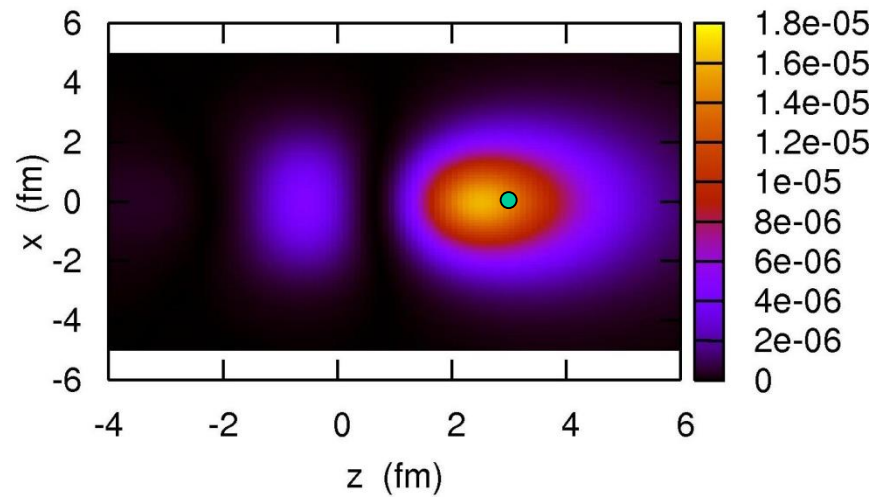
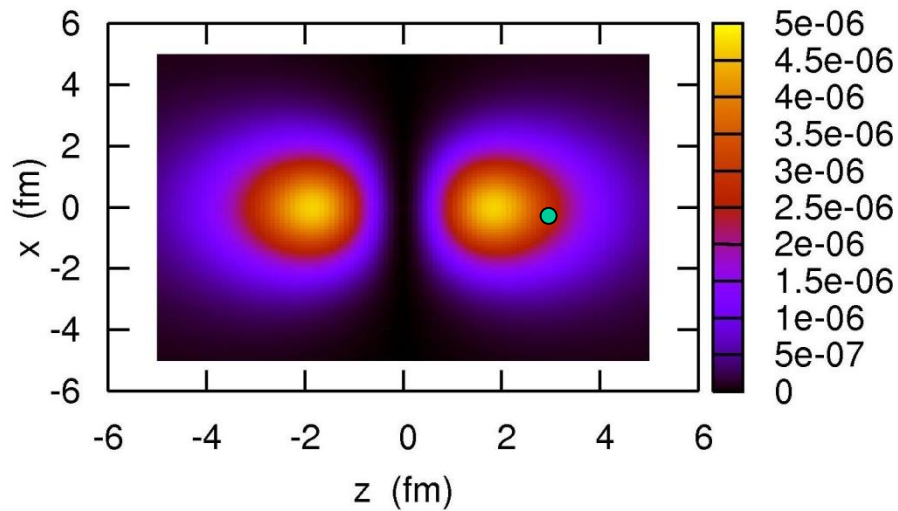
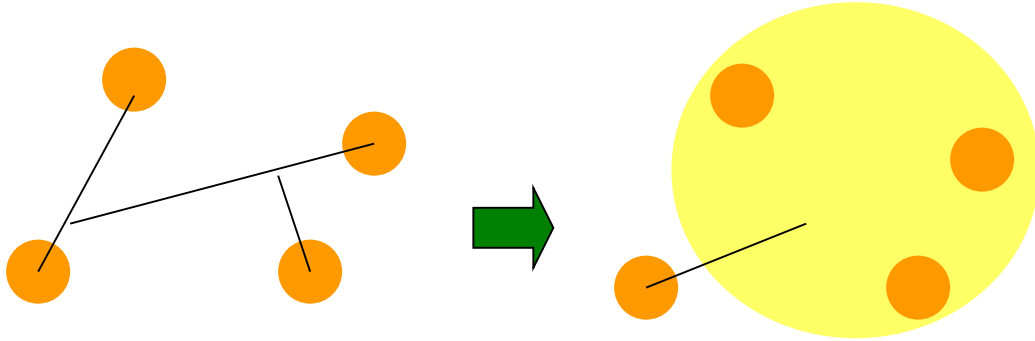


