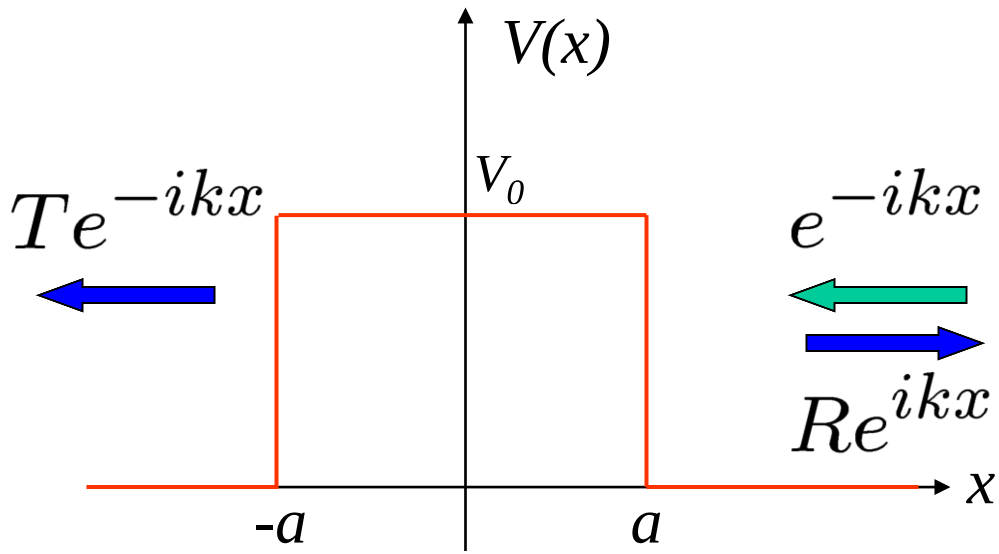
量子トンネル融合反応で視る原子核の形

東北大学　原子核理論研究室
萩野浩一

1. *はじめに：量子トンネル現象*
2. *核融合反応とトンネル効果*
3. *障壁分布法*
4. *量子反射と重イオン準弾性散乱*

参考文献
日本物理学会誌57（2002）588

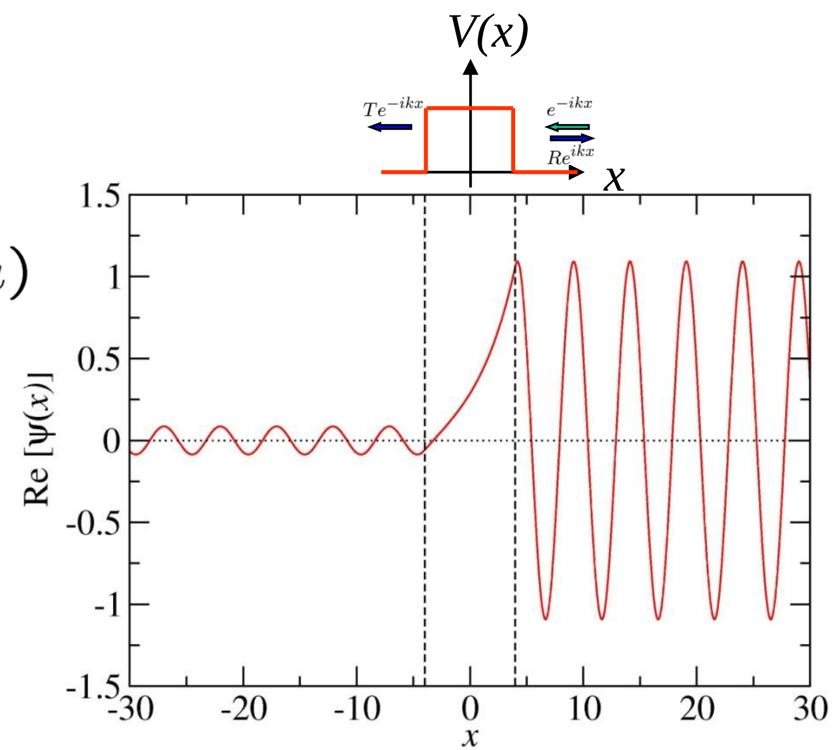
はじめに：量子トンネル現象



$$
\begin{aligned}
\psi(x) &= T\,e^{-ikx} & (x \le -a) \\
&= A\,e^{-\kappa x} + B\,e^{\kappa x} & (-a < x < a) \\
&= e^{-ikx} + R\,e^{ikx} & (x \ge a)
\end{aligned}
$$

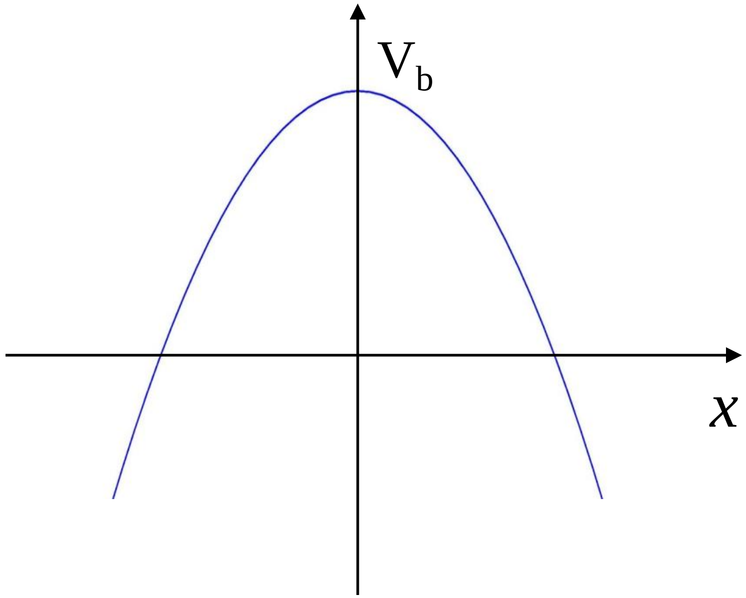
$$
\begin{aligned}
k &= \sqrt{2mE/\hbar^2} \\
\kappa &= \sqrt{2m(V_0 - E)/\hbar^2}
\end{aligned}
$$

トンネル確率： $P(E) = |T|^2$

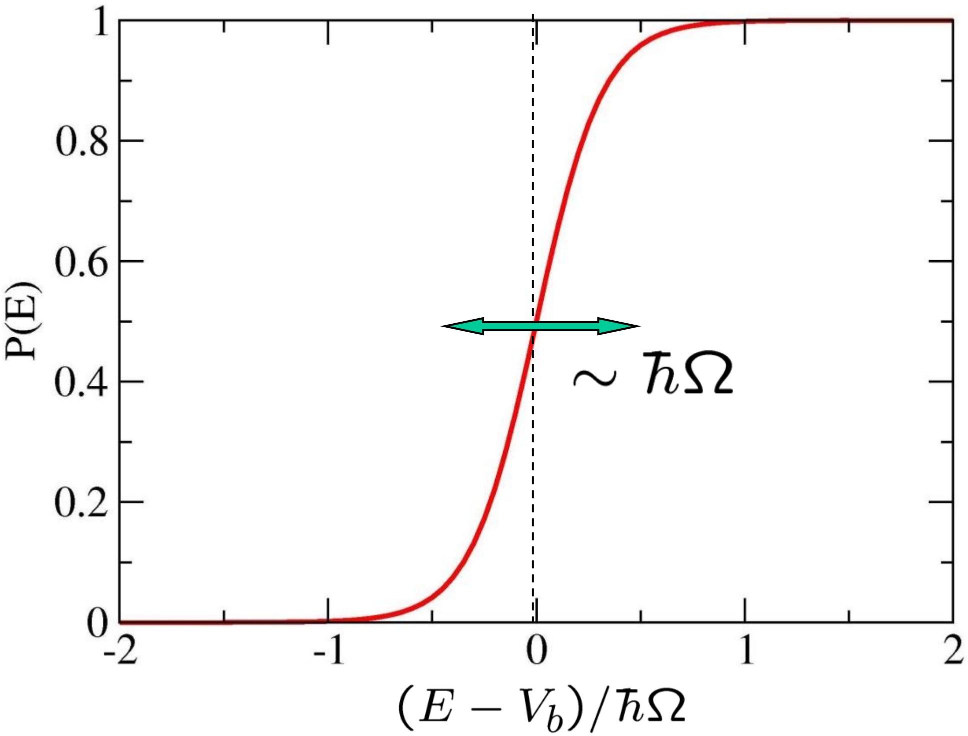


放物線障壁だと........

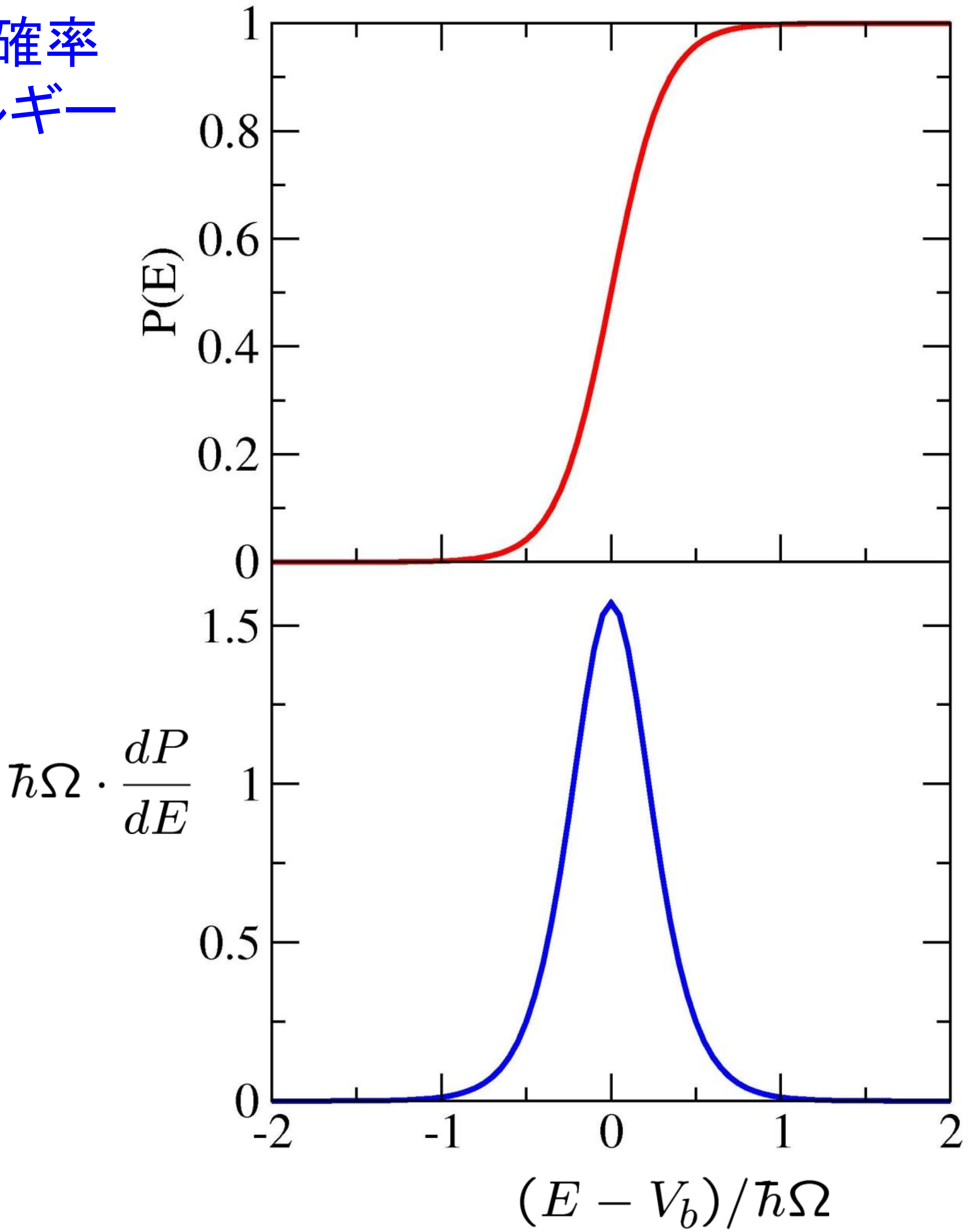
$$V(x) = V_b - \frac{1}{2}m\Omega^2 x^2$$



$$\boxed{P(E) = \frac{1}{1 + \exp\left[\frac{2\pi}{\hbar\Omega}(V_b - E)\right]}}$$



