RCNP研究会「格子QCD実践入門」
2004年1月14日

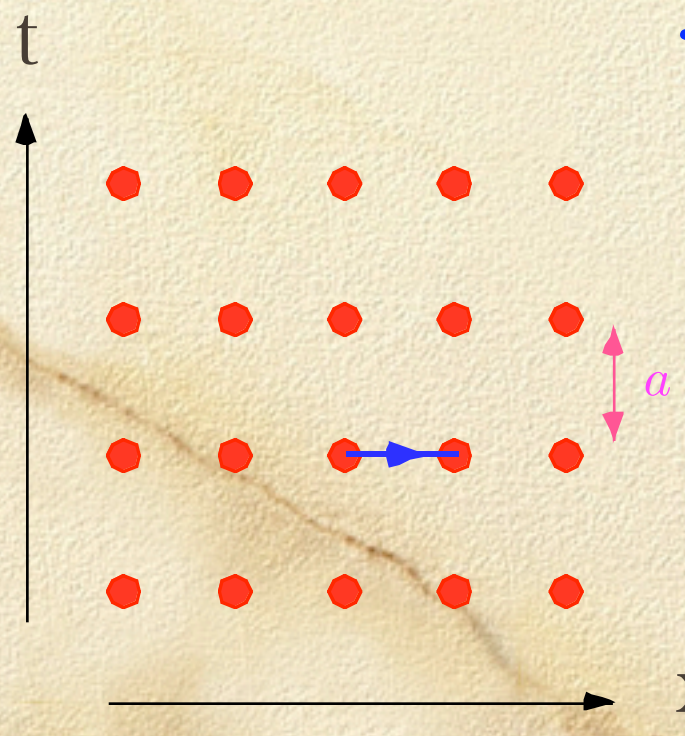
格子QCD実践入門 1

格子QCDとモンテカルロ法

格子ゲージ理論

- ユークリッド連続空間を格子で区切って捉える

$$S_G(U) = \frac{6}{g^2} \sum_s \sum_{\mu<\nu} \left\{ 1 - \frac{1}{3} \mathrm{ReTr} U_{\mu\nu}(s) \right\}$$



$$U_{\mu\nu}(s) = U_\mu(s) U_\nu(s+\hat{\mu}) U_\mu^\dagger(s+\hat{\nu}) U_\nu^\dagger(s)$$

漸近的自由性：

$$a \to 0 \Longleftrightarrow g \to 0$$

格子間隔　　ゲージ結合定数

超大次元での積分

- モンテカルロ積分（重要サンプリング法）

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \int DU \; \mathcal{O} \; e^{-S(U)}$$

exp(-S(U))を重みとした期待値

配位{U}をexp(-S(U))に比例した確率で生成

➪ “熱平衡”に達した配位

$$\langle \mathcal{O} \rangle \simeq \frac{1}{N} \sum_{k}^{N} \mathcal{O}(U^{(k)})$$

マルコフ連鎖

- ゲージ配位{U}を順次発生させるために
  - 現世代のゲージ配位{U}から次世代のゲージ配位{U'}を発生させる。U→U'
  - 与えられたゲージ配位{U'} を得られる確率が前世代にのみ依存して、それ以前の経歴には依存しない。
- 遷移確率P(U→U')によって記述される。

遷移確率

- マルコフ連鎖U→U'の遷移確率を $P(U \to U')$ とする。

$$1 \geq P(U \to U') \geq 0, \quad \sum_{U'} P(U \to U') = 1$$

- マルコフ連鎖上の配位{U}から得られる次世代の配位の全確率分布は

$$\tilde{\rho}(U') = \sum_{U} P(U \to U')\rho(U)$$

定常確率分布

- “平衡”(定常確率)に達したとき　$\rho_{\rm eq}(U) \propto e^{-S(U)}$

$$\rho_{\rm eq}(U') = \sum_U P(U \to U') \rho_{\rm eq}(U)$$

- 微細平衡条件は上記を満足する(十分条件)

$$P(U \to U') \rho_{\rm eq}(U) = P(U' \to U) \rho_{\rm eq}(U')$$

⇨⇨　メトロポリス法

マルコフ過程によって定常確率分布に近づく

(証明)

$$\tilde{\rho}(U') = \sum_U P(U \to U')\rho(U) \qquad D_{\rm old} \equiv \sum_U |\rho(U) - \rho_{\rm eq}(U)|$$

