

博士論文要旨

Full tree-level improvement of the lattice gradient flow in pure Yang-Mills theory
ヤン-ミルズ勾配流の格子計算において生じるツリーレベル離散化誤差の全次数改良

Department of Physics, Tohoku University

Nuclear Theory Group

B5SD2005 鎌田 紀彦

格子 QCD、強い相互作用を記述する量子色力学 (QCD) を有限体積かつ有限格子間隔 a の格子上に表現するこの手法は、モンテカルロ法による数値計算と結びつくことによって第一原理からハドロンの質量スペクトルを再現するまでに至った。現在では理論による実験物理の最先端としての立場を確固たるものとしている格子 QCD であるが、未だ解決すべき問題は残されている。このような未解決問題の代表例としてリファレンススケールに起因する精度問題、そして格子上におけるエネルギー運動量テンソル (EMT) の定義の非自明さが挙げられる。これらの問題の概要は次のようにまとめられる。

<リファレンススケール>

数値計算によるアウトプットは一般に無次元量であり、格子 QCD においても例外ではない。格子 QCD で得られたアウトプットを物理次元に換算するためには、まずリファレンススケールと呼ばれる基準を格子計算で定める必要がある。リファレンススケールに含まれる系統誤差は全ての格子計算の結果に伝搬するため、何をリファレンススケールとするかは格子 QCD における中心問題の一つである。多くの格子計算ではリファレンススケールとしてヘビークォーク間のポテンシャルによって定義される「ゾンマースケール」と呼ばれる量を選択している。しかし、格子 QCD でゾンマースケールを計算する際には一種の極限操作が必要となり、この極限操作によって無視できない系統誤差が生まれてしまう。そのためゾンマースケールに代わる、極限操作を必要としない新たなリファレンススケールが求められている。

<格子上のエネルギー運動量テンソル (EMT)>

EMT は場の量子論における基本的な観測量の一つであるが、格子場ではポアンカレ対称性が陽に破れてしまうために EMT の構成法は非常に非自明である。EMT 演算子の欠落は格子 QCD による解析に大きな制限を課すことに繋がる。例えばハドロンの内部構造を第一原理から解明することは格子 QCD の重要な使命の一つであるが、この解析には格子上での EMT 演算子が必要不可欠である。このような理由から連続時空の対称性に付随する EMT を離散的な格子上で定義するという矛盾に多くの人々が挑戦してきたが、その結果は死屍累々であった。

以上の例はいずれも格子 QCD における重大な問題であったが、「ヤン-ミルズ勾配流」の登場により飛躍的な進展が得られている。ヤン-ミルズ勾配流とは四次元のゲージ場 $A_\mu(x)$ を仮想次元 t 方向に拡散させる一種の拡散方程式である。拡散によって得られる五次元のゲージ場 $A_\mu(x, t)$ で構成された任意の相関関数は、波動関数繰り込みを経ることなく紫外発散に対して有限 (UV 有限) となることが証明されている。この UV 有限という特異な性質により、五次元上のエネルギー密度 $E(x, t)$ を用いて極限操作を必要としないリファレンススケールを設定できることや、格子上に EMT 演算子を定義できることが明らかとなった。

しかし、ここで新たに「ヤン-ミルズ勾配流の格子計算において生じる離散化誤差」という問題が生じてしまった。格子 QCD では連続理論を有限体積かつ有限格子間隔 a の格子で近似するため、連続理論との隔たりである「離散化誤差」が生じる。そのため、格子計算から連続理論を抜き出すためには連続極限 ($a \rightarrow 0$) を取らねばならない。この連続極限を精密に行うには離散化誤差の抑制が本質的に重要となる。しかし、通常の四次元の理論における離散化誤差の抑制法は良く知られているが、ヤン-ミルズ勾配流で拡散された五次元上の演算子に対する離散化誤差の抑制法は未だ確立されていない。新たなリファレンススケールの制定および格子 EMT 演算子を用いた物理量計算のプラクティカルな実現のために、五次元上の演算子に対応した離散化誤差、特にその大部分を占めるツリーレベルから生じる離散化誤差の抑制法の確立は急務である。

このような背景から本博士論文では、Fodor *et al.* [arXiv:1406.0827] による、 $SU(3)$ 純ヤン-ミルズ理論における五次元上のエネルギー密度の期待値 $\langle E(t) \rangle$ に含まれるツリーレベル離散化誤差の解析結果を応用し、 $\langle E(t) \rangle$ に含まれるツリーレベル離散化誤差を完全に抑制する手法「Full tree-level improvement method」を考案した。また、実際に Full tree-level improvement method を格子 QCD で計算した $\langle E(t) \rangle$ に適用することで、我々の抑制法が極めて有効であることを示した (図 1 参考)。そして、Full tree-level improvement method の下、極限操作を必要としない新たなリファレンススケールとして $t^2 \langle E(t) \rangle = 0.11$ という方程式を満たす解である $\sqrt{t_{0.11}}$ が有力候補であることを示した。