トンネル確率
のエネルギー
微分



(note) 古典極限

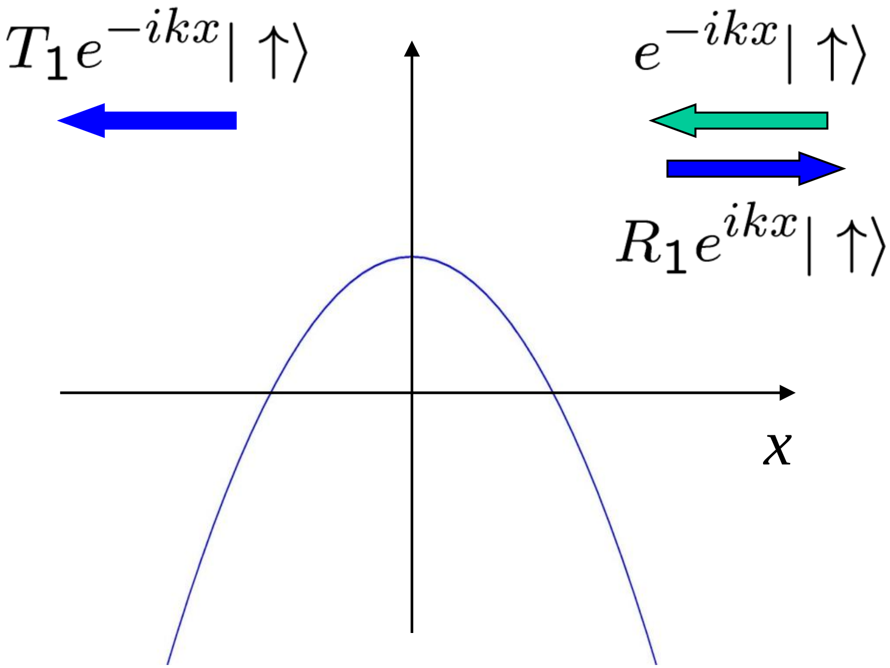
$$
\begin{aligned}
P(E) &= \theta(E - V_b) \\
dP/dE &= \delta(E - V_b)
\end{aligned}
$$

スピンの自由度を考えてみる

ハミルトニアン（例）: $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V_0(x) + \hat{\sigma}_z \cdot V_s(x)$

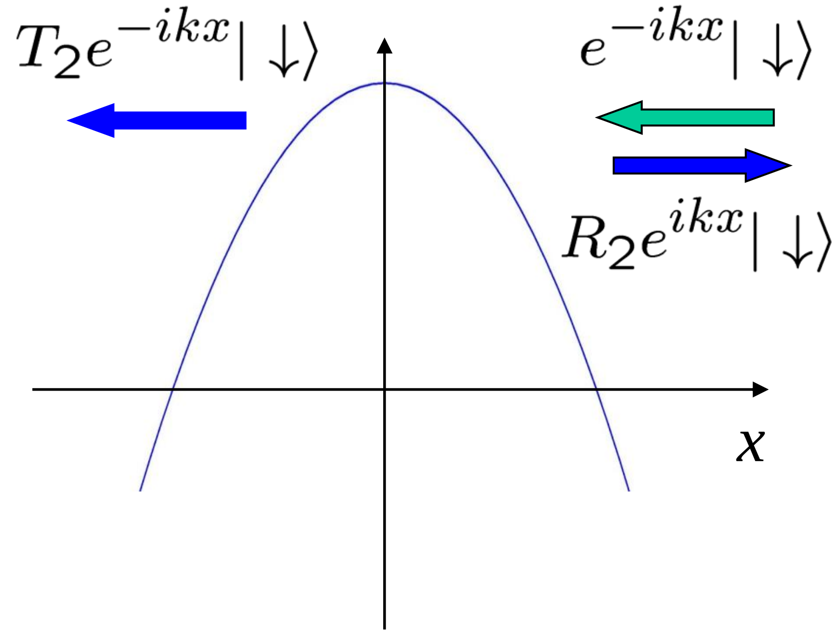
$$\hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Spin-up の場合



$$V_1(x) = V_0(x) + V_s(x)$$

Spin-down の場合



$$V_2(x) = V_0(x) - V_s(x)$$

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V_0(x) + \hat{\sigma}_z \cdot V_1(x)$$

波動関数（一般形）: $\Psi(x) = \psi_1(x)\,|\uparrow\rangle + \psi_2(x)\,|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix}$

$x \to \pm\infty$ での漸近形:

$$\Psi(x) \to \begin{pmatrix} C_1(e^{-ikx} + R_1 e^{ikx}) \\ C_2(e^{-ikx} + R_2 e^{ikx}) \end{pmatrix} \quad (x \to \infty)$$

$$\to \begin{pmatrix} C_1 T_1 e^{-ikx} \\ C_2 T_2 e^{-ikx} \end{pmatrix} \quad (x \to -\infty)$$

$$|C_1|^2 + |C_2|^2 = 1$$

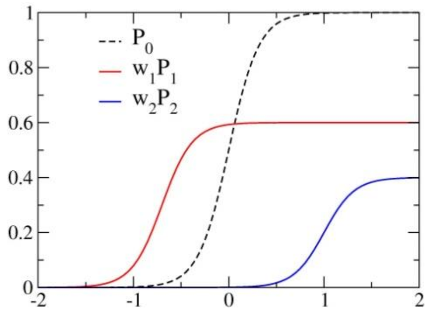
（C_1とC_2の値は粒子のスピン状態により定まる）

トンネル確率＝$\dfrac{(\ x = -\infty \text{ でのフラックス})}{(x = \infty \text{ での入射内向きフラックス})}$

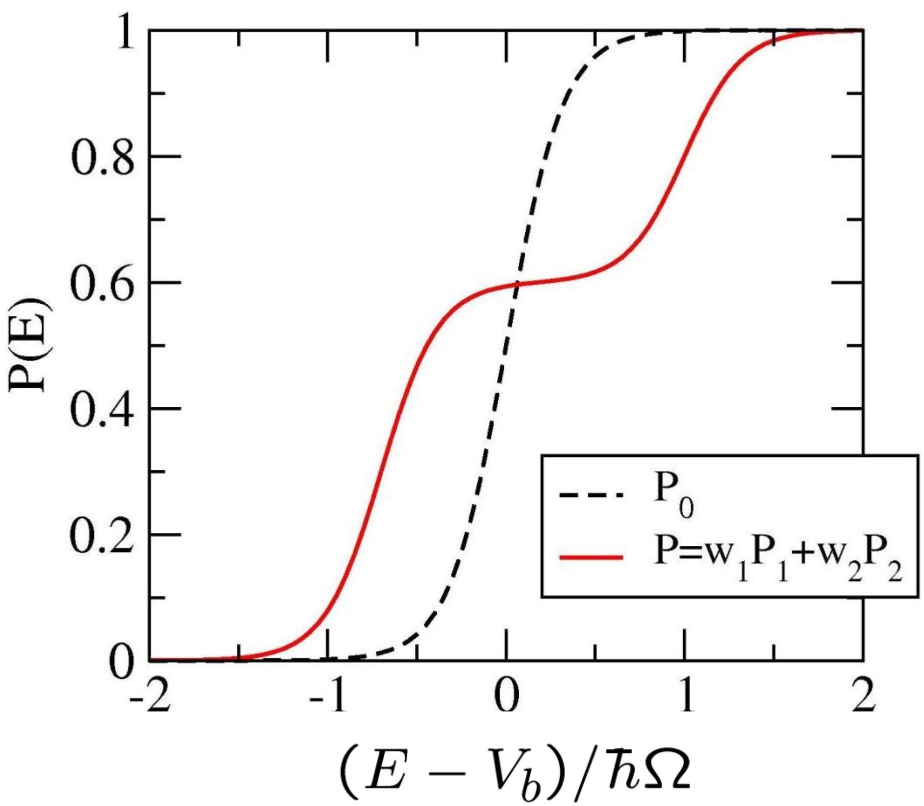
$$\boxed{\begin{aligned} P(E) &= \frac{|C_1 T_1|^2 + |C_2 T_2|^2}{|C_1|^2 + |C_2|^2} \\ &= |C_1|^2 P_1(E) + |C_2|^2 P_2(E) \equiv w_1 P_1(E) + w_2 P_2(E) \end{aligned}}$$