$$D_{\rm new} \equiv \sum_{U'} |\tilde{\rho}(U') - \rho_{\rm eq}(U')|$$

$$= \sum_{U'} |\sum_U P(U \to U')\rho(U) - \sum_U P(U \to U')\rho_{\rm eq}(U)|$$

$$\leq \sum_U \sum_{U'} P(U \to U')|\rho(U) - \rho_{\rm eq}(U)|$$

$$= D_{\rm old}$$

前世代より次世代の確率分布は定常確率分布に近い

メトロポリス法

- 微細平衡条件を課す

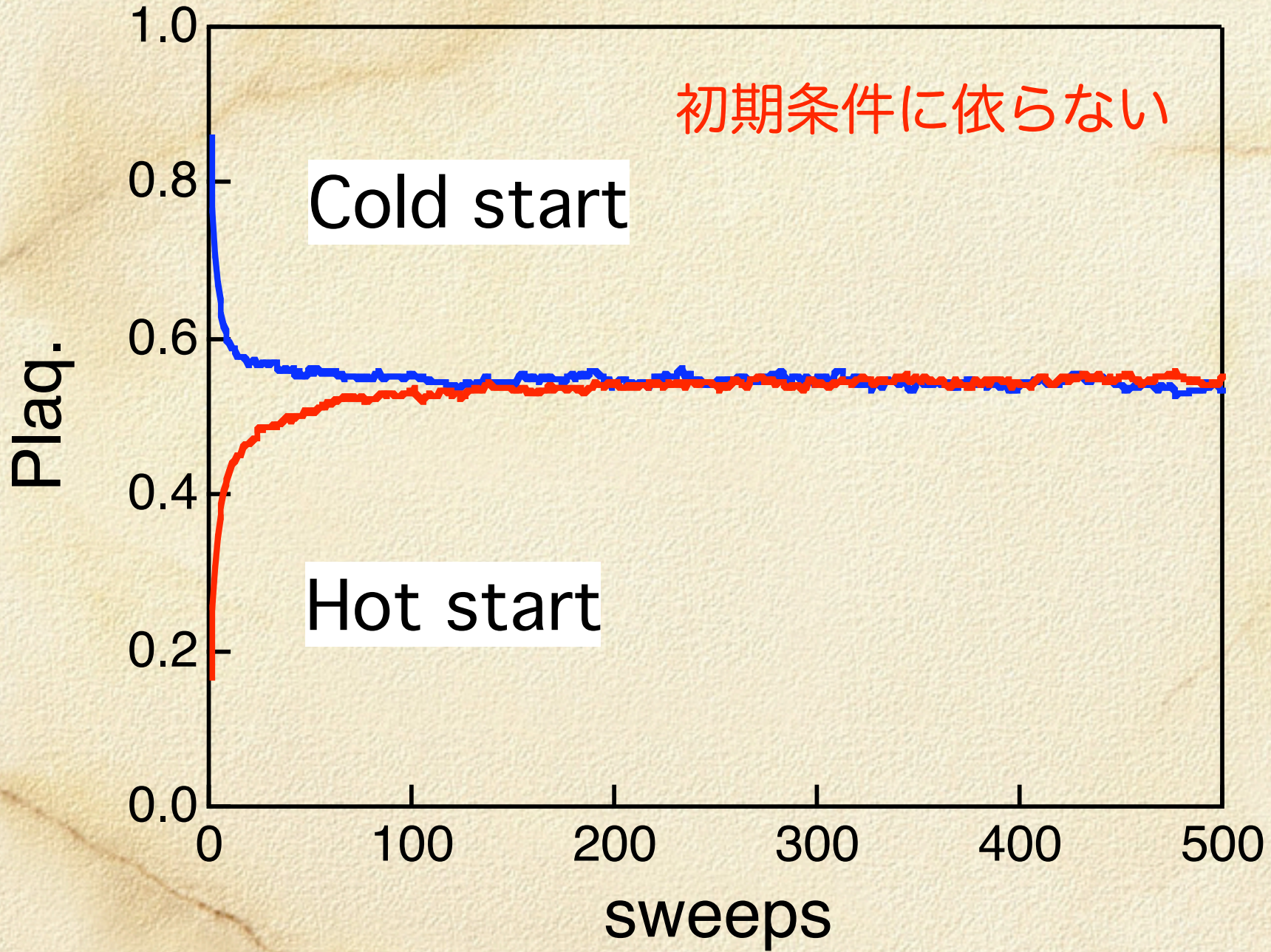
$$P(U \to U')e^{-S(U)} = P(U' \to U)e^{-S(U')}$$

