4.2. 簡単な例

▨ 同種2粒子系

ハミルトニアンがスピンによらないとする。

$$H = \frac{\mathbb{P}_1^2}{2m} + \frac{\mathbb{P}_2^2}{2m} + V(\mathbb{r}_1, \mathbb{r}_2)$$

→ 空間成分とスピン成分で波動関数が変数分離，

$$\Psi(x_1, x_2) = \Psi_{空間}(\mathbb{r}_1, \mathbb{r}_2) \times \Psi_{スピン}$$

・ボゾンの場合（特にスピン0の場合）

スピン部分はなし
→空間部分を対称化

$$\Psi_{空間}(\mathbb{r}_1, \mathbb{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi(\mathbb{r}_1, \mathbb{r}_2) + \phi(\mathbb{r}_2, \mathbb{r}_1)\right)$$

・フェルミオンの場合（特にスピン$\frac{1}{2}$の場合）

合成スピンは 0 か 1

$$S = 1 : \quad |\uparrow\uparrow\rangle, \ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right), \ |\downarrow\downarrow\rangle$$

$$S = 0 : \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right)$$

$S=1$：入れかえに対し対称
$S=0$：　　　　　　反対称

⇓ 粒子の入れかえに対し全波動関数が反対称となるためには

$S=1 \longrightarrow$ 空間部分 反対称
$S=0 \longrightarrow$ 〃 対称

⇓

$$\Psi(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi(r_1, r_2) - \phi(r_2, r_1)\right) |S=1, S_z\rangle$$

or

$$\Psi(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi(r_1, r_2) + \phi(r_2, r_1)\right) |S=0\rangle$$

6. 多体論入門

6.0. 粒子の統計性

同種粒子の集合体 : $\Psi(x_1, x_2, \cdots, x_N)$

$x = (\vec{r}, \sigma)$

ボーズ粒子から成る物質（ボーズ原子の集合）

$$P_{ij}\,\Psi(\cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots) = \Psi(\cdots, x_j, \cdots, x_i, \cdots)$$
$$= +\,\Psi(\cdots, x_i, \cdots, x_j \cdots)$$

フェルミ粒子から成る物質（原子や原子核）

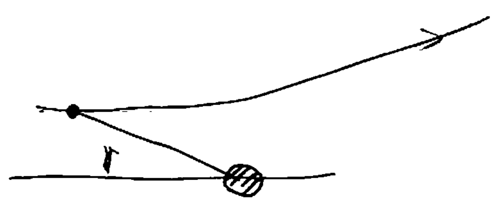
$$P_{ij}\,\Psi = -\Psi$$

（← パウリ原理）

同じ状態を2つの粒子占有しない

6.1. 同種粒子による散乱

(note) 異種粒子の散乱



$$\psi(r) \to e^{ik\cdot r} + f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r} \quad (r \to \infty)$$

↓

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2$$

同種粒子の散乱 → 統計性を考慮する必要あり

↓

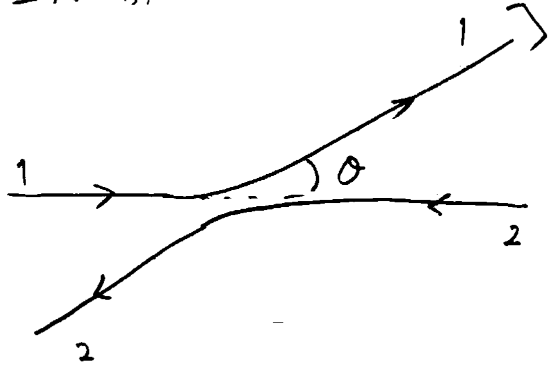
$$\psi_\pm(r) = \psi(r) \pm \psi(-r)$$
$$\to (e^{ik\cdot r} \pm e^{-ik\cdot r}) + \underbrace{[f(\theta) \pm f(\pi-\theta)]}_{= f_\pm(\theta)}\frac{e^{ikr}}{r} \quad (r\to\infty)$$

