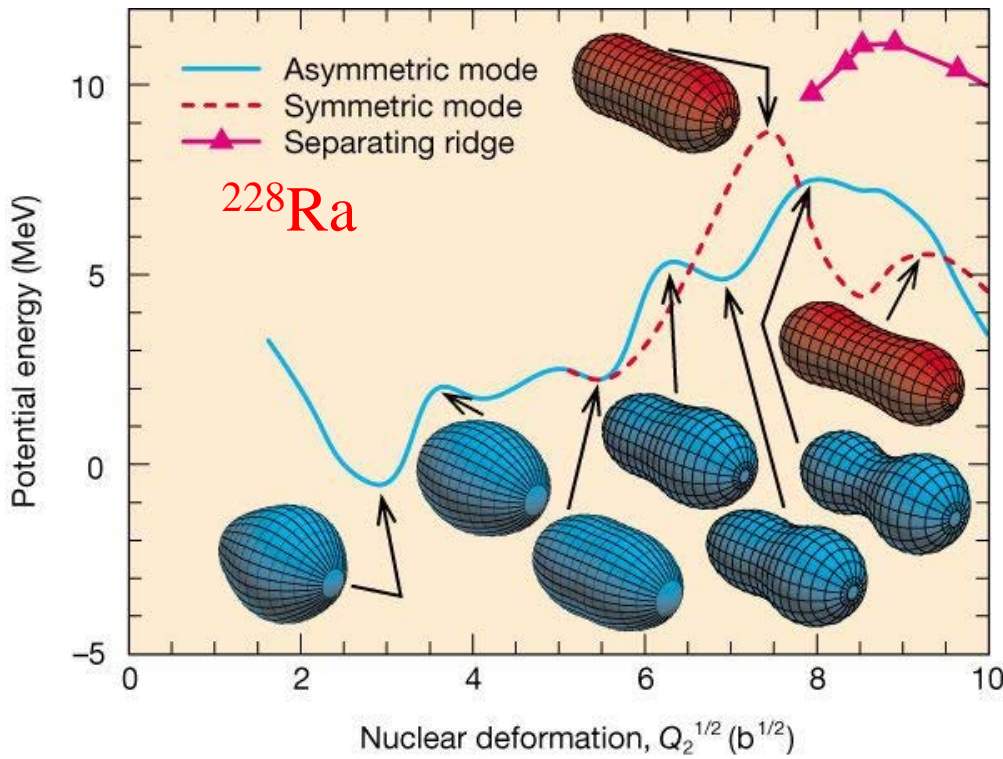


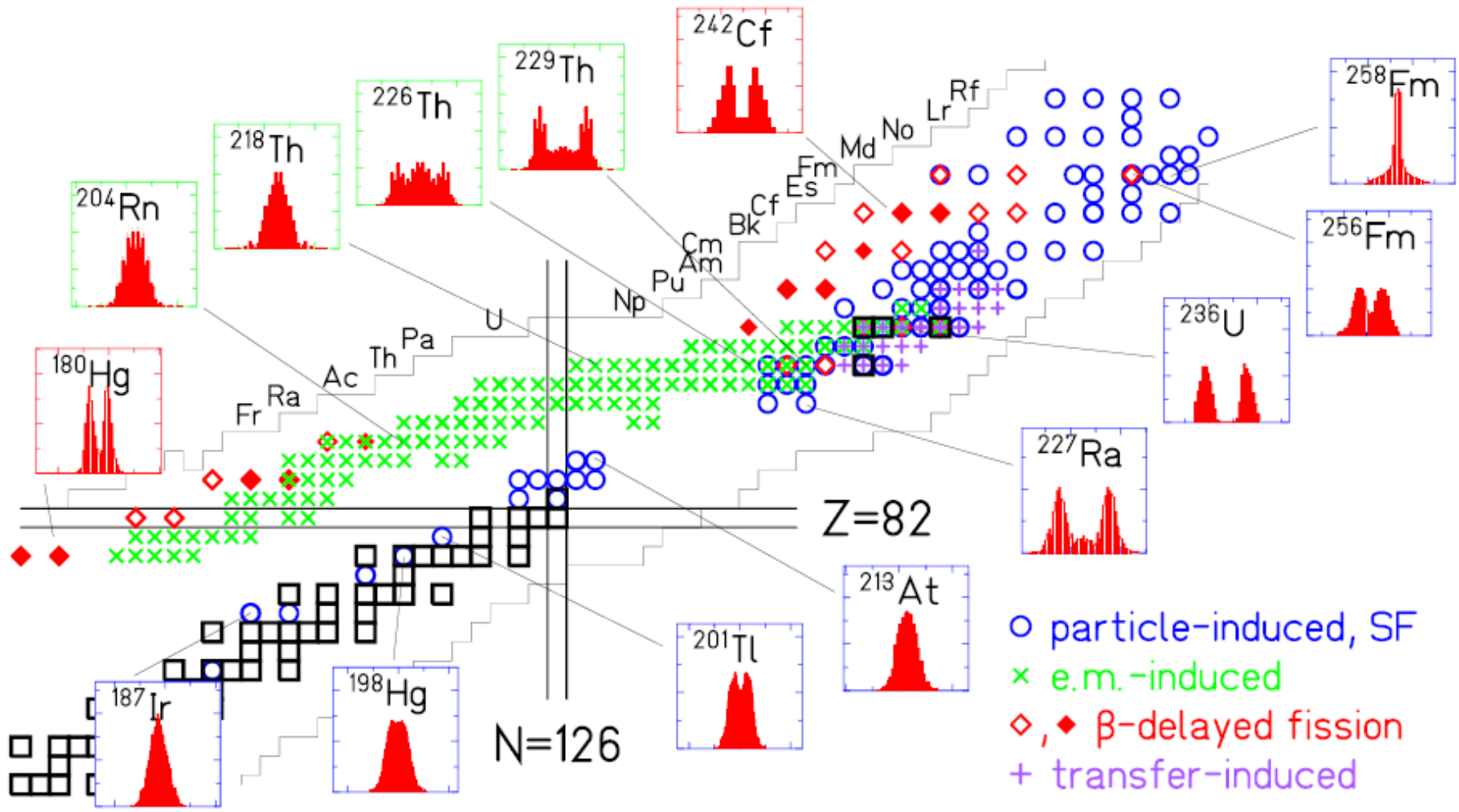
先々週のアンケートより
(魔法数と殻効果)

➤ 核分裂で非対称度がそれぞれの原子核で違うのか？



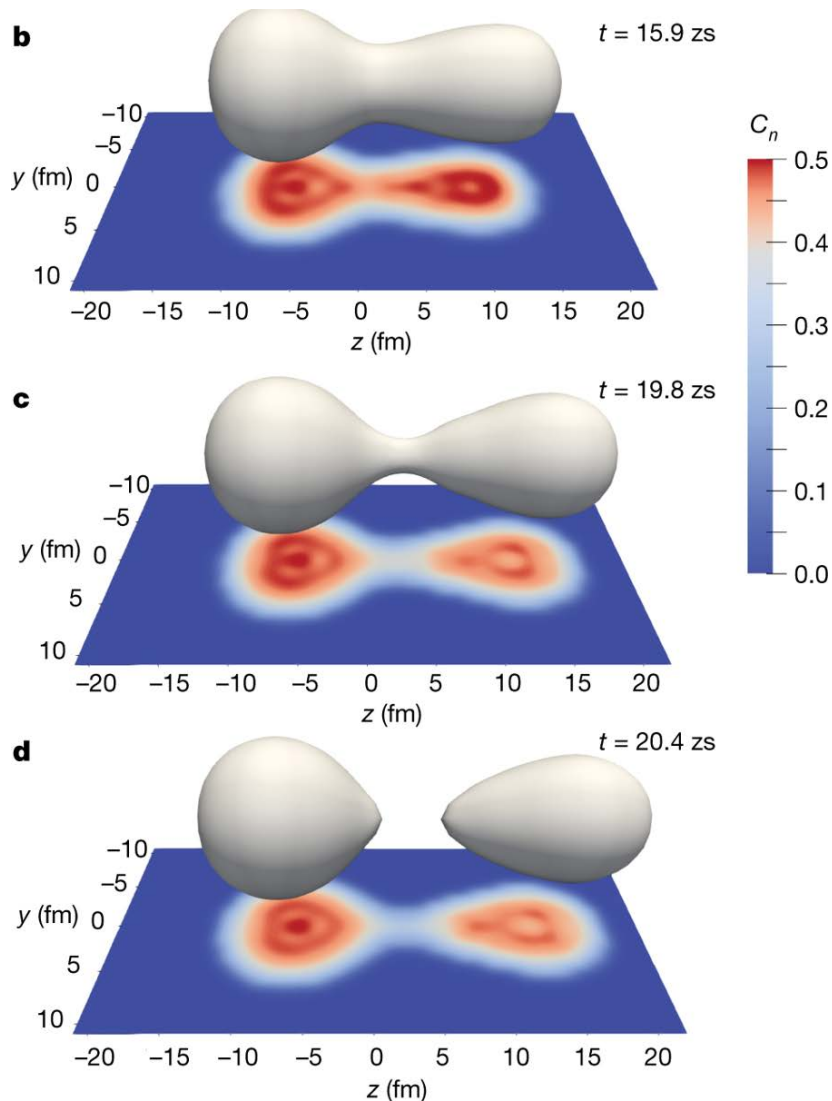
✓ 違います(その通りです)

P. Moller et al.,
Nature 409 (2001) 785



A.N. Andreyev, K. Nishio, and K.-H. Schmidt,
 Rep. Prog. Phys. 81 (2018) 016301

- 核分裂で非対称度がそれぞれの原子核で違うのか?
- また、それに対する定性的な説明はあるか?



✓ 最近の研究によると、核分裂途中の殻効果(特に洋ナシ型変形に対する)のためと言われています

G. Scamps and C. Simenel,
Nature 564 (2018) 382

▶ スピン軌道力で $V_{ls}(r) \sim -\lambda \frac{1}{r} \frac{dV}{dr}$ という式は何?

ディラック方程式:

$$[c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2 + V(r)]\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r})$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\psi(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \psi_L(\mathbf{r}) \\ \psi_S(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_{L\uparrow}(\mathbf{r}) \\ \psi_{L\downarrow}(\mathbf{r}) \\ \psi_{S\uparrow}(\mathbf{r}) \\ \psi_{S\downarrow}(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \left. \begin{array}{l} \text{スピンのアップ、ダウン} \\ \text{「反粒子」の成分} \end{array} \right\}$$

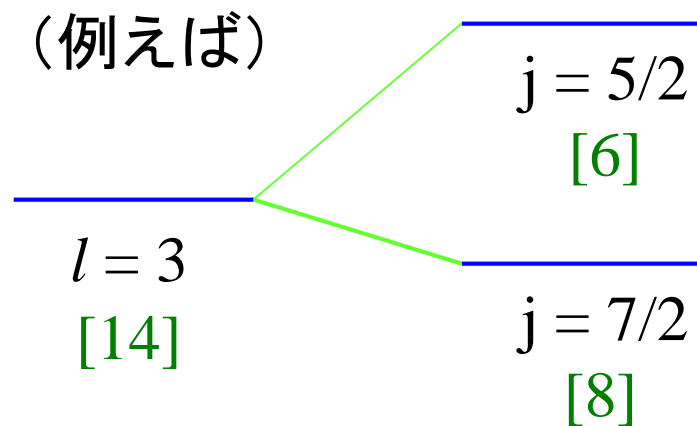
ψ_S を消去 \rightarrow
$$\left[-\nabla \frac{1}{2M(r)} \cdot \nabla + (mc^2 + V(r) - E) + \frac{1}{4M(r)c^2} \frac{1}{r} \frac{dV(r)}{dr} \mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\sigma} \right] \psi_L = 0$$

$$2M(r) = mc^2 - V(r) + E$$

➤ スピン軌道力で $j = l + 1/2$ の方がエネルギーが下がるのは何故?

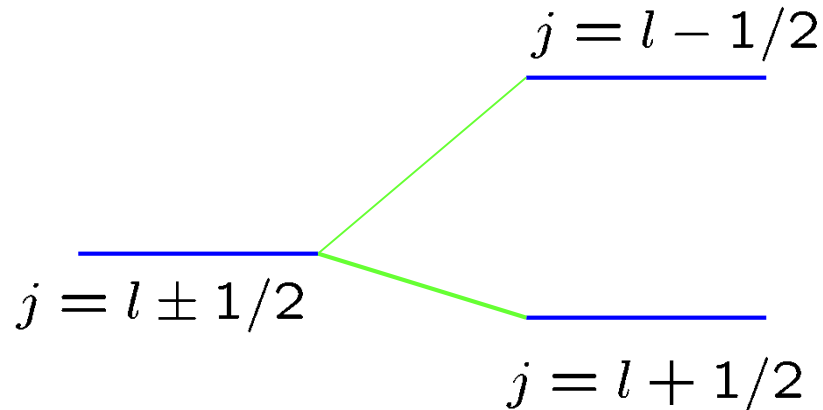
$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) + V_{ls}(r) \mathbf{l} \cdot \mathbf{s} - \epsilon \right] \psi(\mathbf{r}) = 0$$

エネルギー固有値



✓いい質問です。

➤ 何で $j = l + 1/2$ の方がエネルギーが下になるのですか？



原子の中の電子軌道 → $j = l - 1/2$ の方が下

現象論: $j = l + 1/2$ を下げた方が原子核の魔法数を説明できる

もう少し理論的には: ディラック方程式

電子 → 電磁場(フォトン)とのカップリング: ベクトル場

核子 → ベクターメゾン及びスカラーメゾンの交換

ベクターとスカラーの競合でスピン軌道力の符号が変わる

➤ 原子核と原子で魔法数が違うのは偶然ですか？

✓ そうですね。

相互作用の違い、スピン軌道力の違い、などから。

➤ 原子の場合、魔法数の議論にスピン軌道力が関係しないのは何故？

✓ 原子では、スピン軌道力は「微細構造」として小さな補正

→ 殻模型研究の初期には、原子核でスピン軌道力が重要とは思われていなかった

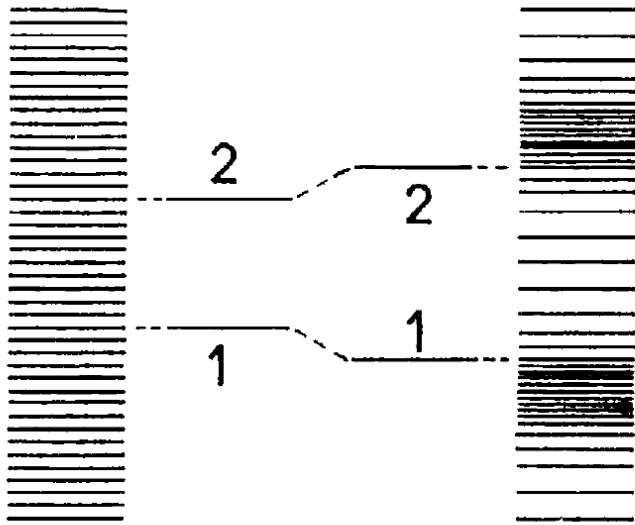
- 束縛エネルギーの計算でシェル効果はどのように取り入れられるか?

