4.2. 簡単な例

同種2粒子系

ハミルトニアンがスピンによらないとする。

$$H = \frac{\mathbb{P}_1^2}{2m} + \frac{\mathbb{P}_2^2}{2m} + V(\mathbb{r}_1, \mathbb{r}_2)$$

→ 空間成分とスピン成分で波動関数が変数分離。

$$\Psi(x_1, x_2) = \Psi_{空間}(\mathbb{r}_1, \mathbb{r}_2) \times \Psi_{スピン}$$

・ボゾンの場合（特にスピン0の場合）

スピン部分はなし
→空間部分を対称化

$$\Psi_{空間}(\mathbb{r}_1, \mathbb{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi(\mathbb{r}_1, \mathbb{r}_2) + \phi(\mathbb{r}_2, \mathbb{r}_1)\right)$$

・フェルミオンの場合（特にスピン$\frac{1}{2}$の場合）

合成スピンは 0 か 1

$$S=1: \quad |\uparrow\uparrow\rangle, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right), \quad |\downarrow\downarrow\rangle$$

$$S=0: \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right)$$

Department of Physics
Tohoku University

Sendai, Japan.

(S=1：入れかえに対し対称
S=0：反対称

⇓ 粒子の入れかえに対し全波動関数が反対称となるためには

S=1 ⟶ 空間部分 反対称
S=0 ⟶ 〃 対称

⇓

$$\Psi(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi(r_1, r_2) - \phi(r_2, r_1)\right) |S=1, S_z\rangle$$

or

$$\Psi(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi(r_1, r_2) + \phi(r_2, r_1)\right) |S=0\rangle$$

Department of Physics
Tohoku University

Sendai, Japan.

(note) 許される相対角運動量：

2粒子ハミルトニアンは重心運動と相対運動に分離可能

$$H = \frac{\mathbb{P}_1^2}{2m} + \frac{\mathbb{P}_2^2}{2m} + V(|\mathbb{r}_1 - \mathbb{r}_2|)$$

$$= \frac{\mathbb{P}^2}{4m} + \frac{\mathbb{p}^2}{m} + V(r)$$

$$\mathbb{R} = \frac{1}{2}(\mathbb{r}_1 + \mathbb{r}_2), \quad \mathbb{r} = \mathbb{r}_1 - \mathbb{r}_2$$
$$\mathbb{P} = \mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_2, \quad \mathbb{p} = \frac{1}{2}(\mathbb{P}_1 - \mathbb{P}_2)$$

波動関数：$\Psi(\mathbb{r}_1, \mathbb{r}_2) = e^{i\vec{K}\cdot\vec{R}} \underbrace{\phi(\mathbb{r})}_{= R_\ell(r) Y_{\ell m}(\hat{r})}$

2粒子の入れかえで $(\mathbb{r}_1 \leftrightarrow \mathbb{r}_2)$

$$\mathbb{R} \to \frac{1}{2}(\mathbb{r}_2 + \mathbb{r}_1) = \mathbb{R}$$
$$\mathbb{r} \to \mathbb{r}_2 - \mathbb{r}_1 = -\mathbb{r}.$$

↓

$$\Psi(\mathbb{r}_1, \mathbb{r}_2) \longrightarrow \Psi(\mathbb{r}_2, \mathbb{r}_1) = e^{i\vec{K}\cdot\vec{R}} \cdot R_\ell(r) \underbrace{Y_{\ell m}(-\hat{\mathbb{r}})}_{= (-)^\ell Y_{\ell m}(\hat{\mathbb{r}})}$$

Department of Physics
Tohoku University
Sendai, Japan.

↓

スピン 0 のボゾン 2粒子 → l：偶数
スピン 1/2 のフェルミオン 2粒子

$S=0$ → l：偶数
$S=1$ → l：奇数

※ ^{14}N 原子核がボゾンである
⟷ $^{14}N-^{14}N$ 分子のスペクトル分布に反映.

