(複習)

部分波解析：各 ℓ ごとに考える

$$\psi_{\ell m}(\mathbf{r}) = R_\ell(r)\, Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}})$$

$$R_\ell(r) \xrightarrow[r\to\infty]{} \frac{1}{kr}\left(e^{-i(kr-\frac{\ell\pi}{2})} - \underbrace{S_\ell}_{= e^{2i\delta_\ell}} e^{i(kr-\frac{\ell\pi}{2})} \right)$$

$$\propto \frac{1}{kr} \sin\left(kr - \frac{\ell\pi}{2} + \delta_\ell\right)$$

$$f(\theta) = \sum_\ell (2\ell+1) \frac{S_\ell - 1}{2ik} P_\ell(\cos\theta)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2$$

$$\sigma_{tot} = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_\ell (2\ell+1)\sin^2\delta_\ell$$

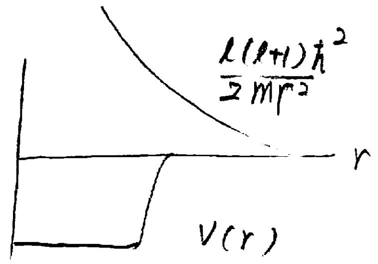
部分波解析は低エネルギーで特に有効

← 大きい ℓ に対して $\delta_\ell \sim 0$

3.5 低エネルギー散乱

■ 一般的な考察

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} + V(r) - E \right) u_l(r) = 0$$

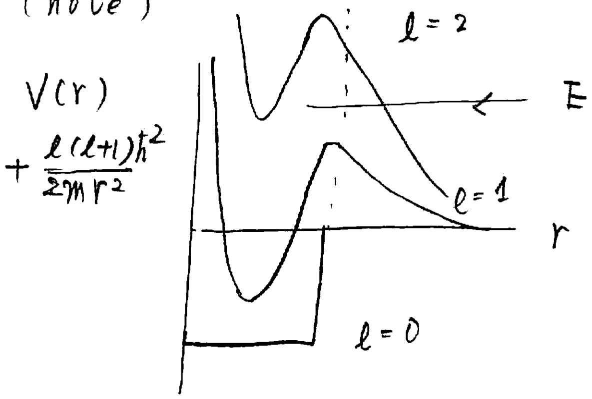


$l \to \infty$ では

$$\frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} \gg V(r)$$

$\to \delta_l \sim 0$

(note)



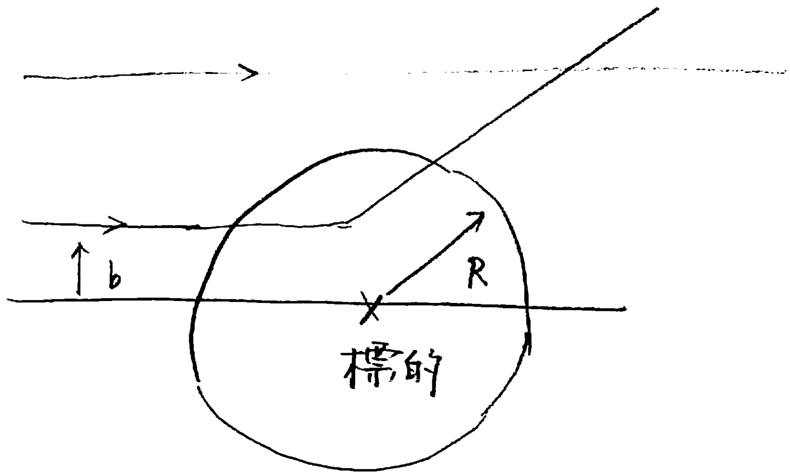
反応が起きるためには V(r) を感じる距離までトンネルしなければならない。

(note) $E \to 0$ では $l=0$ のみが寄与する.

