5. 散乱理論

5.0. 散乱の基本概念

input → 対象 → output
刺激　　　　　応答

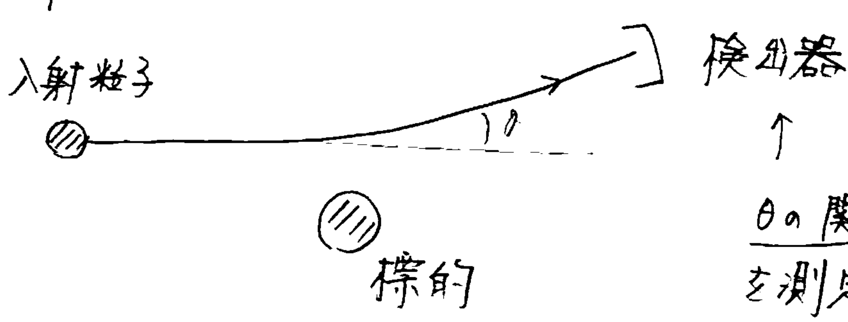
$\underbrace{\text{刺激} \rightarrow \text{対象} \rightarrow \text{応答}}_{\text{散乱理論}}$

マクロな物体（古典的）

input：（太陽からくる）光
output：反射光
　　光の波長：色
　　光の方向：形

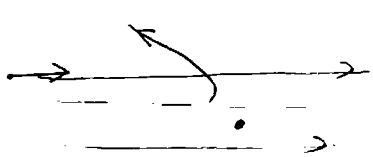
ミクロな物体（量子系）

input：加速器で加速された入射粒子
output：出てくる粒子



θの関数として粒子強度を測定
↕
散乱断面積

→ 原子や原子核の形や相互作用

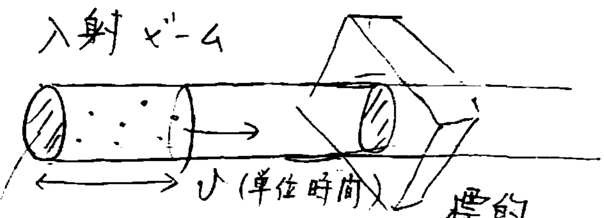
α粒子  ラザフォードα散乱

$$\psi = e^{\pm i k \cdot r}$$
$$\nabla\psi = \pm i k \, e^{\pm i k \cdot r} \quad \to \quad j = \pm \frac{k\hbar}{m}$$

5.1. 散乱断面積

入射粒子が見る標的粒子の"実効的な"大きさ

$$\begin{pmatrix}\text{単位時間当たりに標的}\\\text{粒子1コに対する反応の}\\\text{起きる数}\end{pmatrix} = \sigma \times \underbrace{\begin{pmatrix}\text{単位時間当たり}\\\text{単位面積を通過}\\\text{する粒子の数}\end{pmatrix}}_{\text{フラックス}}$$



$$\vec{j} = \frac{\hbar}{2im}\left[\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*\right]$$

(E>0 でのシュレーディンガー方程式)

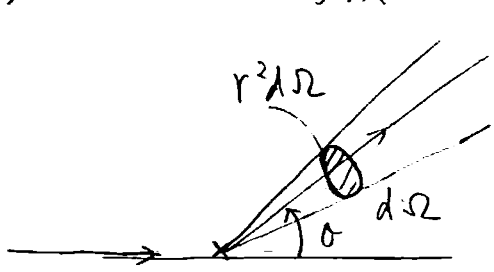
入射粒子の数:
場所や時間によらず
一定
"安定なビーム"

$\to N_p$ コ. $\quad\to\quad$ 右辺 $= \sigma\cdot\dfrac{N_p}{S}$

$$= \frac{\sigma}{S} N_p$$

$\frac{\sigma}{S}$ → 入射粒子1コを標的1コにぶつけた時に散乱の起こる確率

・微分散乱断面積



$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r^2 d\Omega\text{を通過するフラックス}}{\text{入射フラックス}}$$

全断面積 $\quad \sigma = \int d\Omega \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)$

$$\Big(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+\underbrace{V(r)}_{\text{摂動}}-E\Big)\psi(\mathbf{r})=0$$

散乱問題における

5.2. Born Approximation　$\left(\frac{V(r)}{E}\ll 1\right)$　高エネルギー散乱

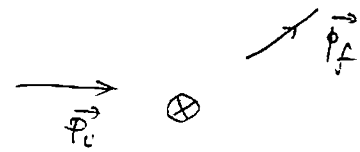
$$\psi_i(r)=e^{i\vec{p}_i\cdot\vec{r}/\hbar}\ \xrightarrow{\text{遷移}}\ \psi_f(r)=e^{i\vec{p}_f\cdot\vec{r}/\hbar}$$

$$\left(\frac{p_i^2}{2m}=\frac{p_f^2}{2m}=E\right)$$

Fermi's Golden Rule:

$$R_{i\to f}=\frac{2\pi}{\hbar}\int\frac{d^3p_f}{(2\pi\hbar)^3}\,|M_{fi}|^2\,\delta\!\left(\frac{p_f^2}{2m}-\frac{p_i^2}{2m}\right)$$

$$M_{fi}=\langle\psi_f|V|\psi_i\rangle$$



$$=\int d\vec{r}\ \psi_f^*(\vec{r})\,V(\vec{r})\,\psi_i(\vec{r})$$

$$=\int d\vec{r}\ e^{i(\vec{p}_i-\vec{p}_f)\cdot\vec{r}/\hbar}\ V(\vec{r})$$

$$\equiv\int d\vec{r}\ e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}}\ V(\vec{r})$$