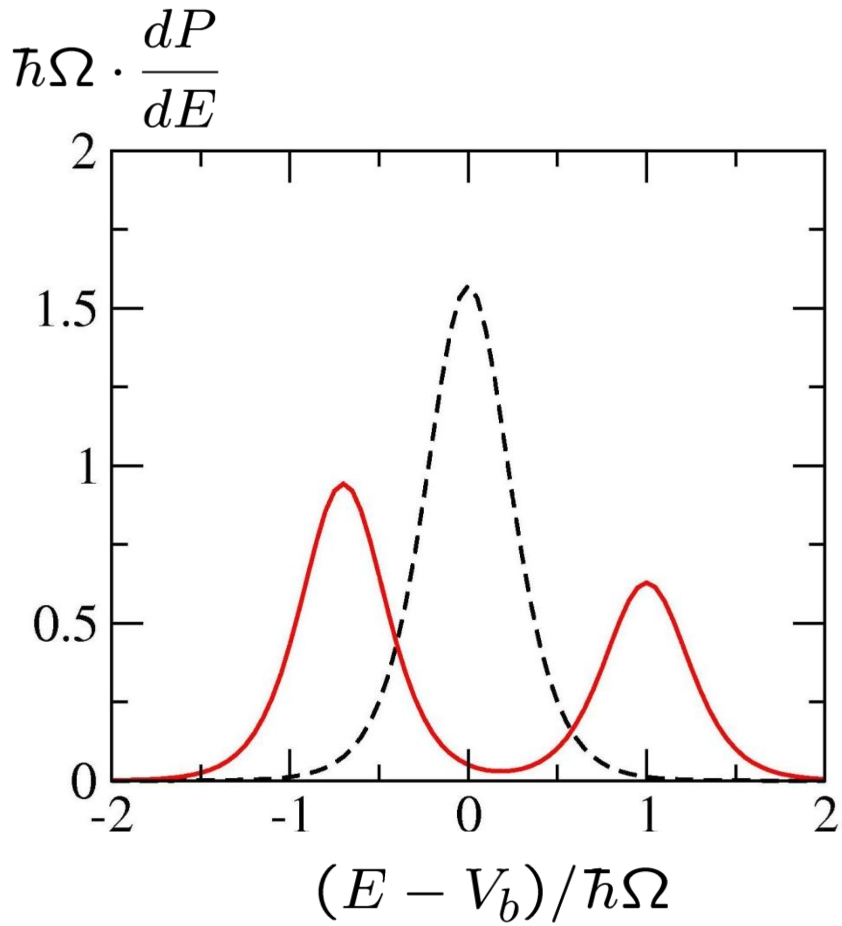
$$P(E) = w_1 P_1(E) + w_2 P_2(E)$$

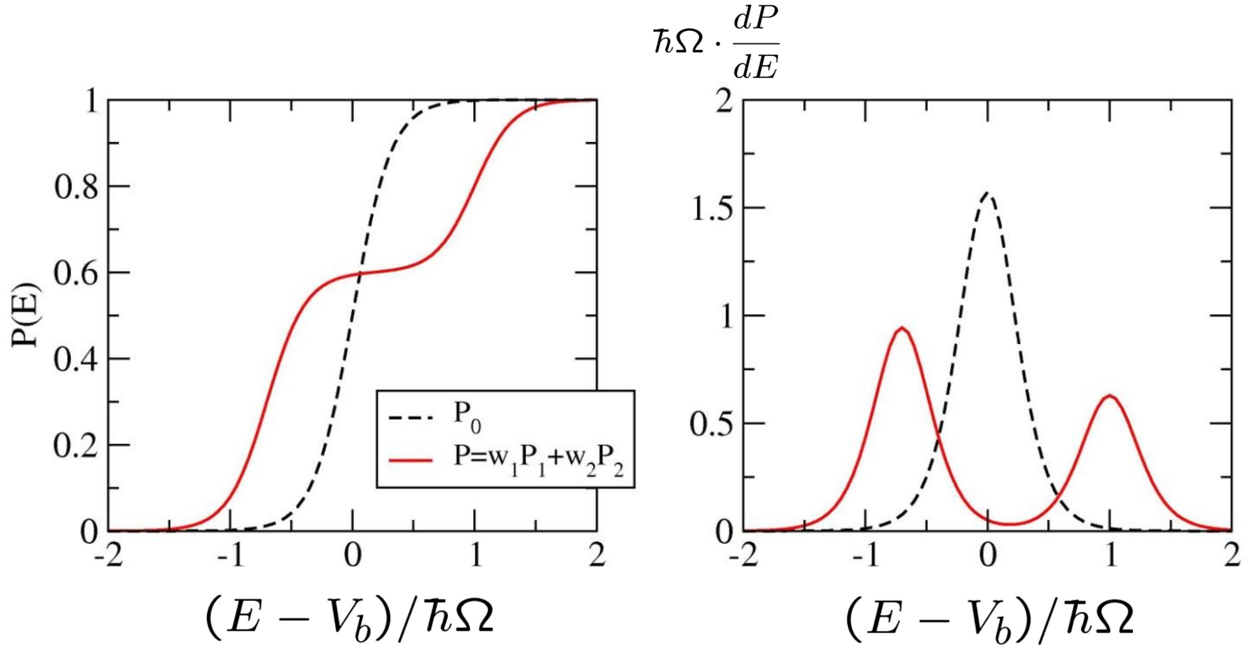
→ トンネル確率は2つの障壁のトンネル確率の加重平均になる



$$\begin{cases} V_1(x) = V_0(x) + V_s(x) & \Longleftarrow \quad |\uparrow\rangle \\ V_2(x) = V_0(x) - V_s(x) & \Longleftarrow \quad |\downarrow\rangle \end{cases}$$







- トンネル確率は $E < V_b$ で増大、$E > V_b$ で減少
- dP/dE は一山が二山に分かれる → 「障壁が分布する」
- dP/dE のピークの位置は各障壁の高さに対応
- ピークの値は重み因子に比例する

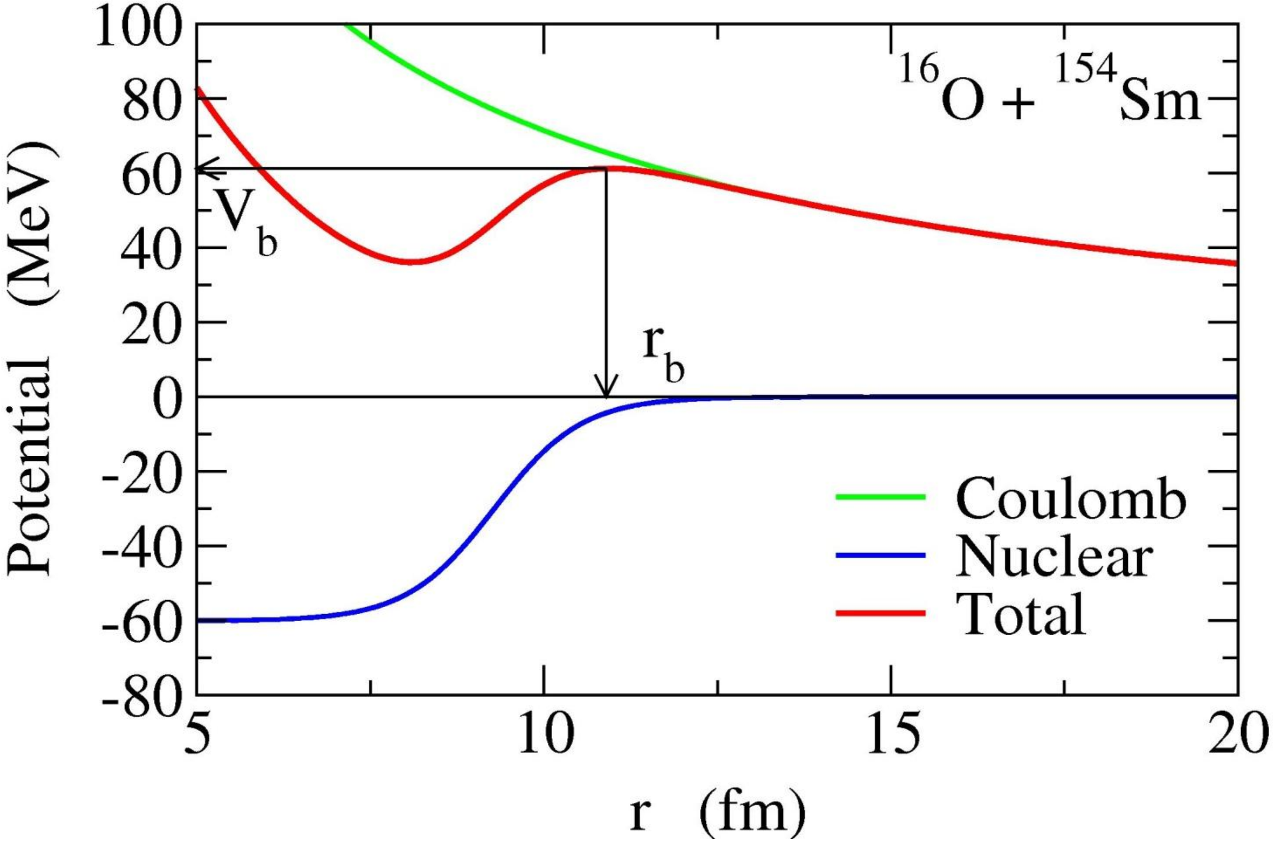
$$
\begin{aligned}
P(E) &= w_1 P_1(E) + w_2 P_2(E) \\
\frac{dP}{dE} &= w_1 \frac{dP_1}{dE} + w_2 \frac{dP_2}{dE}
\end{aligned}
$$

核融合反応とトンネル効果

核融合反応：2つの原子核が融合して1つの複合核を形成する反応

（例） ${}^{16}_{8}O_8 + {}^{154}_{62}Sm_{92} \rightarrow {}^{170}_{70}Yb_{100}$

原子核間ポテンシャル



2つの力：

1. クーロン力

長距離斥力

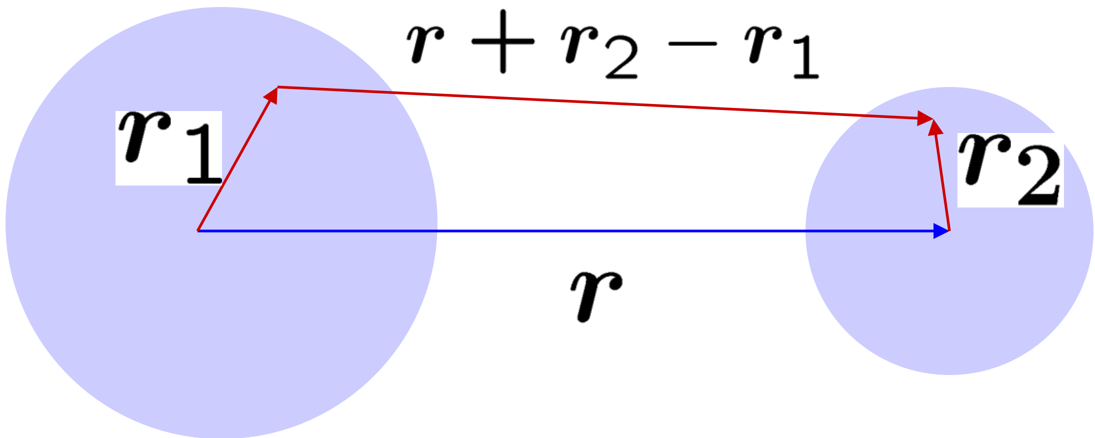
2. 核力

短距離引力

両者の打ち消しあいによりポテンシャル障壁が形成

（クーロン障壁）

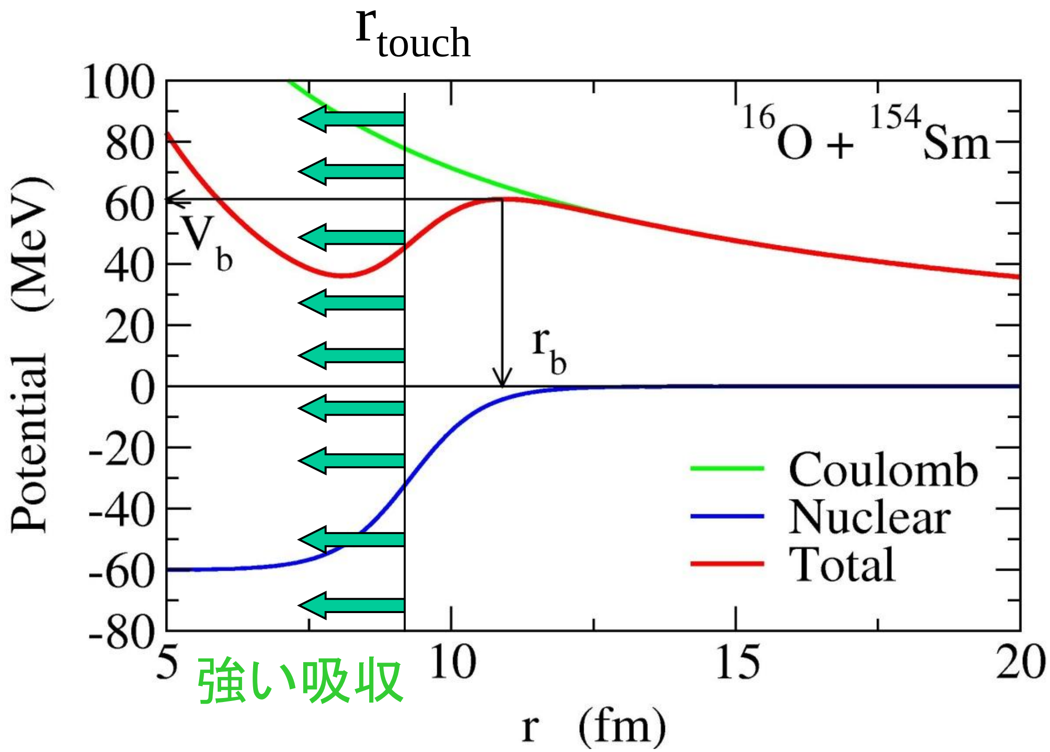
（参考）二重畳み込みポテンシャル (Double Folding Potential)