$\downarrow$

$$\frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} = 0$$

古典的には



標的粒子から相互作用のレンジ R の内に入る部分波（$b \lesssim R$）が散乱される。
$b > R$ の部分波は散乱されない（素通り）。

$$\ell = kb$$

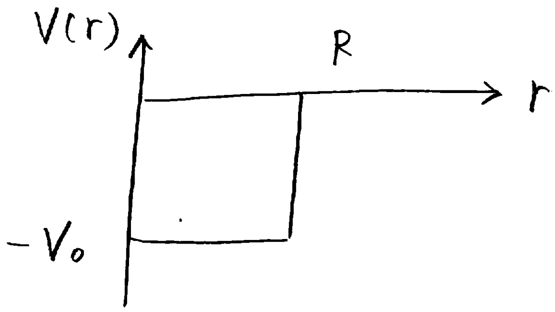
$\downarrow$

$\ell \lesssim kR$ の部分波が散乱に寄与。

$E \to$ 小 $\Rightarrow$ $k \to$ 小
$\Rightarrow$ $kR \sim \ell_{max} \to$ 小

Ⅷ $E \to 0$ での振るまい：散乱長

（例）井戸型ポテンシャル（引力の場合）



$l=0$ の解

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{u(r)}{r} Y_{00}(\hat{\mathbf{r}})$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2} + V(r) - E\right)u(r) = 0$$

$r \le R$: $u(r) = A \sin \tilde{k} r$

$$\tilde{k} = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E+V_0)} \sim \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}V_0} = \text{const.}$$

$(E \ll V_0)$

$r > R$: $u(r) = B \sin(kr + \delta)$

$$k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}E}$$

$r = R$ での接続：

$$\begin{cases} A \sin \tilde{k} R = B \sin(kR+\delta) = B\left(\overset{kR}{\overset{\wr}{\sin kR}} \cos\delta + \overset{1}{\overset{\wr}{\cos kR}} \sin\delta\right) \\ \tilde{k} A \cos \tilde{k} R = kB\cos(kR+\delta) = kB\left(\underset{1}{\underset{\wr}{\cos kR}} \cos\delta - \underset{kR}{\underset{\wr}{\sin kR}} \sin\delta\right) \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \quad \tilde{k} \cot \tilde{k} R = k \cdot \frac{\cos\delta - kR\sin\delta}{kR\cos\delta + \sin\delta} = k\,\frac{\cot\delta - \overset{\sim 0}{kR}}{kR\cot\delta + 1}$$

$$\rightsquigarrow \quad k\cot\delta = \frac{\tilde{k}\cot\tilde{k}R}{1 - \tilde{k}R\cot\tilde{k}R} = \text{const.}$$

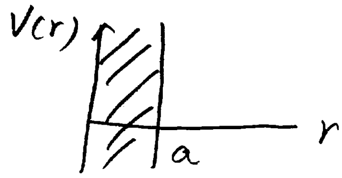
$\Downarrow$ $$k\cot\delta = \text{const.} \equiv -\frac{1}{a}$$

散乱長

この関係式は井戸型ポテンシャル以外でも成り立つ。

(note) 剛体球による散乱 ($l=0$)

$$V(r) = \begin{cases} \infty & (r<a) \\ 0 & (r\geq 0) \end{cases}$$



$$u(r) = \sin(kr+\delta)$$

$$u(r=a) = 0 = \sin(ka+\delta)$$

$\Downarrow$ $$\delta = -ka$$

(note) $k\cot\delta \sim \frac{k}{\delta} = -\frac{1}{a}$.

※ 斥力ポテンシャル $\rightarrow$ $\delta < 0$ $\Downarrow$ $a > 0$
引力 $\rightarrow$ $\delta > 0$ $\Downarrow$ $a < 0$

$$\left(k\cot\delta \sim \frac{k}{\delta} = -\frac{1}{a} \right)$$

ただし引力ポテンシャルの場合は注意が必要(引力が強い場合は $a>0$ になりうる。)

○ 散乱長の意味

井戸型ポテンシャルの場合

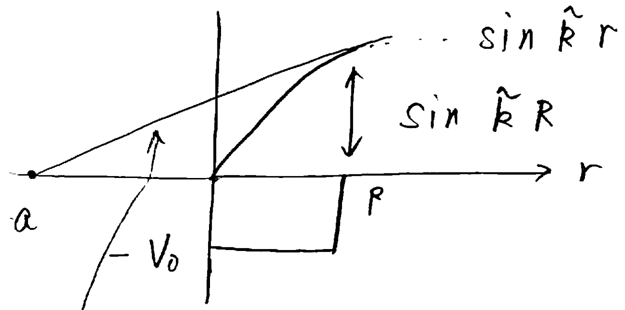
$$k\cot\delta = \frac{\tilde{k}\cot\tilde{k}R}{1-\tilde{k}R\cot\tilde{k}R} \equiv -\frac{1}{a}$$

$$\tilde{k} = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}V_0}$$

$\downarrow$

$$a = \frac{\tilde{k}R\cot\tilde{k}R - 1}{\tilde{k}\cot\tilde{k}R} = R - \frac{1}{\tilde{k}\cot\tilde{k}R}$$

$$= R - \frac{1}{\tilde{k}}\tan\tilde{k}R$$



波動関数をr−Rで展開

$$u(r) \sim \sin\tilde{k}R + \overbrace{\tilde{k}\cos\tilde{k}R}^{\frac{d}{dr}\sin\tilde{k}r\,\big|_{r=R}}\,(r-R)$$

