角運動量の合成

1　基本的な公式

角運動量 $\boldsymbol{L}$ に対して $\boldsymbol{L}^2$ と L_z の同時固有状態 $|L\ M\rangle$ を定義できる：

$$\boldsymbol{L}^2|L\ M\rangle = L(L+1)\hbar^2|L\ M\rangle \tag{1}$$
$$L_z|L\ M\rangle = M\hbar|L\ M\rangle \tag{2}$$

この状態に昇降演算子 $L_\pm = L_x \pm iL_y$ を作用させると

$$L_\pm|L\ M\rangle = \hbar\sqrt{L(L+1)-M(M\pm1)}\,|L\ M\pm1\rangle \tag{3}$$

となる。

2 種類の角運動量 $\boldsymbol{J}_1$ と $\boldsymbol{J}_2$ がある時、それぞれの角運動量演算子の固有状態の直積として $|J_1\ M_1\rangle|J_1\ M_2\rangle$ を定義できる。この状態は次の性質を持つ。

$$\boldsymbol{J}_1^2|J_1\ M_1\rangle|J_2\ M_2\rangle = \left(\boldsymbol{J}_1^2|J_1\ M_1\rangle\right)|J_2\ M_2\rangle = J_1(J_1+1)\hbar^2|J_1\ M_1\rangle|J_2\ M_2\rangle \tag{4}$$
$$J_{1z}|J_1\ M_1\rangle|J_2\ M_2\rangle = \left(J_{1z}|J_1\ M_1\rangle\right)|J_2\ M_2\rangle = M_1\hbar|J_1\ M_1\rangle|J_2\ M_2\rangle \tag{5}$$
$$\boldsymbol{J}_2^2|J_1\ M_1\rangle|J_2\ M_2\rangle = |J_1\ M_1\rangle\left(\boldsymbol{J}_2^2|J_2\ M_2\rangle\right) = J_2(J_2+1)\hbar^2|J_1\ M_1\rangle|J_2\ M_2\rangle \tag{6}$$
$$J_{2z}|J_1\ M_1\rangle|J_2\ M_2\rangle = = |J_1\ M_1\rangle\left(J_{2z}|J_2\ M_2\rangle\right) = M_2\hbar|J_1\ M_1\rangle|J_1\ M_2\rangle \tag{7}$$
$$(J_{1z}+J_{2z})|J_1\ M_1\rangle|J_2\ M_2\rangle = (M_1+M_2)\hbar|J_1\ M_1\rangle|J_2\ M_2\rangle \tag{8}$$

ただし、状態 $|J_1\ M_1\rangle|J_1\ M_2\rangle$ は合成角運動量の 2 乗 $\boldsymbol{J}^2 = (\boldsymbol{J}_1+\boldsymbol{J}_2)^2$ の固有状態にはなっていないことに注意。

今、$\boldsymbol{J}^2 = (\boldsymbol{J}_1+\boldsymbol{J}_2)^2$ と $J_z = J_{1z}+J_{2z}$ の同時固有状態 $|J\ M\rangle$ が複数の $|J_1\ M_1\rangle|J_1\ M_2\rangle$ の線形結合で与えられているとする：

$$|J\ M\rangle = \sum_{M_1,M_2} C^{(JM)}_{M_1M_2}|J_1\ M_1\rangle|J_2\ M_2\rangle \tag{9}$$

（ここで、展開係数 $C^{(JM)}_{M_1M_2} \equiv \langle J_1M_1J_2M_2|JM\rangle$ はクレブシュ・ゴルダン係数とよばれる。）このとき、昇降演算子 $J_\pm = J_{1\pm}+J_{2\pm}$ を左辺、右辺のそれぞれに作用させると、左辺より

$$J_\pm|J\ M\rangle = \hbar\sqrt{J(J+1)-M(M\pm1)}\,|J\ M\pm1\rangle \propto |J\ M\pm1\rangle \tag{10}$$