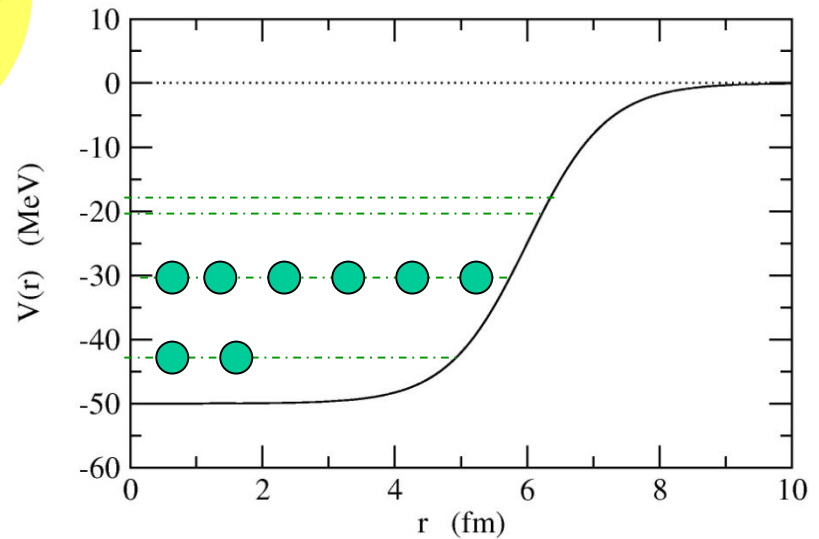
# 対相関と2粒子ハロ一核



# Hartree-Fock Method

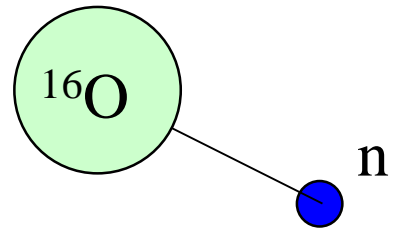
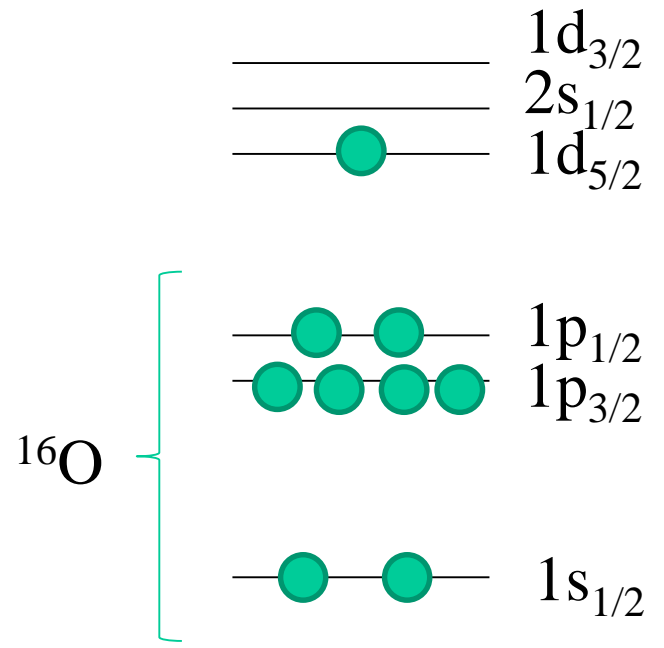
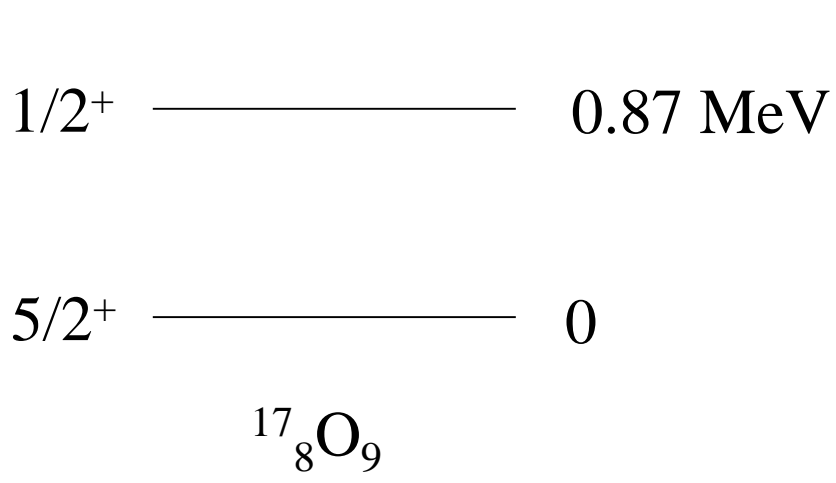


independent particle motion  
in a potential well

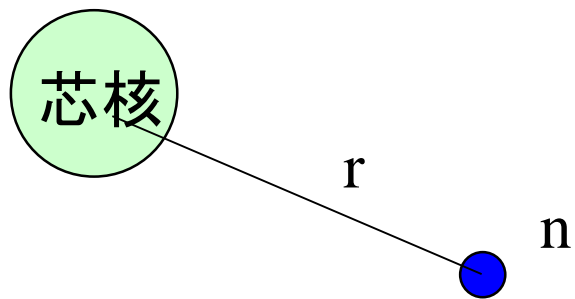


$$\begin{aligned}\Psi(1, 2, \dots, A) &= \mathcal{A}[\psi_1(1)\psi_2(2)\cdots\psi_A(A)] \\ &= \frac{1}{\sqrt{A!}} \begin{vmatrix} \psi_1(1) & \psi_2(1) & \cdots & \psi_A(1) \\ \psi_1(2) & \psi_2(2) & \cdots & \psi_A(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1(A) & \psi_2(A) & \cdots & \psi_A(A) \end{vmatrix}\end{aligned}$$

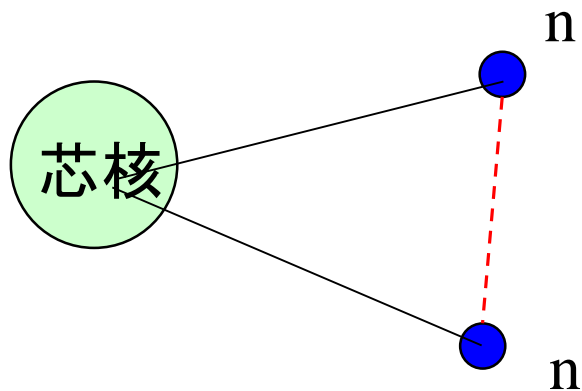
**Slater determinant:** antisymmetrization due to the Pauli principle



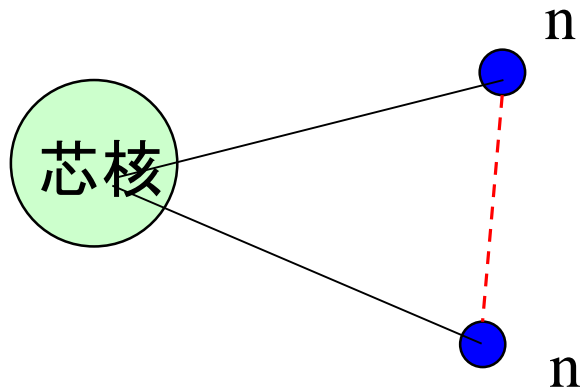
# 対相関



芯核のまわりに中性子が2個あるとどうなる？

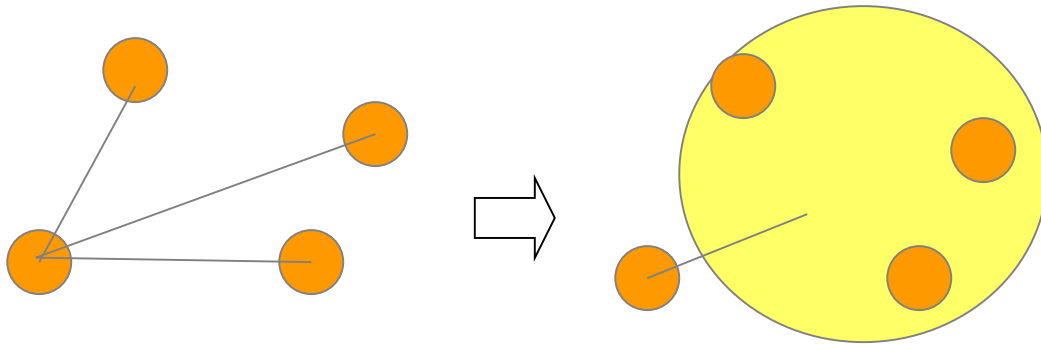


2中性子間に働く相互作用の影響は？



2中性子間に働く相互作用の影響は？

### 平均場理論



他の核子との相互作用を平均的に取り扱う

単純な平均場近似が完全に成り立っているとすると、2中性子間相互作用は平均場ポテンシャルを通じて考慮され、それ以上の相互作用を考える必要はない。(2中性子が独立に運動。)

$$H = \sum_i T_i + \sum_{i < j} v_{ij} \rightarrow H = \sum_i (T_i + V_i) + \underbrace{\sum_{i < j} v_{ij} - \sum_i V_i}_{\text{平均からのずれ}}$$