殻補正法(ストラチンスキー法)

$$E = \underbrace{E_{\text{LDM}}}_{\text{液滴模型}} + \underbrace{E_{\text{shell}}}_{\text{殻補正}}$$

液滴模型

殻補正

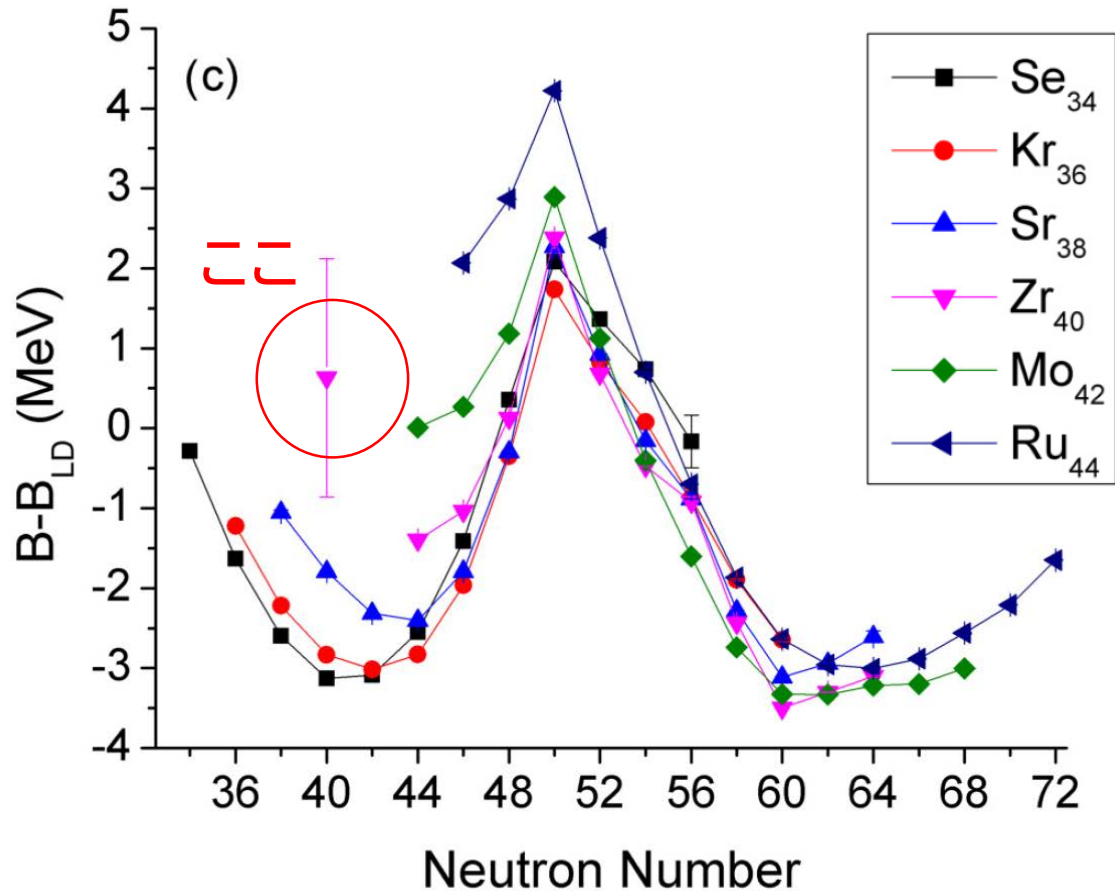


(a)

(b)

$$E_{\text{shell}} = \int_0^{\lambda} \epsilon \rho(\epsilon) d\epsilon - \int_0^{\tilde{\lambda}} \epsilon \bar{\rho}(\epsilon) d\epsilon$$

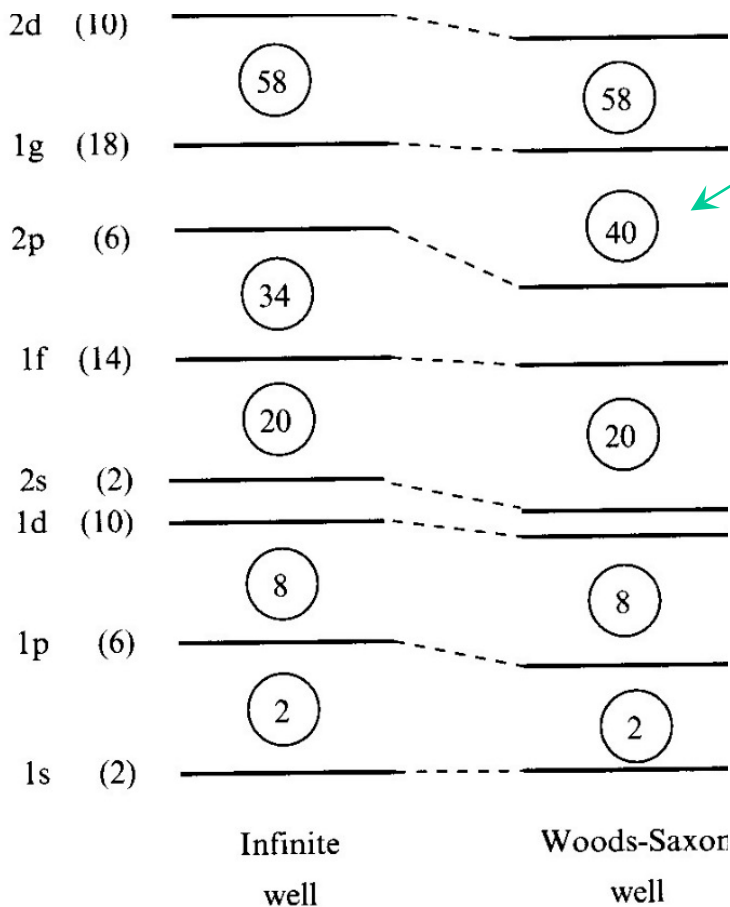
➤ $B - B_{\text{LDM}}$ のグラフで ^{80}Zr がプラスで安定になっているのは何故ですか？



いいところに気が付きましたね！

➤ $B - B_{\text{LDM}}$ のグラフで ^{80}Zr がプラスで安定になっているのは何故ですか？

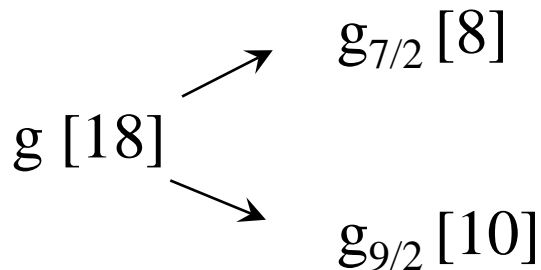
^{90}Zr ($Z=40, N=40$)



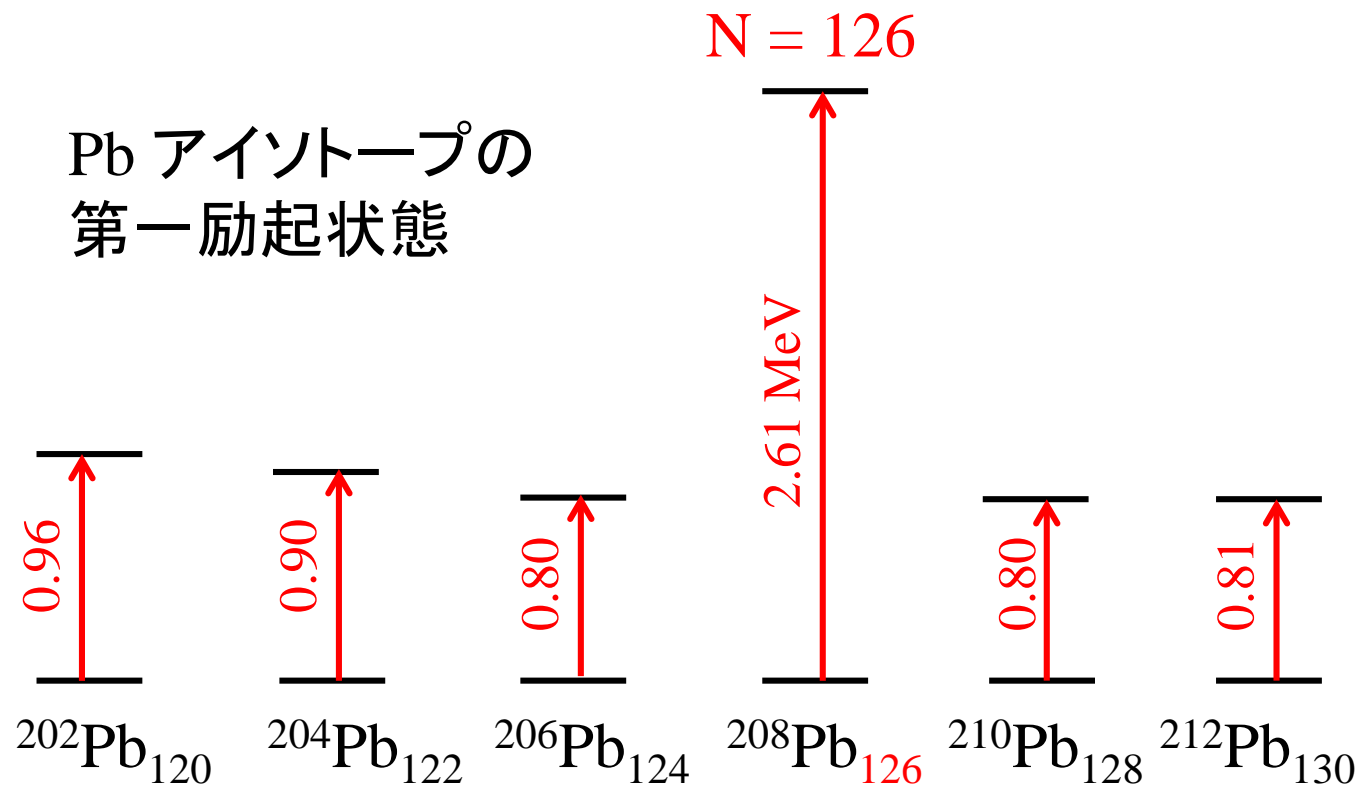
40というのは sub-shell

40 と 50 の間に少しギャップが開く可能性がある

→ 魔法数に準ずる性質



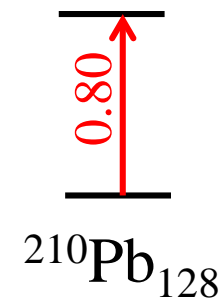
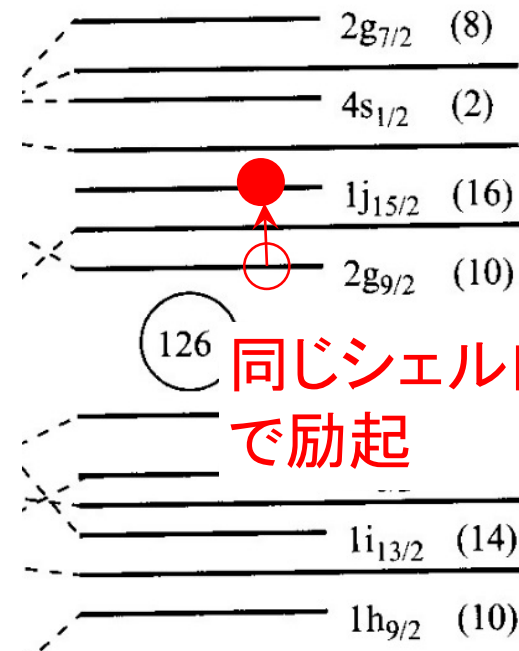
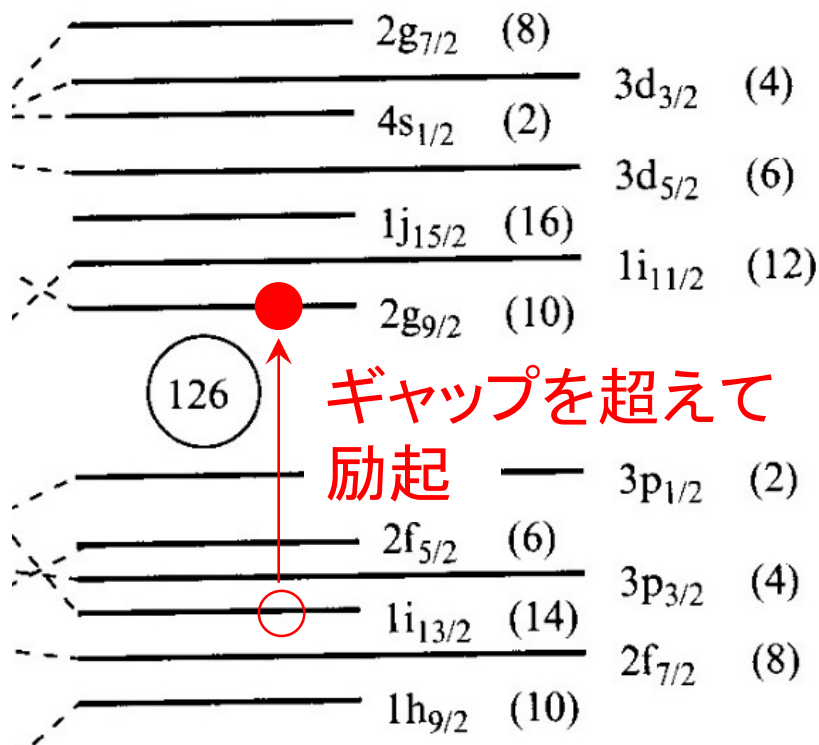
- 励起エネルギーが $^{202}\text{Pb} \rightarrow ^{206}\text{Pb}$ で下がって $^{210}\text{Pb} \rightarrow ^{212}\text{Pb}$ で上がるのは何故?