は $r=a$ でゼロ:

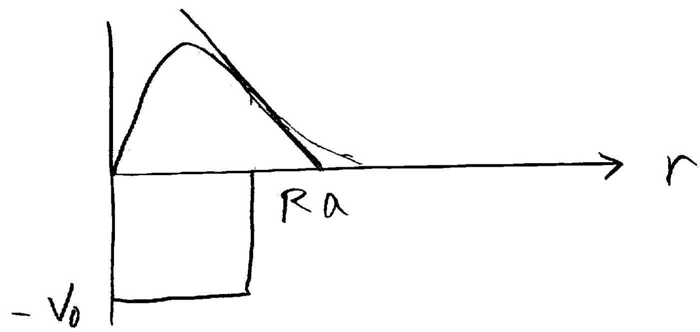
$$u(r=a) = \sin\tilde{k}R + \tilde{k}\cos\tilde{k}R\,(a-R)$$

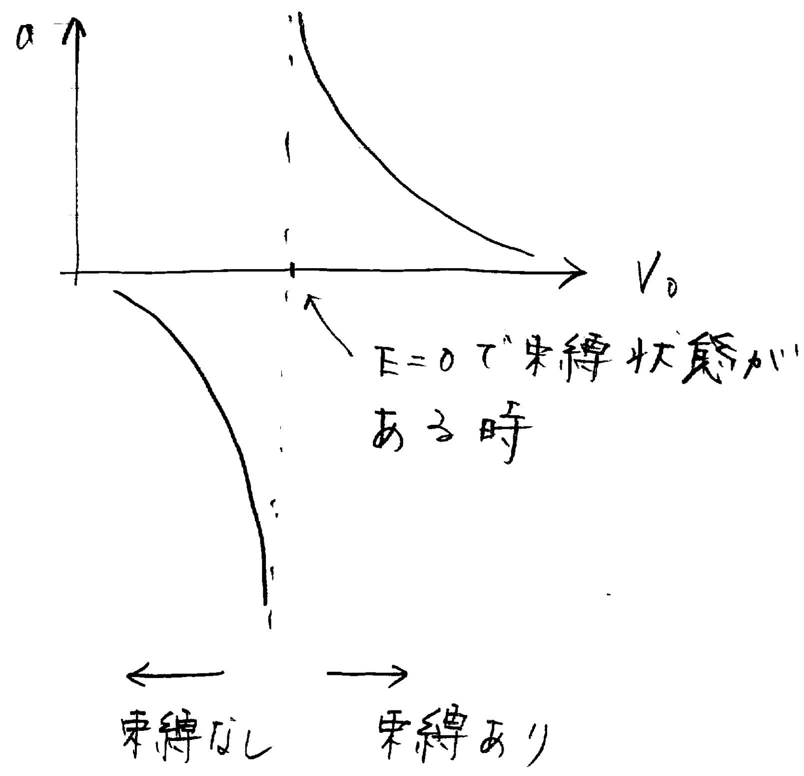
$$= \cancel{\sin\tilde{k}R} + \tilde{k}\cos\tilde{k}R\,(\cancel{R} - \frac{1}{\tilde{k}}\tan\tilde{k}R\,\cancel{-R})$$

$$= 0$$

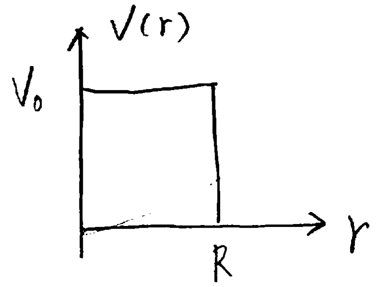
束縛状態がない場合 $\longrightarrow$ $a < 0$

束縛状態があれば　→　$a > 0$





(note) 斥力ポテンシャルの場合は常に $a > 0$



$$r \le R: \quad u(r) = A(e^{\kappa r} - e^{-\kappa r})$$

$$\kappa = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)}$$

$$\sim \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}V_0} = const.$$

$$r > R: \quad u(r) = B\sin(kr+\delta)$$

$r = R$ での接続

$$A(e^{\kappa R} - e^{-\kappa R}) = B\sin(kR+\delta)$$
$$= B(\underbrace{\sin kR}_{\wr\ kR}\cos\delta + \underbrace{\cos kR}_{\wr\ 1}\sin\delta)$$

