2014.2.3 /10:30-12:00

量子力学 III 期末試験

- 学籍番号、氏名を解答用紙に明記のこと。
- 成績不振者にはレポートを課します（該当者は後日掲示します）。
- 持ち込みは不可。

以下の問いに答えよ。解答は解答用紙に記入せよ。

問題 1

1) ハミルトニアンが $H = H_0 + V(t)$ で与えられる系を考える。$t = -\infty$ でこの系が H_0 の固有状態 ϕ_n にあるとき、時間に依存するシュレーディンガー方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(t) = (H_0 + V(t))\psi(t) \tag{1}$$

を $V(t)$ に対する 1 次の摂動論を用いて近似的に解き、時刻 t におけるこの系の波動関数が

$$\psi(t) = \sum_k C_k(t) e^{-iE_k t/\hbar}\phi_k, \tag{2}$$

$$C_k(t) \sim \delta_{k,n} + \frac{1}{i\hbar}\int_{-\infty}^{t} dt'\, e^{i(E_k - E_n)t'/\hbar}\langle\phi_k|V(t')|\phi_n\rangle. \tag{3}$$

と表わされることを示せ。ここで、ϕ_k は H_0 の固有状態であり、$H_0\phi_k = E_k\phi_k$ を満たす。

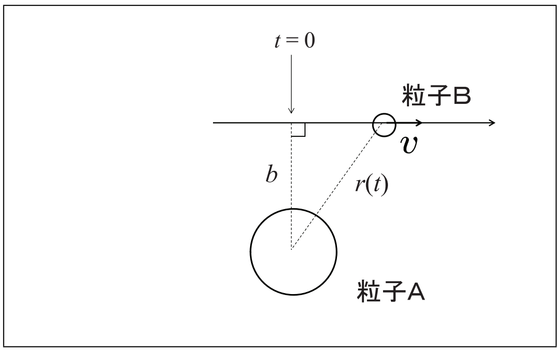

図 1: 粒子 A と粒子 B の散乱

2) 式 (3) の応用例として次のような問題を考える。図 1 のように、質量無限大で静止している粒子 A に向かって、粒子 B を左無限遠方から入射する。粒子 B は速度 v で右向きに等速直線運動をしているとし、粒子 A に最も近づいた時の時刻を $t = 0$、また、そのときの粒子 A と粒子 B の間の距離を b とする（粒子 B の運動は $t = -\infty$ から始まり $t = \infty$ で終わるとする)。式 (3) において、

$$\langle\phi_1|V(t)|\phi_0\rangle = Fe^{-g(r(t))^2} \qquad (-\infty \le t \le \infty) \tag{4}$$

で与えられるとする（g は定数)。ここで $r(t)$ は時刻 t における粒子 A と粒子 B の間の距離である ($r(t=0)=b$)。このとき、時刻 $t=-\infty$ において基底状態 (ϕ_0) にあった粒子 B が粒子 A との相互作用（式 (4)）の後に時刻 $t=\infty$ において状態 ϕ_1 にある確率を求めよ。ただし、$E_0=0$、$E_1=\epsilon$ とする。また、

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\alpha(x-i\beta)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \tag{5}$$

を用いてもよい。

問題２

ポテンシャル $V(r)$ による散乱問題を考える。部分波解析では、波動関数の漸近形 ($r\to\infty$) として以下の形を考える。

$$\psi(\boldsymbol{r}) \to \frac{i}{2k}\sum_l (2l+1)i^l \left[\frac{e^{-i(kr-l\pi/2)}}{r} - S_l \frac{e^{i(kr-l\pi/2)}}{r}\right] P_l(\cos\theta). \tag{6}$$

ここで、粒子の質量を m、エネルギーを E として、$k=\sqrt{2mE/\hbar^2}$ で与えられる。S_l は角運動量 l に対する S-行列である（S_l は一般に複素数)。

1) 式 (6) で外向きの波に対する波動関数

$$\psi_{\rm out}(\boldsymbol{r}) \sim -\frac{i}{2k}\sum_l (2l+1)i^l\, S_l \frac{e^{i(kr-l\pi/2)}}{r} P_l(\cos\theta) \tag{7}$$

に対して、フラックスの $\boldsymbol{r}$ 方向成分 $\boldsymbol{j}_{\rm out}\cdot\boldsymbol{e}_r$ を求めよ。ここで

$$\boldsymbol{j}_{\rm out} = \frac{\hbar}{2im}\left(\psi^*_{\rm out}(\boldsymbol{r})\nabla\psi_{\rm out} - c.c.\right) \tag{8}$$

であり、また、$\boldsymbol{e}_r$ は動径方向に対する単位ベクトルである。$c.c.$ は複素共役 (complex conjugate) を表す。

$$\frac{k}{r} \gg \frac{1}{r^2} \tag{9}$$

$$\nabla = \boldsymbol{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\boldsymbol{e}_\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\boldsymbol{e}_\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi} \tag{10}$$

$$\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{e}_\theta = \boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{e}_\varphi = 0 \tag{11}$$