右辺より

$$J_\pm|J\ M\rangle = \sum_{M_1,M_2} C^{(JM)}_{M_1M_2}\left[\left(J_{1\pm}|J_1\ M_1\rangle\right)|J_2\ M_2\rangle + |J_1\ M_1\rangle\left(J_{2\pm}|J_2\ M_2\rangle\right)\right] \tag{11}$$
$$= \sum_{M_1,M_2} C^{(JM)}_{M_1M_2}\Big[\hbar\sqrt{J_1(J_1+1)-M_1(M_1\pm1)}\,|J_1\ M_1\pm1\rangle|J_2\ M_2\rangle + \hbar\sqrt{J_2(J_2+1)-M_2(M_2\pm1)}\,|J_1\ M_1\rangle|J_2\ M_2\pm1\rangle\Big] \tag{12}$$

を得る。これより、

$$
\begin{aligned}
|J\ M\pm 1\rangle &\propto \sum_{M_1,M_2} C^{(JM)}_{M_1M_2}\Big[\hbar\sqrt{J_1(J_1+1)-M_1(M_1\pm 1)}\,|J_1\ M_1\pm 1\rangle|J_2\ M_2\rangle \\
&\quad +\hbar\sqrt{J_2(J_2+1)-M_2(M_2\pm 1)}\,|J_1\ M_1\rangle|J_2\ M_2\pm 1\rangle\Big]
\end{aligned} \tag{13}
$$

となる。

2　具体的な例１：l=1 と $s=1/2$ の合成

軌道角運動量 $\boldsymbol{l}$ とスピン角運動量 s の合成 $\boldsymbol{j}=\boldsymbol{l}+\boldsymbol{s}$ を考える（$\hbar$ はすでに考慮されているものとし、以下、$\hbar$ を陽に書かない）。特に、$\boldsymbol{l}$ の大きさが 1、$\boldsymbol{s}$ の大きさが 1/2　の場合を考える（ここで、一般に角運動量 $\boldsymbol{L}$ の大きさとは (1) 式で定義される L のこと）。

1. 　まず、状態 $|11\rangle|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle=|Y_{11}\rangle|\uparrow\rangle$ を考える。この状態に $\boldsymbol{j}^2$ 及び j_z を作用すると

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{j}^2|Y_{11}\rangle|\uparrow\rangle &= (\boldsymbol{l}^2+\boldsymbol{s}^2+2l_zs_z+l_+s_-+l_-s_+)|Y_{11}\rangle|\uparrow\rangle && (14)\\
&= \left(1\cdot(1+1)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)+2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\right)|Y_{11}\rangle|\uparrow\rangle && (15)\\
&= \frac{15}{4}|Y_{11}\rangle|\uparrow\rangle=\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right)|Y_{11}\rangle|\uparrow\rangle && (16)\\
j_z|Y_{11}\rangle|\uparrow\rangle &= \left(1+\frac{1}{2}\right)|Y_{11}\rangle|\uparrow\rangle=\frac{3}{2}\,|Y_{11}\rangle|\uparrow\rangle && (17)
\end{aligned}
$$

となる。ここで、$l_+|Y_{11}\rangle=s_+|\uparrow\rangle=0$ を用いた。これより、

$$
|Y_{11}\rangle|\uparrow\rangle=\left|\frac{3}{2}\ \frac{3}{2}\right\rangle \tag{18}
$$

であることがわかる。

2. 次に、j_z が 1 だけ小さい状態 $\left|\frac{3}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle$　は、今作った $\left|\frac{3}{2}\ \frac{3}{2}\right\rangle$ に j_- を作用させることで作ることができる（式 (13) を見よ）。$l_-|Y_{ll}\rangle=\sqrt{2l}\,|Y_{ll-1}\rangle$、$s_-|\uparrow\rangle=|\downarrow\rangle$ に注意すると、

$$
\left|\frac{3}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle \propto \sqrt{2}\,|Y_{10}\rangle|\uparrow\rangle+|Y_{11}\rangle|\downarrow\rangle \tag{19}
$$