Full tree-level improvement method が適用できる演算子は $\langle E(t) \rangle$ に留まらない。我々は Fodor *et al.* によるツリーレベル離散化誤差の評価を格子 EMT 演算子の一点関数で表現されるエントロピー密度とトレースアノマリーという二つの熱力学量に拡張した。その結果、ツリーレベル離散化誤差はトレースアノマリーに対してはサブパーセント程度であるのに対し、エントロピー密度においては約 10% もの影響があることを定量的に示した。そして、Full tree-level improvement method を適用することにより、ツリーレベル離散化誤差の影響が大きいエントロピー密度の計算結果に有意な改善が得られることを示した。

本博士論文の対象は $SU(3)$ 純ヤン-ミルズ理論におけるツリーレベル離散化誤差の抑制に限っている。しかし、フェルミオンを含むケースのツリーレベル離散化誤差を評価することで、Full tree-level improvement method は QCD に適用可能となる。また量子効果に起因する離散化誤差を摂動計算で評価することにより、摂動の次数に対応した量子効果に起因する離散化誤差を完全に抑制する手法へと拡張可能である。

ヤン-ミルズ勾配流の格子 QCD に対する応用は未だ黎明期であり、格子 EMT 演算子の適用例も数種類の熱力学量に留まっている。精密な QCD リファレンススケールの設定や格子 EMT 演算子を用いたハドロン内部構造の解明、これらはヤン-ミルズ勾配流の応用により始めて可能となるが、格子計算である以上、離散化誤差の影響から逃れることは出来ない。そのため、我々の考案した Full tree-level improvement method という枠組みは、今後行われる全てのヤン-ミルズ勾配流の格子計算において本質的な役割を果たすであろう。

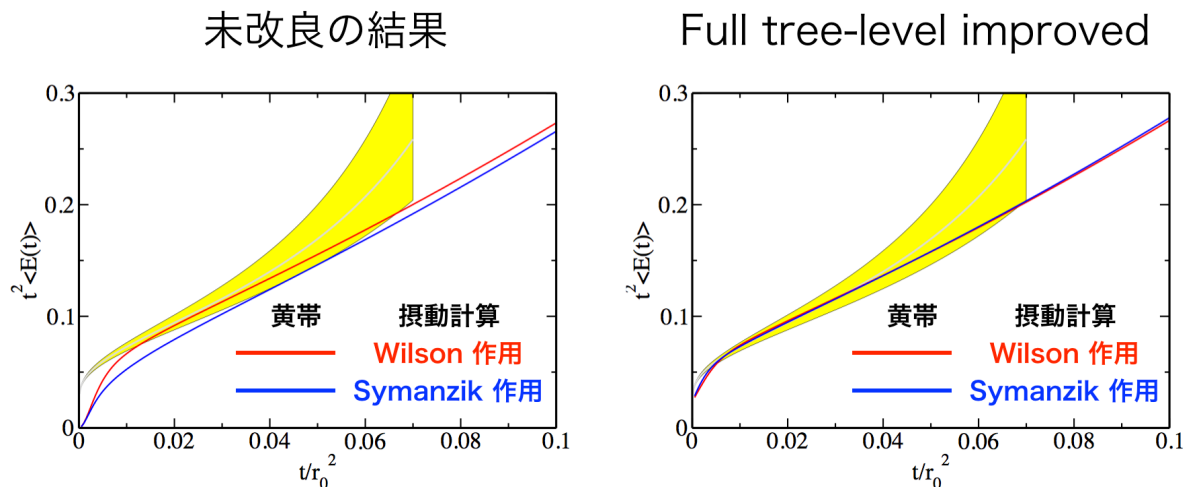


図 1: Full tree-level improvement method の適用例。左図が未改良、そして右図が Full tree-level improvement method を適用した結果である。各図の縦軸は五次元上のエネルギー密度の期待値、横軸はヤン-ミルズ勾配流による拡散の度合いに対応する。赤線 (Wilson 作用) と青線 (Symanzik 作用) は異なる離散化誤差を持った格子計算の結果であるが、改良を施すことによって両者は一致する。ここで黄帯は Lüscher によって計算された 1 ループ摂動計算の結果である。UV 有限という性質により摂動論で格子計算の予測が可能となり、ツリーレベル改良を施すことで格子計算と摂動計算の結果は完全に重なることが分かる。

代表論文

[1] N. Kamata and S. Sasaki, Phys. Rev. D **95** (2017) no.5, 054501 [arXiv:1609.07115 [hep-lat]].