- ✓ 詳しい解析をしなければ分からないけど、エネルギー差はほぼ一定とみるべき。

➤ ^{208}Pb でエネルギーが大きくなる理由をもう一度

$N = 126$



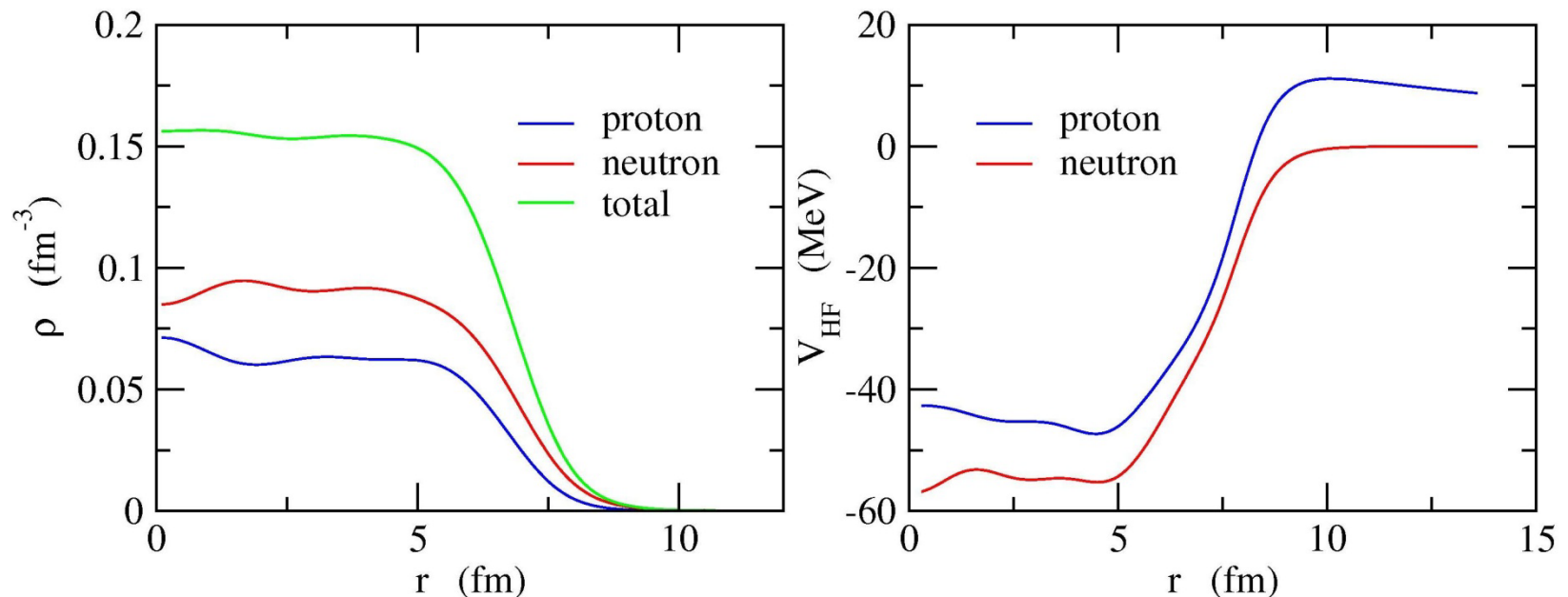
➤ 原子核が崩壊する時、エネルギーが高い軌道にいる核子が崩壊する？

✓ ベータ崩壊であれば、フェルミ面（占有されているもので一番エネルギーが高いもの）付近の核子が崩壊。

➤ 殻模型では陽子、中性子は別の軌道を考える？

✓ そうです。陽子と中性子でポテンシャル井戸が違うので。

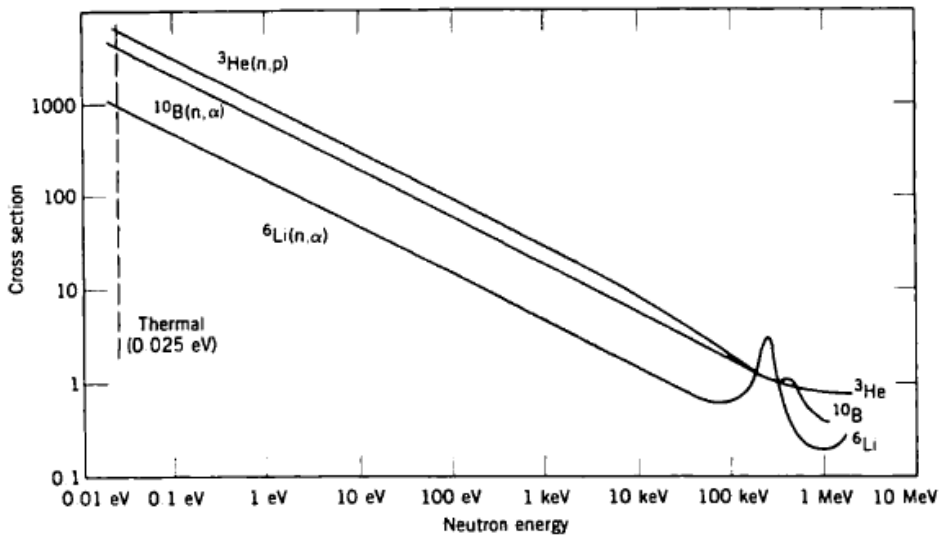
^{208}Pb (Skyrme Hartree-Fock with SKM*)



➤ シェル効果があるときの基底状態はどのような変形なのか？

✓ 「変形」の回に説明します。

➤ 吸収断面積の式はどうやって導出されるのか？

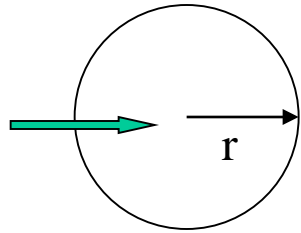


吸収断面積:

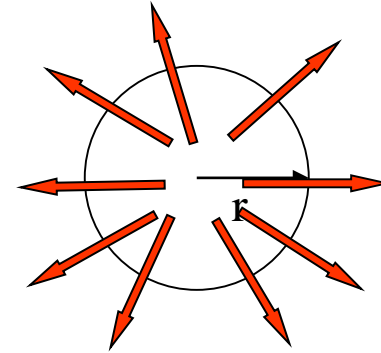
$$\sigma_{\text{cap}} = \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l + 1)(1 - |S_l|^2)$$

$$\psi(\mathbf{r}) \rightarrow \frac{i}{2k} \sum_l (2l+1) i^l \frac{1}{r} \left[\underbrace{e^{-i(kr-l\pi/2)}}_{\psi_{\text{in}}} - \underbrace{S_l e^{i(kr-l\pi/2)}}_{\psi_{\text{out}}} \right] P_l(\cos\theta)$$

全内向フラックス:



全外向フラックス:



$$j_{\text{in}}^{\text{net}} = \frac{k\hbar}{m} \cdot \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1)$$

$$j_{\text{out}}^{\text{net}} = \frac{k\hbar}{m} \cdot \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) |S_l|^2$$

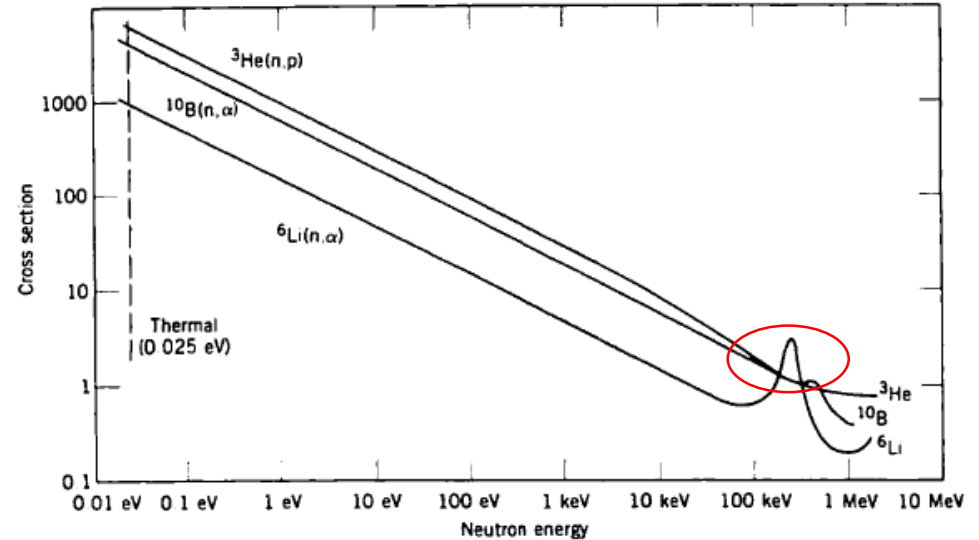
減少したフラックス: $j_{\text{in}}^{\text{net}} - j_{\text{out}}^{\text{net}} = \frac{k\hbar}{m} \cdot \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) (1 - |S_l|^2)$

吸収断面積

$$\sigma_{\text{abs}} = \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) (1 - |S_l|^2)$$

➤ 共鳴について教えてください。何で共鳴があると断面積が大きくなるのですか？

✓ α 崩壊の回に説明します。



➤ α 崩壊のほかに ^{16}O などが放出される崩壊もあるのですか？

✓ あります(クラスター崩壊)。

実験で見つかっているものは

^{14}C , ^{20}O , ^{24}Ne , ^{28}Mg , ^{32}Si , ^{34}Si の放出

クラスターが原子核の表面付近で出来てから放出(?)

実はそんなに分かっているわけではない

➤ 液滴模型ってどういうものですか？

✓ 原子核を古典的な液滴だと考える

- 密度が一定
- 表面を持つ
- 体積を保ちつつ変形できる
- 分裂することもある(対称に分裂する)

➤ 液滴模型で説明できない現象をボーアは何か別の解釈をしていたのですか？

✓ 例えば、魔法数は液滴模型では説明不可。
ボーアがどのように考えていたのかは不明。

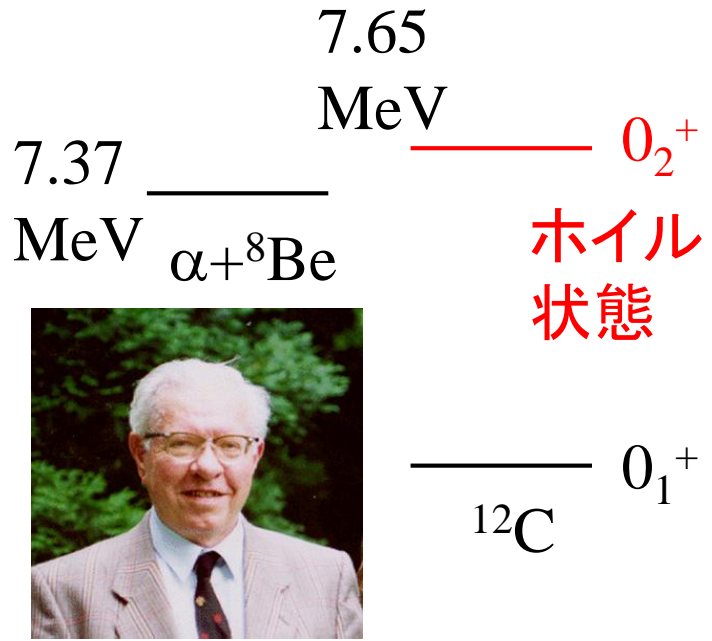
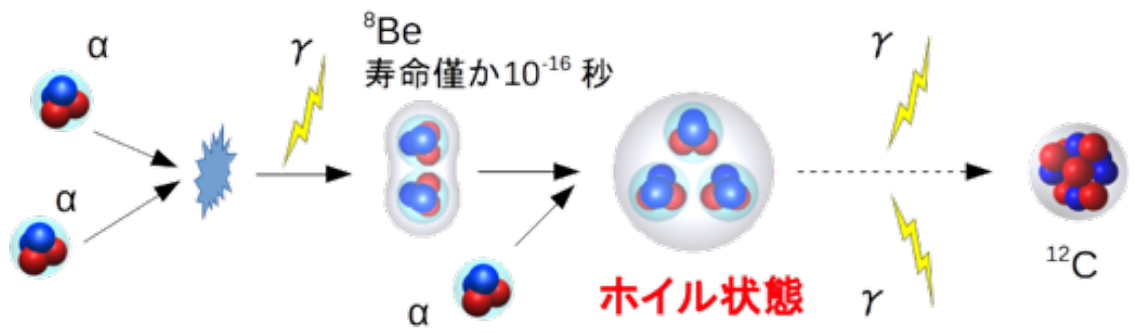
➤ 超重元素の合成(ニホニウムなど)についても触れてほしい

✓ 最終回がニホニウムの話になる予定

先週のアンケートより
(r-プロセス元素合成)

➤ どのくらいの密度でトリプル・アルファ反応は起こるのか？
 (確率がとても小さそうなのだが。。。)

トリプル・アルファ反応



ホイル: ¹²C の共鳴状態の存在を予言(1952年)