となる。ここで、$\langle\frac{3}{2}\ \frac{1}{2}|\frac{3}{2}\ \frac{1}{2}\rangle=1$ となるように規格化因子を選ぶと

$$
\left|\frac{3}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle=\sqrt{\frac{2}{3}}\,|Y_{10}\rangle|\uparrow\rangle+\frac{1}{\sqrt{3}}\,|Y_{11}\rangle|\downarrow\rangle \tag{20}
$$

となる。

3. さらに j_z が 1 小さい状態 $\left|\frac{3}{2}\ -\frac{1}{2}\right\rangle$　は同様に $\left|\frac{3}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle$ に j_z を作用させて作ることができる。$l_-|Y_{10}\rangle=\sqrt{2}\,|Y_{1-1}\rangle$ を用いると、

$$
\left|\frac{3}{2}\ -\frac{1}{2}\right\rangle \propto j_-\left|\frac{3}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}\,|Y_{1-1}\rangle|\uparrow\rangle+\sqrt{\frac{2}{3}}\,|Y_{10}\rangle|\downarrow\rangle \tag{21}
$$

となる。

4. さらに j_z が 1 小さい状態 $\left|\frac{3}{2}\ -\frac{3}{2}\right\rangle$ も同様に $\left|\frac{3}{2}\ -\frac{1}{2}\right\rangle$ に j_z を作用させて作ることができる。結果は、
$$\left|\frac{3}{2}\ -\frac{3}{2}\right\rangle \propto j_- \left|\frac{3}{2}\ -\frac{1}{2}\right\rangle = |Y_{1-1}\rangle|\downarrow\rangle \tag{22}$$
である。

ここまでで、状態 $|jj_z\rangle$ のうち、$j = 3/2$, $j_z = -3/2 \sim +3/2$ の 4 つの状態ができたことになる。

5. 式 (20) で与えられる状態 $\left|\frac{3}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle$ は 2 つの項の足し合わせであるので、足し合わせの係数を変えることによってこの状態に直交する状態をもう 1 つ作ることができる：
$$-\sqrt{\frac{1}{3}}|Y_{10}\rangle|\uparrow\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|Y_{11}\rangle|\downarrow\rangle \tag{23}$$
この状態は j_z の固有状態であり、その固有値は 1/2 である。また、$\boldsymbol{j}^2$ を作用させると
$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{j}^2\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}|Y_{10}\rangle|\uparrow\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|Y_{11}\rangle|\downarrow\rangle\right) && (24)\\
=\ & -\sqrt{\frac{1}{3}}\left(\left(1\cdot 2 + \frac{3}{4} + 2\cdot 0\cdot\frac{1}{2}\right)|Y_{10}\rangle|\uparrow\rangle + \sqrt{2}|Y_{11}\rangle|\downarrow\rangle\right)\\
& + \sqrt{\frac{2}{3}}\left(\left(1\cdot 2 + \frac{3}{4} - 2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\right)|Y_{11}\rangle|\downarrow\rangle + \sqrt{2}|Y_{10}\rangle|\uparrow\rangle\right) && (25)\\
=\ & \frac{3}{4}\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}|Y_{10}\rangle|\uparrow\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|Y_{11}\rangle|\downarrow\rangle\right) && (26)\\
=\ & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}|Y_{10}\rangle|\uparrow\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|Y_{11}\rangle|\downarrow\rangle\right) && (27)
\end{aligned}$$
となるので、この状態は $\boldsymbol{j}^2$ の固有状態であり、j の大きさは 1/2 である。

すなわち、
$$\left|\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle = -\sqrt{\frac{1}{3}}|Y_{10}\rangle|\uparrow\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|Y_{11}\rangle|\downarrow\rangle \tag{28}$$
である。