スピン I とスピン I の合成でできる状態の数：$(2I+1)^2$ 個

$M_1=-I\sim I$
$M_2=-I\sim I$

状態は $\psi_{M_1M_2}$ と書ける
- $M_1=M_2$ のとき → 入れかえに対し対称 ($2I+1$個)
- $M_1\neq M_2$ のとき
  → $\psi_{M_1M_2}\pm\psi_{M_2M_1}$：入れかえに対し対称なもの と反対称なもの同数

↓

対称な状態の数：$\underset{M_1=M_2}{(2I+1)}+\frac{1}{2}\Big(\underset{\text{total}}{(2I+1)^2}-\underset{M_1=M_2}{(2I+1)}\Big)$

$=(2I+1)(I+1)$ 個

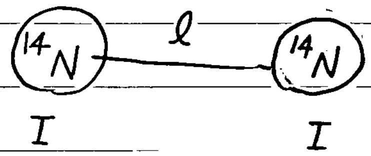
反対称な状態の数：$\frac{1}{2}\left((2I+1)^2-(2I+1)\right)=(2I+1)\cdot I$ 個

cf. $I=\frac{1}{2}$ のとき：対 → $(2\cdot\frac{1}{2}+1)(\frac{1}{2}+1)=3$ 個 $(S=1)$
反 → $(2\cdot\frac{1}{2}+1)\cdot\frac{1}{2}=1$ 個 $(S=0)$

Department of Physics
Tohoku University

Sendai, Japan.

。 ^{14}N 分子



もし ^{14}N がボゾンであれば

l = 偶数 → スピン部分は対称 : $(2I+1)(I+1)$ 個

l = 奇数 → 〃 反対称 : $(2I+1)\cdot I$ 個

$l=3$ ―― $(2I+1)\cdot I$ 重縮退

$l=2$ ―― $(2I+1)(I+1)$ 重縮退

$l=1$ ―― $(2I+1)\cdot I$ 重縮退

$l=0$ ―― $(2I+1)(I+1)$ 重縮退

もし ^{14}N がフェルミオンであれば

$l=3$ ―― $(2I+1)(I+1)$ 重縮退

$l=2$ ―― $(2I+1)\cdot I$ 重

$l=1$ ―― $(2I+1)(I+1)$ 重

$l=0$ ―― $(2I+1)\cdot I$ 重

区別できる

↓

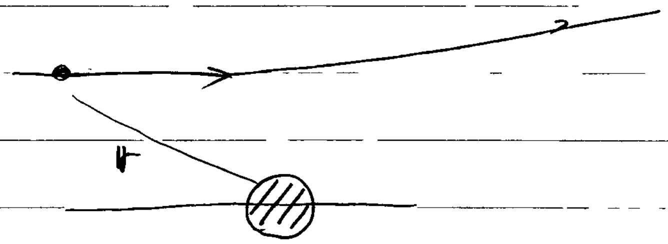
^{14}N がボゾンであることが判明

Department of Physics
Tohoku University

Sendai, Japan.

4.3. 同種粒子による散乱

(note) 異種粒子の散乱



$$\psi(\mathbf{r}) \to e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r} \quad (r\to\infty)$$

$\downarrow$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2$$

同種粒子の散乱 → 統計性を考慮する必要あり

$\downarrow$

$$\Psi_\pm(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r}) \pm \psi(-\mathbf{r})$$

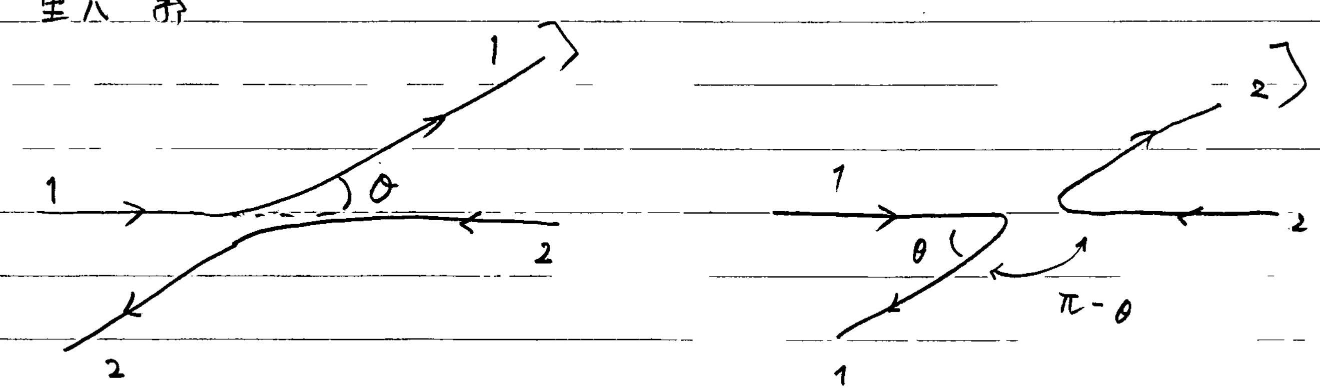
$$\to \left(e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \pm e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\right) + \underbrace{\left[f(\theta) \pm f(\pi-\theta)\right]}_{\equiv f_\pm(\theta)}\frac{e^{ikr}}{r} \quad (r\to\infty)$$