を用いてもよい。

2) 前問で求めた $\boldsymbol{j}_{\rm out}\cdot\boldsymbol{e}_r$ を全角度にわたって積分することにより、原点から半径 r の球面を通る外向きフラックスの総量

$$j^{\rm (tot)}_{\rm out} = r^2\int d\hat{\boldsymbol{r}}\,(\boldsymbol{j}_{\rm out}\cdot\boldsymbol{e}_r) \tag{12}$$

を求めよ。ここで、$d\hat{\boldsymbol{r}}=\sin\theta d\theta d\varphi$ は角度積分である。

$$\int d\hat{\boldsymbol{r}}\, P_l(\cos\theta)P_{l'}(\cos\theta) = \frac{4\pi}{2l+1}\,\delta_{l,l'} \tag{13}$$

を用いてもよい。

* 内向きの波 $\psi_{\rm in}(\boldsymbol{r})$ に対しても同様にフラックスの総量を求めることができ、それはこの問題の答えで $S_l = 1$ とおいたものと同じになる。すなわち、$|S_l|$=1 の場合、全内向きと全外向きフラックスの大きさは一致し、フラックスは保存される。

問題３

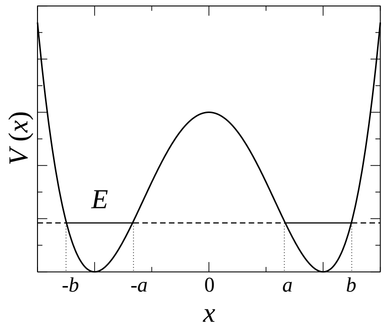

図 2: 二重井戸ポテンシャル

1) 図 2 のような $x = 0$ で対称な（$V(x) = V(-x)$）なめらかな二重井戸ポテンシャルの問題を考える。エネルギー E が $x = 0$ における障壁の高さ $V(x = 0)$ より小さい場合を考える。a および b を図に示すように $V(x = a) = V(x = b) = V(x = -a) = V(x = -b) = E$ を満たす点として、WKB 近似を用いると $x < -b$ の領域（領域 I）で波動関数は（規格化因子をのぞいて）

$$\psi_I(x) = \frac{1}{\sqrt{\gamma(x)}}\, e^{-\int_x^{-b}\gamma(x')dx'} \qquad (x < -b) \tag{14}$$

と与えられる。ここで、$\gamma(x) = \sqrt{2m(V(x) - E)/\hbar^2}$ である。この波動関数から、WKB 接続公式を用いて領域 $x > b$ （領域 V）における波動関数を作ると

$$\begin{aligned}\psi_V(x) &= (4\cos^2(K)\cdot e^{S} - \sin^2(K)\cdot e^{-S})\,\frac{1}{\sqrt{\gamma(x)}}\, e^{\int_b^x\gamma(x')dx'} \\ &\quad + \sin(K)\cos(K)(4e^{S} - e^{-S})\,\frac{1}{2\sqrt{\gamma(x)}}\, e^{-\int_b^x\gamma(x')dx'} \qquad (x > b)\end{aligned} \tag{15}$$

となる。ここで、

$$K = \int_{-b}^{-a} k(x)dx = \int_a^b k(x)dx, \qquad k(x) = \sqrt{2m(E - V(x))/\hbar^2} \tag{16}$$

$$S = \int_{-a}^{a}\gamma(x)dx, \tag{17}$$

である。式 (15) の表式から束縛状態に対する条件式を求め、S と K を用いて表せ。

2) 前問の束縛条件が満たされるとき、式 (14) の波動関数 $\psi_I(x)$ と式 (15) の波動関数 $\psi_V(x)$ は近似的に

$$\psi_V(x) \sim \pm\psi_I(-x) \tag{18}$$

を満たすことを示せ。ただし、$e^S \gg 1$、$\sin^2(K) \sim 1$ とする。

（**参考**）問題 3-1) で求めた束縛状態の条件式は近似的に解け、束縛状態のエネルギーは近似的に

$$E_{\pm} = E_0 \pm \frac{\hbar\omega}{2\pi} e^{-S_0} \tag{19}$$

で与えられる。ここで、E_0 は $\cot(K) = 0$ を満たすエネルギーであり、S_0 は (17) 式で $E = E_0$ と置いたものである。また、$\omega = 2\pi/T$ であり、T は

$$T = 2m \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{2m(E_0 - V(x))}} \tag{20}$$

である。式 (19) は、二重井戸ポテンシャルのエネルギー固有状態としてエネルギーがほとんど縮退している 2 つの状態が現れ、そのエネルギー差はポテンシャル障壁のトンネル振幅 e^{-S} に比例していることを示すものである。