Department of Physics
Tohoku University
Sendai, Japan.

$$V_c(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{e^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = V(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)$$

4. 多体論入門：同種粒子

多体系のハミルトニアン

$$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + V(x_1, x_2, \cdots, x_N)$$

$x = (\mathbf{r}, \vec{s})$ ；座標とスピンを合わせて書いた一般化された座標

$\vec{s}$：スピン

$$H\Psi(x_1, x_2, \cdots, x_N) = E\Psi(x_1, x_2, \cdots, x_N)$$

$$1 = \int dx_1 \cdots dx_N \, |\Psi(x_1, x_2, \cdots, x_N)|^2$$

$$dx_1 = \int d\mathbf{r}_1 \sum_{s_{z1}}$$

4.1. 入れかえオペレーター：フェルミオンとボソン

同種粒子：区別できない。

↓

$N = 2$ の系（2粒子系）を考えると

$$H = \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m} + \frac{\mathbf{p}_2^2}{2m} + V(x_1, x_2)$$

で 1と2を入れかえても H は不変。

↓

$$H = \underbrace{\frac{\mathbf{p}_1^2}{2m} + \frac{\mathbf{p}_2^2}{2m} + V(x_1, x_2)}_{H(1,2)} = \underbrace{\frac{\mathbf{p}_1^2}{2m} + \frac{\mathbf{p}_2^2}{2m} + V(x_2, x_1)}_{H(2,1)}$$

Department of Physics
Tohoku University
Sendai, Japan.

シュレーディンガー方程式：

$$H(1,2)\,\Psi(1,2) = E\,\Psi(1,2).$$

2つの粒子は区別できないので、どちらを"1"とよんでもよい。

$$\underbrace{H(2,1)}_{=H(1,2)}\,\Psi(2,1) = E\,\Psi(2,1)$$ （名前のつけかえ）

・入れかえオペレーター P_{12}：

$$\boxed{P_{12}\,\Psi(1,2) \equiv \Psi(2,1)}$$

（粒子1と2を入れかえる）

$$\begin{aligned} H(1,2)\,P_{12}\,\Psi(1,2) &= E\,P_{12}\,\Psi(1,2) \\ &= P_{12}\,E\,\Psi(1,2) \\ &= P_{12}\,H(1,2)\,\Psi(1,2) \end{aligned}$$

$$[H, P_{12}] = 0$$

$\updownarrow$

ハミルトニアンは $(1 \longleftrightarrow 2)$ で不変。

Department of Physics
Tohoku University
Sendai, Japan.

$$P_{12}\Psi(1,2)=\Psi(2,1)$$

↓

$$(P_{12})^2\Psi(1,2)=P_{12}\Psi(2,1)=\Psi(1,2)$$

↓

$$(P_{12})^2=1 \quad ↓ \quad P_{12}=\pm 1$$

↓

$$\Psi^{(\pm)}(1,2)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\Psi(1,2)\pm\Psi(2,1)\right]$$

の2通りが考えられる。

(note)・ $[H, P_{12}]=0$ より波動関数は P_{12} の固有関数ともなっている必要がある。

・ P_{12} の固有値は保存量.

〈自然法則〉 P_{12} の固有値は粒子の種類によって決まる。
(例えば、実験のセット・アップにより決まるものではない。)

・半整数スピン → $P_{12}=-1$ (フェルミ統計) "フェルミオン"
電子, 陽子, 中性子など

・整数スピン → $P_{12}=1$ (ボーズ統計) "ボソン"
π中間子など

Department of Physics
Tohoku University
Sendai, Japan.

パウリ原理（パウリの排他律）：

2個のフェルミオンは同じ状態をとることができない。

$$H = \underbrace{\frac{P_1^2}{2m} + V(x_1)}_{h_1} + \underbrace{\frac{P_2^2}{2m} + V(x_2)}_{h_2}$$

とする（1, 2 の相互作用なし）。
変数分離型 → 波動関数は積の形。

$$\left(\frac{P^2}{2m} + V(x)\right)\phi_n(x) = \varepsilon_n \phi_n(x)$$

を使って

入れかえに対して反対称

$$\Psi^{(-)}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\phi_n(x_1)\phi_{n'}(x_2) - \phi_n(x_2)\phi_{n'}(x_1)\right]$$

$n = n'$ だと $\Psi^{(-)}(x_1, x_2) = 0$ （パウリ原理）

Department of Physics
Tohoku University

Sendai, Japan.