2つの粒子の入れかえ：
相対波動関数で $\mathbf{r} \to -\mathbf{r}$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_{\pm}(\theta)|^2$$

$$= \underbrace{|f(\theta)|^2 + |f(\pi-\theta)|^2}_{\text{古典項}} \underbrace{\pm 2\,\mathrm{Re}[f^*(\theta) f(\pi-\theta)]}_{\text{干渉項}}$$

重心系



同種粒子 → 1 と 2 は必らず逆向きに散乱される

$$d\sigma_1(\theta) = d\sigma_2(\pi-\theta)$$
$$d\sigma_2(\theta) = d\sigma_1(\pi-\theta)$$

detector は 粒子 1 と 2 を区別できない

$$d\sigma(\theta) = d\sigma_1(\theta) + d\sigma_2(\theta)$$
$$= d\sigma_1(\theta) + d\sigma_1(\pi-\theta)$$

・スピン 0 粒子（ボゾン）

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_+(\theta)|^2$$

・スピン $\frac{1}{2}$ 粒子（フェルミオン）

全スピン $S=0$: $|S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)$

↳ 空間部分は対称

$$\frac{d\sigma_s}{d\Omega} = |f_+(\theta)|^2$$

$S=1$: $|S_z=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow)$

↳ 空間部分は反対称

$$\frac{d\sigma_t}{d\Omega} = |f_-(\theta)|^2$$

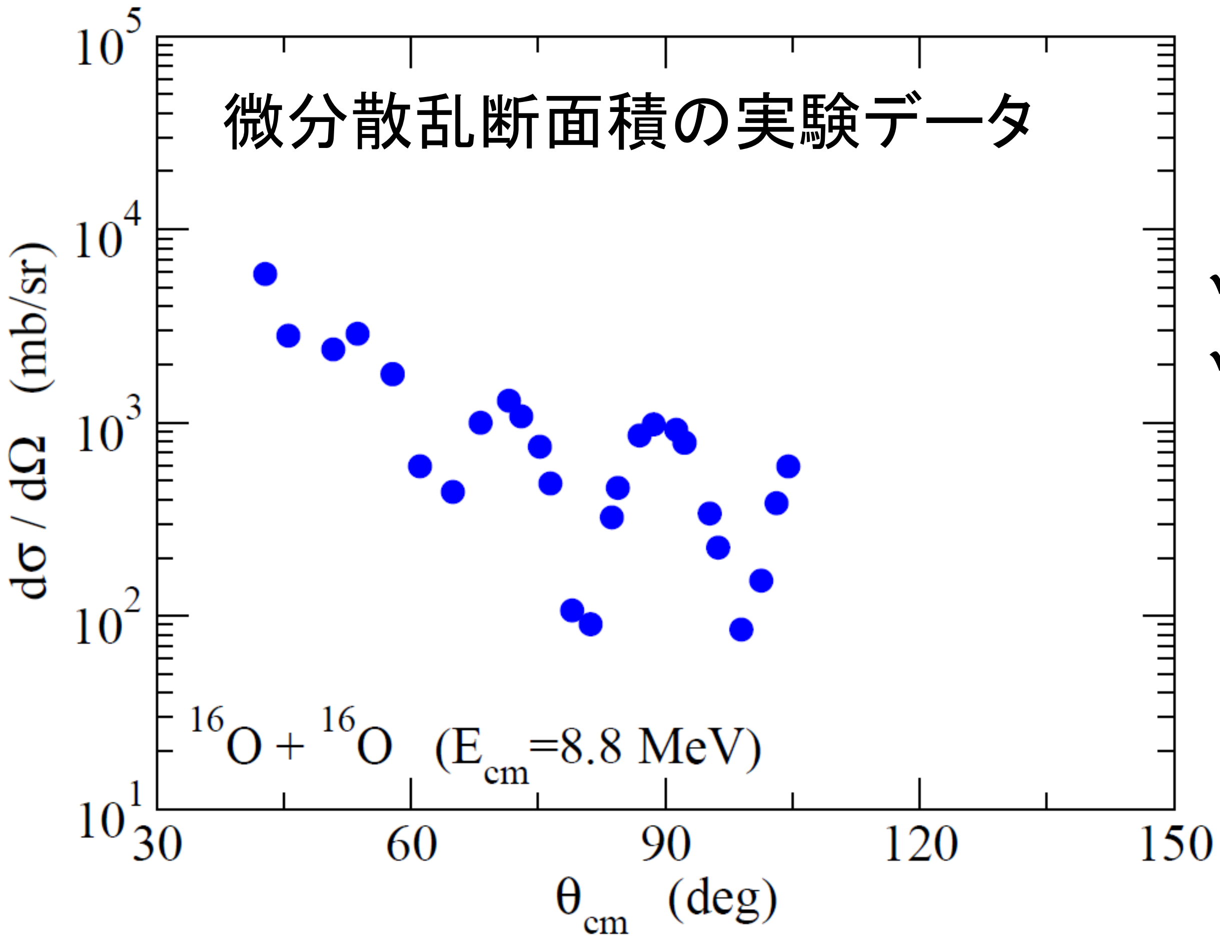
スピン偏極のない時

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{3}{4}\frac{d\sigma_t}{d\Omega} + \frac{1}{4}\frac{d\sigma_s}{d\Omega}$$