- アルゴリズム

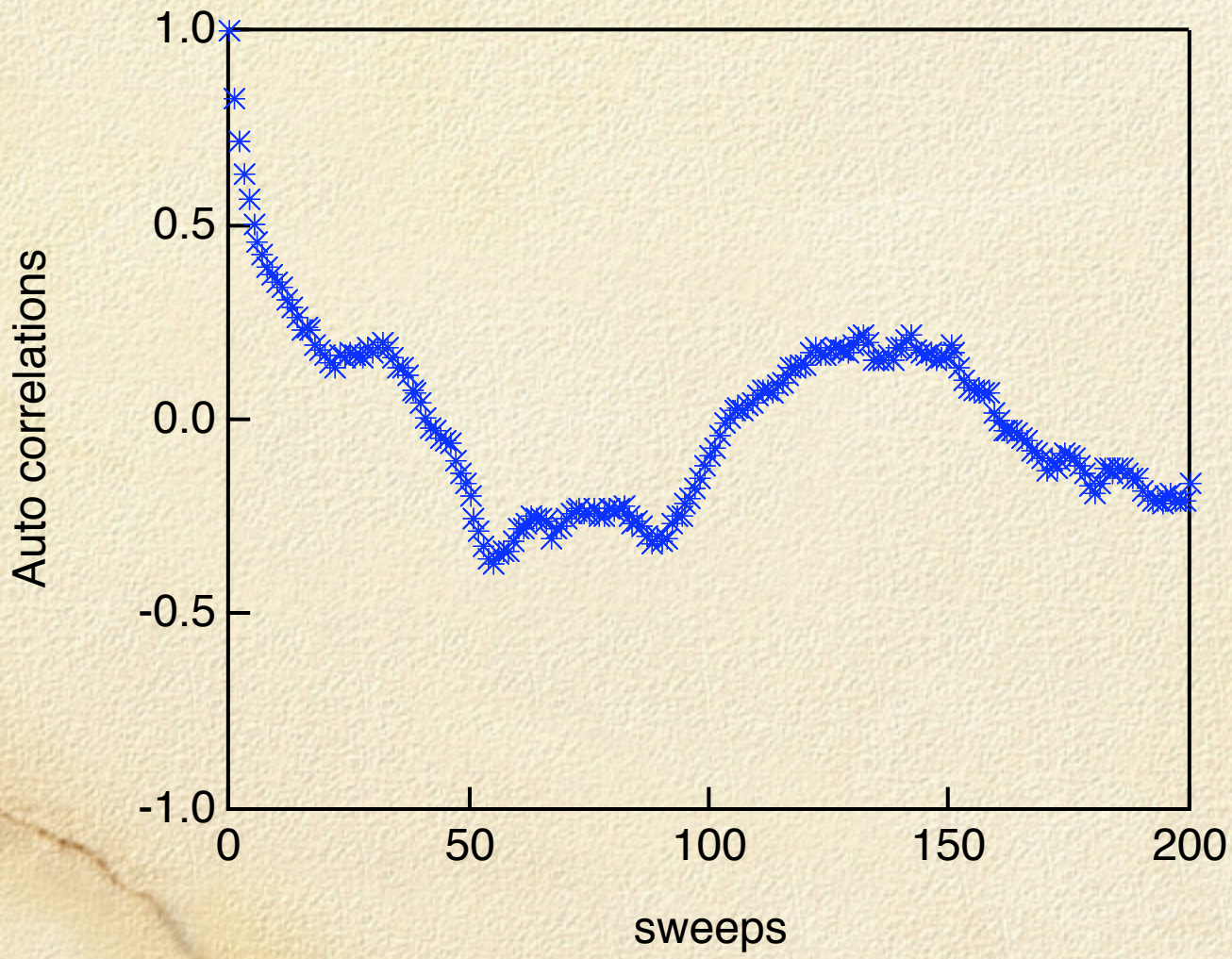
1. 配位{U}を元にランダムな手続きで新しい配位{U'}を選び出す。
2. ΔS=S(U)-S(U')を計算。
3. [0,1]に一様に分布した乱数Rを発生。
   - もし R < exp(ΔS) ならば ➔ 新しい配位を採用
   - もし R > exp(ΔS) ならば ➔ 新しい配位を棄却
4. 繰り返す

実習課題１

- “熱平衡”に達したゲージ配位を生成せよ。
  - 格子サイズ：４x４x４x16
  - ゲージ結合定数：β=5.65


初期条件に依らない
Cold start
Hot start
Plaq.
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0
100
200
300
400
500
sweeps

参考文献

- “Quarks, gluons and lattices”,
  M. Creutz (Cambridge)
- “Lattice gauge thoeries - An introduction”,
  H. J. Rothe (World Scientific)
- “Quantum fields on a lattice”,
  I. Montvay and G. Münster (Cambridge)

Auto correlation