平均からのずれ  
(残留相互作用)

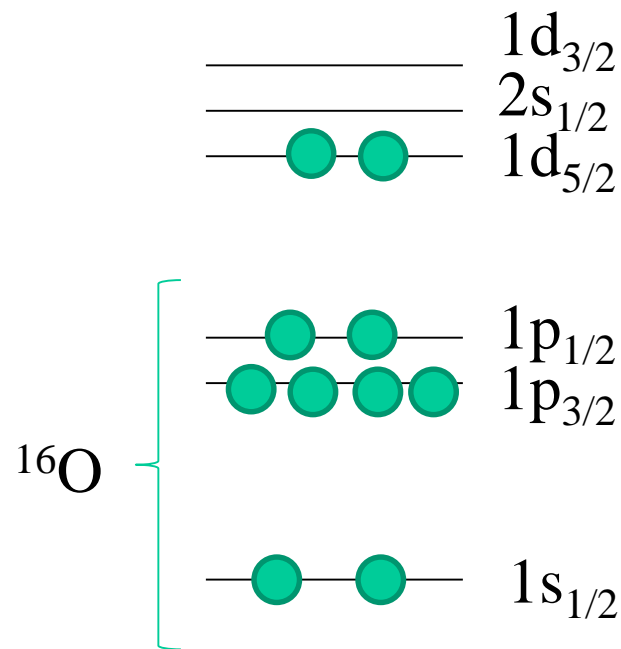
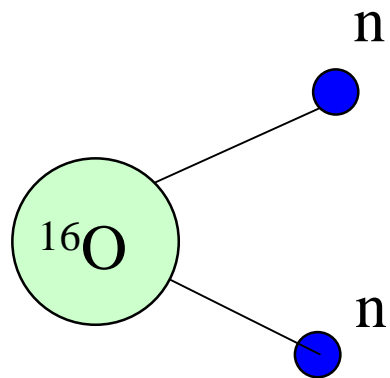
残留相互作用は完全に無視してもよいのか？

→ 開殻原子核では重要な役割を果たす  
ことが知られている(ペアリング)

$2^+$  ————— 1.98 MeV

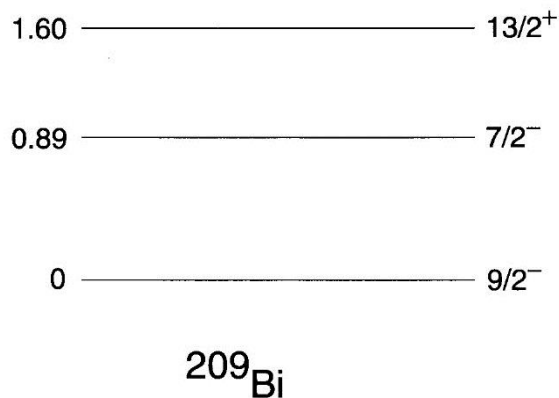
$0^+$  ————— 0

$^{18}_8\text{O}_{10}$



# 対相関 (ペアリング)

$${}^{209}_{83}\text{Bi}_{126} = {}^{208}_{82}\text{Pb}_{126} + p$$



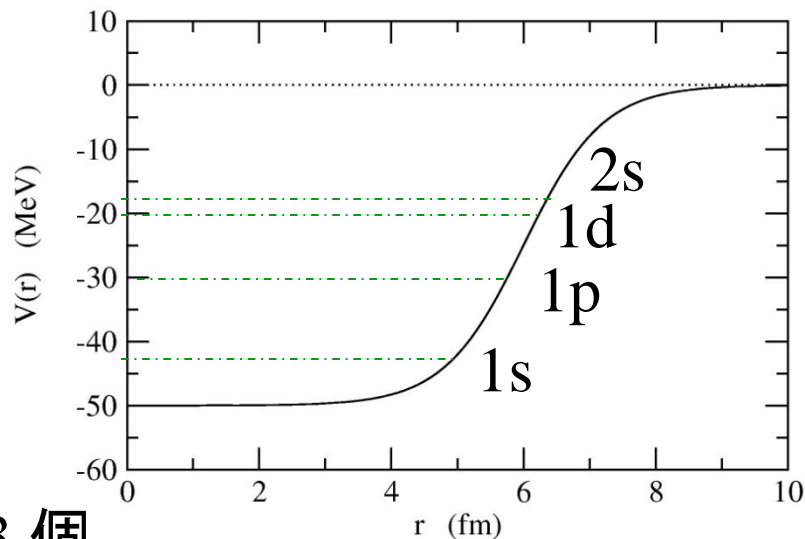
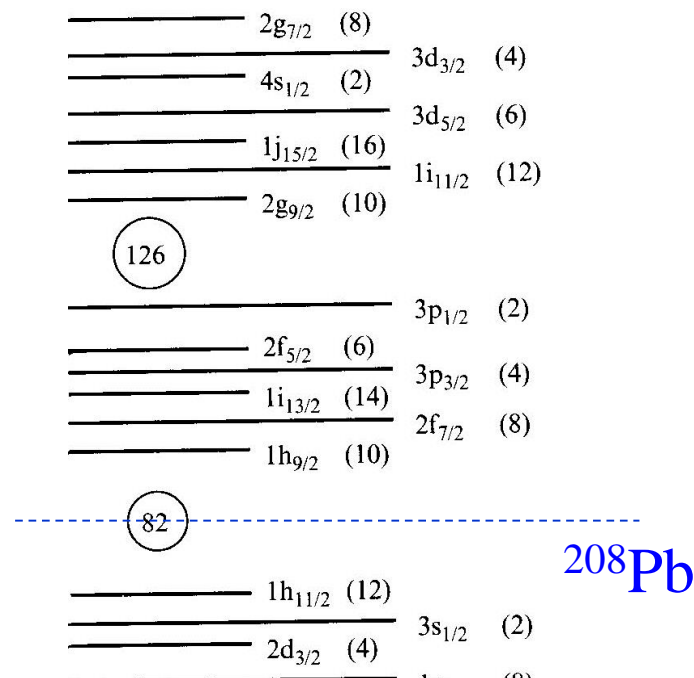
$${}^{210}_{84}\text{Po}_{126} = {}^{208}_{82}\text{Pb}_{126} + 2p$$

