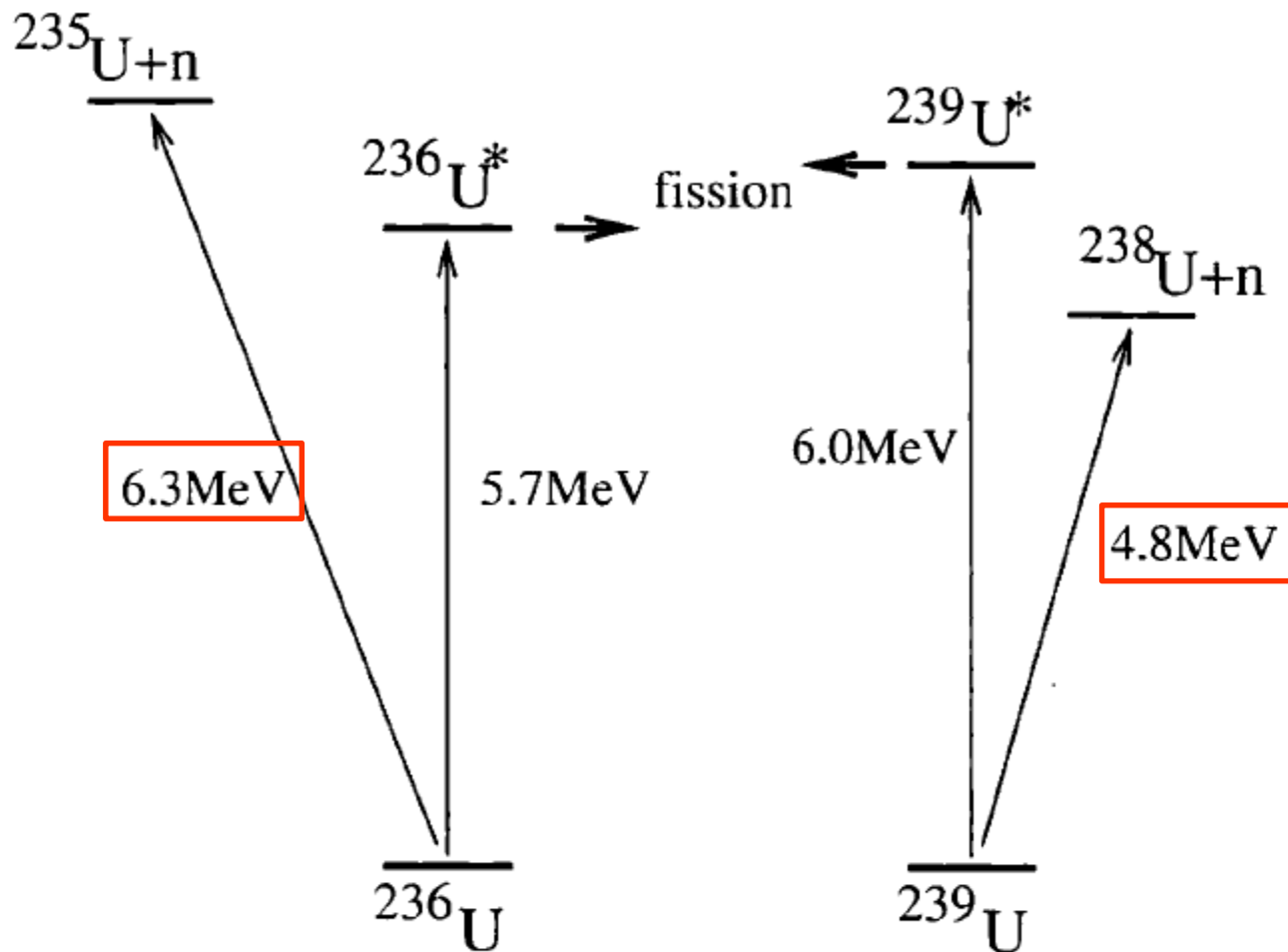
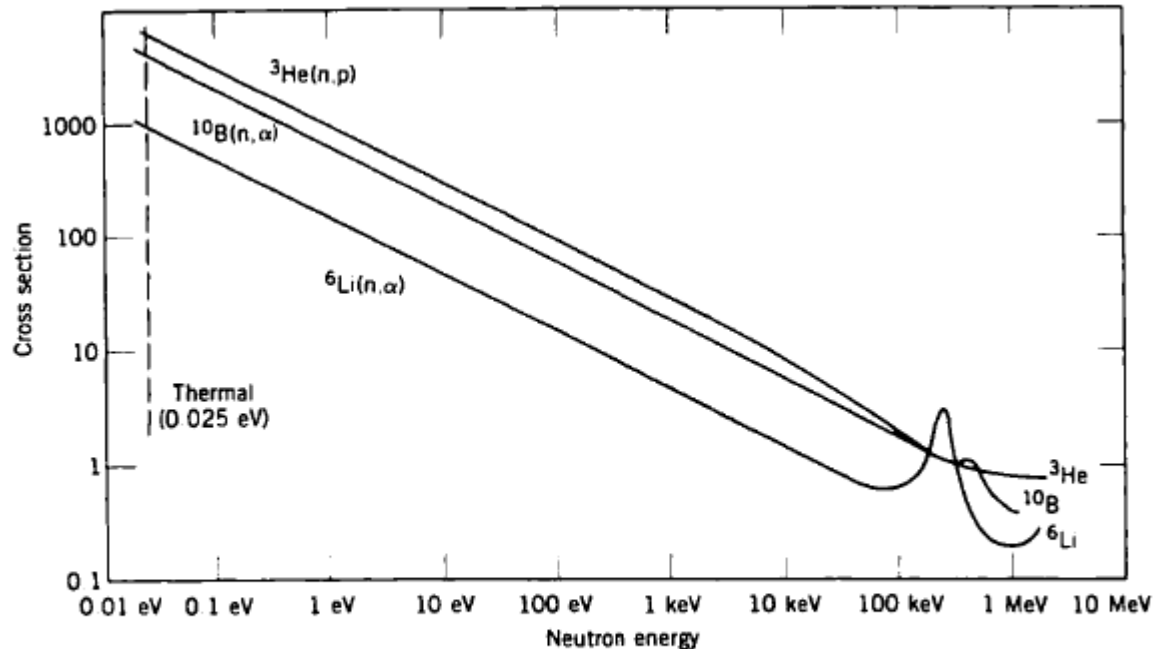


