原子核理論特論　レポート問題

提出先：理学総合棟 1047 号室（萩野）またはメール（hagino@nucl.phys.tohoku.ac.jp)。
メールの場合は Subject 欄を「原子核理論特論レポート」とすること。
提出期限：2 月 8 日（月）まで。
その他：氏名、学籍番号、所属を明記のこと。
その他 2：実験等のやむを得ない理由により出席が（１回以上かつ）６回以下の場合は、〆切の前に早めに相談して下さい。

1. 原子核が軸対称にプロレート変形 $(\beta_2 > 0)$ していると、殻模型の $d_{5/2}$ 準位 $(l = 2,\ j = 5/2)$ はエネルギー的にどのように変化するか説明せよ。

2. ^{210}Pb は二重閉殻核 ^{208}Pb に中性子が２つついた原子核である。この原子核の基底状態のスピン、パリティは 0^+ であることが知られている。スピン、パリティが 0^+ になる理由を理論的に説明せよ。ただし、単純な平均場の描像では、外殻中性子２つは $2\mathrm{g}_{9/2}$ 状態 $(j = l + 1/2 = 9/2,\ l = 4)$ に入ることを用いよ。また、^{208}Pb の基底状態のスピン、パリティは 0^+ である。

3. 乱雑位相近似 (RPA) では、励起オペレーターを

$$Q^\dagger = \sum_{p,h} \left(X_{ph} a_p^\dagger a_h - Y_{ph} a_h^\dagger a_p \right) \tag{1}$$

とおき、交換関係 $[H, Q^\dagger] = \hbar\omega Q^\dagger$ が近似的に成り立つことを仮定する。ただし、p は Hartree-Fock 近似で占有されていない状態、h は占有されている状態を表す。この時、X_{ph}, Y_{ph} の満たす式は、

$$\sum_{p'h'} \left(A_{ph,p'h'} X_{p'h'} + B_{ph,p'h'} Y_{p'h'} \right) = \hbar\omega X_{ph} \tag{2}$$

$$\sum_{p'h'} \left(B^*_{ph,p'h'} X_{p'h'} + A^*_{ph,p'h'} Y_{p'h'} \right) = -\hbar\omega Y_{ph} \tag{3}$$

となる。ただし、行列 A、B は以下の式で与えられる。

$$A_{ph,p'h'} = \epsilon_{ph} \delta_{ph,p'h'} + \langle ph' | \bar{v} | hp' \rangle \tag{4}$$

$$B_{ph,p'h'} = \langle pp' | \bar{v} | hh' \rangle \tag{5}$$

ここで、$\bar{v}$ は（反対称化された）残留相互作用、$\epsilon_{ph} = \epsilon_p - \epsilon_h$ は残留相互作用 $\bar{v}$ が無いときの励起エネルギーである。また、規格化条件は

$$\sum_{ph} \left(|X_{ph}|^2 - |Y_{ph}|^2 \right) = 1 \tag{6}$$

で与えられる。

(a) 今、ph の組が一つしかない特別な場合を考える。この時、A,B 行列は単なる数字（スカラー）となる。$\langle ph|\bar{v}|hp\rangle = \langle pp|\bar{v}|hh\rangle = V$ で与えられる時、X, Y の満たすべき方程式は

$$\begin{pmatrix} \epsilon + V & V \\ -V & -\epsilon - V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \hbar\omega \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \tag{7}$$

となる。但し、$\epsilon_{ph} = \epsilon$ とおいた。この式を解いて、$\hbar\omega, X, Y$ を求めよ。
[ヒント] $X + Y$, $X - Y$ に対する結合方程式を求めて、$X - Y$ を消去せよ。

(b) $\hbar\omega$ と ϵ の相対的な大きさの差が V の符号によってどう変わるのか議論せよ。

(c) あるオペレーター F が与えられた時、基底状態 $|0\rangle$ と励起状態 $|1\rangle = Q^\dagger|0\rangle$（$Q^\dagger$ は (1) 式で与えられる励起オペレーター）の間の行列要素は

$$\langle 1|F|0\rangle = \sum_{ph} \left(\langle h|F|p\rangle X_{ph} + \langle p|F|h\rangle Y_{ph}\right) \tag{8}$$

となる。a) の様に、ph の組が一つしかない場合に、

$$S = \hbar\omega \cdot |\langle 1|F|0\rangle|^2 \tag{9}$$

が残留相互作用 V に依らないことを 2-(a) で求めた解を用いて示せ。但し、$\langle h|F|p\rangle = \langle p|F|h\rangle = F$ とする。このことは、乱雑位相近似が energy weighted sum rule を満たしていることを示している。