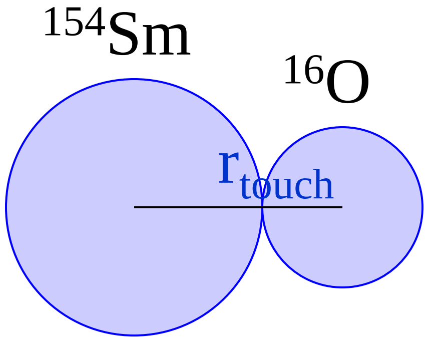


$$
\begin{aligned}
V(\boldsymbol{r}) &= \int d\boldsymbol{r}_1 d\boldsymbol{r}_2\, \rho_1(\boldsymbol{r}_1)\rho_2(\boldsymbol{r}_2) \\
&\quad \times v(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)
\end{aligned}
$$

核融合反応：2つの原子核が融合して1つの複合核を形成する反応

（例）$^{16}_{8}O_8 + ^{154}_{62}Sm_{92} \rightarrow ^{170}_{70}Yb_{100}$





一度接触すると自動的に複合核を形成（強吸収の仮定）

核融合の確率
＝r_{touch} に到達する確率

障壁の透過確率

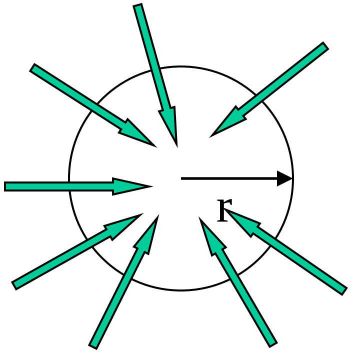
$$\sigma_{fus}(E) = \frac{\pi}{k^2}\sum_l (2l+1)P_l(E)$$

低エネルギーでは核融合反応はトンネル効果で起きる！

(note) 吸収断面積

$$\psi(\boldsymbol{r}) \to \frac{i}{2k}\sum_l (2l+1)\, i^l \,\frac{1}{r}\left[e^{-i(kr-l\pi/2)} - S_l e^{i(kr-l\pi/2)}\right] P_l(\cos\theta) = e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r}$$

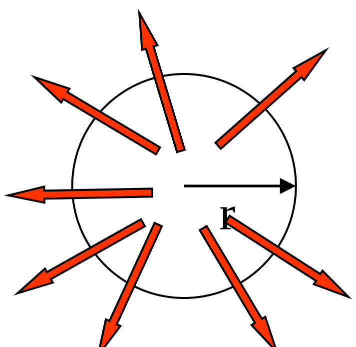
全内向フラックス:



$$\psi_{\text{in}}(\boldsymbol{r}) = \frac{i}{2k}\sum_l (2l+1)\, i^l \,\frac{1}{r}\, e^{-i(kr-l\pi/2)} P_l(\cos\theta)$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{j}_{\text{in}} &= \frac{\hbar}{2im}\left(\psi^*_{\text{in}}\nabla\psi_{\text{in}} - \psi_{\text{in}}\nabla\psi^*_{\text{in}}\right) \\
&= \frac{k\hbar}{m}\frac{1}{r^2}\left|\frac{i}{2k}\sum_l (2l+1)(-)^l P_l(\cos(\theta))\right|^2 \boldsymbol{e}_r \\
j^{\text{net}}_{\text{in}} &= \int r^2 d\Omega\, \boldsymbol{j}_{\text{in}}\cdot\boldsymbol{e}_r = \frac{k\hbar}{m}\cdot\frac{\pi}{k^2}\sum_l (2l+1)
\end{aligned}$$

全外向フラックス:



$$\psi_{\text{out}}(\boldsymbol{r}) = \frac{i}{2k}\sum_l (2l+1)\, i^l \,\frac{1}{r}\, S_l\, e^{i(kr-l\pi/2)} P_l(\cos\theta)$$

$$j^{\text{net}}_{\text{out}} = \frac{k\hbar}{m}\cdot\frac{\pi}{k^2}\sum_l (2l+1)|S_l|^2$$

$$\boxed{\sigma_{\text{abs}} = \frac{j^{\text{net}}_{\text{in}} - j^{\text{net}}_{\text{out}}}{j_{\text{incident}}} = \frac{\pi}{k^2}\sum_l (2l+1)(1-|S_l|^2)}$$

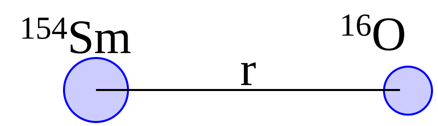
$$1 - |S_l|^2 = P_l$$

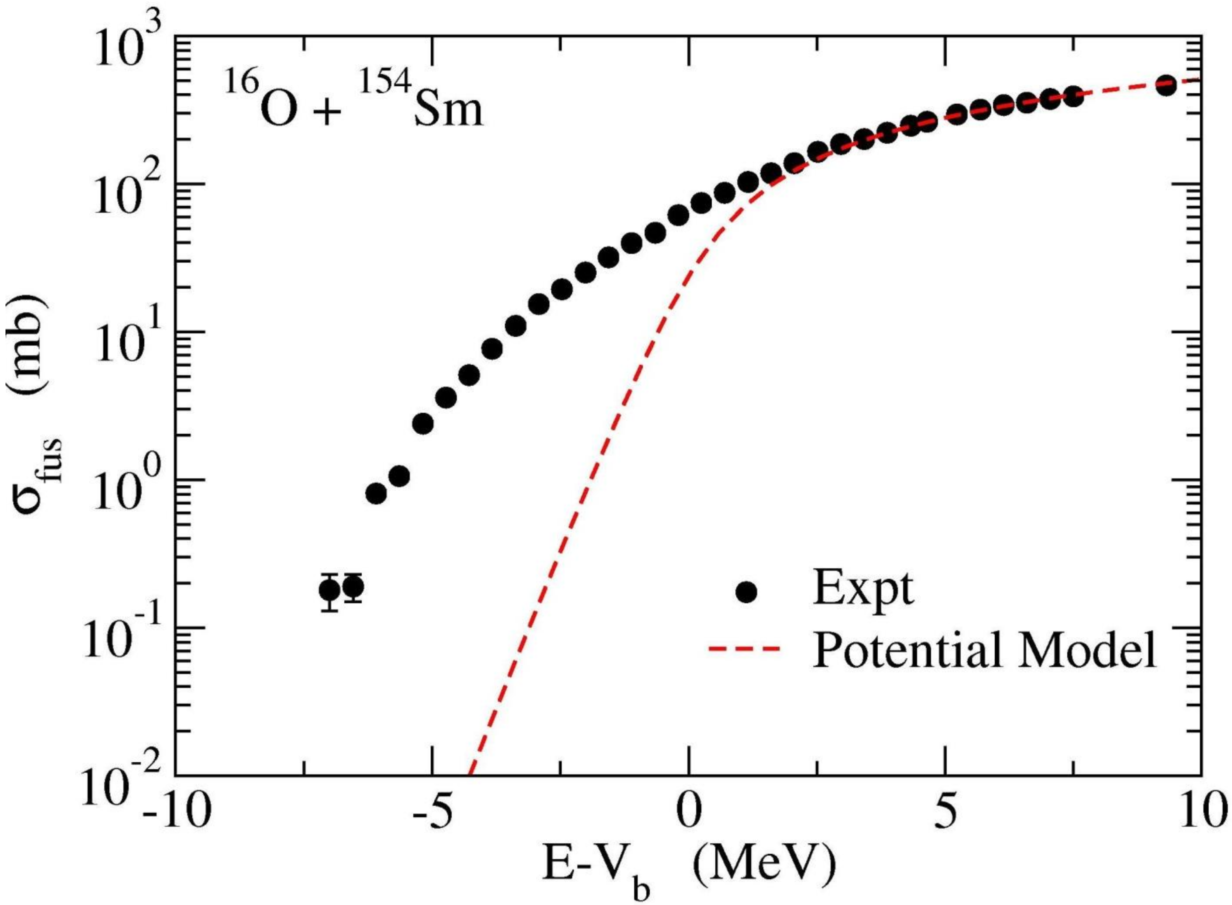
ポテンシャル模型と実験データの比較

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2}+V_0(r)+\frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2}-E\right]u_l(r)=0$$

$$\frac{1}{\mu}=\frac{1}{154\,m_N}+\frac{1}{16\,m_N}$$

$$\longrightarrow \quad \sigma_{\rm fus}(E)=\frac{\pi}{k^2}\sum_l(2l+1)P_l(E)$$





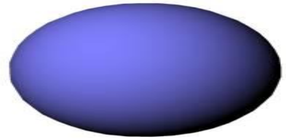
ポテンシャル模型:

$E > V_b$ では大体データを再現

$E < V_b$ では核融合断面積を過小に評価

何が原因？

^{154}Sm の変形の効果



^{154}Sm の励起スペクトル

(MeV)	
0.903	8^+
0.544	6^+
0.267	4^+
0.082	2^+
0	0^+

^{154}Sm

$$E_I \sim \frac{I(I+1)\hbar^2}{2\mathcal{J}}$$

Cf. 剛体の回転エネルギー（古典力学）

$$E = \frac{1}{2}\mathcal{J}\omega^2 = \frac{I^2}{2\mathcal{J}}$$

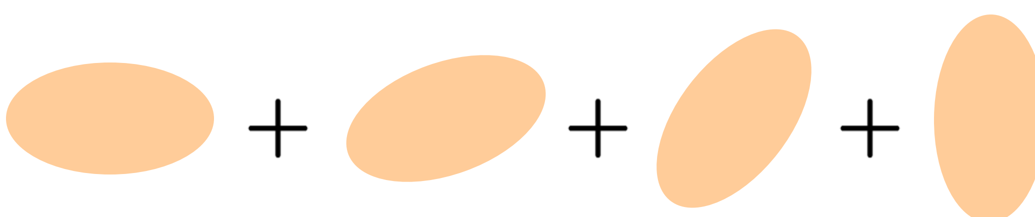
$$(I = \mathcal{J}\omega, \;\; \omega = \dot{\theta})$$

^{154}Sm は変形している

(note) 0^+ 状態とは（量子力学）？

0^+: 空間の異方性がない

→ 色々な向きが等確率で混ざっている



変形核の核融合反応断面積

エネルギー・スケールの比較

$$V(r) \sim V_b - \frac{1}{2}\mu\Omega^2 r^2$$

トンネル運動: $E_{\mathrm{tun}} \sim \hbar\Omega \sim$ 3.5 MeV (クーロン障壁の曲率)

回転運動: $E_{\mathrm{rot}} \sim E_{2+} \sim 0.08\mathrm{MeV}$

$$E_{\mathrm{tun}} \gg E_{\mathrm{rot}} = I(I+1)\hbar^2/2\mathcal{J} \to 0$$

$$\mathcal{J} \to \infty$$

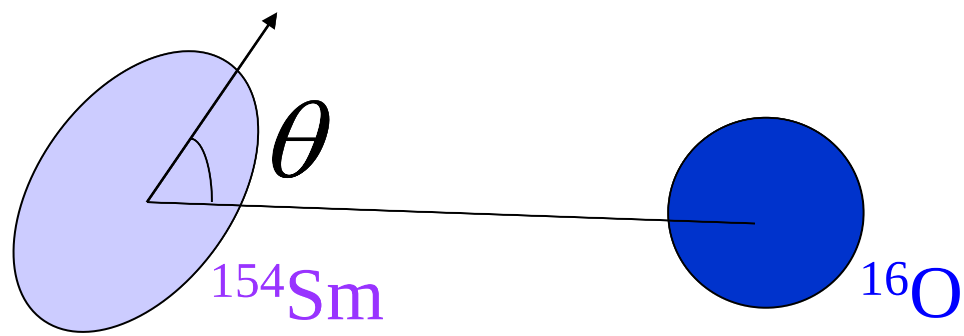
^{154}Sm の方向は反応中にほとんど変化しない

(note)

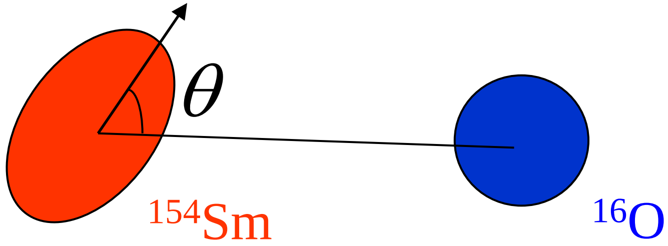
反応の初期は基底状態

(0^+ 状態)

