

低エネルギー - 散乱

$$\psi(r) \rightarrow e^{ik \cdot r} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2$$

部分波解析: $\psi_{em}(r) = R_l(r) Y_{lm}(\hat{r})$

$$R_l(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{kr} \left(e^{-i(kr - \frac{l\pi}{2})} - \sum_l S_l e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})} \right)$$

" $e^{2i\delta_l}$

$$\propto \frac{1}{kr} \sin \left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l \right)$$

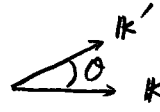
" 位相のずれ

$$f(\theta) = \sum_l (2l+1) \frac{S_l - 1}{2ik} P_l(\cos\theta)$$

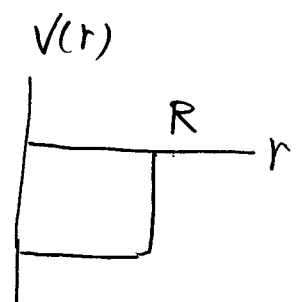
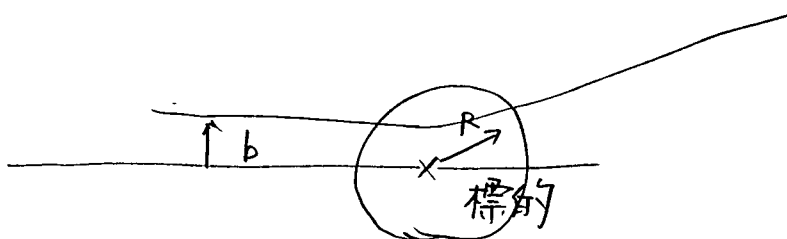
(note) エネルギーが高くなる時 (ボル近似)

$$f(\theta) \propto \int dr' e^{-i(k'-k) \cdot r'} V(r')$$

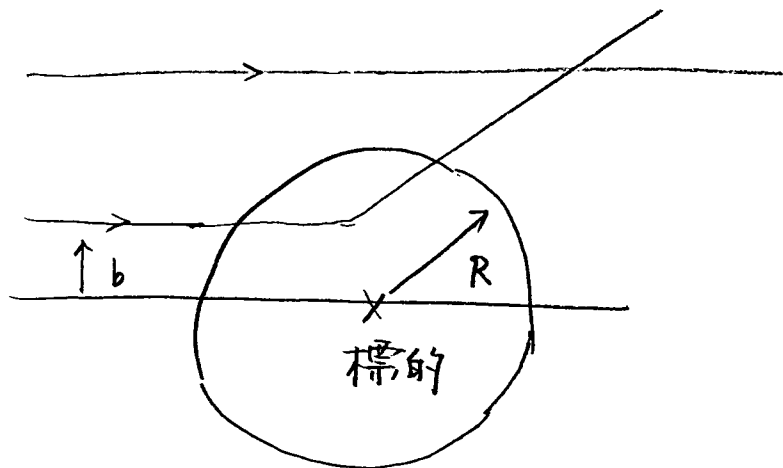
↑
部分波解析の形をしていない



部分波解析 → 低エネルギーで特に有効



古典的には



標的粒子から相互作用のレンジ R の内
に入る部分波 ($b \lesssim R$) が散乱される。
 $b > R$ の部分波は散乱されない (素通り)。

$$l = kb$$

↓
 $l \lesssim kR$ の部分波が散乱に寄与。

$$E \rightarrow \text{小} \Rightarrow k \rightarrow \text{小}$$

$$\Rightarrow kR \approx l_{\max} \rightarrow \text{小}$$

四 光学定理

散乱断面積 : $\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2$.