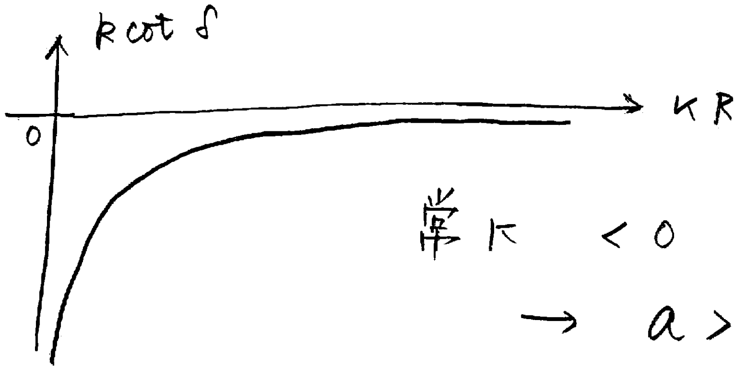
$$\kappa A(e^{\kappa R} + e^{-\kappa R}) = kB\cos(kR+\delta)$$
$$= kB(\underbrace{\cos kR}_{\wr\ 1}\cos\delta - \underbrace{\sin kR}_{\wr\ kR}\sin\delta)$$

$$\rightsquigarrow \quad \kappa\frac{e^{\kappa R}+e^{-\kappa R}}{e^{\kappa R}-e^{-\kappa R}} \sim k\frac{\cos\delta - \cancel{kR\sin\delta}}{kR\cos\delta + \sin\delta}$$

$$= k\frac{\cot\delta}{kR\cot\delta + 1}$$

$$\rightsquigarrow \quad k\cot\delta = \frac{\kappa\cdot\frac{e^{\kappa R}+e^{-\kappa R}}{e^{\kappa R}-e^{-\kappa R}}}{1-\kappa R\frac{e^{\kappa R}+e^{-\kappa R}}{e^{\kappa R}-e^{-\kappa R}}} = \frac{\kappa(e^{\kappa R}+e^{-\kappa R})}{(e^{\kappa R}-e^{-\kappa R})-\kappa R(e^{\kappa R}+e^{-\kappa R})}$$

$$k \cot \delta = \frac{\kappa \left(e^{\kappa R} + e^{-\kappa R} \right)}{\left(e^{\kappa R} - e^{-\kappa R} \right) - \kappa R \left(e^{\kappa R} + e^{-\kappa R} \right)}$$



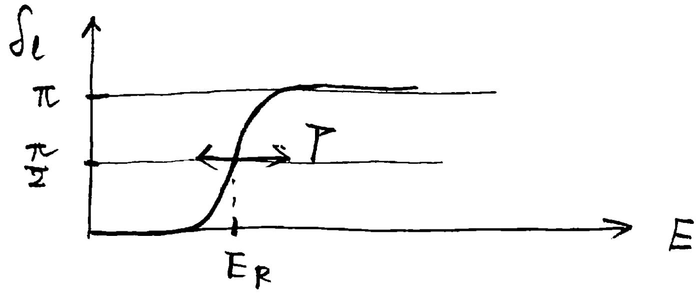
常に < 0

$\rightarrow \quad a > 0$

3.6. 共鳴散乱

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2}\sum_l (2l+1)\underbrace{\sin^2\delta_l}_{=\frac{1}{1+\cot^2\delta_l}} \equiv \sum_l \sigma_l$$

引力ポテンシャルの場合，ある特定の l に対して位相のずれがエネルギーの関数として

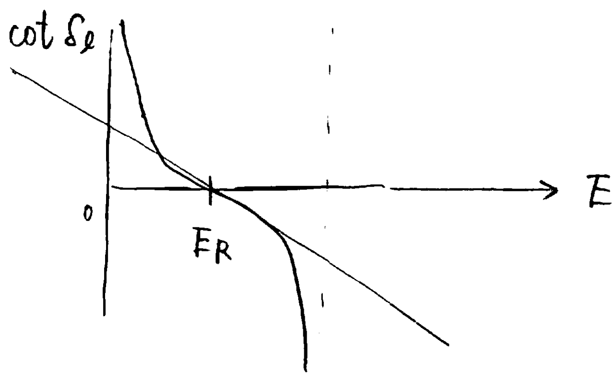


のようにふるまうことがある（他の l に対してはもっとゆるやかに変化する）。

$\cot\delta_l(E)$ を $E=E_R$ のまわりで展開：

$$\cot\delta_l(E) \sim \cot\underbrace{\delta_l(E_R)}_{=\frac{\pi}{2}}\ \underbrace{\left(-\frac{2}{\Gamma}\right)}_{\uparrow\ \frac{d}{dE}\cot\delta_l(E)\big|_{E=E_R}}(E-E_R)+\cdots$$