もし独立粒子近似が成り立っていると:

$$E=0: [h_{9/2} \otimes h_{9/2}]^I \quad (I=0,2,4,6,8)$$

$$E=0.89 \text{ MeV}: [h_{9/2} \otimes f_{7/2}]^I \quad (I=1,2,3,4,5,6,7,8)$$

→ 状態の数: 1 MeV以下に13 個







独立粒子近似が成り立っていると:

$$E=0: [h_{9/2} \otimes h_{9/2}]^I \quad (I=0,2,4,6,8)$$

$$E=0.89 \text{ MeV}: [h_{9/2} \otimes f_{7/2}]^I \quad (I=1,2,3,4,5,6,7,8)$$

→ 状態の数: 1 MeV以下に13 個

実際のスペクトル:

$$1.20 \text{ MeV} \text{ ————— } 4^+$$

$$0.81 \text{ MeV} \text{ ————— } 2^+$$

$$0 \text{ ————— } 0^+$$

${}^{210}\text{Po}$



残留相互作用の効果

$$H = \sum_{i=1}^A \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + V_{\text{HF}}(i) \right) + \frac{1}{2} \sum_{i,j}^A v(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) - \sum_i V_{\text{HF}}(i)$$

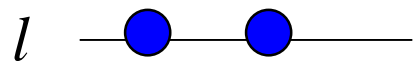
## 対相関(ペアリング)

$$H = \sum_{i=1}^A \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + V_{\text{HF}}(i) \right) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} v(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) - \sum_i V_{\text{HF}}(i)$$

簡単のために、残留相互作用としてデルタ関数を仮定してみる  
(超短距離力)

$$\begin{aligned} v_{\text{res}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &\sim -g \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ &= -g \frac{\delta(r - r')}{rr'} \sum_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}^*(\hat{\mathbf{r}}) Y_{\lambda\mu}(\hat{\mathbf{r}}') \end{aligned}$$

摂動論で残留相互作用の効果を見積もってみる:



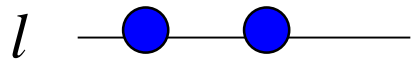
非摂動な波動関数:

角運動量  $l$  の状態に中性子2個、それが  
全角運動量  $L$  を組んでいる

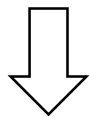
$$|(ll)LM\rangle = \sum_{m,m'} \langle lmlm' | LM \rangle \psi_{lm}(\mathbf{r}) \psi_{lm'}(\mathbf{r}')$$

## 対相関(ペアリング)

$$\begin{aligned}v_{\text{res}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &\sim -g \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ &= -g \frac{\delta(r - r')}{rr'} \sum_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}^*(\hat{\mathbf{r}}) Y_{\lambda\mu}(\hat{\mathbf{r}}')\end{aligned}$$



$$|(ll)LM\rangle = \sum_{m,m'} \langle l m l m' | LM \rangle \psi_{lm}(\mathbf{r}) \psi_{lm'}(\mathbf{r}')$$



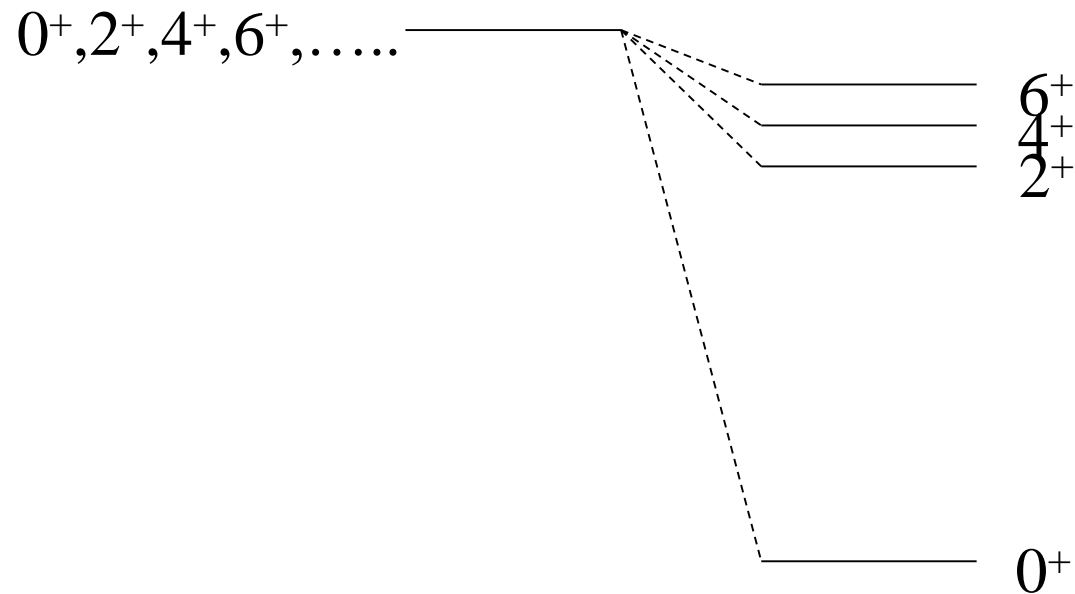
残留相互作用によるエネルギー変化:

$$\begin{aligned}\Delta E_L &= \langle (ll)LM | v_{\text{res}} | (ll)LM \rangle \\ &= -g I_r^{(l)} \frac{(2l+1)^2}{4\pi} \begin{pmatrix} l & l & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2\end{aligned}$$

$$I_r^{(l)} = \int_0^\infty r^2 dr (R_l(r))^4$$

$$\Delta E_L = -g I_r^{(l)} \frac{(2l+1)^2}{4\pi} \begin{pmatrix} l & l & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \equiv -g I_r^{(l)} \frac{A(l; L)}{4\pi}$$