全断面積:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{tot}} &= \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \int |f(\theta)|^2 d\Omega \\ &= \sum_{l, l'} (2l+1)(2l'+1) \frac{S_l - 1}{2ik} \cdot \frac{S_{l'}^* - 1}{-2ik} \end{aligned}$$

$$\times \int d\Omega P_l(\cos\theta) P_{l'}(\cos\theta)$$

$$\parallel \frac{4\pi}{2l+1} \delta_{l, l'} \leftarrow \int_{-1}^1 P_l(x) P_{l'}(x) dx = \frac{2}{2l+1} \times \delta_{l, l'}$$

$$= \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) |S_l - 1|^2$$

$S_l = e^{2i\delta_l}$ (位相のずれ) を用いて
書き直すと

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{tot}} &= \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) |e^{2i\delta_l} - 1|^2 \\ &= \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) \left| e^{i\delta_l} \frac{e^{i\delta_l} - e^{-i\delta_l}}{2i} \cdot 2i \right|^2 \end{aligned}$$

$$= \frac{4\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) \sin^2 \delta_l$$

//

光学定理

$$\text{Im } f(\theta=0) = \text{Im} \sum_l (2l+1) \cdot \frac{S_l - 1}{2ik} \underbrace{P_l(1)}_{\substack{\parallel \\ 1}}$$

$$= \text{Im} \sum_l (2l+1) \cdot \frac{\cos(2\delta_l) + i \sin(2\delta_l) - 1}{2ik}$$

$$= \sum_l (2l+1) \cdot \frac{1}{2k} \underbrace{(1 - \cos(2\delta_l))}_{\substack{\parallel \\ 2 \sin^2 \delta_l}}$$

$$= \frac{k}{4\pi} \cdot \underbrace{\frac{4\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) \sin^2 \delta_l}_{\sigma_{\text{tot}}}$$

・光学定理の意味

$$\psi(r) \rightarrow e^{ik \cdot r} + f(\theta) \cdot \frac{e^{ikr}}{r} \quad \text{の } \lambda \rightarrow 0, \lambda$$

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar}{2im} (\psi^* \nabla \psi - c.c.)$$

$$\sim \frac{\hbar k}{m} + \frac{\hbar k}{m} \mathbf{e}_r |f(\theta)|^2 \cdot \frac{1}{r^2}$$

$$+ \frac{\hbar k}{2m} \cdot \frac{1}{r} (\mathbf{e}_r + \mathbf{e}_k) (f(\theta) e^{ikr(1-\cos\theta)} + c.c.)$$

$e^{ik \cdot r}$ と $f(\theta) \cdot \frac{e^{ikr}}{r}$ の干渉項

$\int \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{j} r^2 d\hat{r}$ に対する第3項からの寄与

$$= \frac{\hbar k}{2m} \cdot \frac{1}{r} \int (1+\cos\theta) (f(\theta) e^{ikr(1-\cos\theta)} + c.c.) r^2 d\hat{r}$$

$$= \frac{\hbar k}{2m} \cdot r \cdot 2\pi \int_{-1}^1 d(\cos\theta) (1+\cos\theta) (f(\theta) e^{ikr(1-\cos\theta)} + c.c.)$$

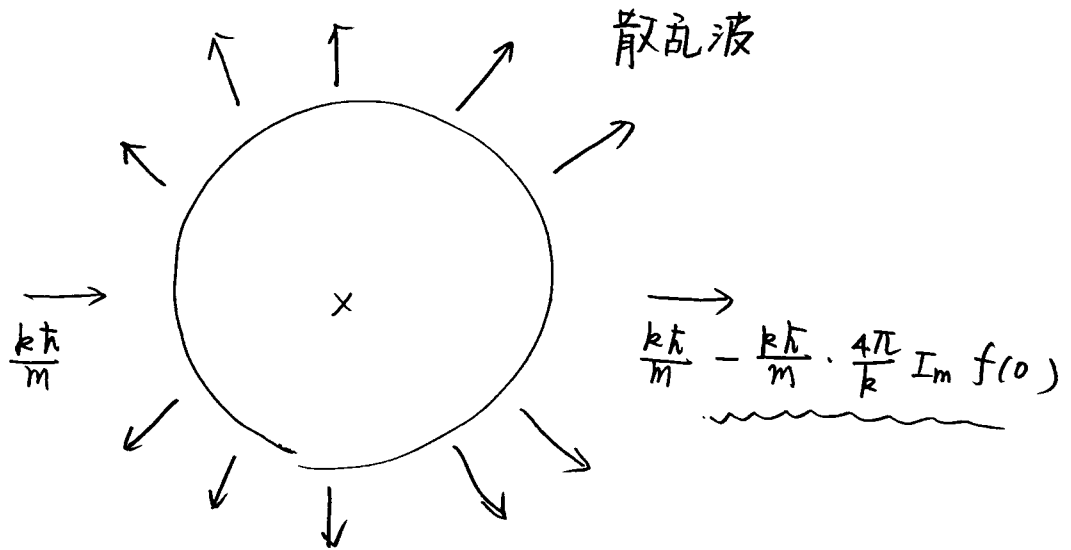
$$= \frac{\hbar k}{2m} \cdot r \cdot 2\pi \left\{ -\frac{1}{ikr} f(\theta) (1+\cos\theta) e^{ikr(1-\cos\theta)} \Big|_{\cos\theta=-1}^1 \right.$$