$$= -\frac{2}{\Gamma}(E-E_R)$$

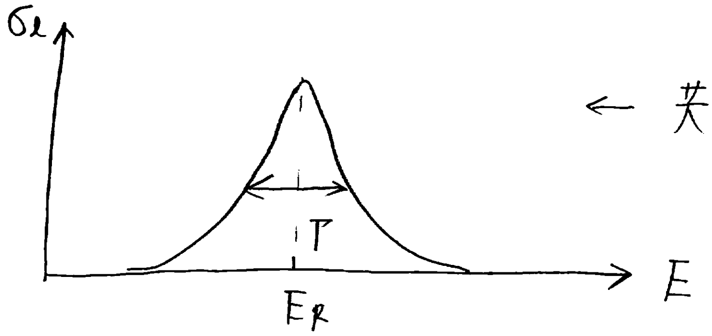


↓

$$\sigma_l = \frac{4\pi}{k^2}(2l+1)\cdot\frac{1}{1+\frac{4}{\Gamma^2}(E-E_R)^2}$$

$$= \frac{4\pi}{k^2}(2l+1)\cdot\frac{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2+(E-E_R)^2}$$

Breit-Wigner の公式



← 共鳴散乱

Γ : 共鳴の幅

自由粒子の場合の2つの独立解

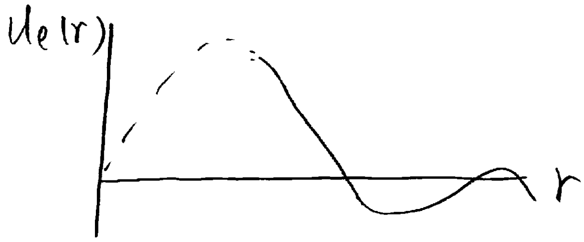
$$\begin{cases} j_\ell(kr) & \text{原点で正則, 遠方で} \quad \frac{1}{kr}\sin\left(kr-\frac{\ell\pi}{2}\right) \\ n_\ell(kr) & \text{〃 発散, 〃} \quad \frac{1}{kr}\cos\left(kr-\frac{\ell\pi}{2}\right) \end{cases}$$

ポテンシャルがある場合

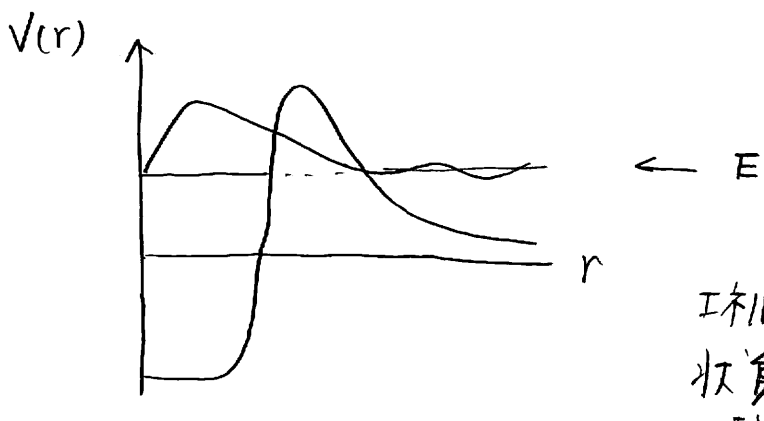
$$u_\ell(r) \longrightarrow \sin\left(kr-\frac{\ell\pi}{2}+\delta_\ell\right)$$

$\delta_\ell = \frac{\pi}{2}$ だと

$$u_\ell(r) \rightarrow \sin\left(kr-\frac{\ell\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(kr-\frac{\ell\pi}{2}\right)$$
$$= kr\cdot n_\ell(kr)$$



$\updownarrow$



エネルギー E が"準束縛状態"のエネルギーに一致した時に共鳴

(note) 共鳴からずれたエネルギーでは