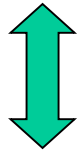
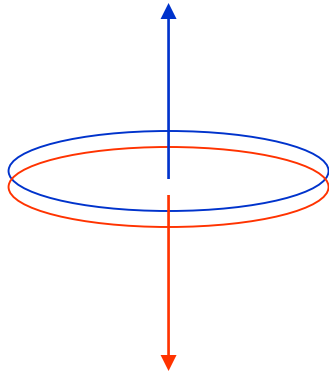
$A(l; L)$	$L=0$	$L=2$	$L=4$	$L=6$	$L=8$
$l=2$	5.00	1.43	1.43	---	---
$l=3$	7.00	1.87	1.27	1.63	---
$l=4$	9.00	2.34	1.46	1.26	1.81



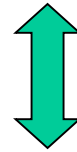
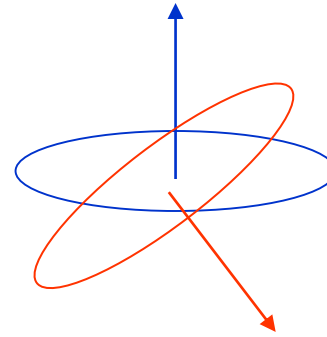
残留相互  
作用なし

残留相互  
作用あり

## 簡単な解釈:



$L=0$  対



$L \neq 0$  対

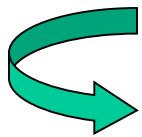
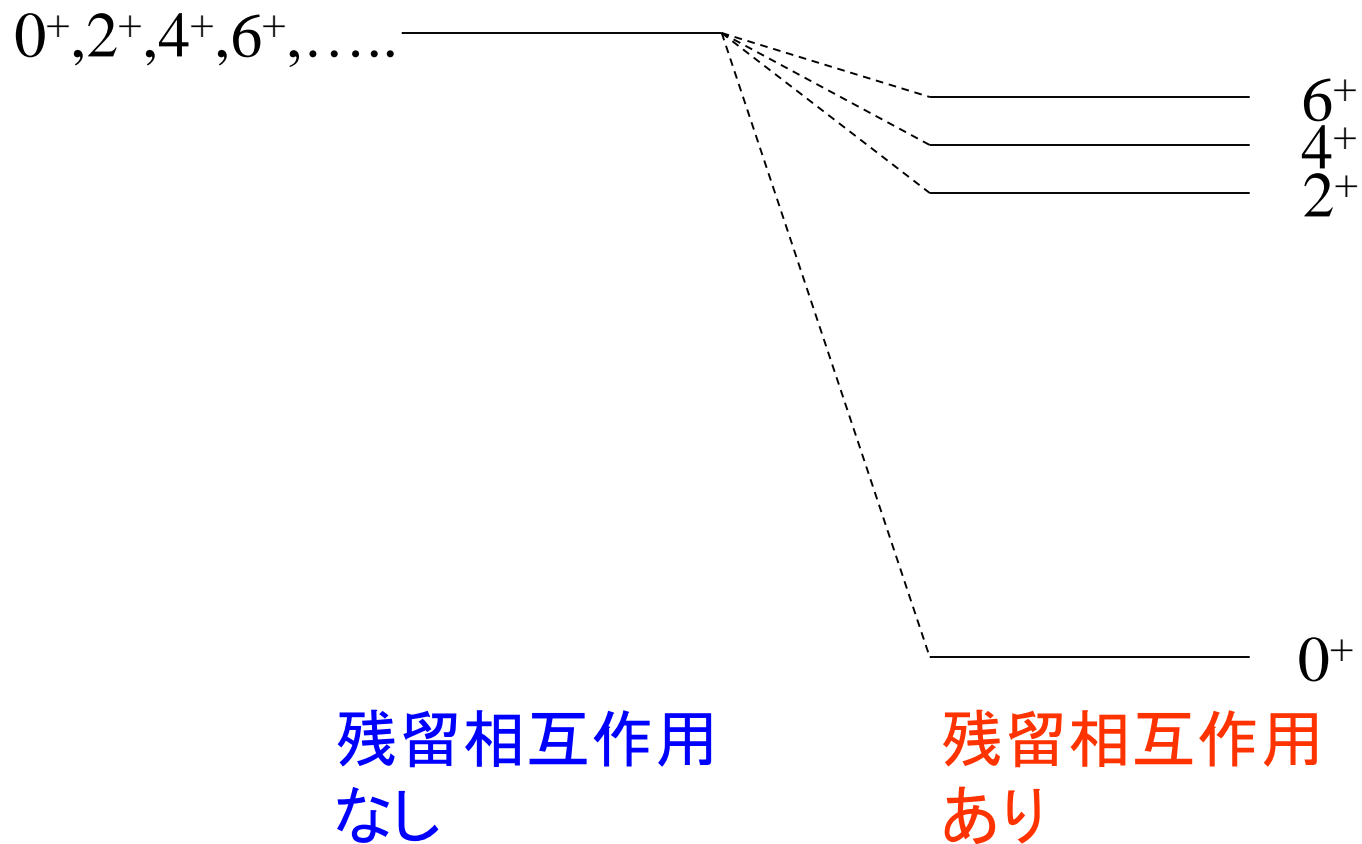
$L=0$  対に対して空間的重なりが最大(エネルギー的に得)

“対相関”

(note)

$$\psi(l^2; L=0) = \sum_m \langle l m l - m | L=0, 0 \rangle Y_{lm}(\hat{r}_1) Y_{l-\mu}(\hat{r}_2) = Y_{l0}(\theta_{12}) / \sqrt{4\pi}$$

すべての  $m$  が「コヒーレント」に寄与



## 原子核の基底状態のスピ

- 偶々核: 例外なしに  $0^+$
- 奇核: 最外殻核子の角運動量と一致

## 束縛エネルギー

対相関のため、同種核子(2つの中性子または2つの陽子)が角運動量ゼロを組むと安定化

例:

束縛エネルギー (MeV)

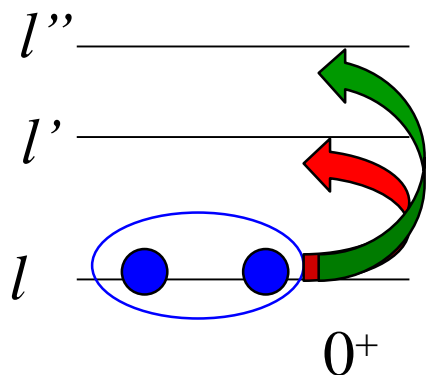
$${}^{209}_{82}\text{Pb}_{127} = {}^{208}_{82}\text{Pb}_{126} + \text{n} \quad 1640.4$$

$${}^{209}_{83}\text{Bi}_{126} = {}^{208}_{82}\text{Pb}_{126} + \text{p} \quad 1640.2$$

