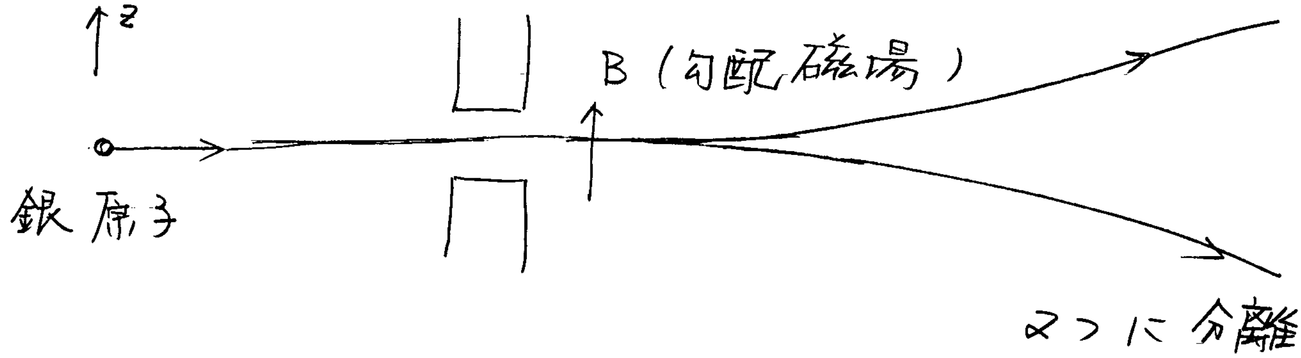
Department of Physics
Tohoku University
Sendai Japan.

5. スピン

5.1. スピンの存在

■ シュテルン－ゲルラッハの実験

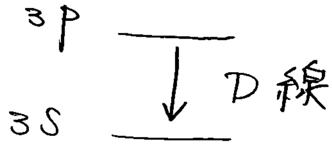


$$H' = \frac{e}{2\mu c}\,\mathbf{B}\cdot\mathbf{L}$$

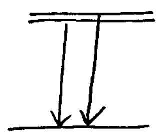
$$\rightarrow \quad \mathbf{F} = -\frac{e}{2\mu c}\,\nabla(\mathbf{B}\cdot\mathbf{L})$$

↔ 角運動量の大きさが $|\mathbf{L}| = \frac{\hbar}{2}$ で
$L_z = \frac{\hbar}{2}$ と $L_z = -\frac{\hbar}{2}$ の成分が反対
向きの力を受けて2つに分離

■ ナトリウム D線の多重構造



よく見ると2本のD線



他のアルカリ金属でも同様の多重構造

→ $\boxed{\text{電子は固有の角運動量 } \hbar/2 \text{ を持つ}}$

スピン角運動量 $\mathbf{S}$

Department of Physics
Tohoku University
Sendai, Japan

スピン角運動量は大きさが半整数なだけで、
性質は軌道角運動量 $\mathbb{L}$ と同じ：

$$[S_i, S_j] = i\hbar\, \varepsilon_{ijk} S_k$$
$$[S_i, \mathbb{S}^2] = 0$$

5.2. スピン 1/2 の量子論

軌道角運動量オペレーターの固有状態
→ 球面調和関数 $Y_{lm}(\theta, \varphi)$

$$\hat{l}^2 Y_{lm} = l(l+1) Y_{lm}$$
$$\hat{l}_z Y_{lm} = m \quad Y_{lm}$$

スピン角運動量 → 軌道の概念がない
→ 座標の関数として状態を表わせない
→ ブラ・ケット表示が必要

スピンの大きさが $\frac{\hbar}{2}$
↔ z成分は $\frac{\hbar}{2}$ か $-\frac{\hbar}{2}$ の2通り

$$|\uparrow\rangle = |S = \tfrac{\hbar}{2}, S_z = \tfrac{\hbar}{2}\rangle$$
$$|\downarrow\rangle = |S = \tfrac{\hbar}{2}, S_z = -\tfrac{\hbar}{2}\rangle$$

$$\mathbf{S}^2 |\uparrow\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\hbar^2 |\uparrow\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2 |\uparrow\rangle$$

$$S_z |\uparrow\rangle = \frac{\hbar}{2} |\uparrow\rangle$$

$$\mathbf{S}^2 |\downarrow\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2 |\downarrow\rangle$$

$$S_z |\downarrow\rangle = -\frac{\hbar}{2} |\downarrow\rangle$$

一般のスピン状態は $|\uparrow\rangle$ と $|\downarrow\rangle$ の線形結合で表わされる（$|\uparrow\rangle$ と $|\downarrow\rangle$ は完全系を張る）：

$$|u\rangle = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle$$

(note) $\langle\uparrow|u\rangle = a$

$\langle\downarrow|u\rangle = b$

$\downarrow$

$|u\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ とベクトルの形で書くこともできる。

(note) $\langle\uparrow|\uparrow\rangle = 1,\quad \langle\downarrow|\uparrow\rangle = 0$

$\Downarrow \quad |\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

同様に $|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$|u\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} + b\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

スピノル

Department of Physics
Tohoku University
Sendai, Japan.

スピン角運動量オペレーターも行列の形で表わすことができる

$$\hat{S}_z = \begin{pmatrix} \langle \uparrow | \hat{S}_z | \uparrow \rangle & \langle \uparrow | \hat{S}_z | \downarrow \rangle \\ \langle \downarrow | S_z | \uparrow \rangle & \langle \downarrow | \hat{S}_z | \downarrow \rangle \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(note) $\hat{S}_z | \uparrow \rangle = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = +\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\hat{S}_z | \downarrow \rangle = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$[S_x, S_y] = i\hbar S_z$$
$$[S_y, S_z] = i\hbar S_x$$
$$[S_z, S_x] = i\hbar S_y$$

を満たすように $\hat{S}_x$ と $\hat{S}_y$ を決めると

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

(note) $\hat{S}_x^2 = \hat{S}_y^2 = \hat{S}_z^2 = \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar^2}{4} \cdot \mathbb{1}$

$$\hat{\mathbf{S}}^2 = \hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2 = \frac{3}{4}\hbar^2 \cdot \mathbb{1}$$

(note) $\hat{S}_x \hat{S}_y - \hat{S}_y \hat{S}_x = \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$= \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} - \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = i \cdot \frac{\hbar^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = i\hbar \hat{S}_z$

Department of Physics
Tohoku University
Sendai, Japan

○ 昇降演算子

$$\hat{S}_\pm = \hat{S}_x \pm i\hat{S}_y$$

$$S_+ = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + i\cdot\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_+ |\uparrow\rangle = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\hat{S}_+ |\downarrow\rangle = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \hbar\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \hbar|\uparrow\rangle$$

$$\hat{S}_- |\uparrow\rangle = \hbar|\downarrow\rangle$$

$$\hat{S}_- |\downarrow\rangle = 0$$

$$S_+|\downarrow\rangle = \left[\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+1\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}+1\right)\right]^{1/2}\hbar|\uparrow\rangle$$

$$= \sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}\,\hbar|\uparrow\rangle = \hbar|\uparrow\rangle$$

ともコンシステント

○ パウリ行列

$$S = \frac{\hbar}{2}\sigma$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\,\varepsilon_{ijk}\,\sigma_k$$

$$\hat{\sigma}^2 = 3$$