○N粒子系への拡張：

Nコのフェルミオン（ボゾン）から成る系はどの2粒子の入れかえに対し反対称（対称）。

例）N = 3の場合：

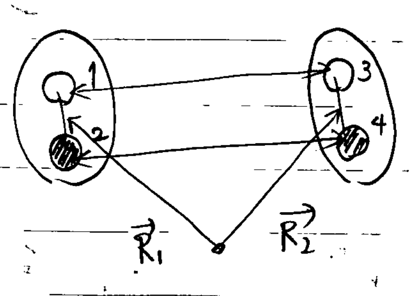
$$\Psi^{(\pm)}(1,2,3) = \frac{1}{\sqrt{6}}\left[\Psi(1,2,3) \pm \Psi(2,1,3) + \Psi(2,3,1) \pm \Psi(3,2,1) + \Psi(3,1,2) \pm \Psi(1,3,2)\right]$$

○複合粒子の統計性

核子：スピン $\frac{1}{2}$

α粒子：　陽子2個，中性子2個
→ 合成スピンは $0, 1, 2, 3, 4$ → ボゾン
↑
基底状態

重陽子：　陽子1，中性子1
→ 合成スピンは $0, 1$ → ボゾン



2つの重陽子系の波動関数

$$\Psi(R_1, R_2) = \Psi((x_1, x_2), (x_3, x_4))$$

$(x_1, x_2) \Downarrow R_1$, $(x_3, x_4) \Downarrow R_2$

Department of Physics
Tohoku University

Sendai, Japan.

2つの重陽子を入れかえ:

$$\Psi(\mathbb{R}_2, \mathbb{R}_1) = \Psi(\overbrace{x_3, x_4}^{\mathbb{R}_2}, \overbrace{x_1, x_2}^{\mathbb{R}_1})$$

$$= (-)^2\, \Psi(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

$$= \Psi(\mathbb{R}_1, \mathbb{R}_2)$$

(余談)　${}^{14}_{7}\mathrm{N}$ 原子核の電荷が7，スピンが整数(ボゾン)ということが 1900年代の初頭にはわかっていた。
質量も　$M \sim 14\, m_p$ であることがわかっていた。
当時 → 中性子の発見はまだ。
原子核は陽子＋電子からできていると考えられていた。

↓

${}^{14}\mathrm{N}$ の性質はこの考えからは説明できない　(14個の陽子＋7個の電子 → フェルミオン)

大きな謎

↓

1932年に中性子が発見され ${}^{14}\mathrm{N}$ が 7個の陽子と7個の中性子からできているとすると ${}^{14}\mathrm{N}$ の性質がきちんと説明できることがわかった。

Department of Physics
Tohoku University

Sendai, Japan.

(note) 相互作用しない N フェルミオン系

$$H = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\mathbb{P}_i^2}{2m} + V(x_i) \right)$$ と書ける場合,

$$\Psi(x_1, \cdots, x_N) = \phi_{n_1}(x_1)\,\phi_{n_2}(x_2) \cdots \phi_{n_3}(x_3)$$
となる(変数分離)。

多体系の波動関数はこれを反対称化しなければならない。

・$N=2$ の場合

$$\Psi^{(-)}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\phi_1(x_1)\phi_2(x_2) - \phi_1(x_2)\phi_1(x_1) \right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \phi_1(x_1) & \phi_1(x_2) \\ \phi_2(x_1) & \phi_2(x_2) \end{vmatrix}$$

・$N=3$ の場合

$$\Psi^{(-)}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\sqrt{6}} \left[\Psi(1,2,3) - \Psi(2,1,3) + \Psi(2,3,1) - \Psi(3,2,1) + \Psi(3,1,2) - \Psi(1,3,2) \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \left[\phi_1(1)\phi_2(2)\phi_3(3) - \phi_1(2)\phi_2(1)\phi_3(3) + \phi_1(2)\phi_2(3)\phi_3(1) - \phi_1(3)\phi_2(2)\phi_3(1) + \phi_1(3)\phi_2(1)\phi_3(2) - \phi_1(1)\phi_2(3)\phi_3(2) \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{vmatrix} \phi_1(x_1) & \phi_1(x_2) & \phi_1(x_3) \\ \phi_2(x_1) & \phi_2(x_2) & \phi_2(x_3) \\ \phi_3(x_1) & \phi_3(x_2) & \phi_3(x_3) \end{vmatrix}$$

Department of Physics
Tohoku University

Sendai, Japan.

・一般に

$$\Psi^{(-)}(x_1, \cdots, x_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \phi_1(x_1) & \cdots & \phi_1(x_N) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_N(x_1) & \cdots & \phi_N(x_N) \end{vmatrix}$$

スレーター行列式