Fig. 6.6. Levels of the systems $A = 236$ and $A = 239$ involved in the fission of ^{236}U and ^{239}U . The addition of a motionless (or thermal) neutron to ^{235}U can lead to the fission of ^{236}U . On the other hand, fission of ^{239}U requires the addition of a neutron of kinetic energy $T_n = 6.0 - 4.8 = 1.2 \text{ MeV}$.

核分裂障壁の高さと1中性子分離エネルギーの関係

- 中性子の入射エネルギーをあげると核分裂障壁を越えれる²³⁹U の励起状態を作ることができるが、今度は中性子吸収の確率が小さくなって核分裂の効率が落ちる。



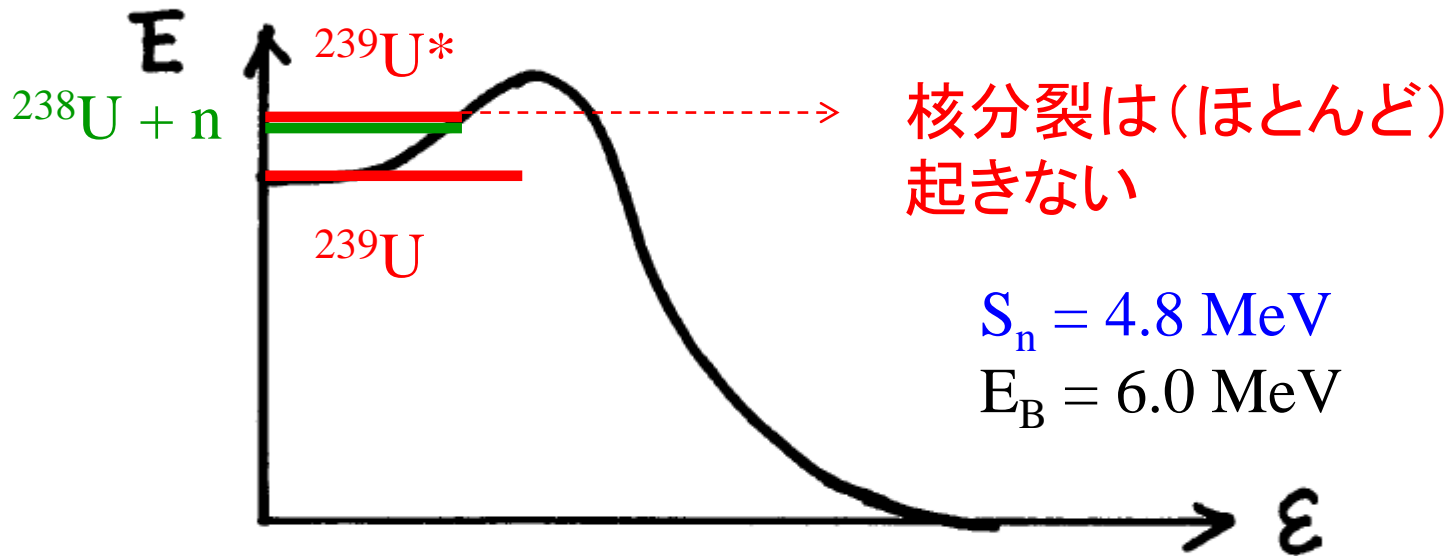
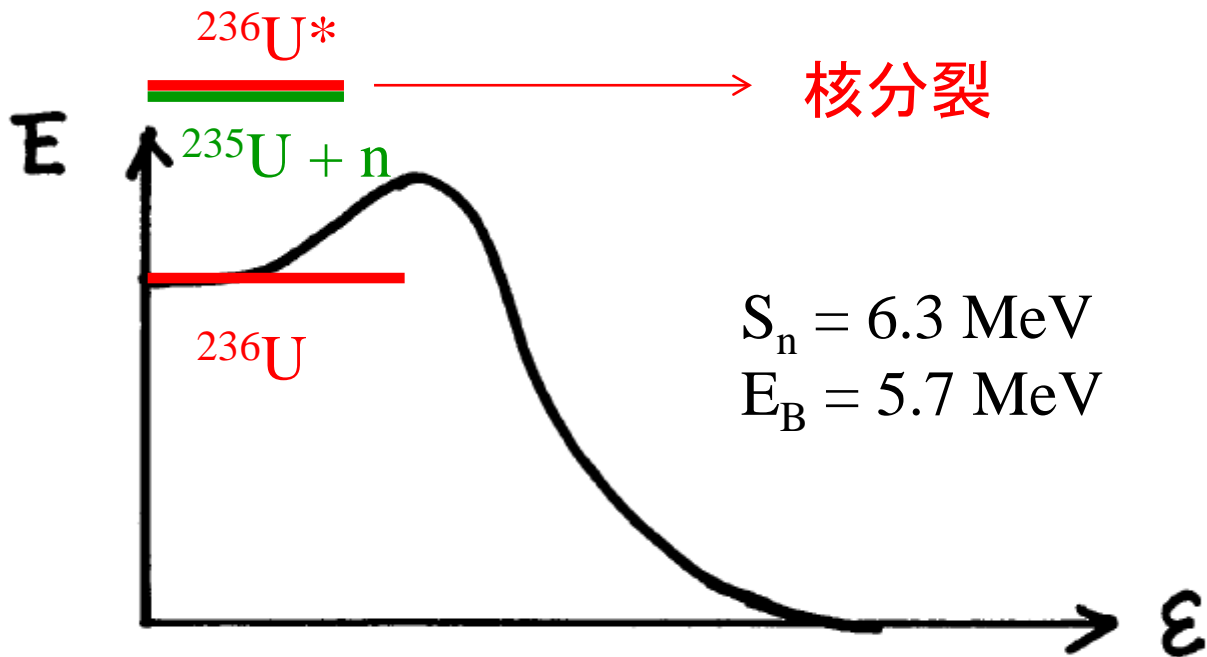
* 1 b = 100 fm²

Figure 12.5 Neutron cross sections for ³He(n,p), ¹⁰B(n,α), and ⁶Li(n,α). The cross section shows the 1/v behavior for $E < 1$ keV, but begins to show resonances above 100 keV.

吸収断面積は $1/v$ に比例 ($1/v$ 則)

熱中性子 (0.025 eV) による²³⁵Uの核分裂断面積: 532 +/- 4 (b)

速い中性子 (~ 1 MeV) による²³⁵Uの核分裂断面積: 0.29 (b)



出席の代わりに授業アンケート

学籍番号、名前、所属研究室(所属大講座)

この授業に関して、**質問**や**疑問**を自由に何でも書いて下さい
(質問が特になければ**感想**でも可)

- 例)
- ・今日の授業で面白かったこと
 - ・自分にとって発見だったこと
 - ・今日の授業でわかりずらかったこと
(もう一度説明して欲しいこと)
 - ・今日の授業を聞いて疑問に思ったこと
 - ・**授業への要望等でもOK**

などなど