✓ 典型的には、10⁵ g/cm³ くらい

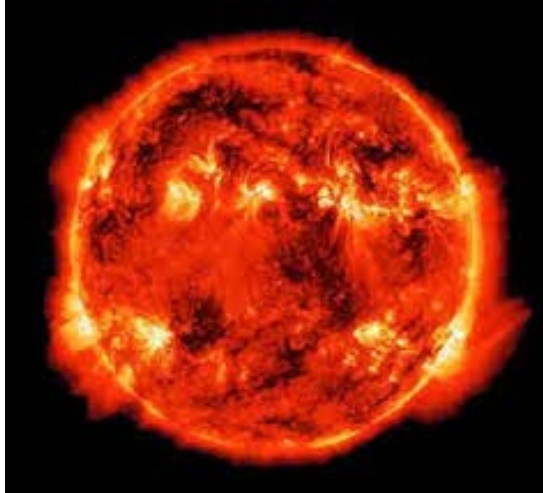
cf. 太陽の中心密度: 10² g/cm³ くらい

→ 太陽より重い星でトリプル・アルファ反応が起きる

I.J. Thompson and F.M. Nunes, “Nuclear reactions for astrophysics”

➤ rプロセスとsプロセスが同時に起こることはないのか？

中性子の吸収

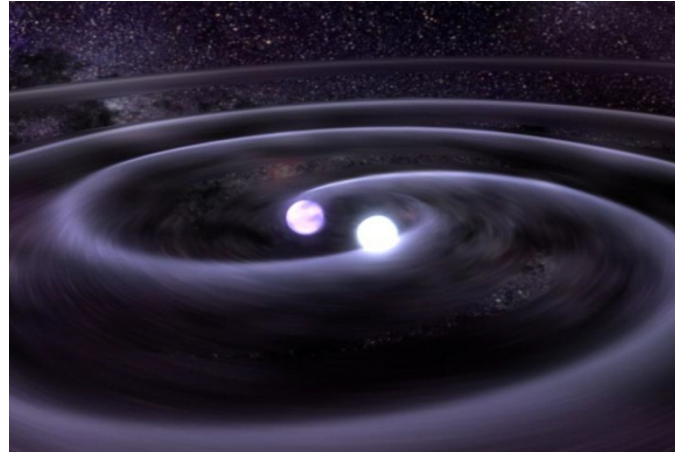


赤色巨星



s-プロセス

Ba, La, Pb, Bi など



超新星爆発

や 中性子星の合体



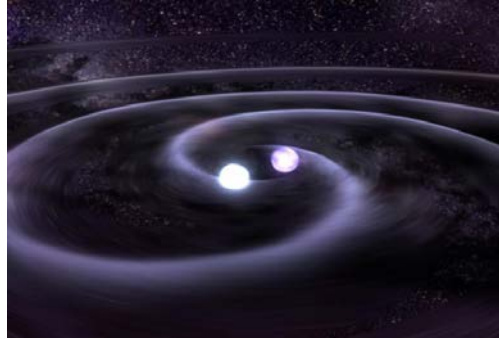
r-プロセス

Th, Eu, U など

✓ rプロセスは大量の中性子が必要

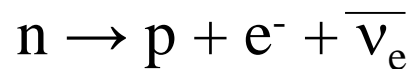
→ 赤色巨星では起こらない (rとsが同時に起こることはない)

- 中性子星の中にも中性子がいっぱいあるはずなのに、
r-プロセスは起こらないのか(なぜ合体が必要なのか)?

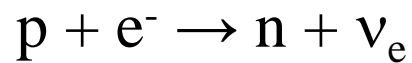


中性子星の合体

- ✓ 中性子星内部では、



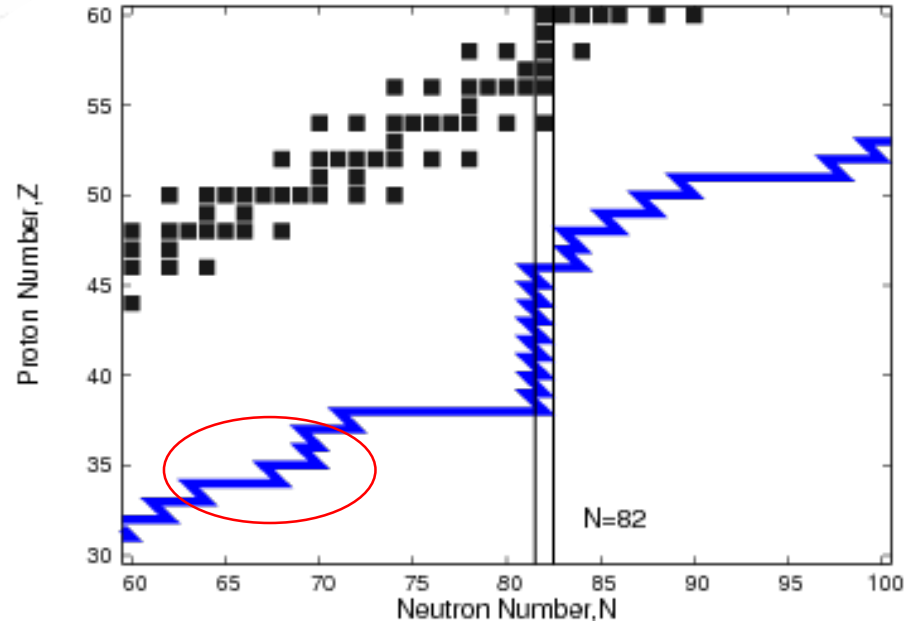
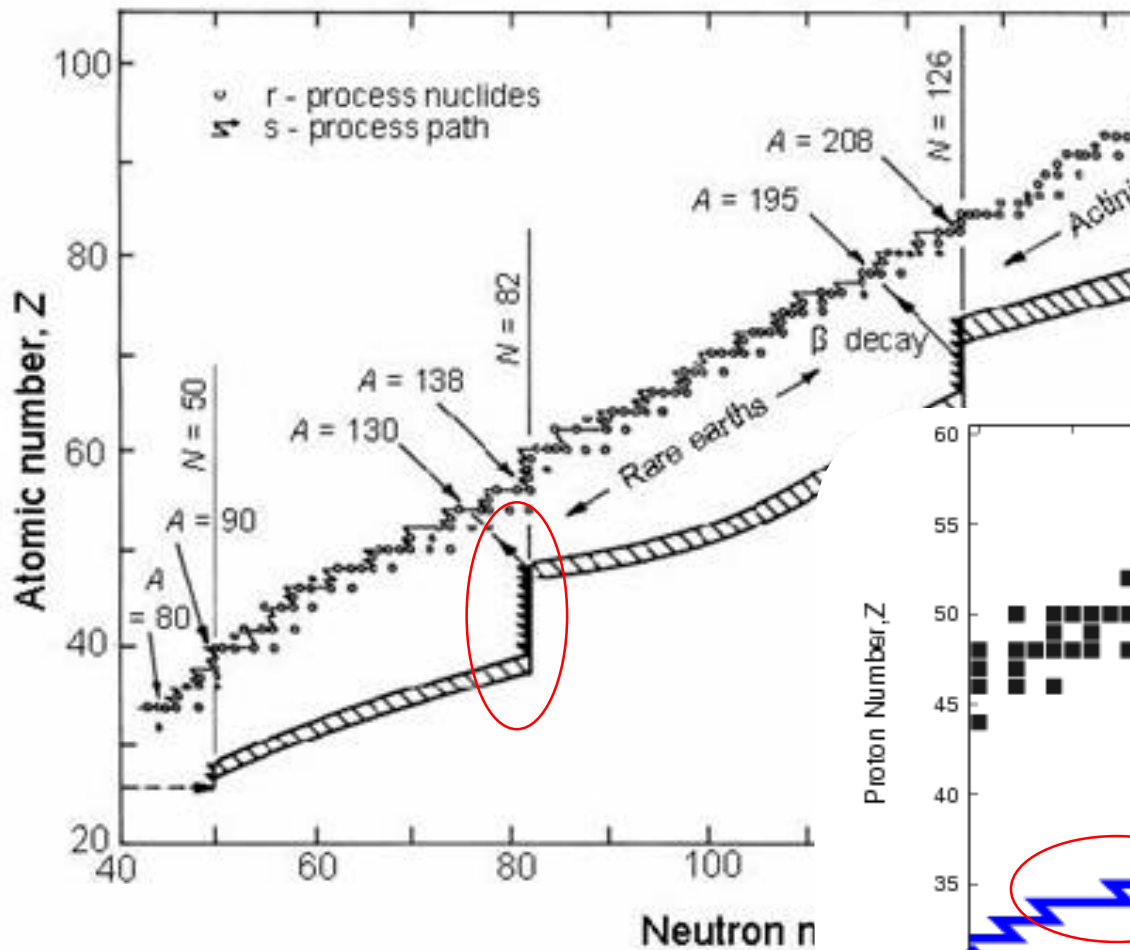
と



が化学平衡

(静的になっていて何も起こらない)

➤ rプロセス経路が斜めなのは、実際には魔法数以外でもβ崩壊しているためか？



✓ その通り。

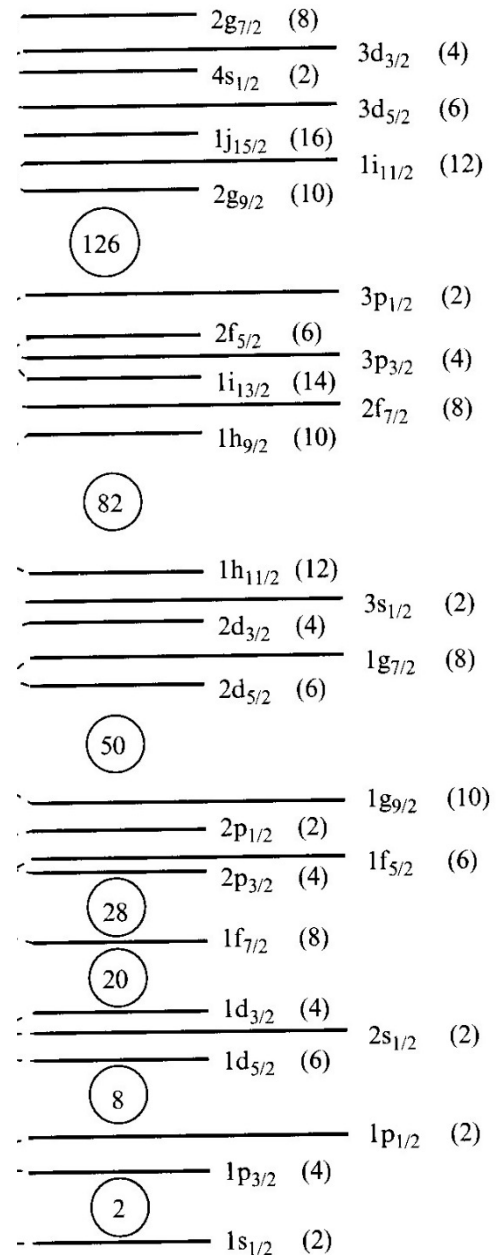
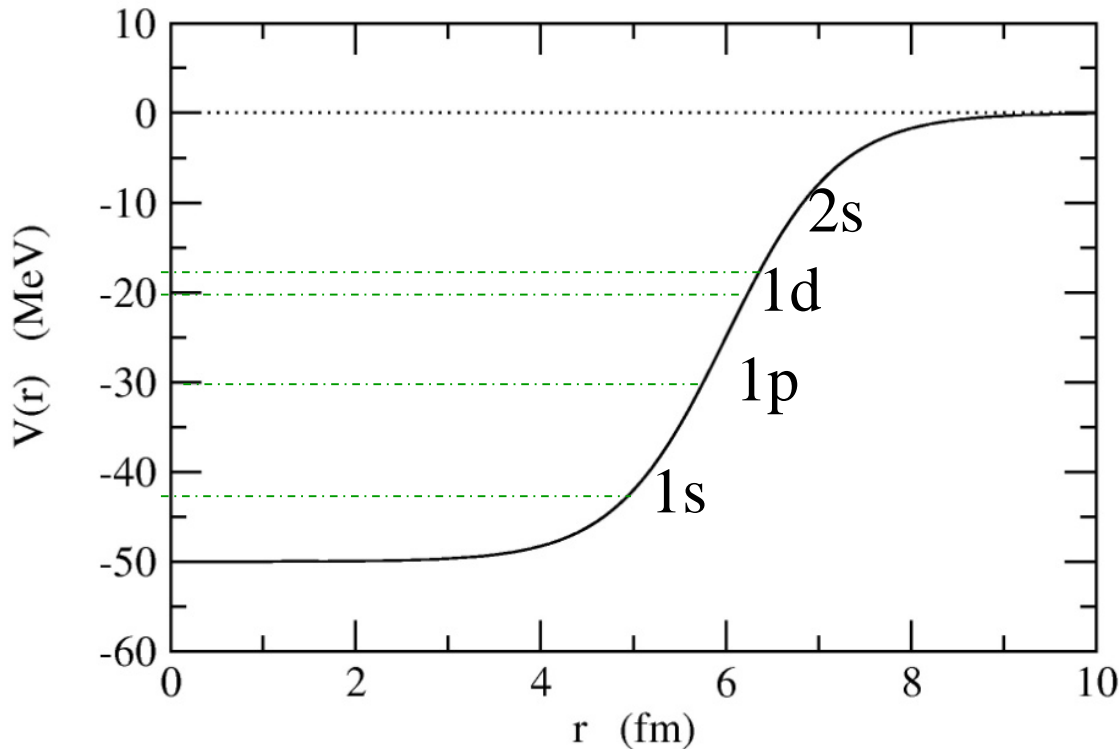
実際には、それぞれの原子核で中性子吸収とβ崩壊が競合。