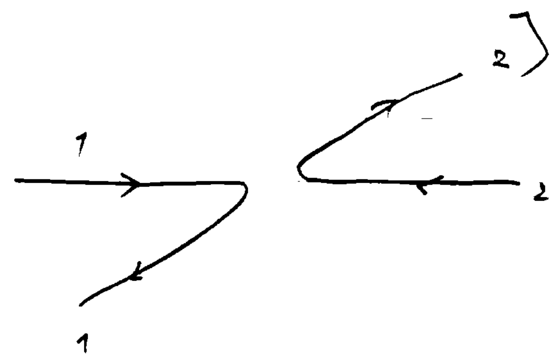
2つの粒子の入れかえ：
相対波動関数で $\mathbf{r} \to -\mathbf{r}$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_\pm(\theta)|^2$$

$$= \underbrace{|f(\theta)|^2 + |f(\pi-\theta)|^2}_{\text{古典項}} \underbrace{\pm 2\,\mathrm{Re}[f^*(\theta) f(\pi-\theta)]}_{\text{干渉項}}$$

重心系





同種粒子 → 1と2は必らず逆向きに散乱される
⇓

$$d\sigma_1(\theta) = d\sigma_2(\pi-\theta)$$
$$d\sigma_2(\theta) = d\sigma_1(\pi-\theta)$$

detector は粒子1と2を区別できない
⇓

$$d\sigma(\theta) = d\sigma_1(\theta) + d\sigma_2(\theta)$$
$$= d\sigma_1(\theta) + d\sigma_1(\pi-\theta).$$

・スピン 0 粒子（ボゾン）

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_+(\theta)|^2$$

・スピン $\frac{1}{2}$ 粒子（フェルミオン）

全スピン $S=0$: $|S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)$

↓ 空間部分は対称

$$\frac{d\sigma_s}{d\Omega} = |f_+(\theta)|^2$$

$S=1$: $|S_z=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow)$

↓ 空間部分は反対称

$$\frac{d\sigma_t}{d\Omega} = |f_-(\theta)|^2$$

スピン偏極のない時

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{3}{4}\frac{d\sigma_t}{d\Omega} + \frac{1}{4}\frac{d\sigma_s}{d\Omega}$$

$$= |f(\theta)|^2 + |f(\pi-\theta)|^2 - \mathrm{Re}[f^*(\theta)f(\pi-\theta)]$$

※ ボゾンの場合でもフェルミオンの場合でも
断面積は $\theta = \frac{\pi}{2}$ で対称

(note) 許される相対角運動量：

2粒子ハミルトニアンは重心運動と相対運動に分離可能

$$H = \frac{\mathbb{P}_1^2}{2m} + \frac{\mathbb{P}_2^2}{2m} + V(|\mathbb{r}_1 - \mathbb{r}_2|)$$

$$= \frac{\mathbb{P}^2}{4m} + \frac{\mathbb{p}^2}{m} + V(\mathbb{r})$$

$$\mathbb{R} = \frac{1}{2}(\mathbb{r}_1 + \mathbb{r}_2), \quad \mathbb{r} = \mathbb{r}_1 - \mathbb{r}_2$$

$$\mathbb{P} = \mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_2, \quad \mathbb{p} = \frac{1}{2}(\mathbb{P}_1 - \mathbb{P}_2)$$

波動関数：$\Psi(\mathbb{r}_1, \mathbb{r}_2) = e^{i\vec{K}\cdot\vec{R}} \underbrace{\phi(\mathbb{r})}_{= R_\ell(r)\, Y_{\ell m}(\hat{r})}$