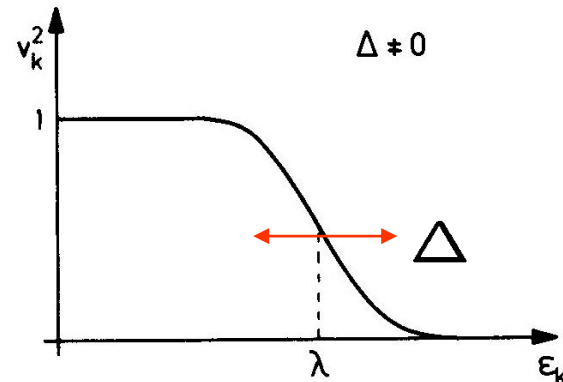
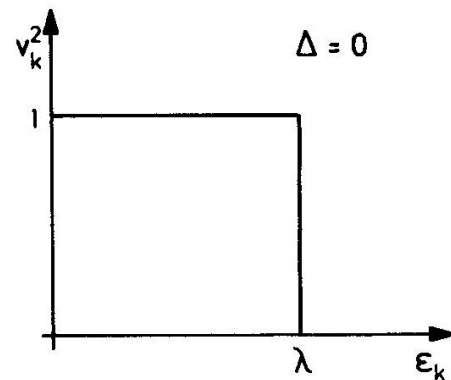
$${}^{210}_{82}\text{Pb}_{128} = {}^{208}_{82}\text{Pb}_{126} + 2\text{n} \quad 1646.6$$

$${}^{210}_{83}\text{Bi}_{127} = {}^{208}_{82}\text{Pb}_{126} + \text{n} + \text{p} \quad 1644.8$$

# 波動関数:



Occupation probability



$$|\Psi_{0+}\rangle = |(ll)L=0\rangle + \sum_{l'} \frac{\langle (l'l')L=0 | v_{res} | (ll)L=0 \rangle}{2\epsilon_l - 2\epsilon_{l'}} |(l'l')L=0\rangle + \dots$$

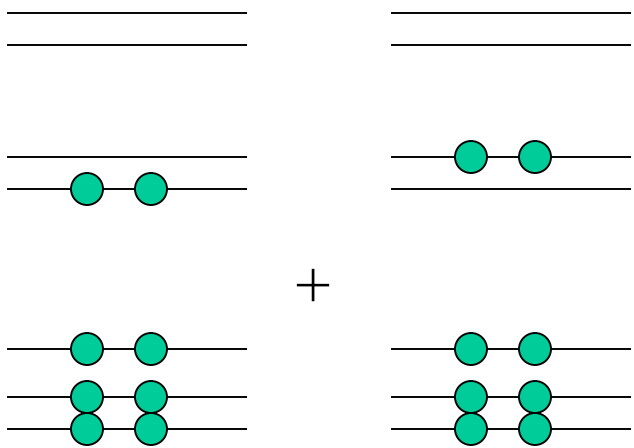
各軌道は部分的にのみ占有されることになる  
cf. BCS 理論



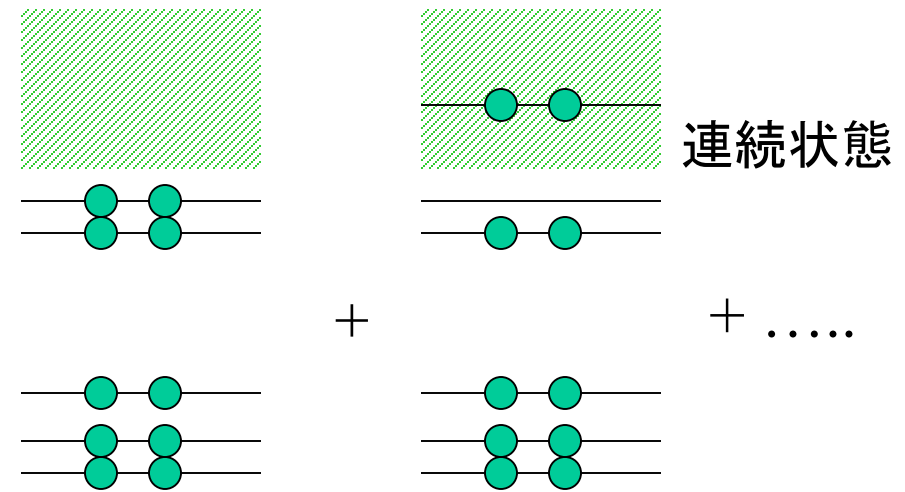
# 弱束縛核における対相関

$$H = \sum_i T_i + \sum_{i < j} v_{ij} \rightarrow H = \sum_i (T_i + V_i) + \underbrace{\sum_{i < j} v_{ij} - \sum_i V_i}_{\text{平均からのずれ (残留相互作用)}}$$

平均からのずれ  
(残留相互作用)