→経路が太くなる

対相関について

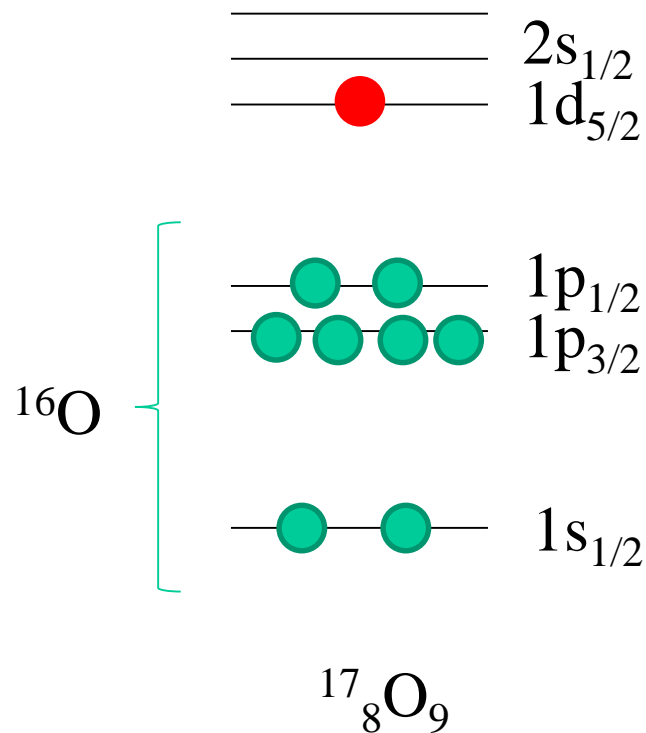
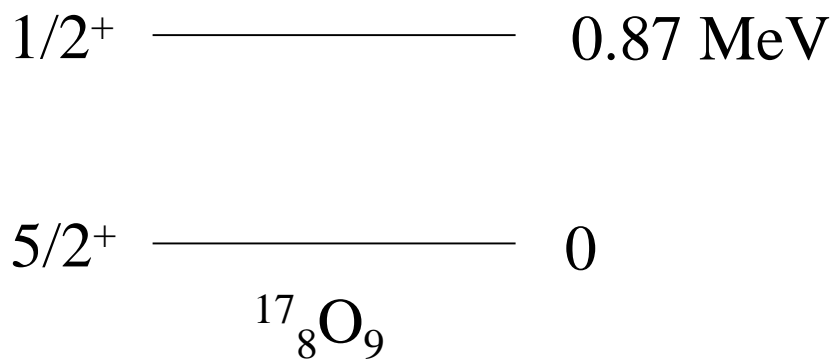
殻構造(魔法数)の理解:

- ✓ ポテンシャル中の独立粒子描像
- ✓ スピン・軌道力



Woods-Saxon plus
spin-orbit coupling

殻模型：閉核＋1核子
は非常にうまくいく



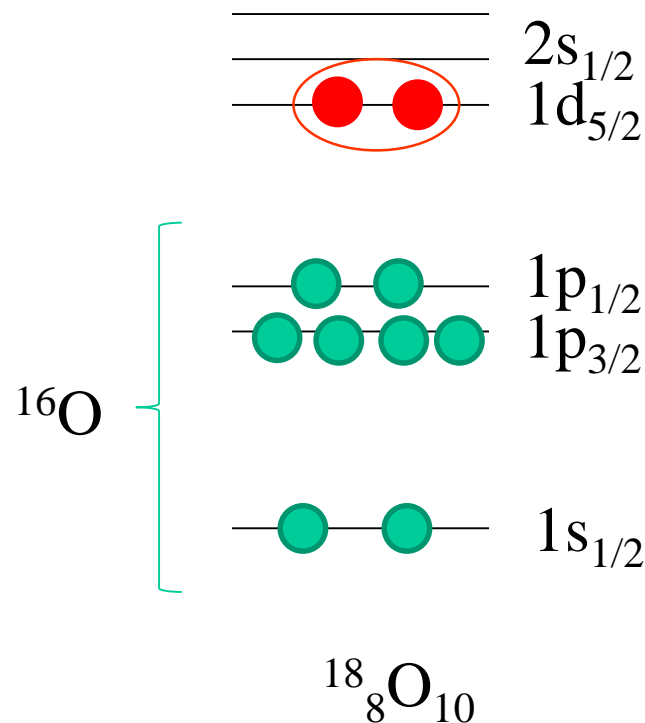
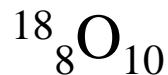
対相関

しかし、閉核+複数の核子の場合、
核子間の(残留)相互作用を考えなければ
ならない

→対相関

2^+ ————— 1.98 MeV

0^+ ————— 0



$[d_{5/2} \times d_{5/2}]^{(IM)}$

$I = 0, 2, 4$ の状態が同じくらいのエネルギーに出てくる
はずが $I = 0$ しか出てこない

残留相互作用

$$H = \sum_i T_i + \sum_{i < j} v_{ij} \rightarrow H = \sum_i (T_i + V_i) + \underbrace{\sum_{i < j} v_{ij} - \sum_i V_i}_{\text{平均からのずれ (残留相互作用)}}$$

平均からのずれ
(残留相互作用)

$$v \rightarrow \underbrace{\langle v \rangle}_{\text{核子が感じる(一体)ポテンシャル}} + \underbrace{(v - \langle v \rangle)}_{\text{残留相互作用}}$$

核子が感じる(一体)
ポテンシャル

残留相互作用

対相関(ペアリング)

$$H = \sum_{i=1}^A \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + V_{\text{HF}}(i) \right) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} v(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) - \sum_i V_{\text{HF}}(i)$$



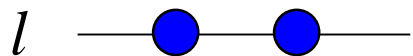
簡単化

$$v_{\text{res}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \sim -g \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

摂動論で残留相互作用の効果を見積もってみる

(とりあえずスピンは無視):

非摂動な波動関数(基底状態を考える):

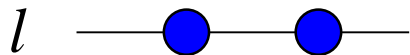


$$|(ll)LM\rangle = \sum_{m,m'} \langle lmlm'|LM\rangle \psi_{lm}(\mathbf{r}) \psi_{lm'}(\mathbf{r}')$$

$$\longrightarrow \Delta E_L = \langle (ll)LM | v_{\text{res}} | (ll)LM \rangle$$

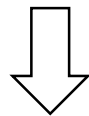
対相関(ペアリング)

$$v_{\text{res}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \sim -g \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$



$$|(ll)LM\rangle = \sum_{m,m'} \langle lmlm'|LM\rangle \psi_{lm}(\mathbf{r}) \psi_{lm'}(\mathbf{r}')$$

$$\psi_{lm}(\mathbf{r}) = R_l(r) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})$$



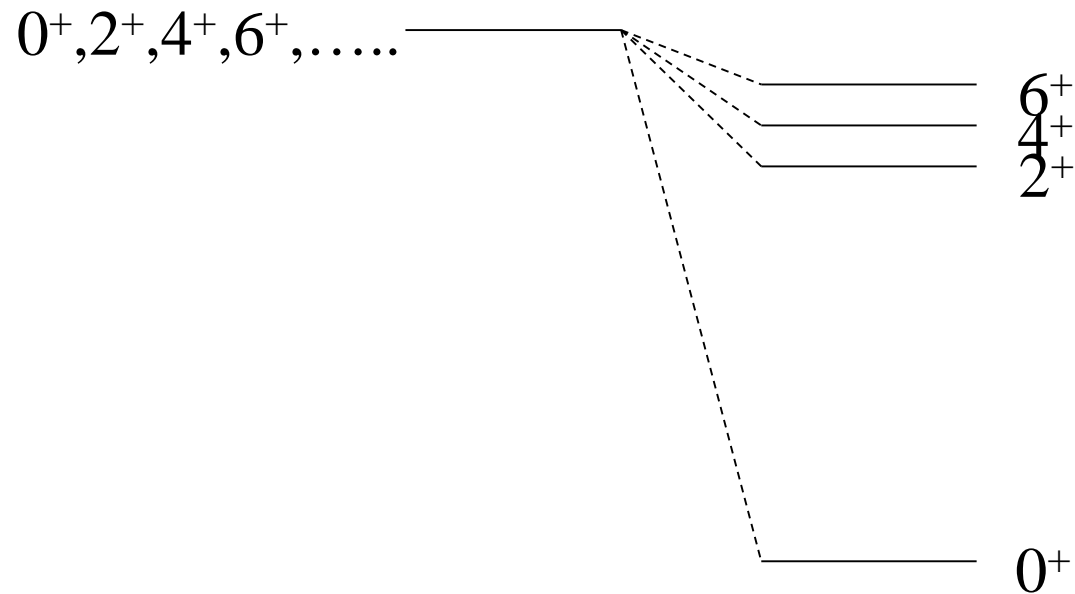
残留相互作用によるエネルギー変化:

$$\begin{aligned} \Delta E_L &= \langle (ll)LM | v_{\text{res}} | (ll)LM \rangle \\ &= -g I_r^{(l)} \frac{(2l+1)^2}{4\pi} \frac{\langle l0l0 | L0 \rangle^2}{2L+1} \end{aligned}$$

$$I_r^{(l)} = \int_0^\infty r^2 dr (R_l(r))^4$$

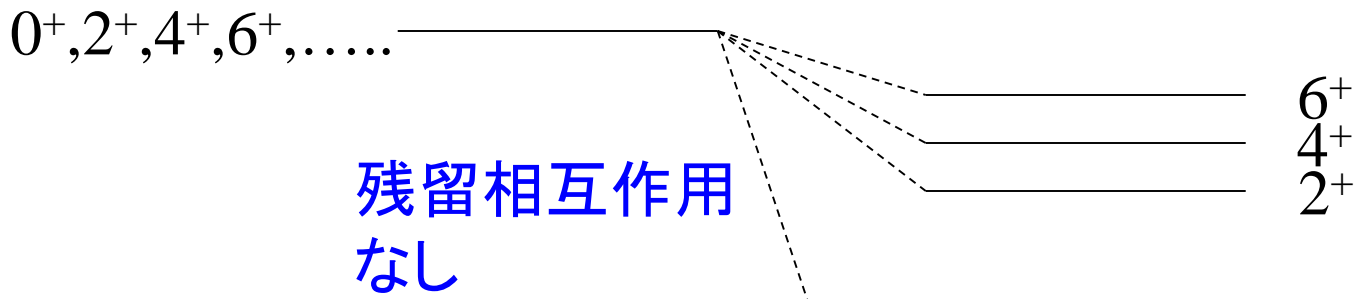
$$\Delta E_L = -g I_r^{(l)} \frac{(2l+1)^2}{4\pi} \frac{\langle l0l0|L0\rangle^2}{2L+1} \equiv -g I_r^{(l)} \frac{A(ll;L)}{4\pi}$$

$A(ll;L)$	$L=0$	$L=2$	$L=4$	$L=6$	$L=8$
$l=2$	5.00	1.43	1.43	---	---
$l=3$	7.00	1.87	1.27	1.63	---
$l=4$	9.00	2.34	1.46	1.26	1.81



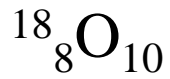
残留相互
作用なし

残留相互
作用あり



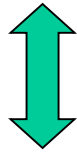
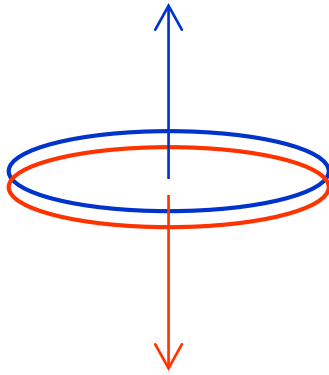
2^+ ————— 1.98 MeV

0^+ ————— 0

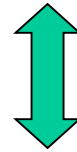
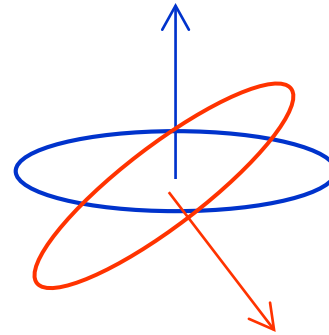


残留相互作用あり

単純な解釈:



$L=0$ 対

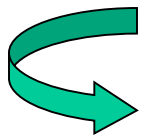
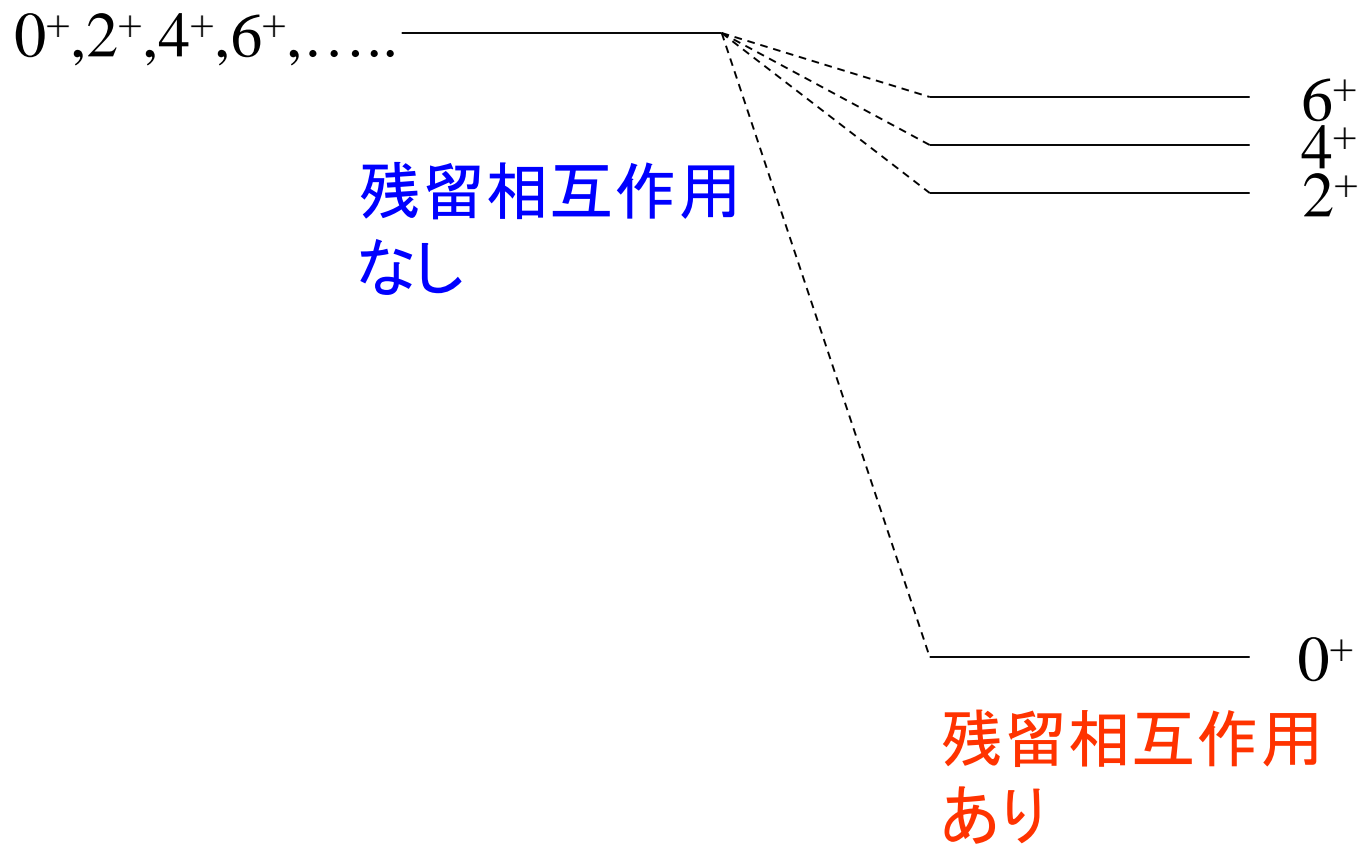