2粒子の入れかえで $(\mathbb{r}_1 \leftrightarrow \mathbb{r}_2)$

$$\mathbb{R} \to \frac{1}{2}(\mathbb{r}_2 + \mathbb{r}_1) = \mathbb{R}$$

$$\mathbb{r} \to \mathbb{r}_2 - \mathbb{r}_1 = -\mathbb{r}.$$

$$\Downarrow$$

$$\Psi(\mathbb{r}_1, \mathbb{r}_2) \longrightarrow \Psi(\mathbb{r}_2, \mathbb{r}_1) = e^{i\vec{K}\cdot\vec{R}} \cdot R_\ell(r) \underbrace{Y_{\ell m}(-\hat{\mathbb{r}})}_{= (-)^\ell Y_{\ell m}(\hat{\mathbb{r}})}$$

$\therefore$

スピン 0 のボゾン 2粒子 $\longrightarrow$ l：偶数

スピン $\frac{1}{2}$ のフェルミオン 2粒子

$S=0 \rightarrow l$：偶数

$S=1 \rightarrow l$：奇数.

▨ 相互作用しない N フェルミオン系

$$H = \sum_{i=1}^{N} h_i$$

$$\hat{h}_i = \frac{\mathbb{P}_i^2}{2m} + V(\mathbf{r}_i)$$

ポテンシャル V の中に N コのフェルミオンを入れる.

$h \phi_n(x) = \varepsilon_n \phi_n(x)$ として

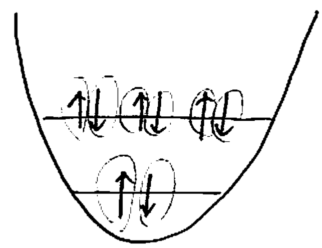
$$\Psi(x_1, \cdots x_N) \sim \underset{\substack{\uparrow \\ \text{規格化}}}{n} \phi_{n_1}(x_1)\phi_{n_2}(x_2)\cdots\phi_{n_N}(x_N)$$

$$E = \varepsilon_{n_1} + \varepsilon_{n_2} + \cdots + \varepsilon_{n_N}$$

この波動関数を反対称化する

$$\Psi(x_1,\cdots,x_N)=\frac{1}{\sqrt{N!}}\begin{vmatrix}\phi_{n_1}(x_1) & \cdots & \phi_{n_1}(x_N)\\ \vdots & & \\ \phi_{n_N}(x_1) & \cdots & \phi_{n_N}(x_N)\end{vmatrix}$$

スレーター行列式



$N=2$ なら

$$\Psi(x_1,x_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix}\phi_1(x_1) & \phi_1(x_2)\\ \phi_2(x_1) & \phi_2(x_2)\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)-\phi_1(x_2)\phi_2(x_1)\right)$$

▨ 相互作用しない N ボゾン系

波動関数を対称化

→ スレーター行列式ですべての項の符号を＋にしたもの

4.3. 第2量子化

同種類子 → 区別がつかない。

⇒ 各状態に何個粒子があるかということだけが必要。

$$|\Psi\rangle = |n_1 n_2 n_3 \cdots\cdots \rangle$$

↑
状態1にn_1コ，・・・・

ボゾンの場合，n_iは $0, 1, 2, \cdots$
フェルミオン　　$n_i = 0$ or 1.

$$\boxed{|\Psi\rangle = (a_1^+)^{n_1}(a_2^+)^{n_2}\cdots\cdots|0\rangle}$$

と書く（第2量子化）。

$|0\rangle$は粒子が何もない状態（真空）。
a_1^+は状態1に粒子を1つ作るオペレーター
（a_1は　〃　消す　〃　）

⇒ $a_i|0\rangle = 0$.

ボゾンは交換関係に従う。

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{i,j}$$
$$[a_i, a_j] = [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0$$

フェルミオンは反交換関係に従う。

$$\{a_i, a_j^\dagger\} = a_i a_j^\dagger + a_j^\dagger a_i = \delta_{i,j}$$
$$\{a_i, a_j\} = \{a_i^\dagger, a_j^\dagger\} = 0$$