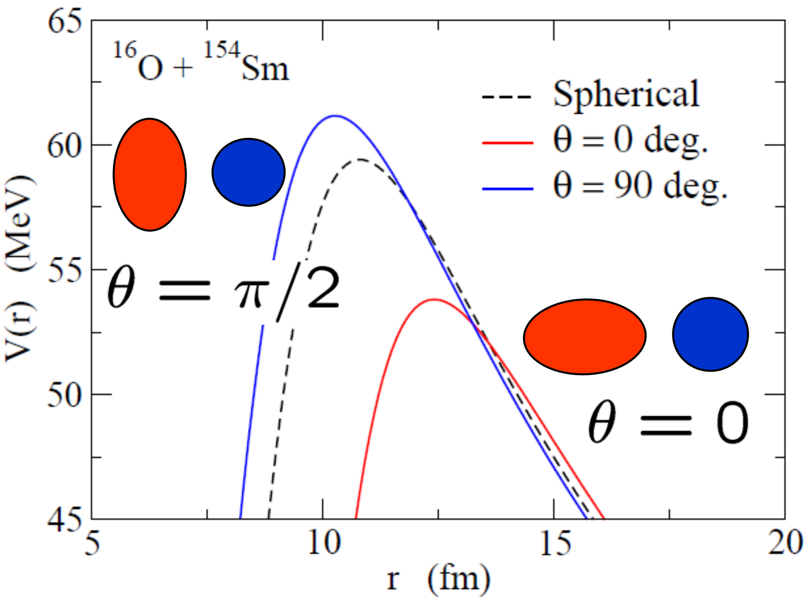
あらゆる方向が等確率で混ざっている

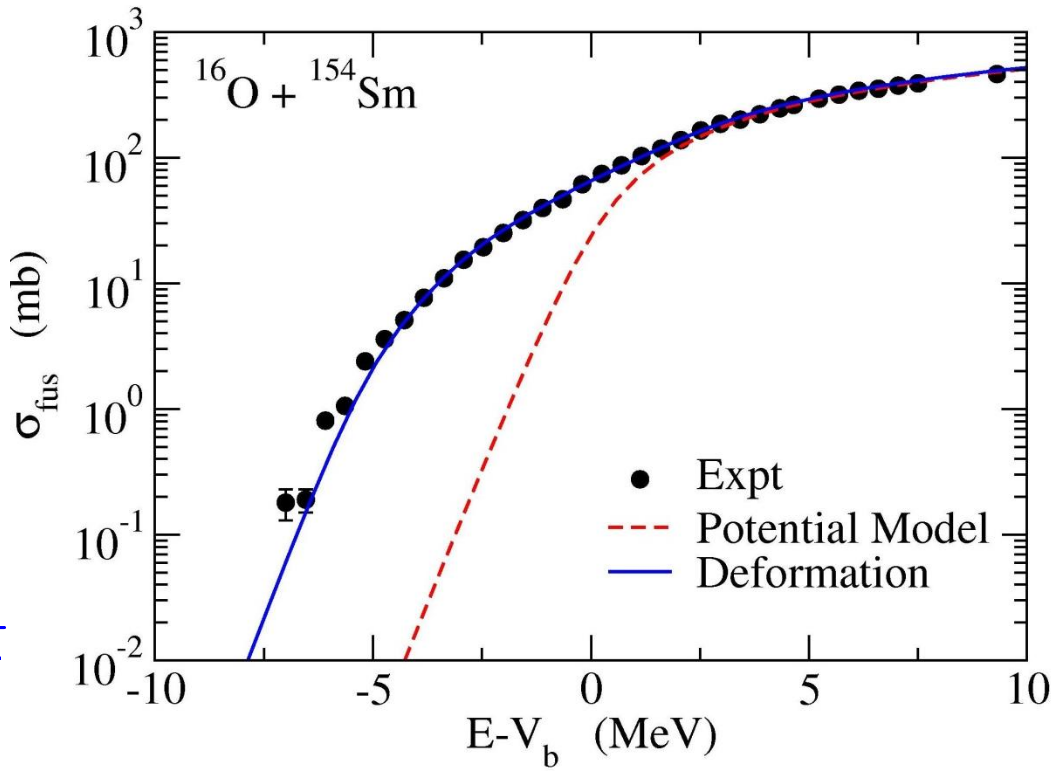


$$\sigma_{\mathrm{fus}}(E) = \int_0^1 d(\cos\theta)\,\sigma_{\mathrm{fus}}(E;\theta)$$



$$\sigma_{\text{fus}}(E) = \int_0^1 d(\cos\theta)\sigma_{\text{fus}}(E;\theta)$$





θ = 0では引力の核力が比較的遠方から働くため障壁が下がる。

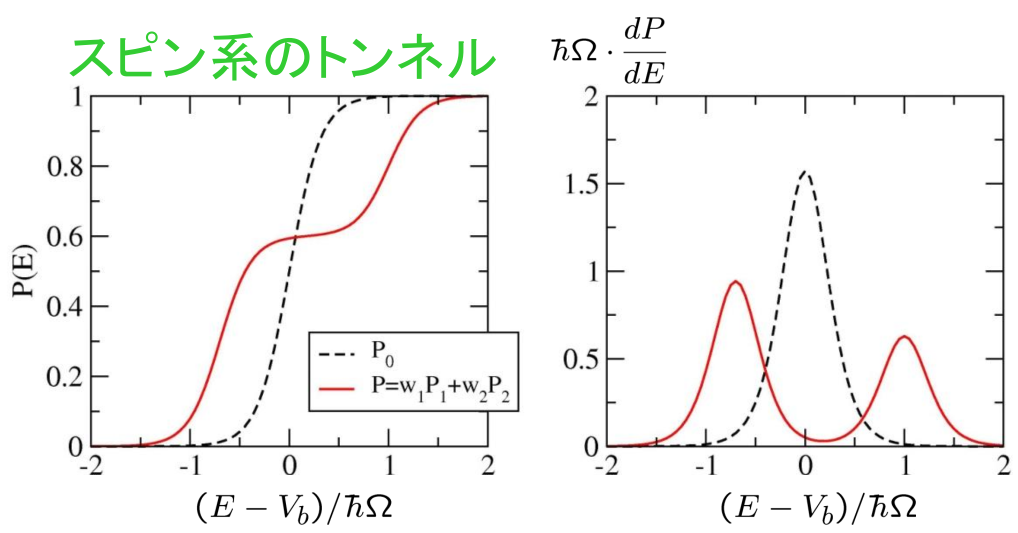
θ = π/2 はその逆。近づかないと引力が働かないため障壁は上がる。

障壁分布法

- 低エネルギー核融合反応はトンネル効果で起きる
- 変形核の融合反応では、変形核の向きに応じて多数の障壁が存在
- 核融合反応断面積は多数の障壁の平均

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{fus}}(E) &= \int_0^1 d(\cos\theta)\sigma_{\text{fus}}(E;\theta) \\ &= \frac{\pi}{k^2}\sum_l (2l+1)\left[\int_0^1 d(\cos\theta)P_l(E;\theta)\right]\end{aligned}$$

スピン系のトンネル



→ 核融合反応で同様のことはできないか？

1つの考慮すべき点：実験で測られるのは核融合断面積であって透過確率ではない。

$$\Rightarrow\quad P_{l=0}(E) \simeq \frac{1}{\pi R_b^2} \cdot \frac{d(E\sigma_{\rm fus})}{dE}$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{D_{\rm fus}(E) \equiv \frac{d^2(E\sigma_{\rm fus})}{dE^2} \simeq \pi R_b^2 \frac{dP_{l=0}}{dE}}$$

（核融合障壁分布）

N. Rowley, G.R. Satchler, P.H. Stelson, PLB254('91)25

(note) 古典的な核融合反応断面積

$$\sigma_{\rm fus}^{cl}(E) = \pi R_b^2 \left(1 - \frac{V_b}{E}\right) \theta(E - V_b)$$

$$\frac{d}{dE}[E\sigma_{\rm fus}^{cl}(E)] = \pi R_b^2\, \theta(E - V_b) = \pi R_b^2\, P_{cl}(E)$$

$$\left\{\begin{array}{l} \sigma^{cl} = 2\pi \int_0^{b_{crit}} b\, db = \pi\, b_{crit}^2 \\ V_b + \dfrac{(kb_{crit})^2\hbar^2}{2\mu R_b^2} = E \end{array}\right.$$

（参考）Wong の公式　　C.Y. Wong, Phys. Rev. Lett. 31 ('73)766

$$\sigma_{\text{fus}}(E) = \frac{\pi}{k^2}\sum_l (2l+1)P_l(E)$$

i) クーロン障壁を放物線で近似　$V(r) \sim V_b - \frac{1}{2}\mu\Omega^2 r^2$

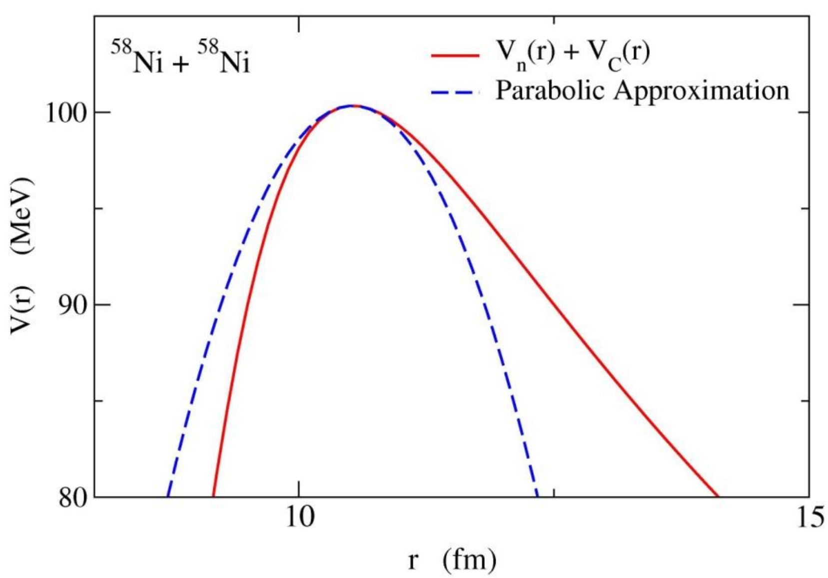
$$\Rightarrow P_0(E) = 1\Big/\left(1+\exp\left[\frac{2\pi}{\hbar\Omega}(V_b - E)\right]\right)$$

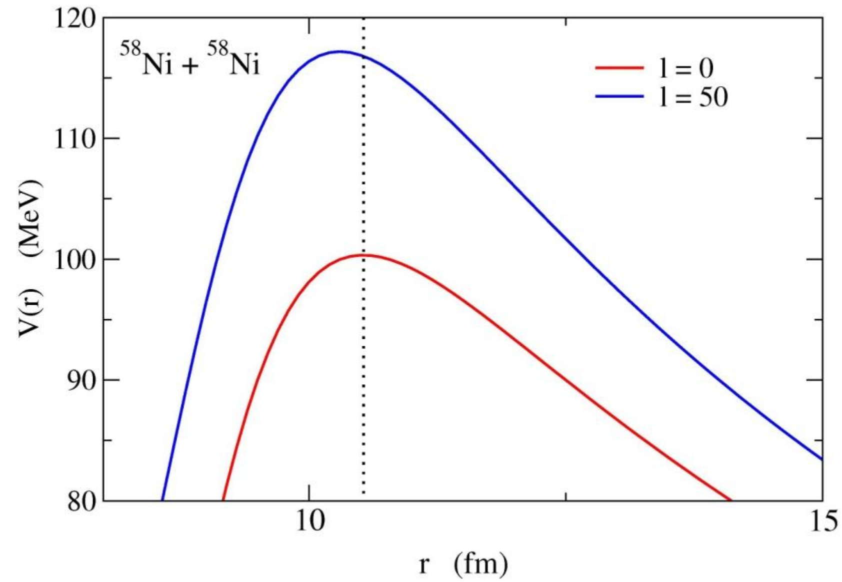
ii) 角運動量 *l* の透過確率を角運動量 *l=0* の透過確率を用いて近似

$$P_l(E) \sim P_0\left(E - \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu R_b^2}\right)$$