$$= |f(\theta)|^2 + |f(\pi-\theta)|^2 - \mathrm{Re}[f^*(\theta) f(\pi-\theta)]$$

※ ボゾンの場合でもフェルミオンの場合でも
断面積は $\theta = \frac{\pi}{2}$ で対称

^{16}O 原子核による^{16}O原子核の弾性散乱



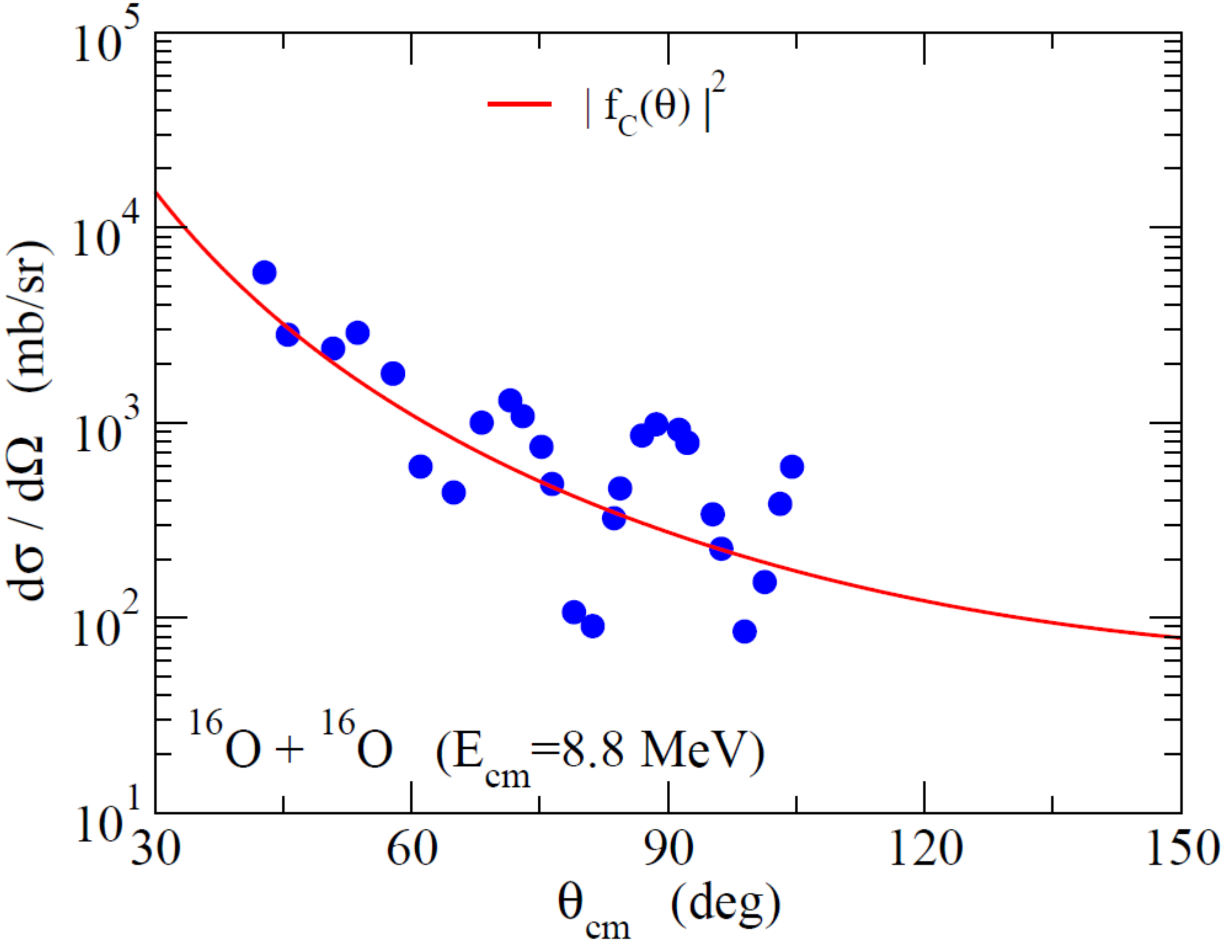
^{16}O 原子核はスピン0のボソン

✓（重心系で）90度対称
✓振動パターン

参考文献
D.A. Bromley et al.,
Phys. Rev. 123(‘61)878

^{16}O 原子核による^{16}O原子核の弾性散乱