$L \neq 0$ 対

$L=0$ のとき空間的な重なりが最大

“対相関”

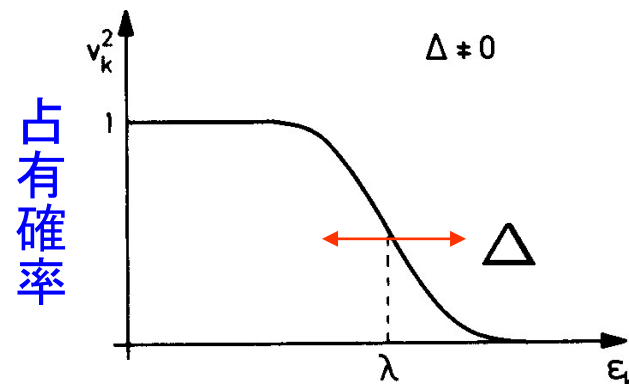
(note) $L=2j$ 対はパウリ原理に抵触



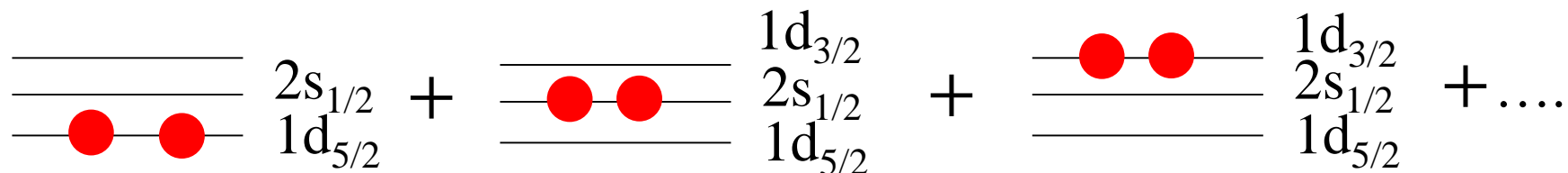
原子核の基底状態のスピ

- 偶偶核: 0^+
- 偶奇核: 最外殻粒子のスピ

波動関数:



$$|\Psi_{\text{g.s.}}\rangle =$$



いろいろな配位を混ぜることによって対相関エネルギーを稼ぐ

→ 各軌道は部分的にのみ占有されることになる

cf. BCS 理論

質量公式(偶奇性による質量差)

2つの陽子または2つの中性子がスピン0を組むと束縛が大きくなる

例:

束縛エネルギー (MeV)

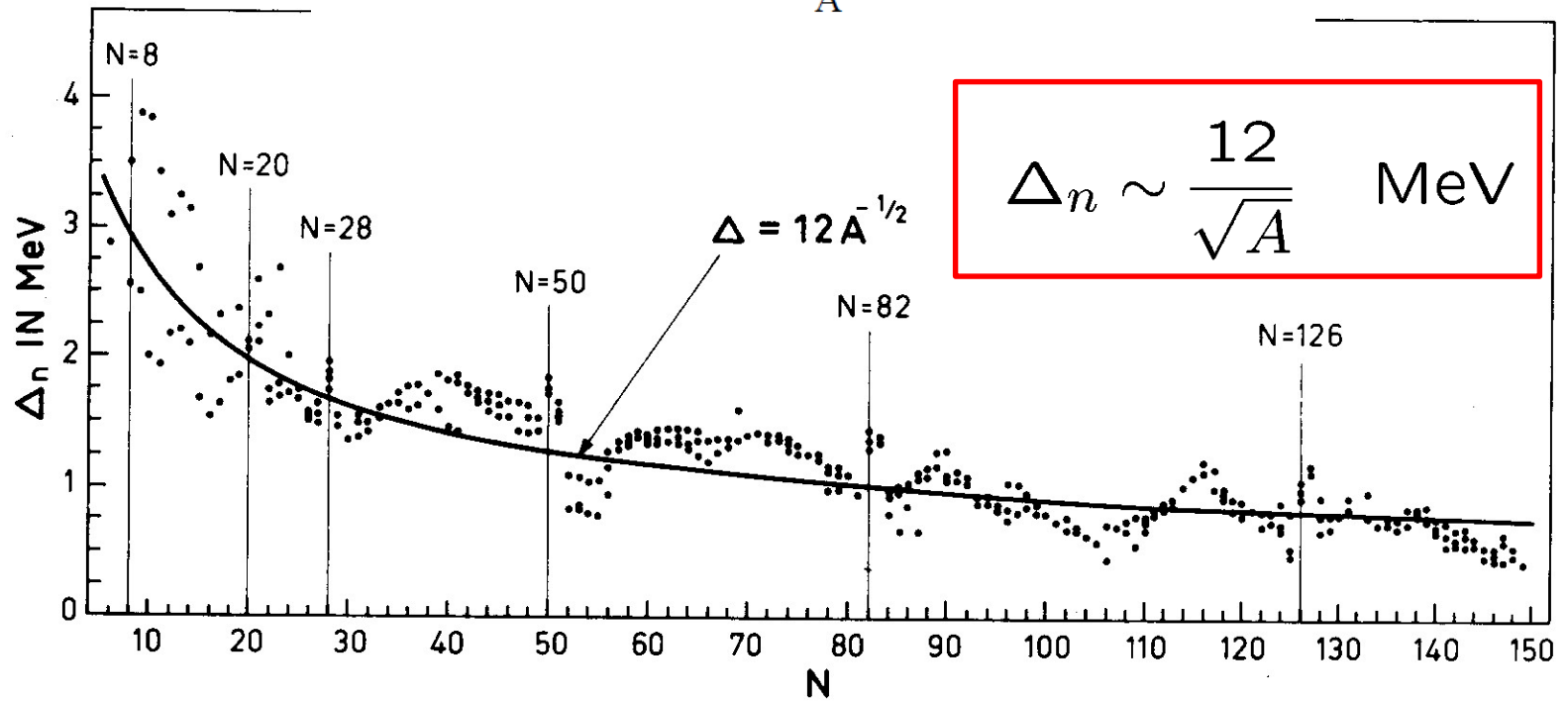
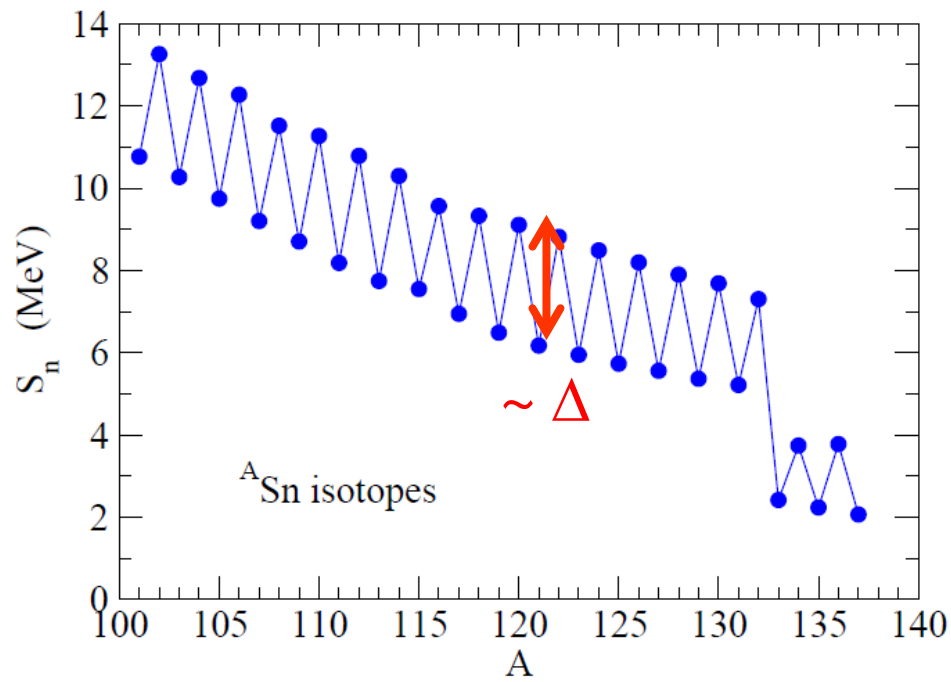
$${}^{210}_{82}\text{Pb}_{128} = {}^{208}_{82}\text{Pb}_{126} + 2n \quad 1646.6$$

$${}^{210}_{83}\text{Bi}_{127} = {}^{208}_{82}\text{Pb}_{126} + n + p \quad 1644.8$$

$${}^{209}_{82}\text{Pb}_{127} = {}^{208}_{82}\text{Pb}_{126} + n \quad 1640.4$$

$${}^{209}_{83}\text{Bi}_{126} = {}^{208}_{82}\text{Pb}_{126} + p \quad 1640.2$$

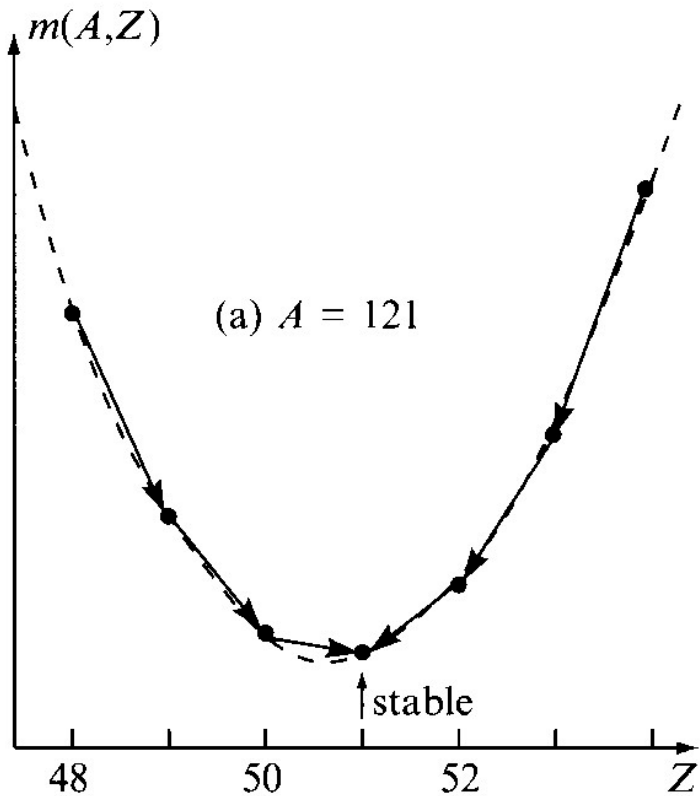
$B_{\text{pair}} = \Delta$	(for even – even)	偶偶
$= 0$	(for even – odd)	偶奇 or 奇偶
$= -\Delta$	(for odd – odd)	奇奇



対相関の帰結 (1) : β -安定線

$$B(N, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\text{sym}} \frac{(N - Z)^2}{A}$$

$$m(A, Z) = f(A) + a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_{\text{sym}} \frac{(A - 2Z)^2}{A}$$



安定核 (beta-安定線)

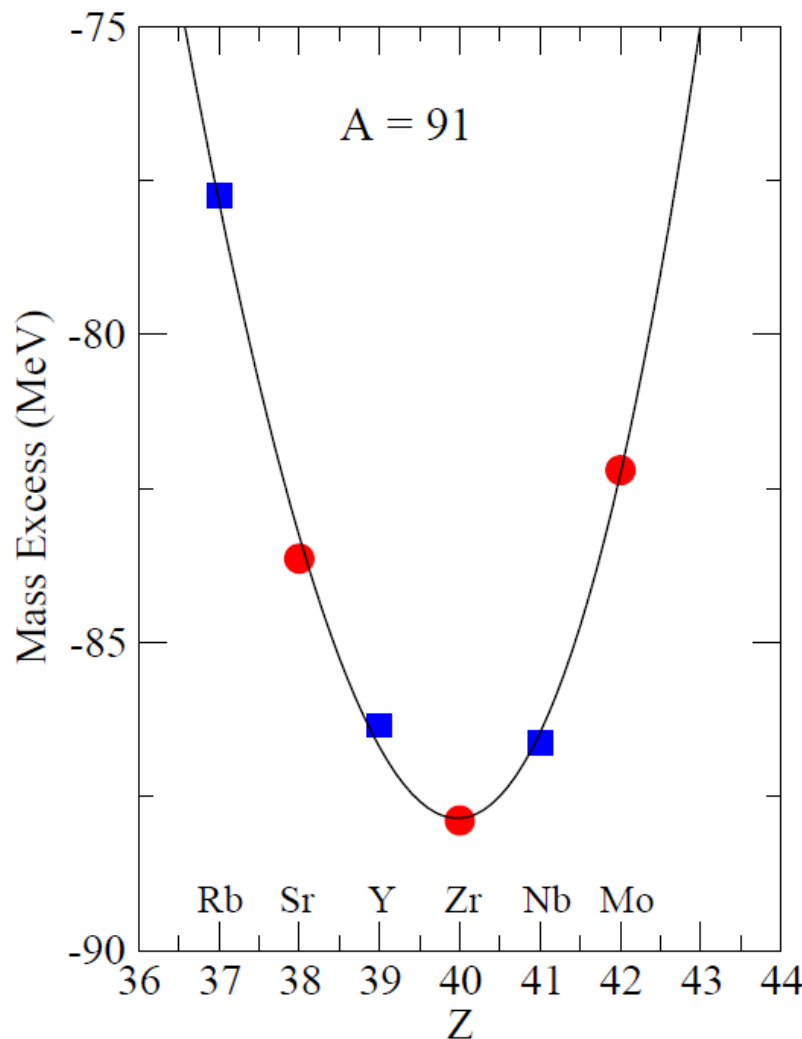
$$\left. \frac{\partial m}{\partial Z} \right|_{A=\text{const.}} = 0$$

$$Z = \frac{4a_{\text{sym}}}{2a_C/A^{1/3} + 8a_{\text{sym}}/A}$$

$$\Rightarrow Z < A/2$$

ここに対相関を考慮するとどうなるか?