$$\left. + \frac{1}{ikr} \int \left(\frac{d}{d\cos\theta} f(\theta) (1+\cos\theta) \right) e^{ikr(1-\cos\theta)} d(\cos\theta) \right.$$

$O\left(\frac{1}{r}\right)$

+ c.c. }

$$= \frac{\hbar k}{2m} \cdot r \cdot 2\pi \left(-\frac{2}{ikr} f(0) + \frac{2}{ikr} f^*(0) \right) = -\frac{\hbar k}{m} \cdot \frac{4\pi}{k} \text{Im} f(0)$$



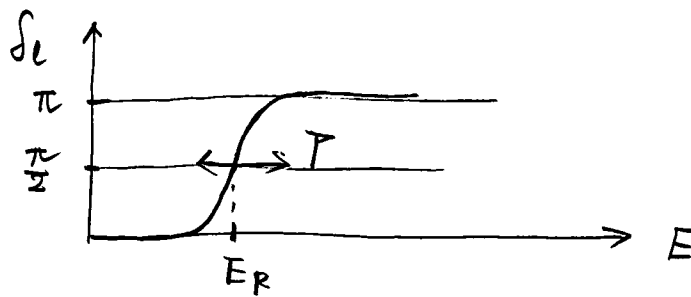
入射フラックスの減少分が散乱フラックスと
同じ

$$\frac{\hbar k}{m} \cdot \frac{4\pi}{k} \text{Im} f(0) = \frac{\hbar k}{m} \cdot \sigma_{tot}$$

2.5. 共鳴散乱

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) \underbrace{\sin^2 \delta_l}_{= \frac{1}{1 + \cot^2 \delta_l}} \equiv \sum_l \sigma_l$$

引カポテンシャルの場合, ある特定の l に対して
位相のずれがエネルギーの関数として



のようにふるまうことがある (他の l に対しては
ほとんどゆるやかに変化する)。

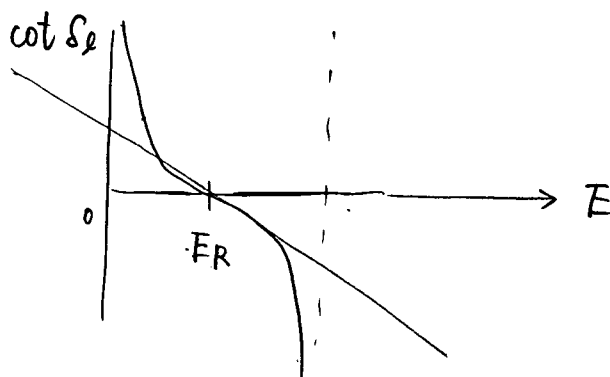


$\cot \delta_l(E)$ を $E = E_R$ のまわりで展開:

$$\cot \delta_l(E) \sim \underbrace{\cot \delta_l(E_R)}_{\frac{1}{2}} \left(-\frac{2}{\Gamma} \right) (E - E_R) + \dots$$