（曲率及び障壁の位置が
角運動量 *l* に依らないと仮定）

iii) *l* の和を積分に置き換える





（参考）Wong の公式（つづき）

$$\sigma_{\rm fus}(E) = \frac{\pi}{k^2}\sum_l (2l+1)P_l(E) \sim \frac{\pi}{k^2}\int_0^\infty dl\,(2l+1)P_l(E)$$

$$\sim \frac{\pi}{k^2}\int_0^\infty \frac{(2l+1)dl}{1+\exp\left[\frac{2\pi}{\hbar\Omega}(V_b + l(l+1)\hbar^2/2\mu R_b^2 - E)\right]}$$

$$= \frac{\pi}{k^2}\int_0^\infty \frac{dt}{1+\exp\left[\frac{2\pi}{\hbar\Omega}(V_b + t\hbar^2/2\mu R_b^2 - E)\right]}$$

$$[t = l(l+1)]$$

$$\boxed{\sigma_{\rm fus}(E) = \frac{\hbar\Omega}{2E}R_b^2\,\log\left[1+\exp\left(\frac{2\pi}{\hbar\Omega}(E-V_b)\right)\right]}$$

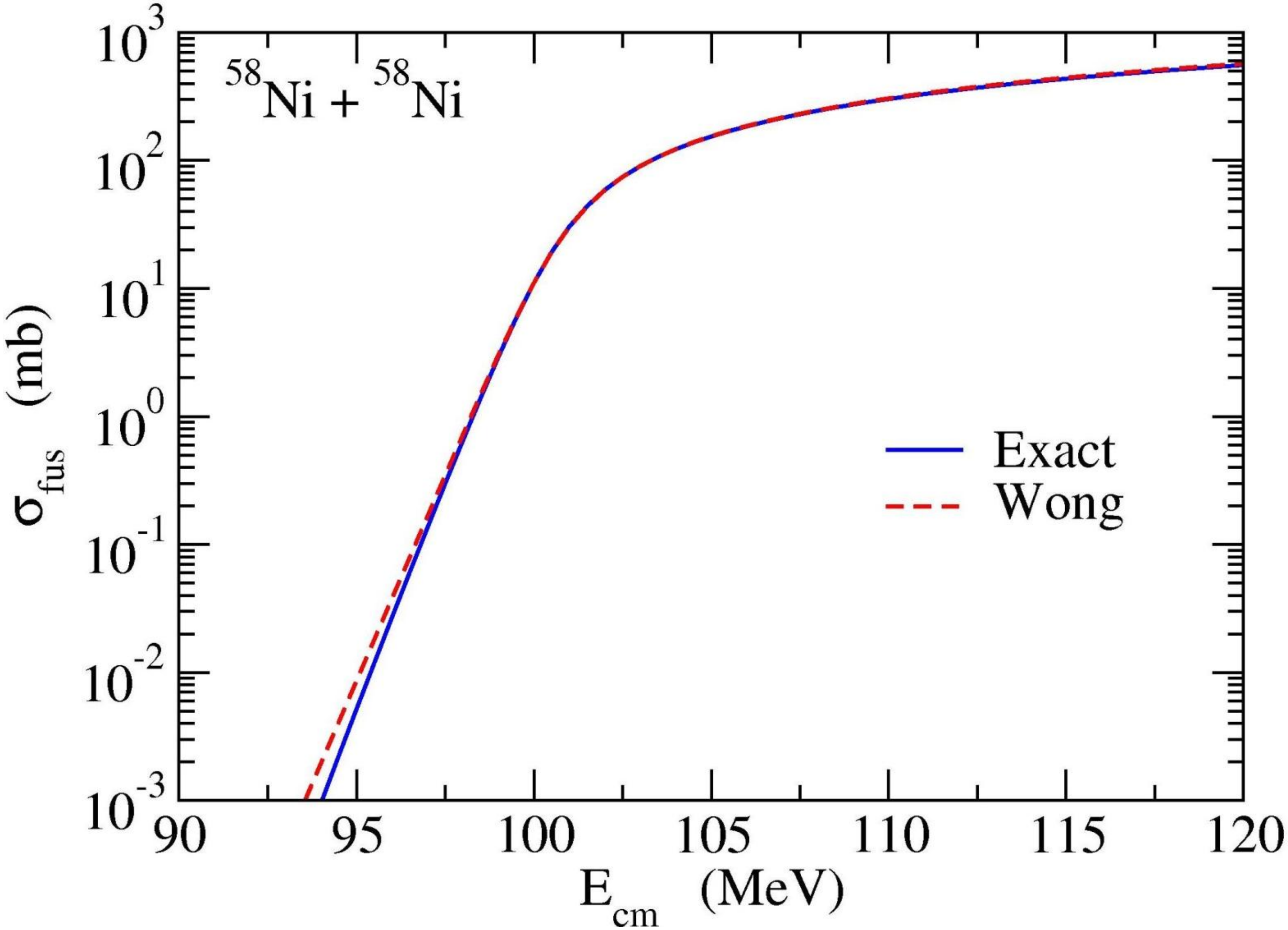
(note) $E \gg V_b$ の時 $1 \ll \exp\left(\frac{2\pi}{\hbar\Omega}(E-V_b)\right)$

$$\Longrightarrow \sigma_{\rm fus}(E) \sim \pi R_b^2\left(1-\frac{V_b}{E}\right) = \sigma_{\rm fus}^{cl}(E)$$

(note)

$$\boxed{\frac{d(E\sigma_{\rm fus})}{dE} = \frac{\pi R_b^2}{1+\exp\left[\frac{2\pi}{\hbar\Omega}(V_b-E)\right]} = \pi R_b^2 \cdot P_{l=0}(E)}$$

（参考）Wong の公式（つづき2）

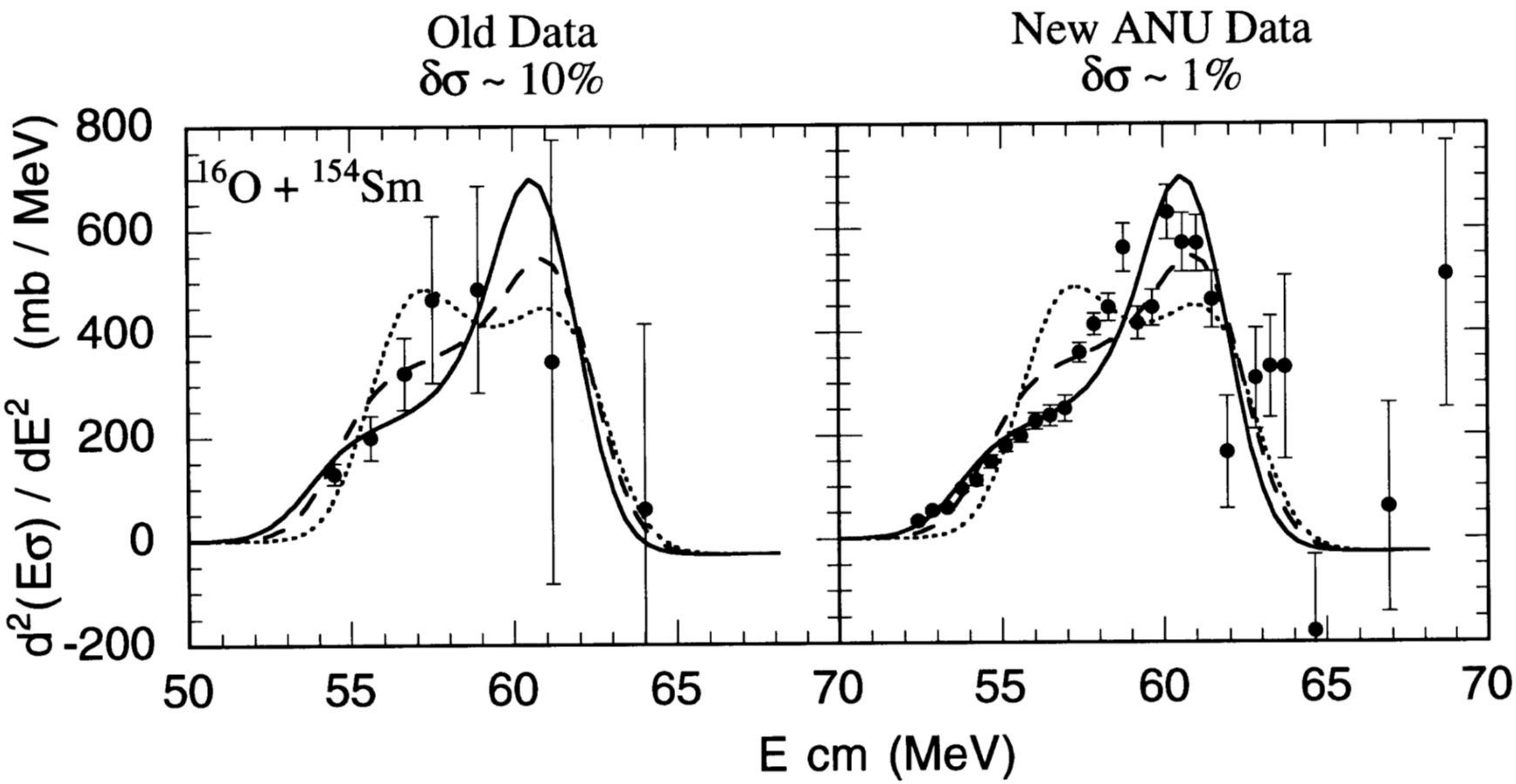


障壁分布測定

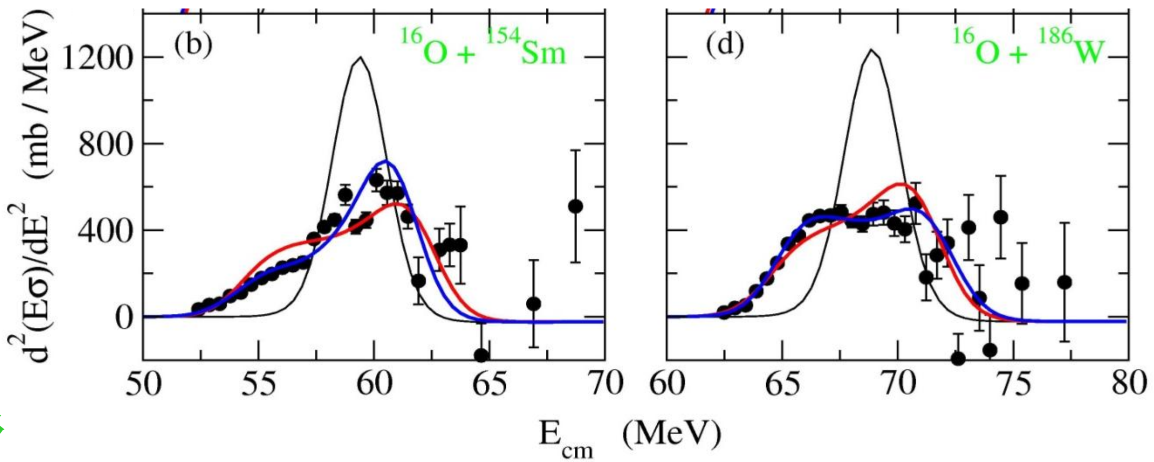
核融合障壁分布　$D_{\mathrm{fus}}(E) = \dfrac{d^2(E\sigma)}{dE^2}$