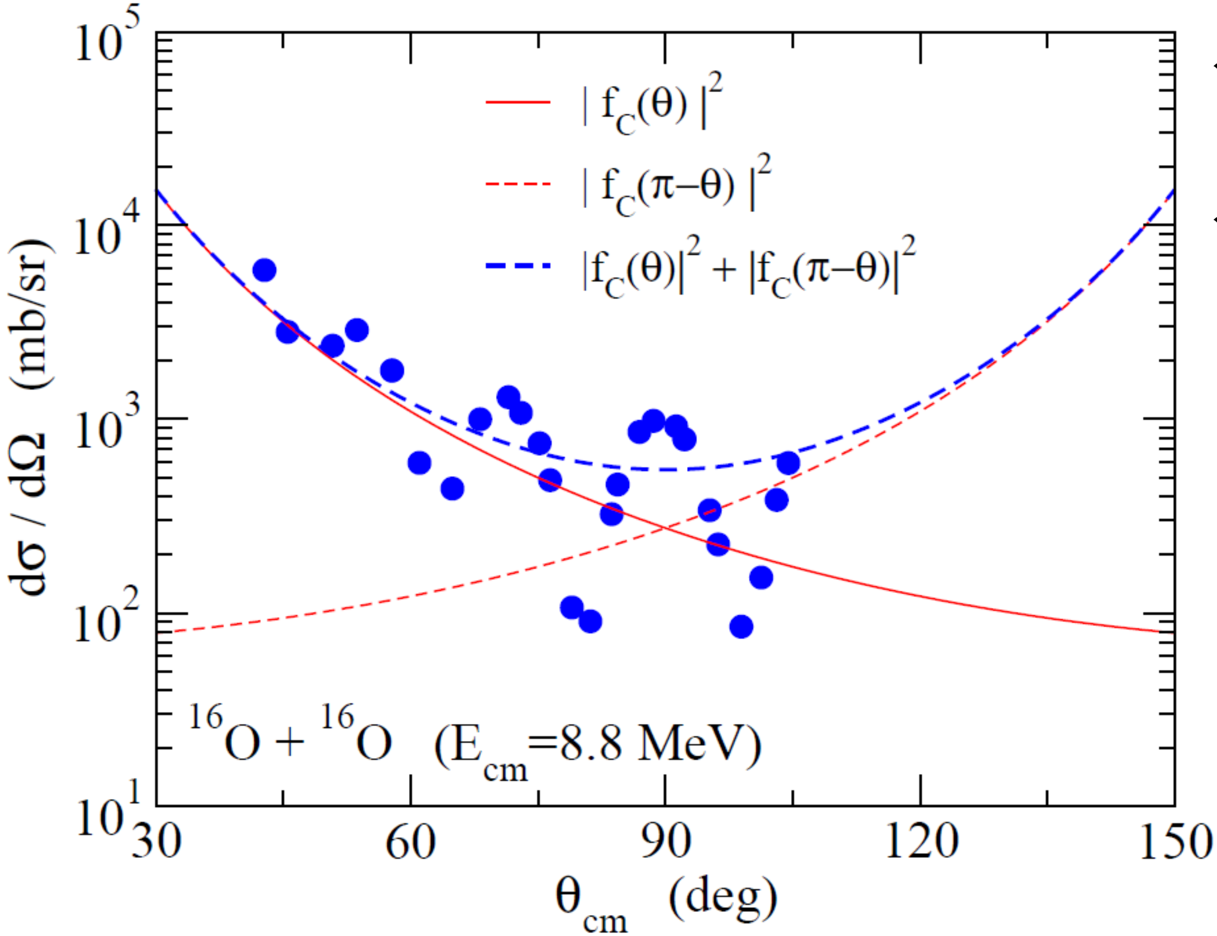
仮に2つの原子核が同種粒子でないとした場合



✓（重心系で）90度対称
✓振動パターン
ともに説明不可

^{16}O 原子核による^{16}O原子核の弾性散乱

同種粒子であることは考慮するが古典力学的に足した場合

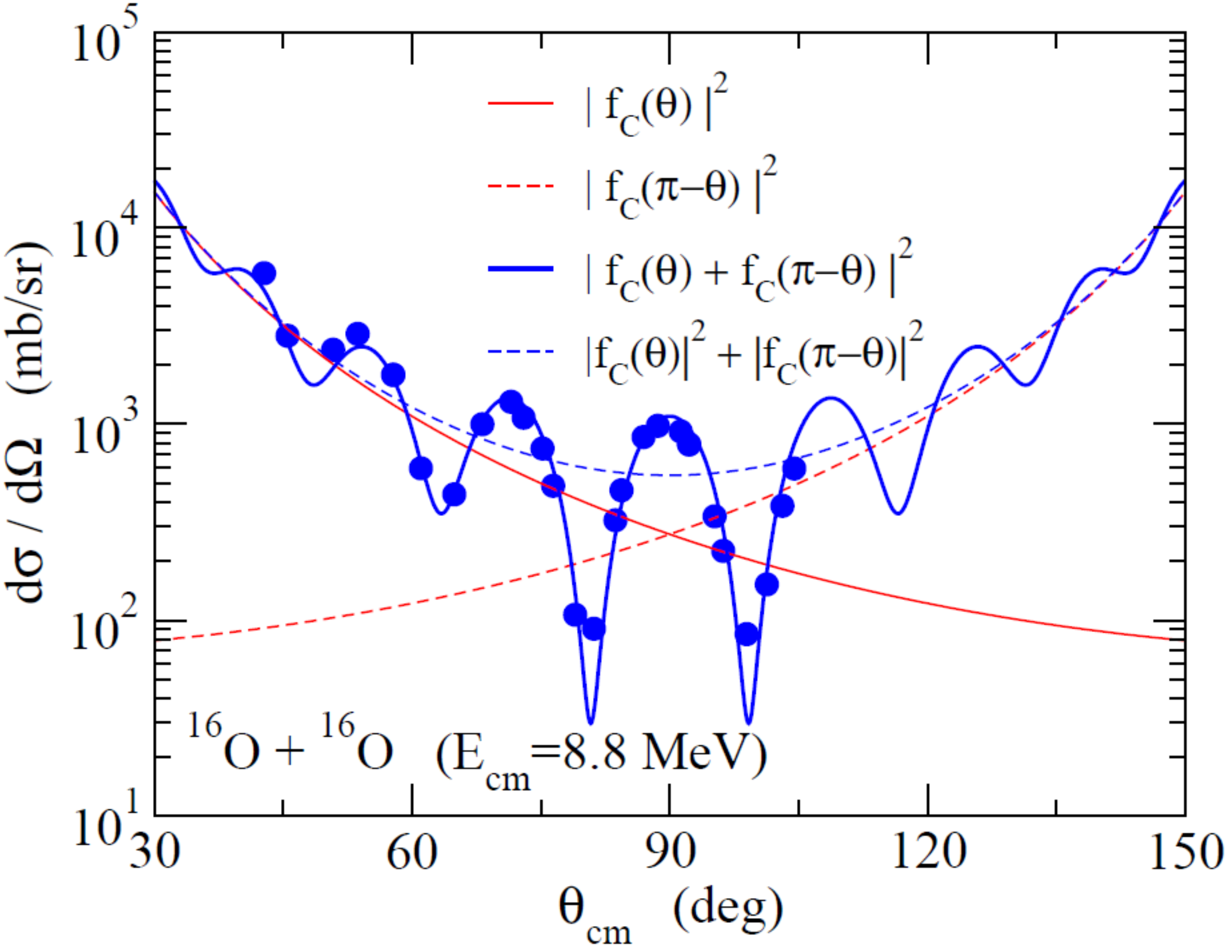