6. この状態より j_z が 1 小さい状態は、これまでと同様に j_- を作用させることによって作ることができる。すなわち、
$$\left|\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\right\rangle \propto j_-\left|\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle = -\sqrt{\frac{2}{3}}|Y_{1-1}\rangle|\uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|Y_{10}\rangle|\downarrow\rangle \tag{29}$$
となる。

7. $\left|\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle$ に直交する状態はこれ以上もう作れない。この状態は 2 つの状態の線形結合であり、そこから作れる線形独立な状態は 2 つのみ $\left(\left|\frac{3}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle\right.$ と $\left.\left|\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle\right)$ だからである。$\left|\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\right\rangle$ も同様である。

従って、ここまでで全ての状態が表わせたことになる。

Department of Physics
Tohoku University
Sendai. Japan.

まとめ

$j_z \backslash j$	$3/2$		$1/2$
$3/2$	$\lvert Y_{11}\rangle\lvert\uparrow\rangle$		
	$\downarrow j_-$		
$1/2$	$\sqrt{\frac{2}{3}}\lvert Y_{10}\rangle\lvert\uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\lvert Y_{11}\rangle\lvert\downarrow\rangle$	$\xrightarrow{\text{直交}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}\lvert Y_{10}\rangle\lvert\uparrow\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\lvert Y_{11}\rangle\lvert\downarrow\rangle$
	$\downarrow j_-$		$\downarrow j_-$
$-1/2$	$\frac{1}{\sqrt{3}}\lvert Y_{1-1}\rangle\lvert\uparrow\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\lvert Y_{10}\rangle\lvert\downarrow\rangle$	$\xrightarrow{\text{直交}}$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}\lvert Y_{1-1}\rangle\lvert\uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\lvert Y_{10}\rangle\lvert\downarrow\rangle$
	$\downarrow j_-$		
$-3/2$	$\lvert Y_{1-1}\rangle\lvert\downarrow\rangle$		

Department of Physics
Tohoku University
Sendai, Japan

■ $l_1 = 1$ と $l_2 = 1$ の合成：$\mathbb{L} = \boldsymbol{l}_1 + \boldsymbol{l}_2$

$L_z \backslash L$	2		1		0
2	$\vert Y_{11}\rangle \vert Y_{11}\rangle$				
	$\downarrow L_-$				
1	$\frac{1}{\sqrt{2}} \vert Y_{10}\rangle \vert Y_{11}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \vert Y_{11}\rangle \vert Y_{10}\rangle$	$\xrightarrow{\text{直交}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}} \vert Y_{10}\rangle \vert Y_{11}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \vert Y_{11}\rangle \vert Y_{10}\rangle$		
	$\downarrow L_-$		$\downarrow L_-$		
0	$\frac{1}{\sqrt{6}} \vert Y_{1-1}\rangle \vert Y_{11}\rangle + \frac{2}{\sqrt{6}} \vert Y_{10}\rangle \vert Y_{10}\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}} \vert Y_{11}\rangle \vert Y_{1-1}\rangle$		$-\frac{1}{\sqrt{2}} \vert Y_{1-1}\rangle \vert Y_{11}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \vert Y_{11}\rangle \vert Y_{1-1}\rangle$	$\xrightarrow{\text{直交}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} \vert Y_{1-1}\rangle \vert Y_{11}\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} \vert Y_{10}\rangle \vert Y_{10}\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} \vert Y_{11}\rangle \vert Y_{1-1}\rangle$
	$\downarrow L_-$		$\downarrow L_-$		
−1	$\frac{1}{\sqrt{2}} \vert Y_{10}\rangle \vert Y_{1-1}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \vert Y_{1-1}\rangle \vert Y_{10}\rangle$	$\xrightarrow{\text{直交}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}} \vert Y_{1-1}\rangle \vert Y_{10}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \vert Y_{10}\rangle \vert Y_{1-1}\rangle$		
	$\downarrow L_-$				
−2	$\vert Y_{1-1}\rangle \vert Y_{1-1}\rangle$				