2階微分をとるために非常に高精度の実験データが必要

（90年代初頭）



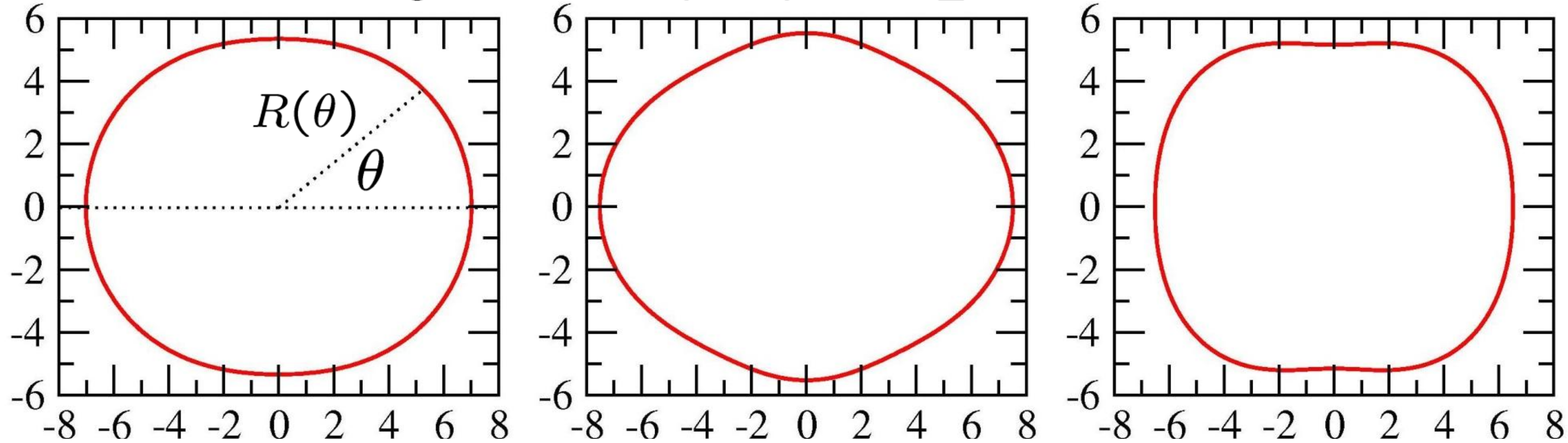
障壁分布を通じて原子核の形を視る



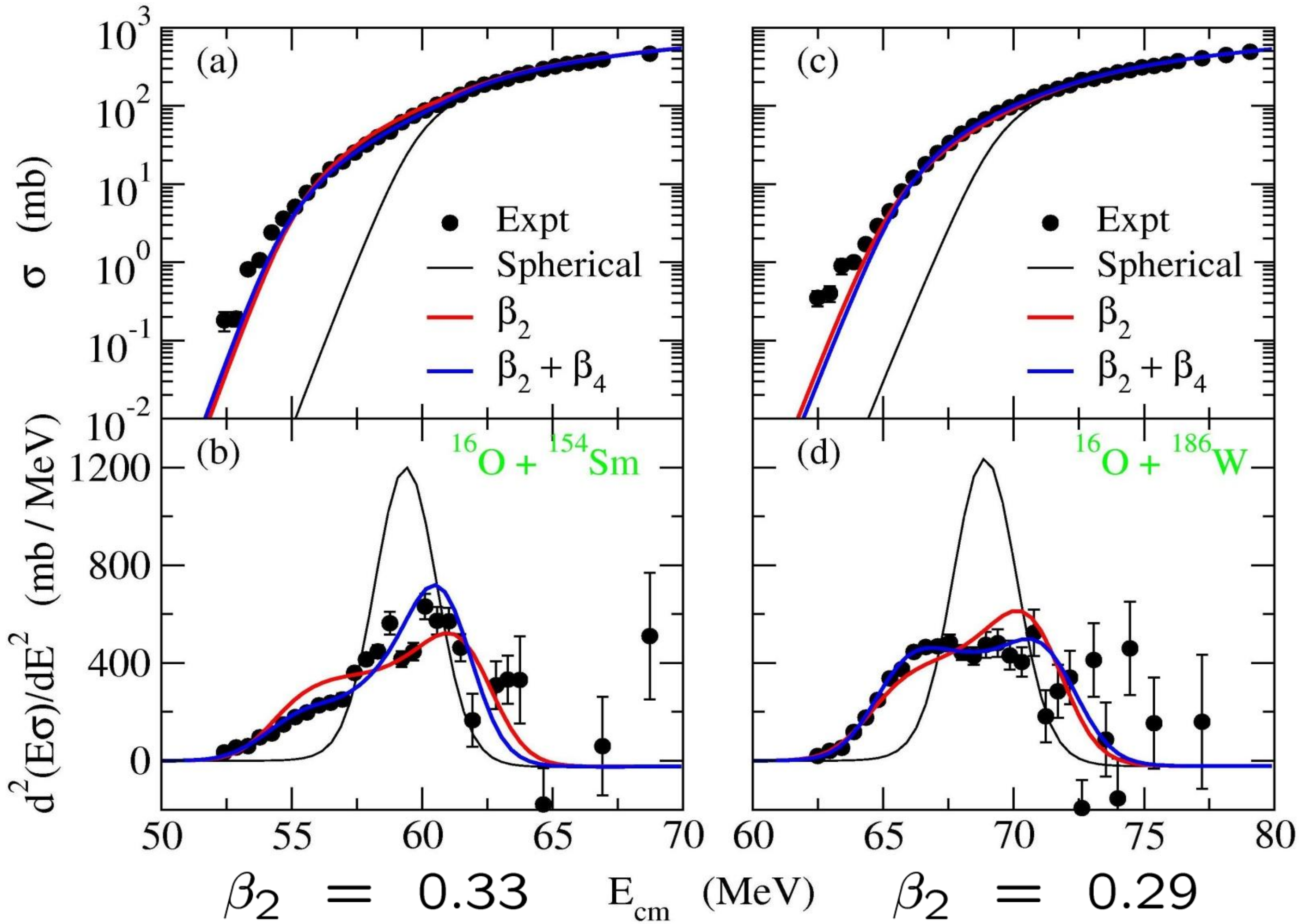
原子核の形

$$R(\theta) = R_0(1 + \beta_2 Y_{20}(\theta) + \beta_4 Y_{40}(\theta) + \cdots)$$