✓（重心系で）90度対称
はOKだが

✓振動パターンはダメ

^{16}O 原子核による^{16}O原子核の弾性散乱

量子力学的に振幅を足してから2乗する場合



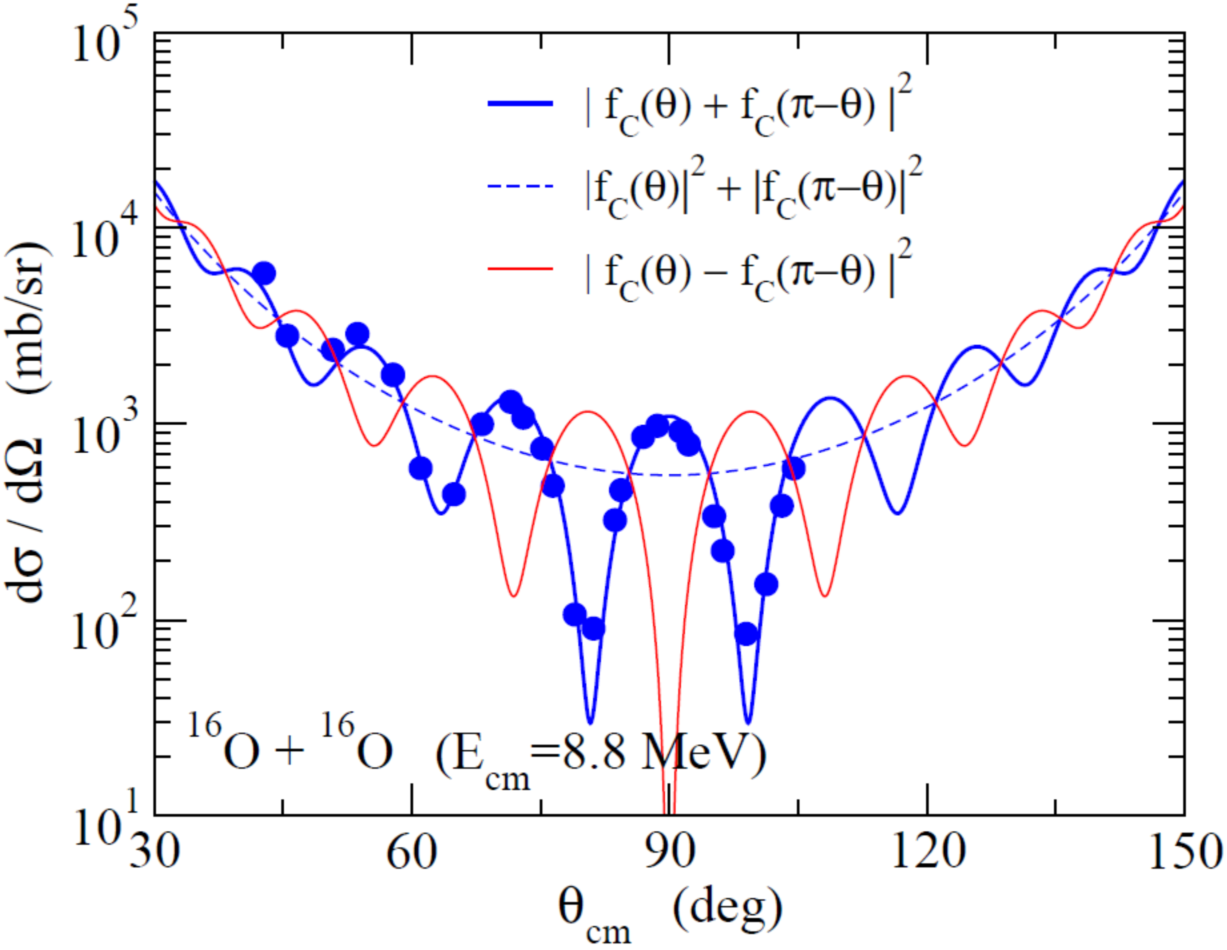
✓(重心系で)90度対称

✓振動パターン(干渉)