安定な原子核  
→ 超流動状態

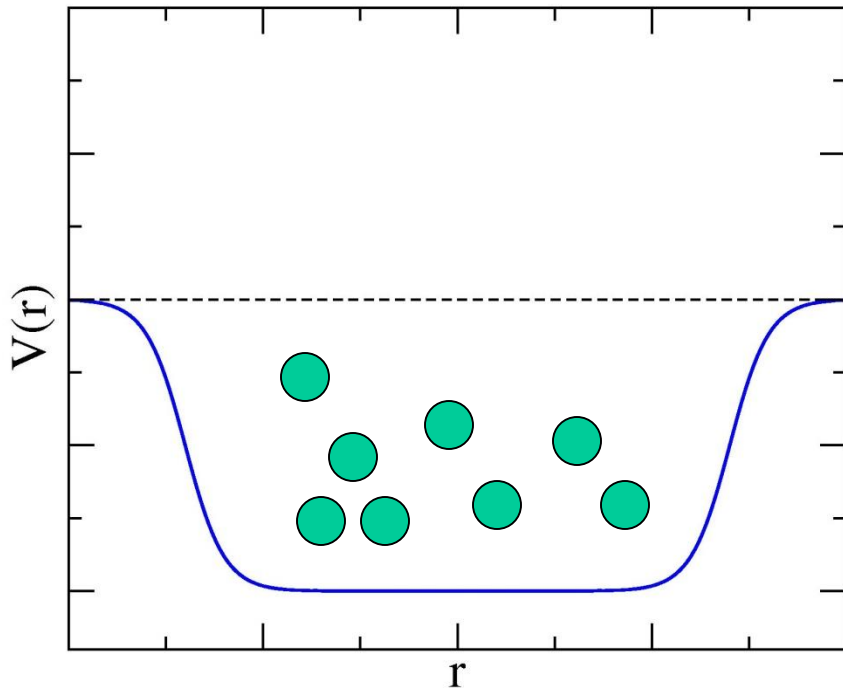


弱く束縛された系

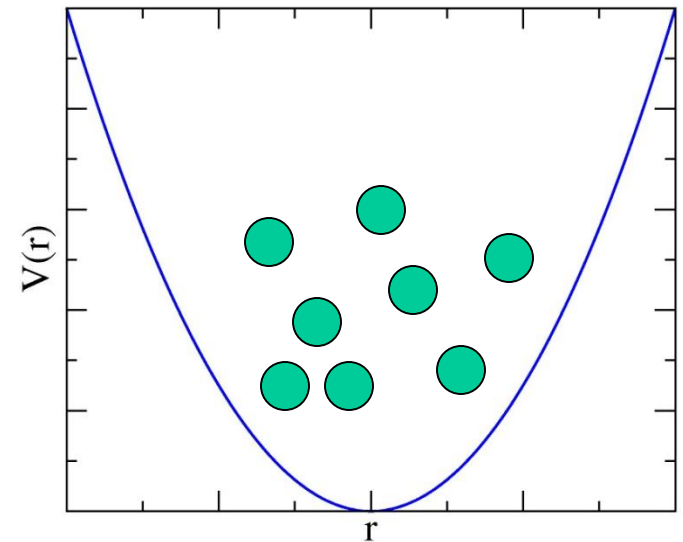
# 中性子過剰核の物理

- 弱束縛系
- 残留相互作用(対相関)
- 連続状態との結合

ポテンシャルの井戸に束縛された相互作用する多フェルミオン系



- 有限の深さを持つ井戸
- 自己無撞着性

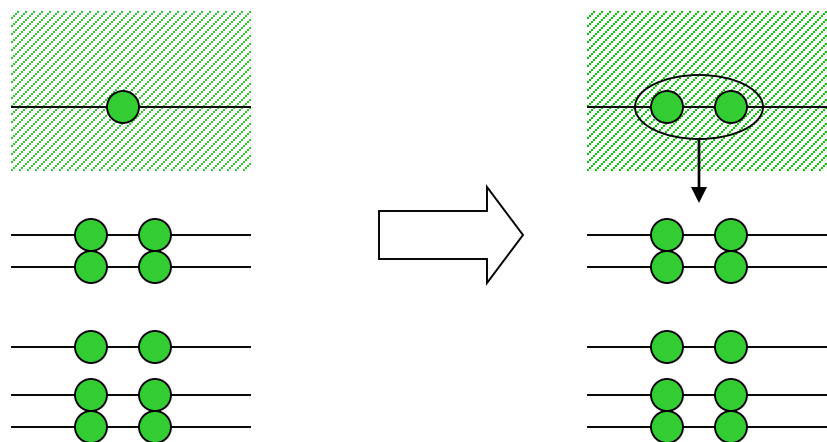


cf. a harmonic trap

とてもチャレンジングな問題  
(わからないことは色々ある)

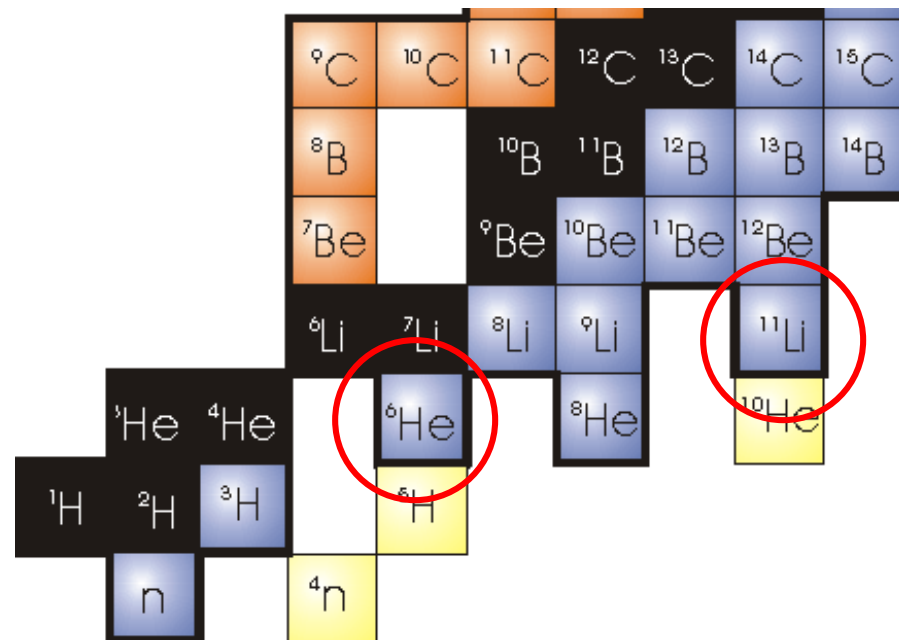
# ボロミアン原子核

残留相互作用 → 引力



不安定

安定



“ボロミアン核”