(note) フェルミオンが状態1にあるとき、もう1個フェルミオンを同じ状態に生成すると・・・

$$a_1^\dagger (a_1^\dagger |0\rangle) = -a_1^\dagger a_1^\dagger |0\rangle$$

入れかえ

$$\Rightarrow \quad a_1^\dagger a_1^\dagger |0\rangle = 0.$$

ハミルトニアンは

$$H = \sum_i \varepsilon_i \underbrace{a_i^+ a_i}_{\text{粒子数オペレーター}}$$

$$(a_i^+ a_i)\ (a_i^+)^n |0\rangle = n\ (a_i^+)^n |0\rangle$$

↓

$$H|\Psi\rangle = \left(\sum_i \varepsilon_i a_i^+ a_i\right) (a_1^+)^{n_1} (a_2^+)^{n_2} \cdots |0\rangle$$

$$= \sum_i n_i \varepsilon_i \, |\Psi\rangle$$

$|\phi_n\rangle = a_n^+|0\rangle$ $\qquad |\phi_n\rangle = \int d\mathbf{r}\ |\mathbf{r}\rangle \underbrace{\langle \mathbf{r}|\phi_n\rangle}_{\phi_n(\mathbf{r})}$

$|\mathbf{r}\rangle = a_\mathbf{r}^+|0\rangle$

○座標表示の波動関数との関係：

・N = 1 のボゾン：

$$\phi_n(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r}|\phi_n\rangle = \langle \mathbf{r}|a_n^+|0\rangle$$

$$|\mathbf{r}\rangle = a_\mathbf{r}^+|0\rangle$$

rという場所に粒子を生成するオペレーター ： $[a_\mathbf{r}, a_{\mathbf{r}'}^+] = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$

$$a_n^+ = \int d\mathbf{r}\ \underbrace{\phi_n(\mathbf{r})}_{c\text{数}}\ a_\mathbf{r}^+$$

とすれば

$$\langle \mathbf{r}|a_n^+|0\rangle = \int d\mathbf{r}'\ \langle 0|\underbrace{a_\mathbf{r} a_{\mathbf{r}'}^+}_{=\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')+a_{\mathbf{r}'}^+a_\mathbf{r}}|0\rangle\ \phi_n(\mathbf{r}')$$

$$= \phi_n(\mathbf{r})$$

・N = 2 のボゾン

$$\langle \mathbf{r}_1\mathbf{r}_2|a_{n_1}^+a_{n_2}^+|0\rangle = \int d\mathbf{r}\, d\mathbf{r}'\ \phi_{n_1}(\mathbf{r})\,\phi_{n_2}(\mathbf{r}')$$

$$\times \langle 0|a_{\mathbf{r}_2}a_{\mathbf{r}_1}a_\mathbf{r}^+a_{\mathbf{r}'}^+|0\rangle$$

(note)

$$\langle 0|\, a_{\mathbf{r}_2} \underbrace{a_{\mathbf{r}_1} a_{\mathbf{r}}^{\dagger}}_{=\ \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1) + a_{\mathbf{r}}^{\dagger} a_{\mathbf{r}_1}} a_{\mathbf{r}'}^{\dagger} \,|0\rangle$$

$$= \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\, \langle 0|\, a_{\mathbf{r}_2} a_{\mathbf{r}'}^{\dagger} \,|0\rangle$$

$$+ \langle 0|\, a_{\mathbf{r}_2} a_{\mathbf{r}}^{\dagger} \underbrace{a_{\mathbf{r}_1} a_{\mathbf{r}'}^{\dagger}}_{=\ \delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}') + a_{\mathbf{r}'}^{\dagger} a_{\mathbf{r}_1}} \,|0\rangle$$

$$= \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\, \delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_2) + \delta(\mathbf{r}_2-\mathbf{r})\, \delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}')$$

$\rightsquigarrow$

$$\langle \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 |\, a_{n_1}^{\dagger} a_{n_2}^{\dagger} \,|0\rangle$$

$$= \phi_{n_1}(\mathbf{r}_1)\, \phi_{n_2}(\mathbf{r}_2) + \phi_{n_1}(\mathbf{r}_2)\, \phi_{n_2}(\mathbf{r}_1)$$