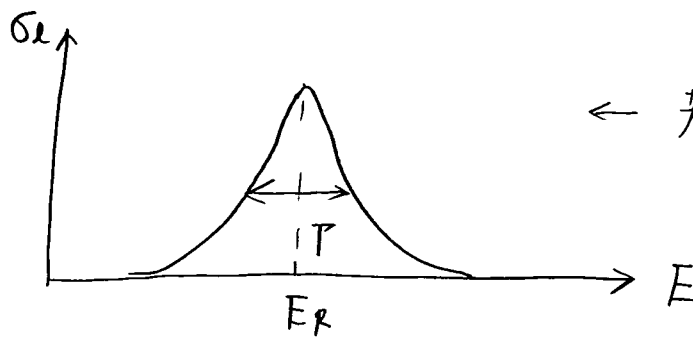
\uparrow
 $\frac{d}{dE} \cot \delta_l(E) \Big|_{E=E_R}$

$$= -\frac{2}{\Gamma} (E - E_R)$$



$$\begin{aligned} \sigma_l &= \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \cdot \frac{1}{1 + \frac{4}{P^2} (E - E_R)^2} \\ &= \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \cdot \frac{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2 + (E - E_R)^2} \end{aligned}$$

Breit-Wigner の公式



← 共振散乱
 Γ : 共振の幅

自由粒子の場合の2つの独立解

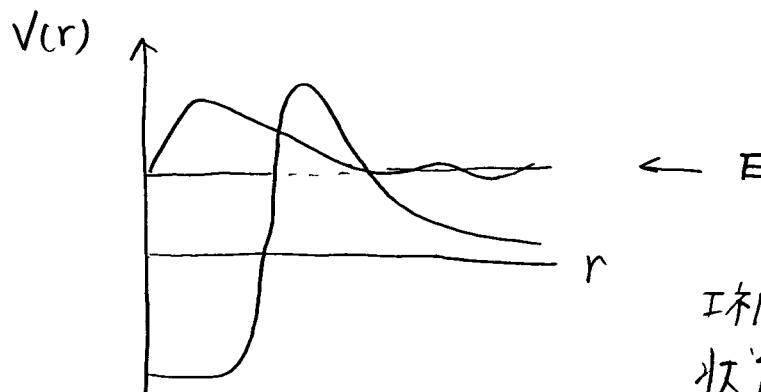
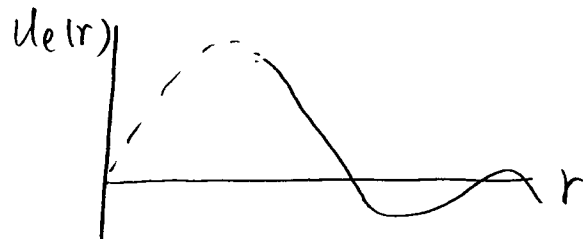
$$\begin{cases} j_e(kr) & \text{原点, での正則, 遠方での} \frac{1}{kr} \sin(kr - \frac{\ell\pi}{2}) \\ n_e(kr) & \text{発散, } \frac{1}{kr} \cos(kr - \frac{\ell\pi}{2}) \end{cases}$$

ポテンシャルがある場合

$$u_\ell(r) \rightarrow \sin(kr - \frac{\ell\pi}{2} + \delta_\ell)$$

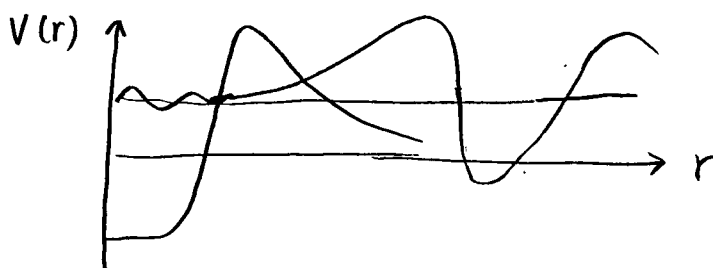
$$\delta_\ell = \frac{\pi}{2} \text{ のとき}$$

$$\begin{aligned} u_\ell(r) &\rightarrow \sin(kr - \frac{\ell\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = \cos(kr - \frac{\ell\pi}{2}) \\ &= kr \cdot n_\ell(kr) \end{aligned}$$



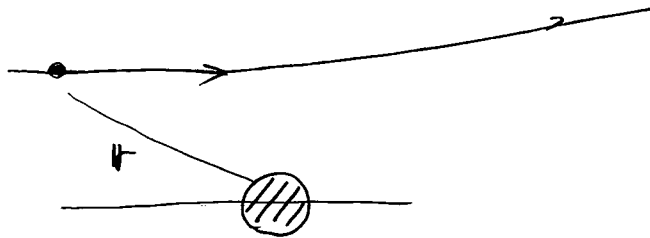
エネルギー E が "準束縛状態" のエネルギーに一致した時に共鳴

(note) 共鳴から決めたエネルギーでは



2.6. 同種粒子による散乱

(note) 異種粒子の散乱



$$\psi(r) \rightarrow e^{ik \cdot r} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (r \rightarrow \infty)$$