## ボロミアン核の構造

- ✓ 多体相関のため non-trivial
- ✓ 多くの注目を集めている

## (休憩)ボロミアンって何?



ボッロメオ諸島  
(北イタリア、マッジョー  
レ湖)  
ミラノの近く



ボッロメオ家(13世紀)の紋章



©2010 Google - 地図データ ©2010 Basarsoft, Europa Technologies, Google

©2010 Google - 地図データ ©2010 Basarsoft, Europa Technologies, Google



ボロミオ諸島

# (休憩)ボロミアンって何?

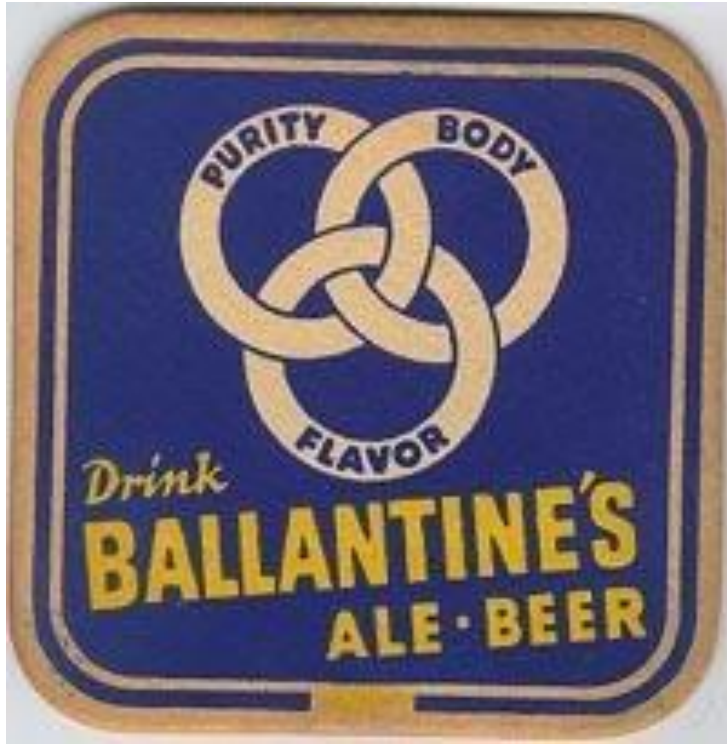
ちなみに日本でも。。。。



三つ輪違い紋  
(徳川旗本金田家の紋)

大神(おおみわ)神社  
奈良県桜井市





バラントイン・エール(アメリカのビール)

## (休憩)ボロミアンって何?



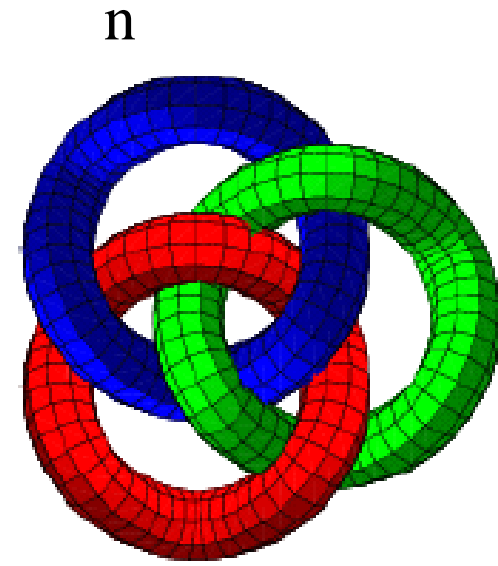
三つ輪違い紋  
(徳川旗本金田家の紋)

3つの輪はつながっているけど、どれか1つをはずすとバラバラになる

「ボロミアン・リング」



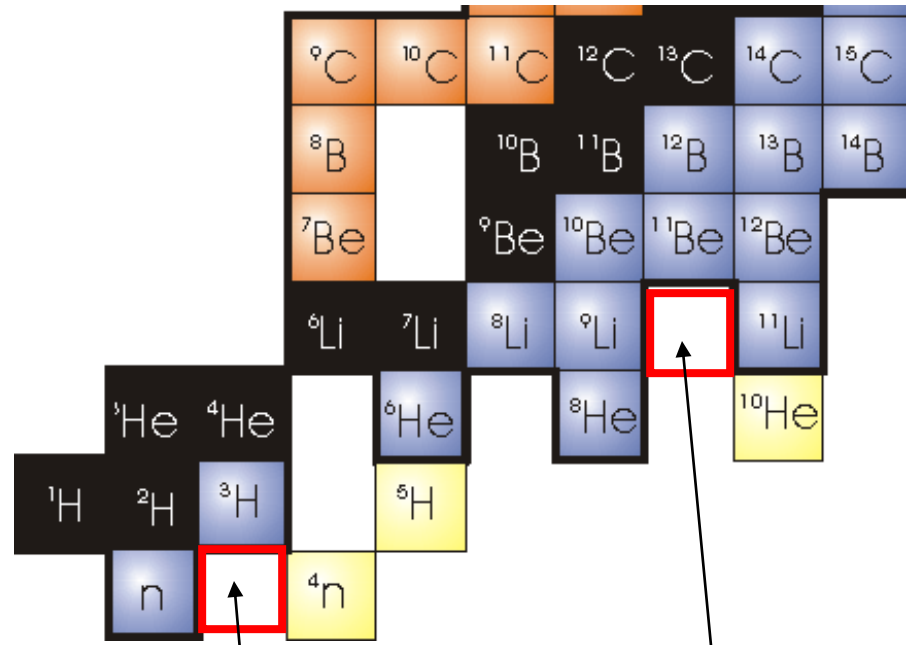
# ボロミアン原子核



${}^9\text{Li}$

ボロミアン核

n



${}^{10}\text{Li}$  ( ${}^9\text{Li}+n$ )  
は存在せず

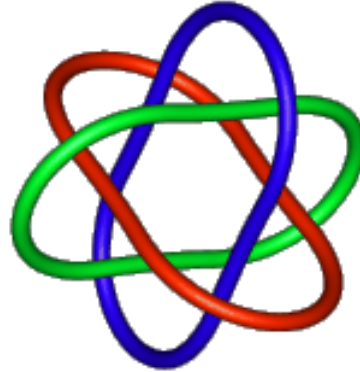
${}^2n$  ( $n+n$ ) は存在せず

他にも、 ${}^6\text{He}$  が典型的な例

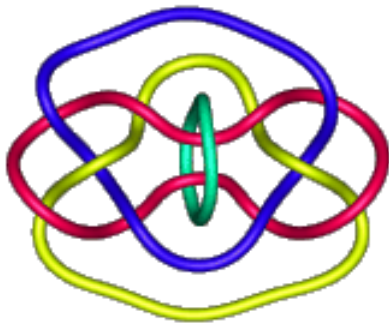
(参考)ブルニアン・リンク: 拡張されたボロミアン

結び目理論: 位相幾何学の分野(数学)

n=3: Borromean



n=4

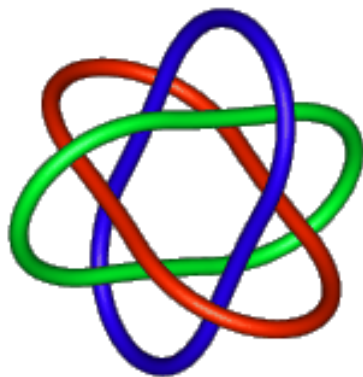


n=6

(参考)ブルニアン原子核

n=3: Borromean

$^{11}\text{Li}$ ,  $^6\text{He}$ , etc.



n=4:  $^{10}\text{C} = ^4\text{He} + ^4\text{He} + p + p$