$\vec{q}\equiv(\vec{p}_f-\vec{p}_i)/\hbar$　: momentum transfer

$$\equiv\tilde{V}(\vec{q})\qquad(\text{フーリエ変換})$$

$\downarrow$

$$R_{i\to f}=\frac{2\pi}{\hbar}\int\frac{p_f^2\,dp_f\,d\Omega}{(2\pi\hbar)^3}\,|\tilde{V}(\vec{q})|^2\,\delta\!\left(\frac{p_f^2}{2m}-E\right)$$

$$=\frac{2\pi}{\hbar}\cdot\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\cdot\int m\,p_f\,d\!\left(\frac{p_f^2}{2m}\right)d\Omega\ |\tilde{V}(\vec{q})|^2\,\delta\!\left(\frac{p_f^2}{2m}-E\right)$$

$$=\frac{m\,p_i}{4\pi^2\hbar^4}\int d\Omega\ |\tilde{V}(\vec{q})|^2$$

$$\frac{1}{\cancel{2}} m v^2 = \frac{k^2\hbar^2}{\cancel{2}m} \quad \Downarrow \quad v = \frac{k\hbar}{m}$$

$$= \frac{\hbar}{2im}(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$$

$$j_{in} = \frac{k\hbar}{m} = v$$

$\Downarrow$

$$d\sigma = \frac{1}{4\pi^2\hbar^4} \cancel{\frac{1}{|v_{rel}|} m p_i} \, d\Omega \, |\tilde{V}(\vec{q})|^2.$$

$\Downarrow$

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{m^2}{4\pi^2} \left| \frac{1}{\hbar^2} \tilde{V}(\vec{q}) \right|^2.}$$

例)

$$V(\vec{r}) = \int \frac{\rho(r')}{|r - r'|} dr' \cdot z_p e$$

(note)

$\nabla^2 V = -4\pi \rho \cdot z_p e$

ポアソン方程式

$\downarrow$

$$\tilde{V}(\vec{q}) = \int d\vec{r} \, e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} V(\vec{r})$$

$$= \cancel{\frac{1}{-i\vec{q}} e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} V(\vec{r}) \Big|_{-\infty}^{\infty}} \to 0 + \frac{1}{i\vec{q}} \cdot \int e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} \nabla V(r) \, dr$$

$$= \cancel{\frac{1}{q^2} \nabla V \Big|_{-\infty}^{\infty}} \to 0 - \frac{1}{q^2} \int e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} \nabla^2 V(r) \, dr$$

$$= + \frac{4\pi}{q^2} \int e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} \rho(\vec{r}) \, d\vec{r} \cdot z_p e$$

$\Downarrow$

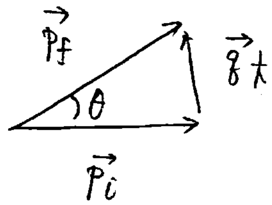
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4m^2}{q^4\hbar^4} |F(\vec{q})|^2 \cdot z_p^2 e^2$$

$$F(\vec{q}) = \int e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} \rho(\vec{r}) d\vec{r}$$

$$\int_{-1}^{1} d(\cos\theta)\, P_l(\cos\theta) P_{l'}(\cos\theta) = \frac{2}{2l+1}\,\delta_{ll'} \qquad \frac{p_i^2}{2m} = E$$

$$P_0(\cos\theta) = 1$$

(note)



$$q\hbar = 2 p_i \sin\frac{\theta}{2}$$

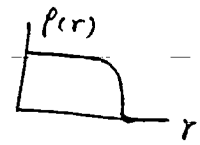
$$= 2\cdot\sqrt{2mE}\,\sin\frac{\theta}{2}$$

$\downarrow$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\cancel{4m^2}}{16\cdot\cancel{4m^2}E^2}\;\frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}\;|F(\vec{q})|^2\cdot z_p^2 e^2$$

$$= \frac{1}{(4E\sin^2\frac{\theta}{2})^2}\;|F(\vec{q})|^2\cdot z_p^2 e^2$$

形状因子 "form factor" $\longrightarrow$ 電荷密度の決定



$\rho_0 \sim 0.17\ fm^{-3}$
$R \sim 1.1 A^{1/3}\ fm$

(note) $\quad e^{+i\vec{q}\cdot\vec{r}} = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\, i^l j_l(qr) P_l(\cos\theta)$