の両方ともOK

^{16}O 原子核による^{16}O原子核の弾性散乱

空間部分を反対称に足してしまった場合

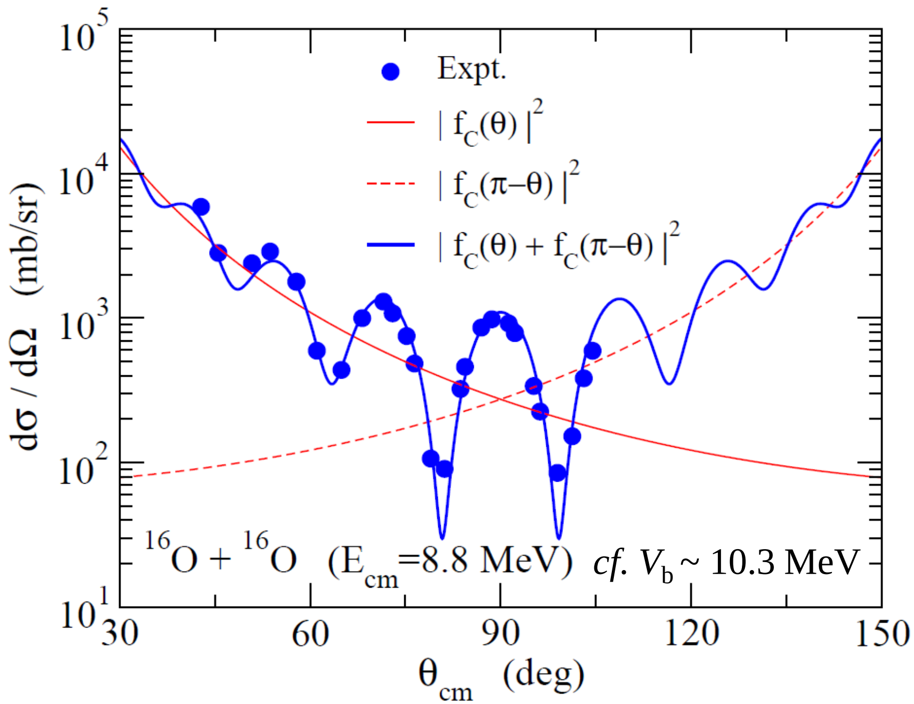


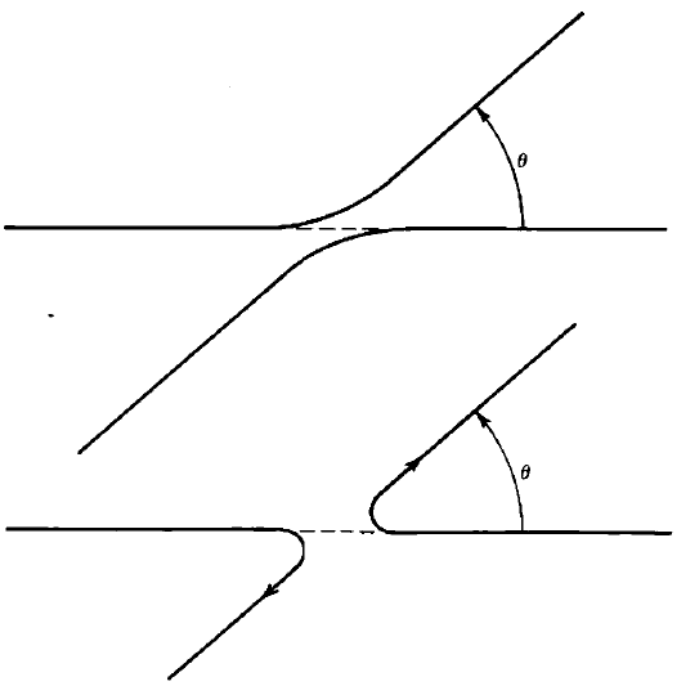
✓振動パターン（干渉）が実験データと矛盾

Mott 散乱

同種粒子の散乱

$$
\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega} &= |f(\theta) \pm f(\pi-\theta)|^2 \\
&= |f(\theta)|^2 + |f(\pi-\theta)|^2 \pm f^*(\theta)f(\pi-\theta) \pm f(\theta)f^*(\pi-\theta)
\end{aligned}
$$





expt: D.A. Bromley et al., Phys. Rev. 123 ('61)878

"Quantum Physics", S. Gasiorowicz