$$\begin{aligned}
 B_{\text{pair}} &= \Delta && (\text{for even - even}) \\
 &= 0 && (\text{for even - odd}) \\
 &= -\Delta && (\text{for odd - odd})
 \end{aligned}$$



$$B_{\text{LDM}} = B_{\text{macro}} + B_{\text{pair}}$$

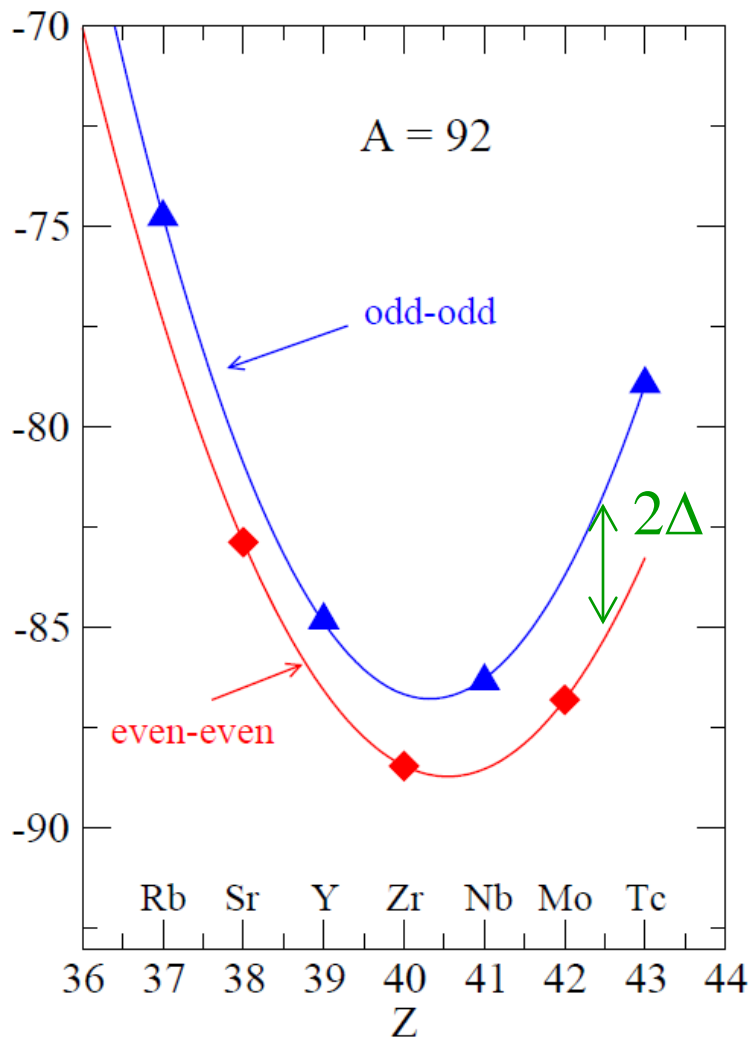
Aが奇数の場合

even-odd 核の場合、 $B_{\text{pair}}=0$
なので今までと同じ

mass excess (縦軸) は
 $M(A, Z) - Au$ という定義

u は原子質量単位で ^{12}C の
質量が $12u$ という定義

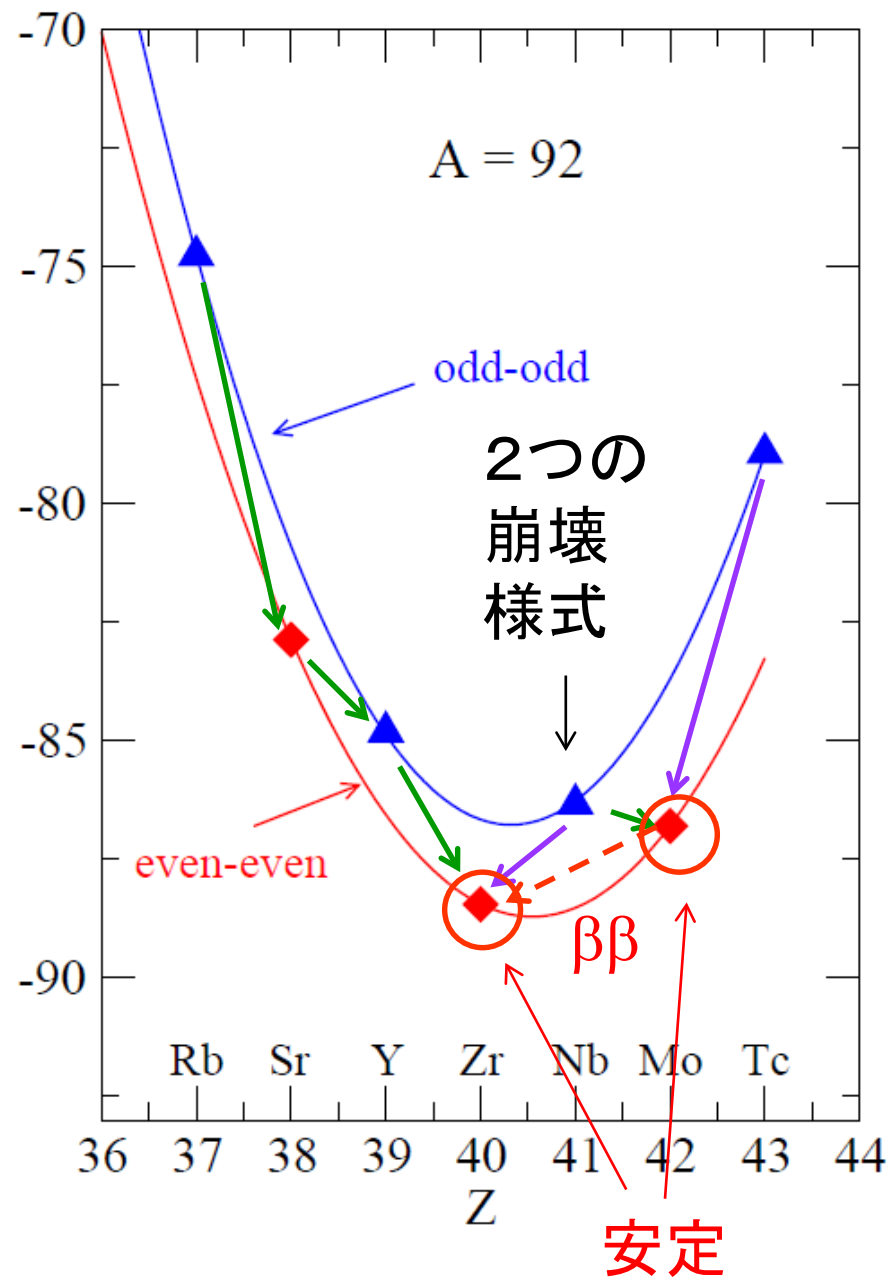
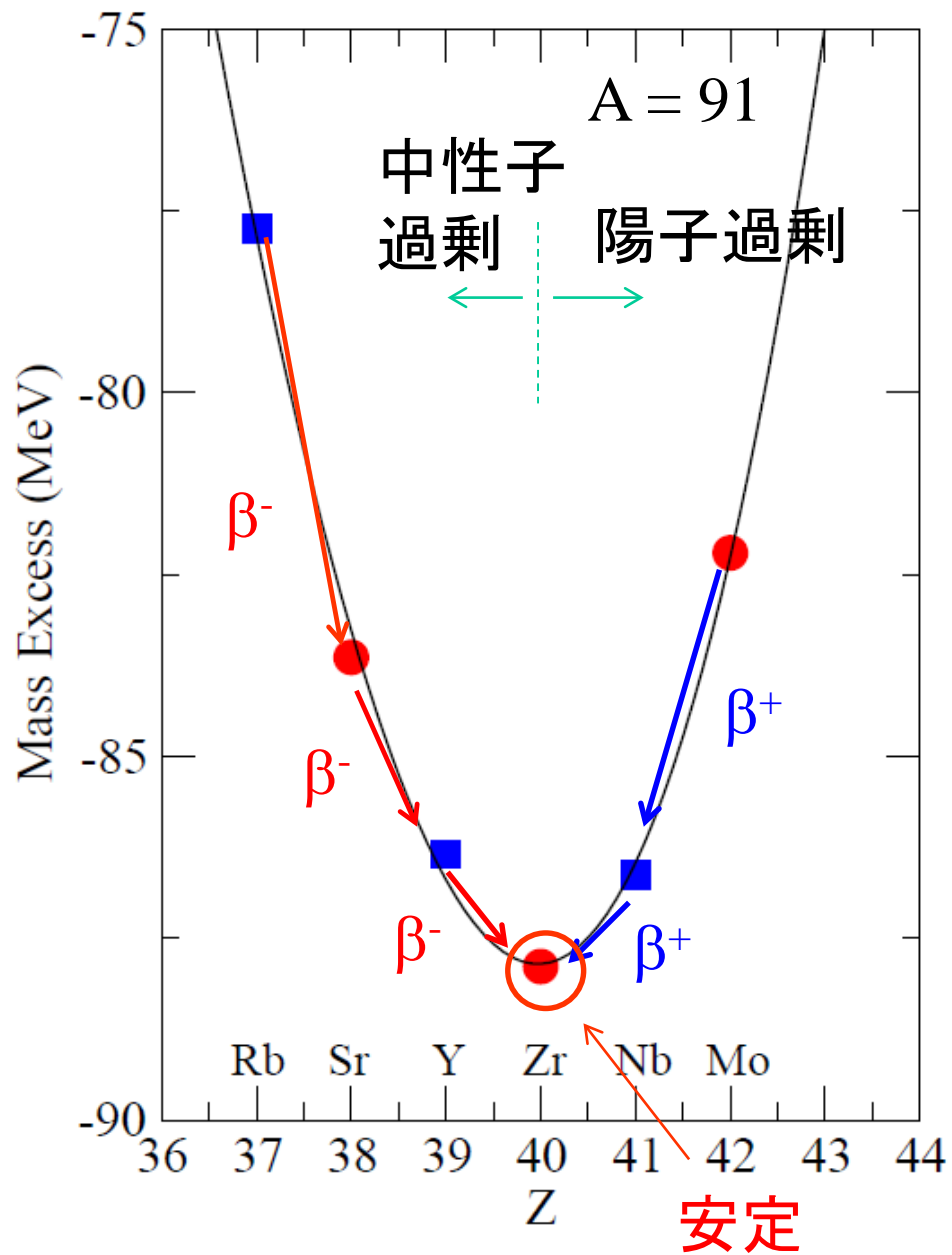
$$\begin{aligned}
 B_{\text{pair}} &= \Delta && (\text{for even - even}) \\
 &= 0 && (\text{for even - odd}) \\
 &= -\Delta && (\text{for odd - odd})
 \end{aligned}$$



次に A が偶数の場合

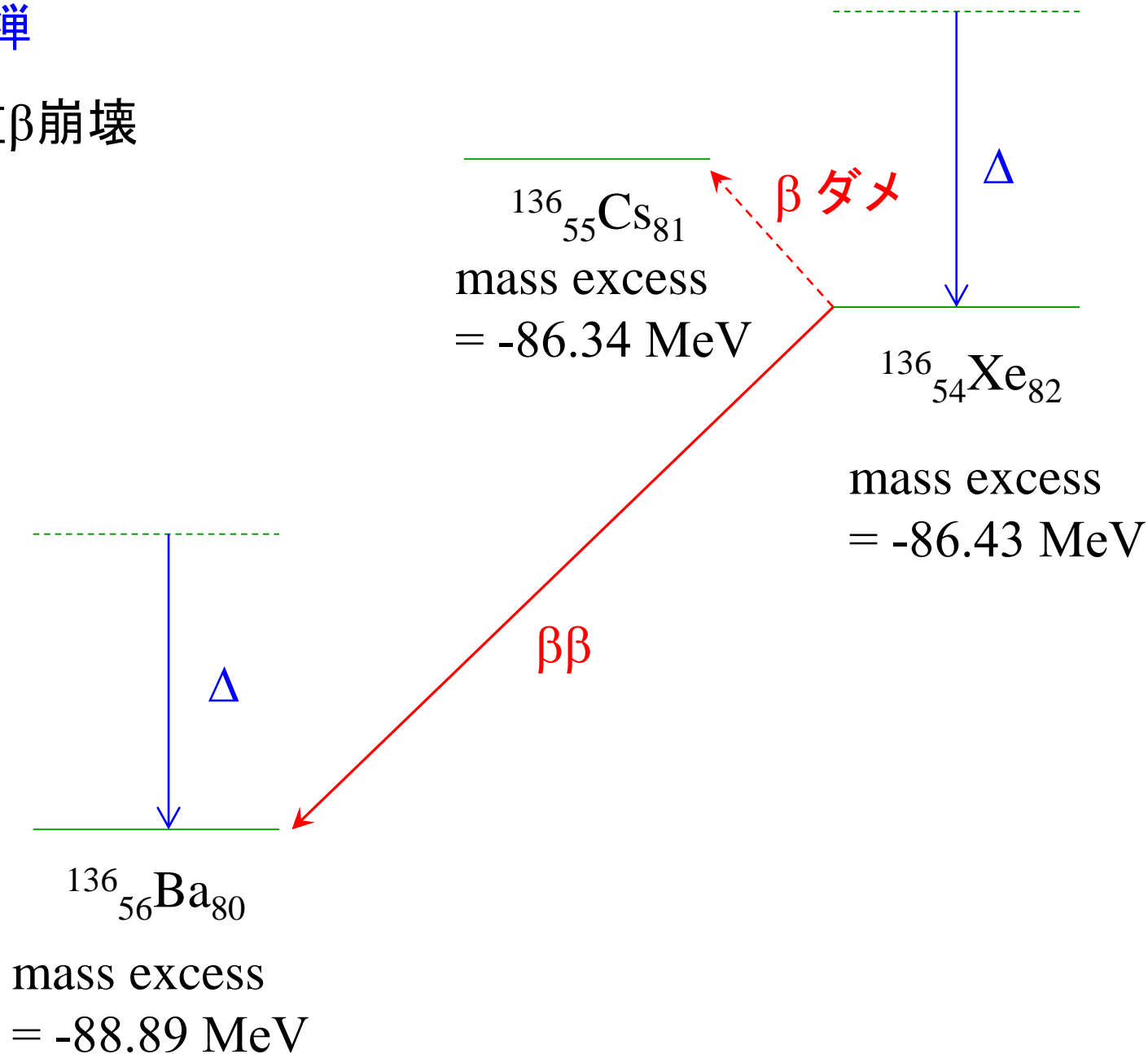
A が偶数の場合、even-even 核
と odd-odd 核でエネルギーの違う
2つの2次曲線ができる