↓

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2$$

粒子の入れかえに対し波動関数は対称/反対称

同種粒子の散乱 → 統計性を考慮する必要あり

↓

$$\Psi_{\pm}(r) = \psi(r) \pm \psi(-r)$$

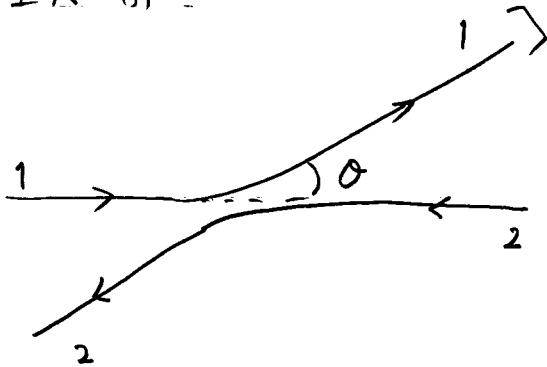
$$\begin{aligned} \rightarrow & (e^{ik \cdot r} \pm e^{-ik \cdot r}) \\ & + \underbrace{[f(\theta) \pm f(\pi - \theta)]}_{\equiv f_{\pm}(\theta)} \frac{e^{ikr}}{r} \quad (r \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

2つの粒子の入れかえ:
相対波動関数で $r \rightarrow -r$

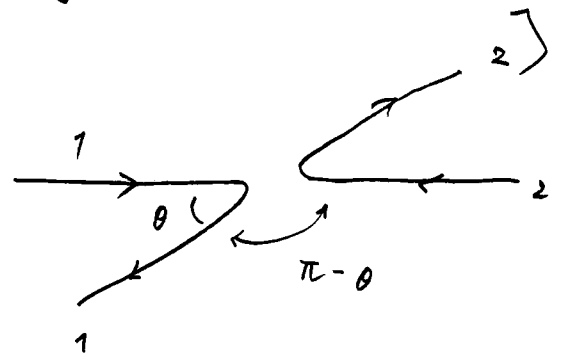
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_{\pm}(\theta)|^2$$

$$= \underbrace{|f(\theta)|^2 + |f(\pi-\theta)|^2}_{\text{古典項}} \pm \underbrace{2 \operatorname{Re}[f^*(\theta)f(\pi-\theta)]}_{\text{干渉項}}$$

重なり系



区別できない



同種粒子 \rightarrow 1 と 2 は必ずしも逆方向に散乱される

\downarrow

$$d\sigma_1(\theta) = d\sigma_2(\pi-\theta)$$

$$d\sigma_2(\theta) = d\sigma_1(\pi-\theta)$$

detector は粒子 1 と 2 を区別できない

\downarrow

$$\begin{aligned} d\sigma(\theta) &= d\sigma_1(\theta) + d\sigma_2(\theta) \\ &= d\sigma_1(\theta) + d\sigma_1(\pi-\theta) \end{aligned}$$

- スピン 0 粒子 (ボソン)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_+(0)|^2$$

- スピン $\frac{1}{2}$ 粒子 (フェルミオン)

全スピン $S=0$ $\therefore |S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)$

↪ 空間部分是对称

$$\frac{d\sigma_S}{d\Omega} = |f_+(0)|^2$$

$S=1$ $|S_z=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow)$

↪ 空間部分是对称

$$\frac{d\sigma_t}{d\Omega} = |f_-(0)|^2$$

スピン偏極の反の時

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{3}{4} \frac{d\sigma_t}{d\Omega} + \frac{1}{4} \frac{d\sigma_S}{d\Omega}$$

$$= |f(\theta)|^2 + |f(\pi-\theta)|^2 - \text{Re}[f^*(\theta)f(\pi-\theta)]$$

* ボソンの場合でも フェルミオンの場合でも
断面積は $\theta = \frac{\pi}{2}$ で対称