$\downarrow$ for $\rho(\vec{r}) = \rho(r)$

$$F(\vec{q}) = 2\pi\int_{-1}^{1} d(\cos\theta)\int_0^{\infty} r^2 dr \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\, i^l j_l(qr) P_l(\cos\theta) \times \rho(r)$$

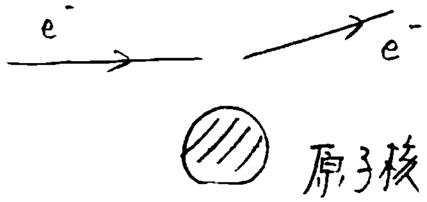
$$= 4\pi\int_0^{\infty} r^2 dr\,\underbrace{j_0(qr)}_{=\frac{\sin(qr)}{qr}}\,\rho(r)$$

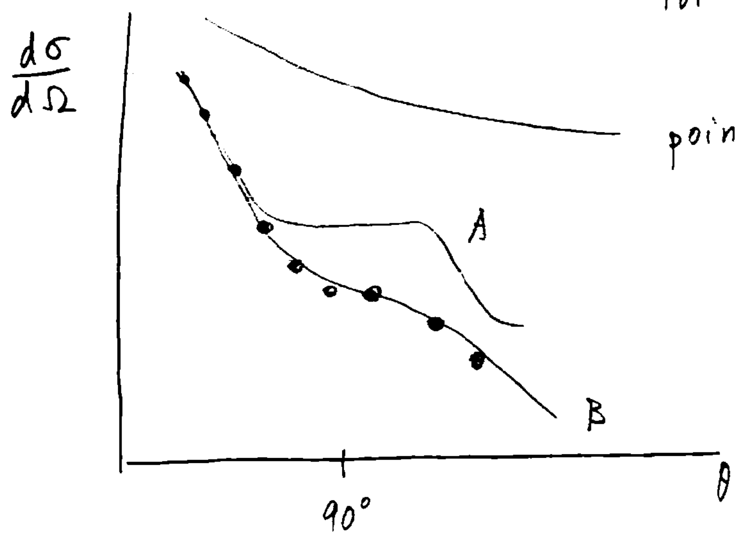
(note) if $\rho(r) = z_T e\,\delta(r) \rightsquigarrow F(\vec{q}) = z_T e$

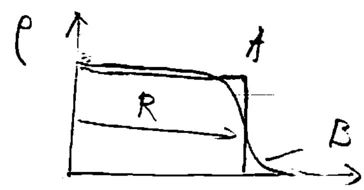
$$\downarrow \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{z_p z_T e^2}{4E\sin^2\frac{\theta}{2}}\right)^2$$

(古典的なラザフォード散乱の式と同じ)

電子散乱による原子核の密度分布の決定







$\rho_0 \sim 0.17\ \mathrm{fm}^{-3}$

$R \sim 1.1\ A^{1/3}\ \mathrm{fm}$

$a \sim 0.53\ \mathrm{fm}$

例2) screened coulomb ポテンシャル

$$V(r) = Z_p Z_T e^2 \frac{e^{-\alpha r}}{r} \qquad (1/\alpha : \text{screened length})$$

$$\downarrow$$

$$\tilde{V}(\vec{q}) = \int d\vec{r}\, e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}}\, V(r)$$

$$= Z_p Z_T e^2 \int d\vec{r}\, e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} \frac{e^{-\alpha r}}{r}$$

$$= Z_p Z_T e^2 \int r^2 dr \frac{e^{-\alpha r}}{r} \cdot 2\pi \underbrace{\int_{-1}^{1} d(\cos\theta)\, e^{-iqr\cos\theta}}_{= -\frac{1}{iqr}\left(e^{-iqr} - e^{iqr}\right)}$$

$$= \frac{Z_p Z_T e^2}{iq} \int_0^\infty dr\, e^{-\alpha r} \left(e^{iqr} - e^{-iqr}\right) \cdot 2\pi$$

$$= -\frac{Z_p Z_T e^2}{iq} \left[\frac{1}{iq - \alpha} + \frac{1}{iq + \alpha} \right] \cdot 2\pi$$

$$= -\frac{Z_p Z_T e^2}{iq} \frac{2iq}{-q^2 - \alpha^2} \cdot 2\pi = \frac{4\pi Z_p Z_T e^2}{q^2 + \alpha^2}$$

$$= \frac{4\pi Z_p Z_T e^2}{\frac{8mE}{\hbar^2}\sin^2\frac{\theta}{2} + \alpha^2}$$

$$\downarrow \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{m^2}{\cancel{4\pi^2}} \cdot \left(\frac{\cancel{4\pi} Z_T e^2 \cdot Z_p}{8mE\sin^2\frac{\theta}{2} + \alpha^2\hbar^2} \right)^2 = \left(\frac{4 m Z_p Z_T e^2}{16\, mE\sin^2\frac{\theta}{2} + 2\alpha^2\hbar^2} \right)^2$$

$$\xrightarrow[\alpha \to 0]{} \left(\frac{Z_p Z_T e^2}{4E\sin^2\frac{\theta}{2}} \right)^2$$

← クーロン散乱は
前方 ($\theta=0$) で発散