↑
↓
2重β崩壊

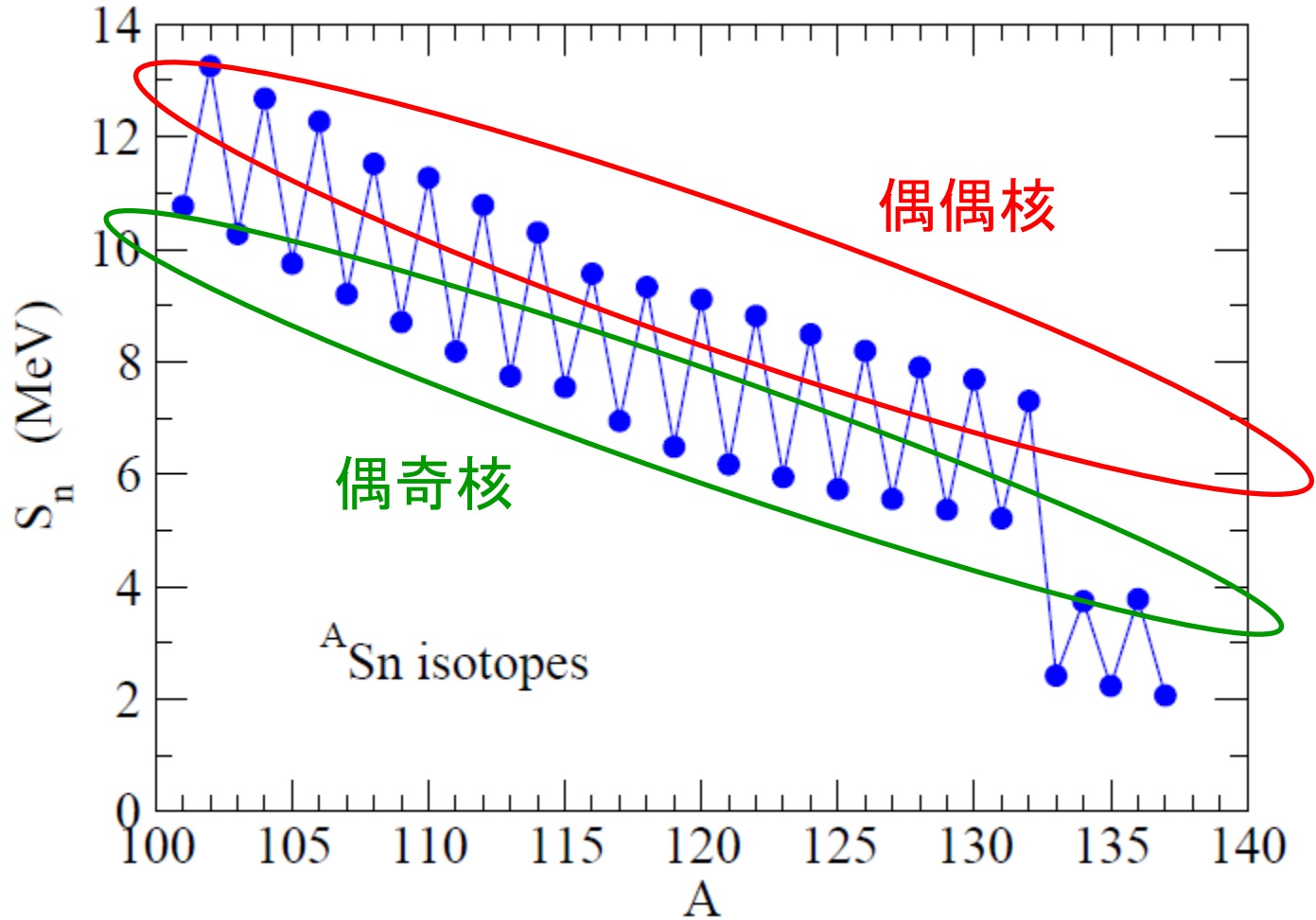


カムランド禅

^{136}Xe の2重 β 崩壊



対相関の帰結 (2): 分離エネルギーにおける偶奇効果



1n separation energy: $S_n (A,Z) = B(A,Z) - B(A-1,Z)$

対相関の帰結 (3): 中性子誘起核分裂

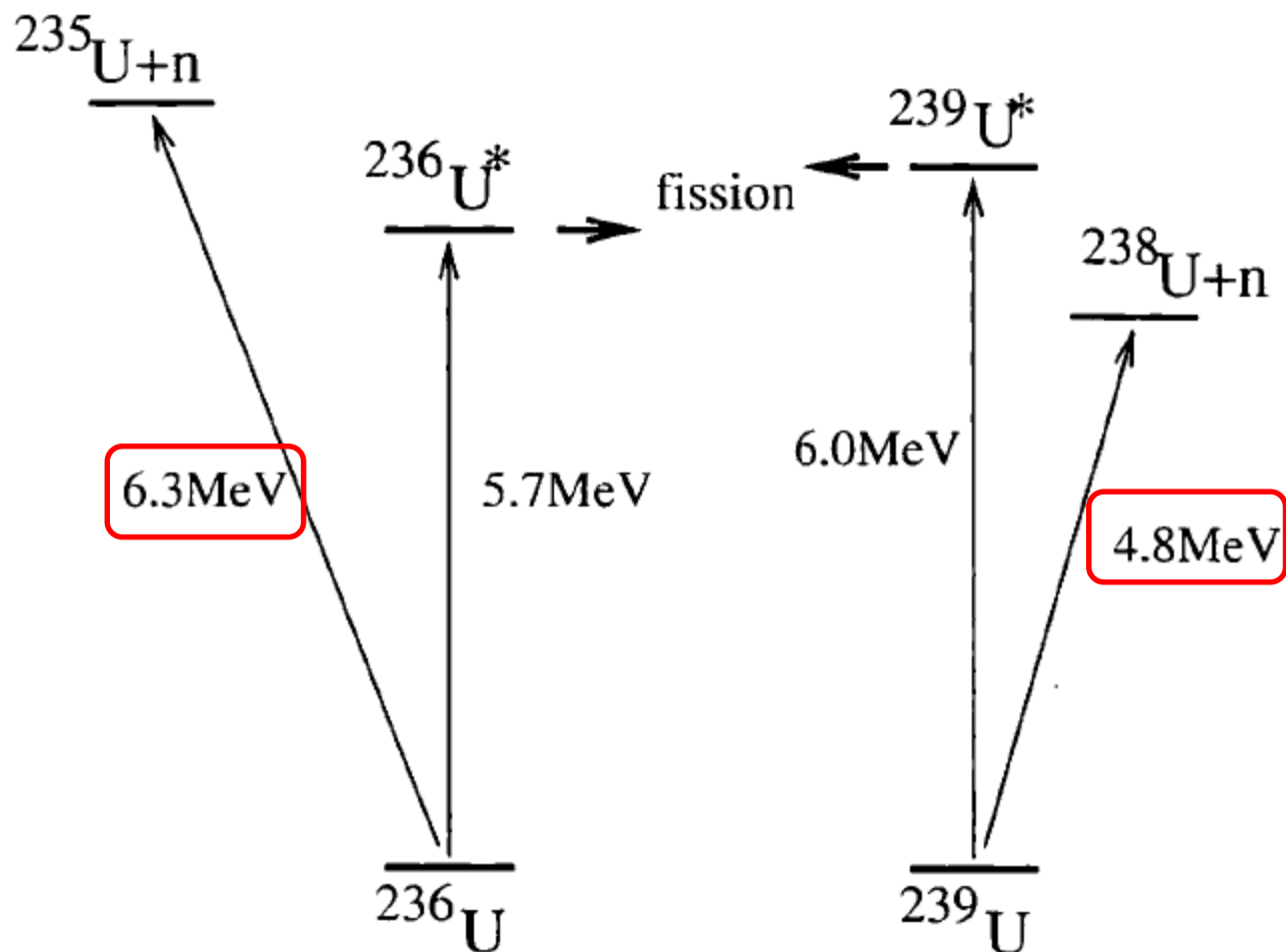
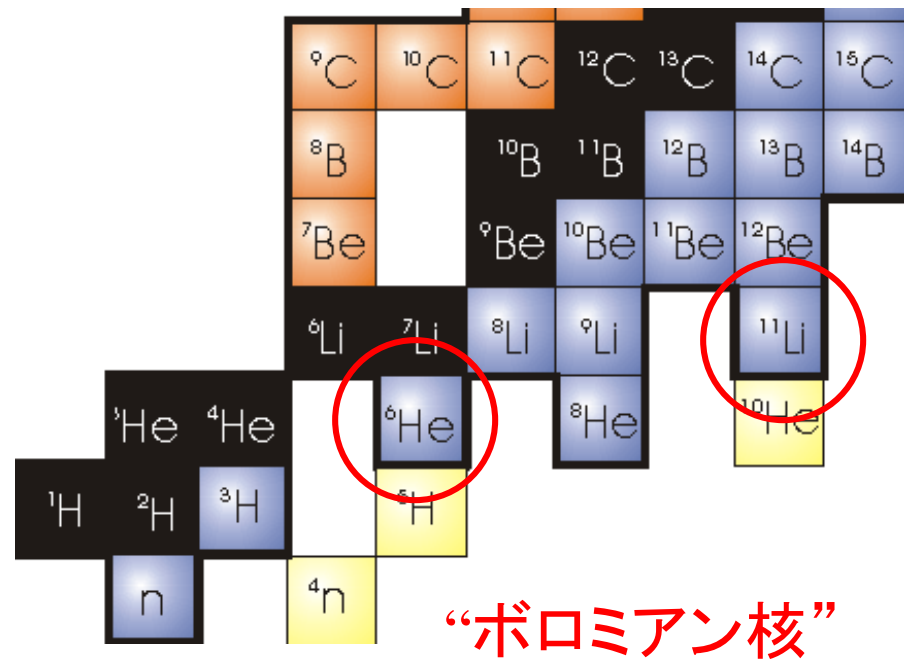
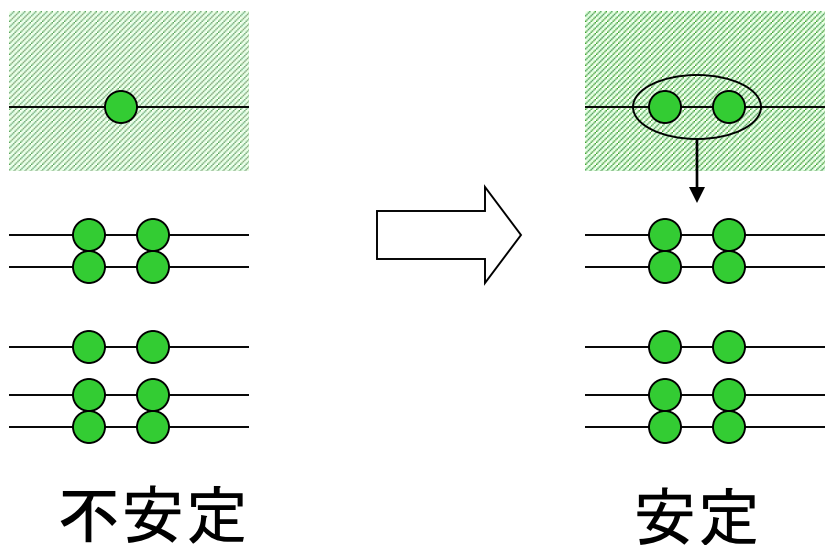


Fig. 6.6. Levels of the systems $A = 236$ and $A = 239$ involved in the fission of ^{236}U and ^{239}U . The addition of a motionless (or thermal) neutron to ^{235}U can lead to the fission of ^{236}U . On the other hand, fission of ^{239}U requires the addition of a neutron of kinetic energy $T_n = 6.0 - 4.8 = 1.2\text{MeV}$.

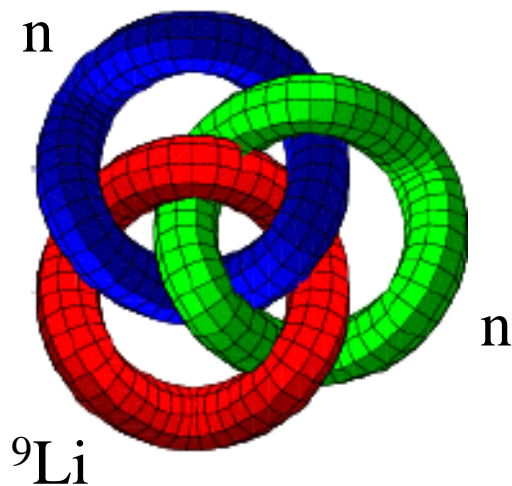
対相関の帰結 (4): 中性子過剰核

残留相互作用 → 引力



「ボロミアン・リング」

3つの輪はつながっているけど、どれか1つをはずすとバラバラになる



出席の代わりに授業アンケート

学籍番号、名前、所属研究室(所属大講座)

この授業に関して、**質問**や**疑問**を自由に何でも書いて下さい
(質問が特になければ**感想**でも可)

- 例)
- ・今日の授業で面白かったこと
 - ・自分にとって発見だったこと
 - ・今日の授業でわかりずらかったこと
(もう一度説明して欲しいこと)
 - ・今日の授業を聞いて疑問に思ったこと
 - ・**授業への要望等でもOK**

などなど