$$R_0 = 5.9 \text{ (fm)}, \quad \beta_2 = 0.3$$



$\beta_4 = 0$ $\quad$ $\beta_4 = 0.1$ $\quad$ $\beta_4 = -0.1$



$\beta_2 = 0.33$ $\beta_2 = 0.29$

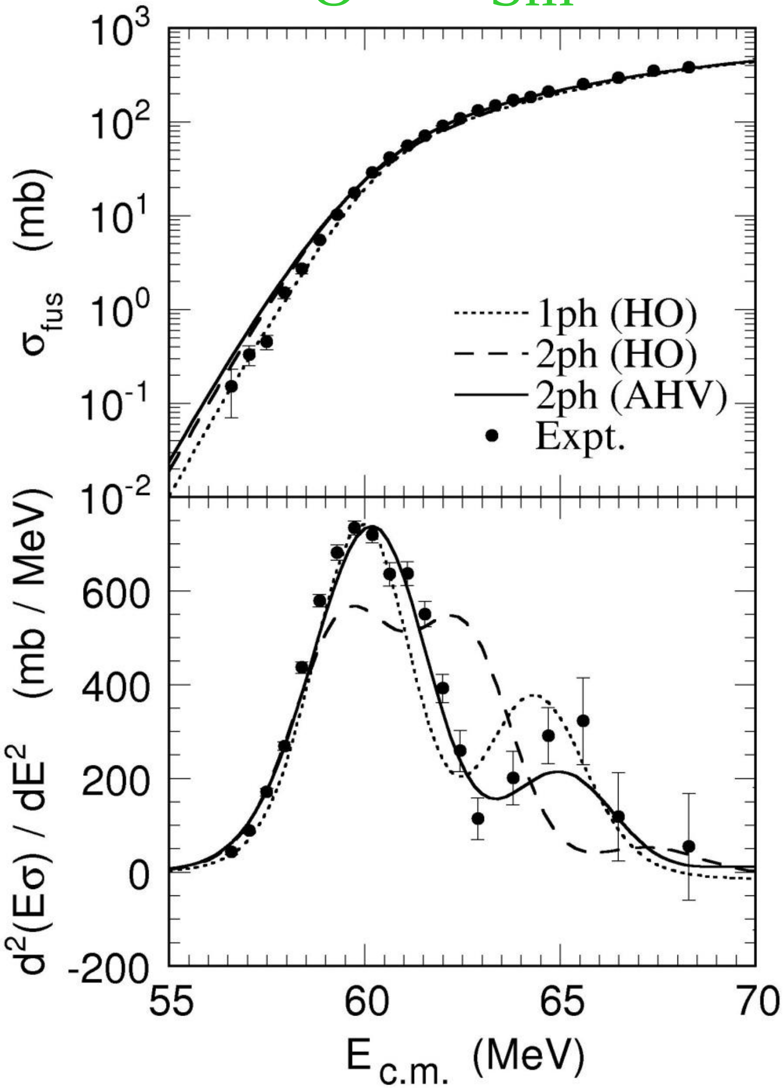
$\beta_4 = +0.05$ $\beta_4 = -0.03$

障壁分布をとることによって、β_4による違いがかなりはっきりと目に見える！

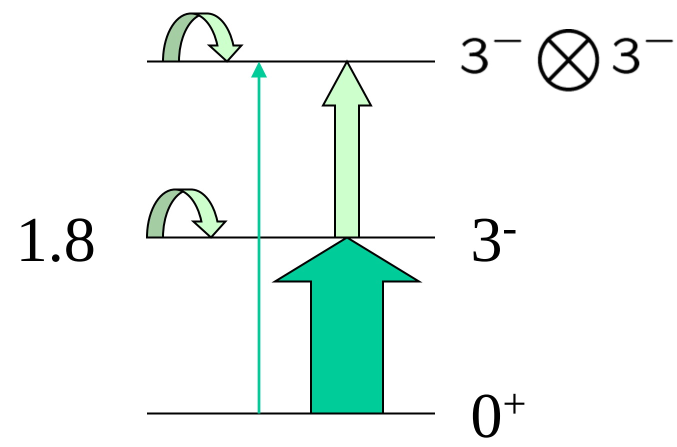
→ 原子核に対する量子トンネル顕微鏡としての核融合反応

球形振動核の例

$^{16}O + ^{144}Sm$



K.Hagino, N. Takigawa, and S. Kuyucak, PRL79('97)2943

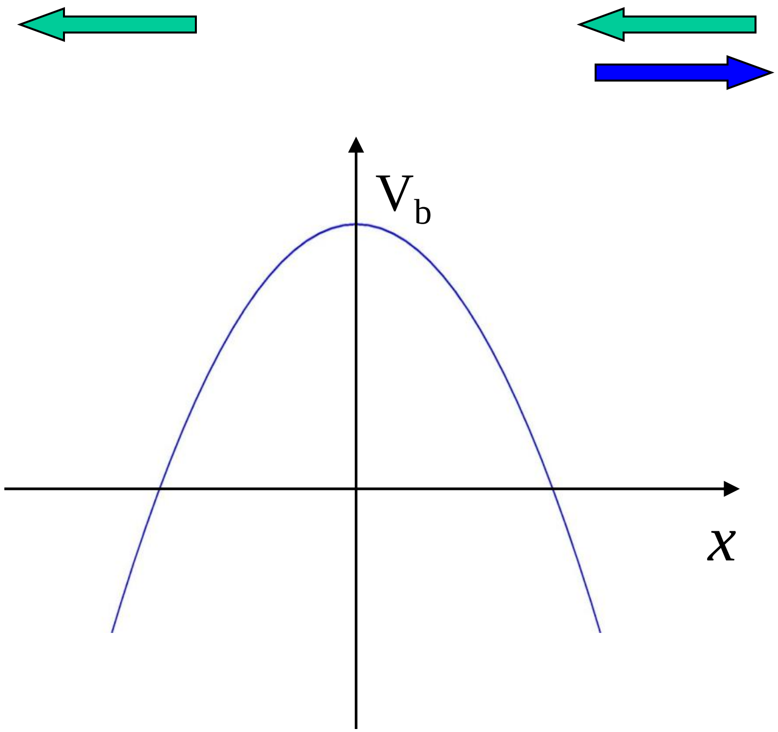


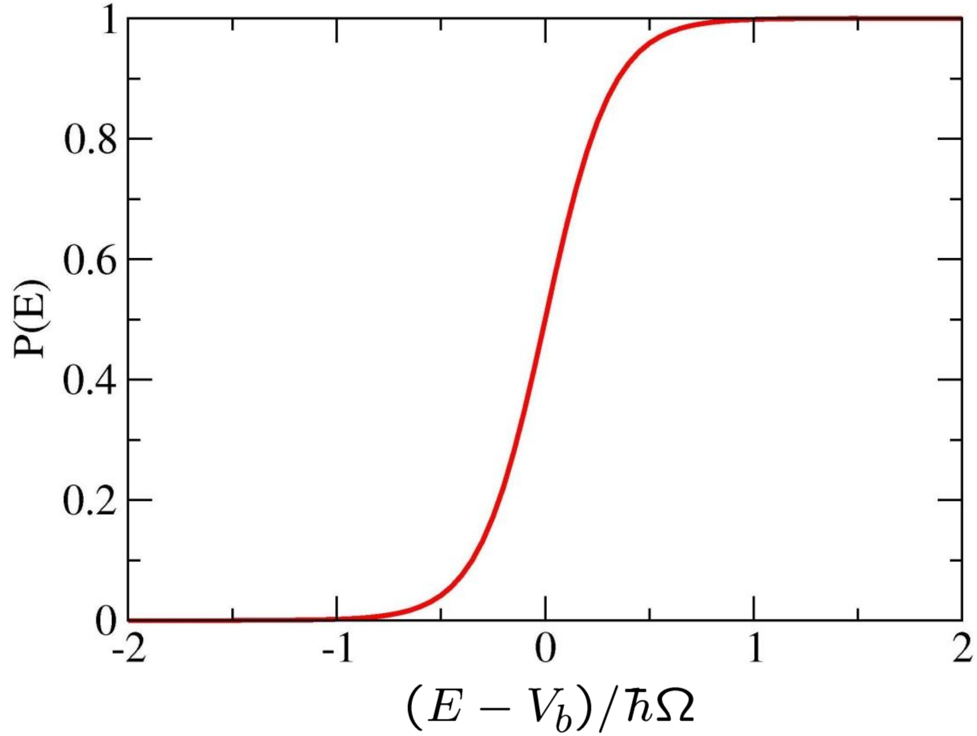
^{144}Sm

Quadrupole moment:

$$Q(3^-) = -0.70 \pm 0.02\text{b}$$

量子反射と重イオン準弾性散乱



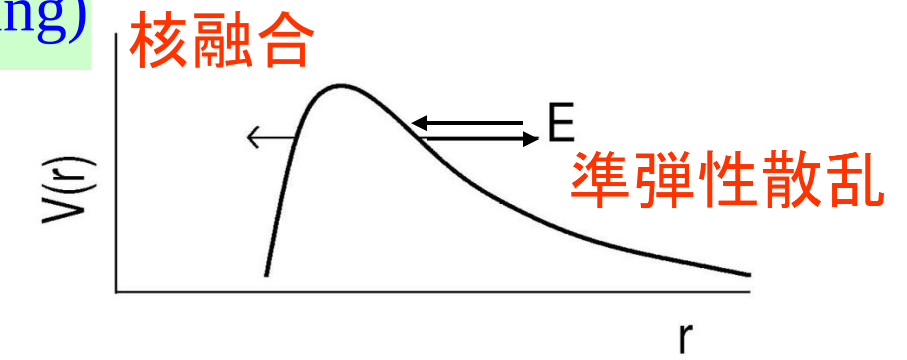


量子力学では $E > V_b$ でも反射が起こる ⟶ 量子反射

$$P(E) + R(E) = 1$$

反射確率は透過確率と同じ情報を持ち、反射確率を用いて障壁分布を定義することも可能

準弾性散乱 (Quasi-Elastic Scattering)

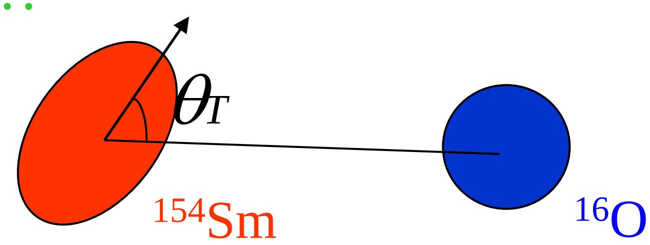


核融合反応を除く全てのプロセスの和(弾性散乱＋非弾性散乱＋核子移行反応＋.......)

クーロン障壁で跳ね返り検出器に入ってきた粒子を全てつかまえる

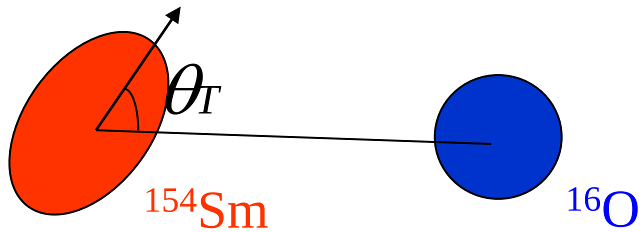
反射確率に関係する

変形核では......



$$\begin{cases} \sigma_{\text{fus}}(E) = \displaystyle\int_0^1 d(\cos\theta_T)\,\sigma_{\text{fus}}(E;\theta_T) \\ \sigma_{\text{qel}}(E,\theta) = \displaystyle\sum_I \sigma(E,\theta) = \int_0^1 d(\cos\theta_T)\,\sigma_{\text{el}}(E,\theta;\theta_T) \end{cases}$$

準弾性散乱障壁分布



$$\sigma_{\rm fus}(E)=\int_0^1 d(\cos\theta_T)\sigma_{\rm fus}(E;\theta_T)$$

$$D_{\rm fus}(E)=\frac{d^2(E\sigma_{\rm fus})}{dE^2}$$

$$\sigma_{\rm qel}(E,\theta)=\sum_I\sigma(E,\theta)=\int_0^1 d(\cos\theta_T)\sigma_{\rm el}(E,\theta;\theta_T)$$

準弾性散乱障壁分布:

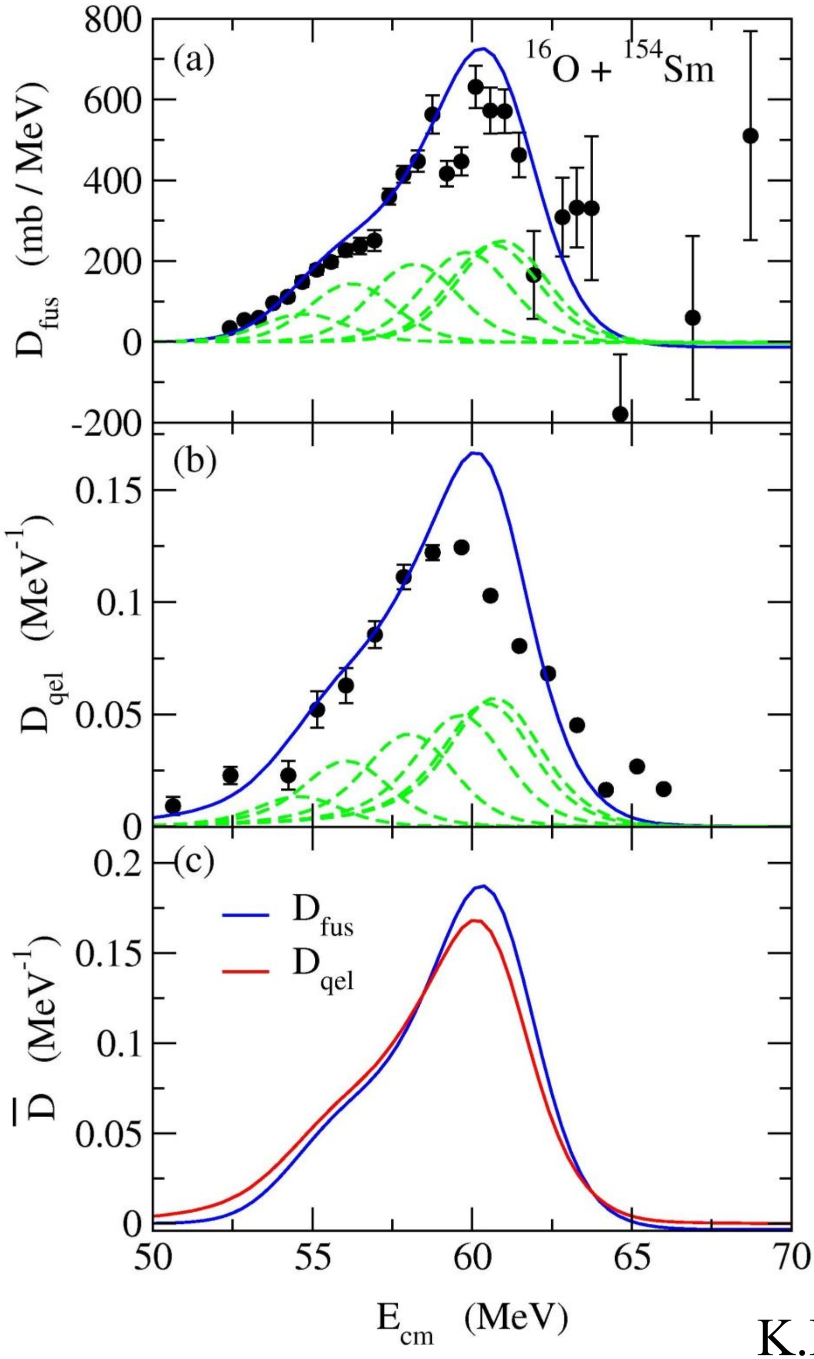
$$\boxed{D_{\rm qel}(E)=-\frac{d}{dE}\left(\frac{\sigma_{\rm qel}(E,\pi)}{\sigma_R(E,\pi)}\right)}$$

H. Timmers et al., NPA584('95)190

(note) クーロン力が強い場合の古典的弾性散乱の断面積:

$$\sigma_{\rm el}^{cl}(E,\pi)=\sigma_R(E,\pi)\theta(V_b-E)$$

$$\frac{\sigma_{\rm el}^{cl}(E,\pi)}{\sigma_R(E,\pi)}=\theta(V_b-E)=R(E)$$



核融合障壁分布

$$D_{\text{fus}}(E) = \frac{d^2(E\sigma_{\text{fus}})}{dE^2}$$

準弾性障壁分布

$$D_{\text{qel}}(E) = -\frac{d}{dE}\left(\frac{\sigma_{\text{qel}}(E,\pi)}{\sigma_R(E,\pi)}\right)$$

大まかな構造は非常に似通っている

準弾性障壁分布の利点

- 実験が楽
- 実験精度が核融合ほど要求されない（1階微分 vs 2階微分）

中性子過剰核の構造の研究に利用できるかも

K.Hagino and N. Rowley, PRC69('04)054610